TERCERA EDICIÓN

SWOKOWSKI

COLE

ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA

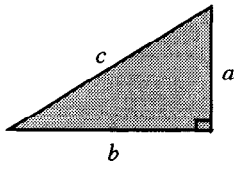
con Geometría Analítica

Grupo Editorial Iberoamérica
S.A. de C.V.

GEOMETRÍA – FÓRMULAS

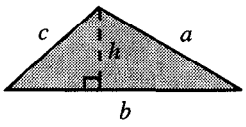
área (de figura): A **perímetro:** P, C **volumen:** V **área de superficie (de cuerpo):** S **altura:** h **radio:** r

TRIÁNGULO RECTÁNGULO



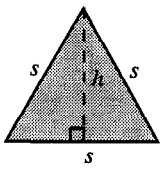
Teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$

TRIÁNGULO (CUALQUIERA)



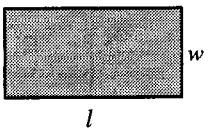
$A = \frac{1}{2}bh \qquad C = a + b + c$

TRIÁNGULO EQUILÁTERO



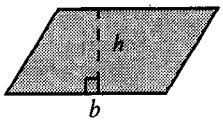
$h = \frac{\sqrt{3}}{2}s \qquad A = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$

RECTÁNGULO



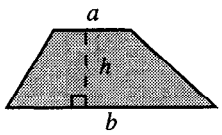
$A = lw \qquad C = 2l + 2w$

PARALELOGRAMO



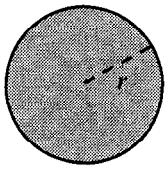
$A = bh$

TRAPECIO



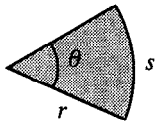
$A = \frac{1}{2}(a + b)h$

CÍRCULO



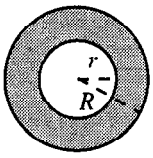
$A = \pi r^2 \qquad C = 2\pi r$

SECTOR CIRCULAR



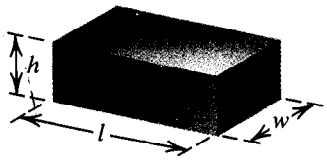
$A = \frac{1}{2}r^2\theta \qquad s = r\theta$

ANILLO CIRCULAR



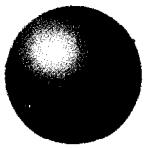
$A = \pi(R^2 - r^2)$

PRISMA RECTANGULAR



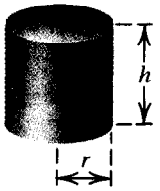
$V = lwh \qquad S = 2(hl + lw + hw)$

ESFERA



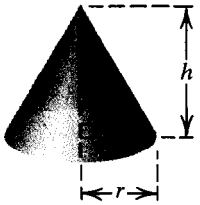
$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad S = 4\pi r^2$

CILINDRO (CIRCULAR RECTO)



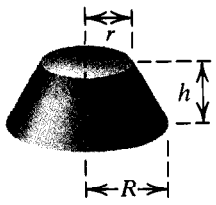
$V = \pi r^2 h \qquad S = 2\pi rh$

CONO (CIRCULAR RECTO)



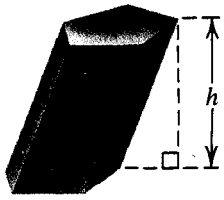
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$

CONO TRUNCADO



$V = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + rR + R^2)$

PRISMA OBLICUO (CUALQUIERA)

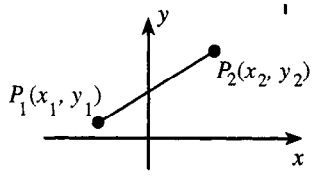


$V = Bh$, siendo B el área de la base

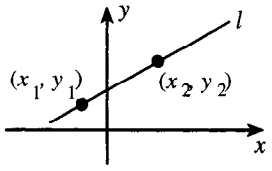
GEOMETRÍA ANALÍTICA – FÓRMULAS Y DATOS

FÓRMULA DE LA DISTANCIA

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

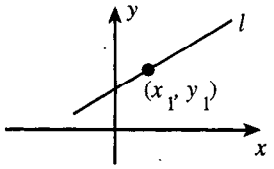


PENDIENTE m DE UNA RECTA



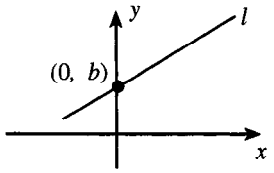
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

FORMA PUNTO– PENDIENTE DE UNA RECTA



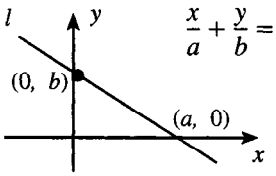
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

FORMA PENDIENTE– INTERCEPCIÓN y DE UNA RECTA



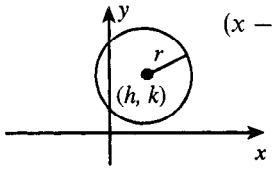
$$y = mx + b$$

FORMA DE INTERCEPCIONES x, y DE UNA RECTA



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (a \neq 0, b \neq 0)$$

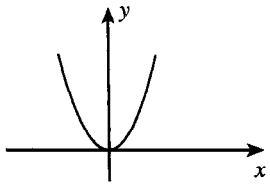
ECUACIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA



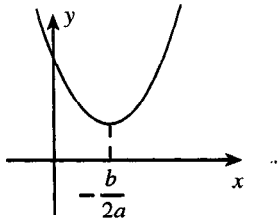
$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA (PARABÓLICA)

$y = ax^2, a > 0$



$y = ax^2 + bx + c, a > 0$



CONSTANTES MATEMÁTICAS

$\pi \approx 3.14159$
$e \approx 2.71828$

EQUIVALENCIAS DE UNIDADES

(Véase el Apéndice, A.III)

1 grado (°)	≈	0.0175 radianes (rad)
1 radián (rad)	≈	57.296 grados (°)
1 metro (m)	≈	3.2808 pies (pies, ft)
1 centímetro (cm)	≈	0.3937 pulgadas (pulg, in)
1 kilómetro (km)	≈	0.6214 millas (mi)
1 kilogramo (kg)	≈	2.2046 libras (lb)
1 litro (L)	≈	0.2642 galones (gal)
1 mililitro (mL)	≈	0.0381 onzas (oz) (líquido)
1 newton (N)	≈	0.2248 libras fuerza (lbf)
1 joule (J)	≈	0.7376 pies-libras fuerza (pies lbf, ft lbf)
1 lumen (lm)	≈	0.0015 watts (W)

ALGEBRA Y TRIGONOMETRÍA CON GEOMETRÍA ANALÍTICA

DEDICATORIA

Esta edición de *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*, la octava en inglés, está dedicada a la memoria de Earl W. Swokowski.

Expreso mi gratitud por haber tenido la oportunidad de colaborar con un gran mentor.

JEFFERY A. COLE

NOTA EDITORIAL

Earl W. Swokowski falleció el 2 de junio de 1992. Los editores de sus obras expresamos nuestra satisfacción por haber conocido y trabajado con uno de los autores más relevantes de libros sobre ciencia matemática, de los últimos veinticinco años. Extrañaremos mucho su presencia.

Earl nos dejó un rico legado de exraordinario trabajo y una tradición de excelencia educativa en matemáticas. Jeffery A. Cole colaboró con Earl en el proceso autoral de varias ediciones en esta serie de obras de Precálculo. Confiamos plenamente en su capacidad para proseguir con esa tradición de calidad didáctica incomparable.

.42
976 a

ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA CON GEOMETRÍA ANALÍTICA

TERCERA EDICIÓN

EARL W. SWOKOWSKI

JEFFERY A. COLE
Anoka-Ramsey Community College

INVENTARIOS
ESPE LATACUNGA
25/06/99
BIBLIOTECA

ESCUELA POLITECNICA
DEL EJERCITO
BIBLIOTECA ESPE-L
LATACUNGA
No0036....Fecha: 2001
Precio:.....Donación: .....

Traductor:
Ing. Virgilio González Pozo
Universidad Nacional Autónoma de México

Revisor técnico y editorial:
Ing. Francisco Paniagua Bocanegra
Universidad Nacional Autónoma de México
Comunicación educativa en ciencia matemática

S.A. de C.V.
Grupo Editorial Iberoamérica
Nebraska 199. Col. Nápoles, 03810 México, D.F. Tel. 523 09 94 Fax. 543 11 73

Versión en español de la obra ALGEBRA AND TRIGONOMETRY
WITH ANALYTIC GEOMETRY- EIGHTH EDITION
por Earl W. Swokowski y Jeffery A. Cole
Edición original en inglés publicada por PWS-KENT Publishing Company.
Copyright © 1993, en Estados Unidos de América.
ISBN 0-534-93190-1

D.R. © 1996 por Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.
Ninguna parte de este libro puede ser reproducida, archivada o transmitida
en forma alguna o mediante algún sistema, ya sea electrónico, mecánico,
de fotorreproducción, de almacenamiento en memoria o cualquier otro,
sin el previo y expreso permiso por escrito de Grupo Editorial Iberoamérica.

Editor: Nicolás Grepe
Producción: Claudia C. Martínez A./Rubén Ruiz V.
Diseño cubierta: Steven Hunt © 1992

Grupo Editorial Iberoamérica, S. A. de C. V.
Nebraska 199. Col. Nápoles
C. P. 03810 México, D. F.
Teléfono: 5 23 09 94. Fax: 5 43 11 73
e-mail: geimex@mpsnet.com.mx.
http://vitalsoft.org.org.mx/gei
Reg. CANIEM 1382
ISBN 970-625-065-4
Impreso por Panamericana Formas e Impresos S.A.
Impreso en Colombia - Printed in Colombia

CONTENIDO ABREVIADO

1	**Conceptos fundamentales del álgebra**	**3**
2	**Ecuaciones y desigualdades**	**51**
3	**Funciones y gráficas**	**117**
4	**Funciones polinomiales y racionales**	**215**
5	**Funciones exponenciales y logarítmicas**	**265**
6	**Funciones trigonométricas**	**319**
7	**Trigonometría analítica**	**409**
8	**Aplicaciones de la trigonometría**	**467**
9	**Sistemas de ecuaciones y de desigualdades**	**523**
10	**Sucesiones, series y probabilidad**	**605**
11	**Temas de geometría analítica**	**669**

APÉNDICES

A.I	**Uso de las tablas logarítmicas y trigonométricas**	**737**
A.II	**Tablas de logaritmos y funciones trigonométricas**	**748**
A.III	**Unidades de medida – El SI**	**756**
	Respuestas a ejercicios seleccionados	**759**
	Índice	**829**

CONTENIDO

1 *Conceptos fundamentales del álgebra* **3**

1.1 NÚMEROS REALES 4

1.2 EXPONENTES Y RADICALES 16

1.3 EXPRESIONES ALGEBRAICAS 26

1.4 EXPRESIONES FRACCIONARIAS 38

Ejercicios de repaso del Capítulo 1 47

2 *Ecuaciones y desigualdades* **51**

2.1 ECUACIONES 52

2.2 PROBLEMAS DE APLICACIÓN 59

2.3 ECUACIONES CUADRÁTICAS 70

2.4 NÚMEROS COMPLEJOS 82

2.5 OTROS TIPOS DE ECUACIONES 87

2.6 DESIGUALDADES 96

2.7 ALGO MÁS SOBRE DESIGUALDADES 105

Ejercicios de repaso del Capítulo 2 111

3 Funciones y gráficas **117**

3.1	SISTEMAS DE COORDENADAS RECTANGULARES	118
3.2	GRÁFICAS DE ECUACIONES	124
3.3	RECTAS	135
3.4	DEFINICIÓN DE FUNCIÓN	151
3.5	GRÁFICAS DE FUNCIONES	164
3.6	FUNCIONES CUADRÁTICAS	175
3.7	OPERACIONES CON FUNCIONES	186
3.8	FUNCIONES INVERSAS	194
3.9	VARIACIÓN	203
	Ejercicios de repaso del Capítulo 3	209

4 Funciones polinomiales y racionales **215**

4.1	GRÁFICAS DE FUNCIONES POLINOMIALES DE GRADO MAYOR QUE 2	216
4.2	PROPIEDADES DE LA DIVISIÓN	223
4.3	CEROS DE POLINOMIOS	232
4.4	CEROS COMPLEJOS Y RACIONALES DE POLINOMIOS	241
4.5	FUNCIONES RACIONALES	249
	Ejercicios de repaso del Capítulo 4	261

5 Funciones exponenciales y logarítmicas 265

5.1 FUNCIONES EXPONENCIALES 266

5.2 LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL 276

5.3 FUNCIONES LOGARÍTMICAS 285

5.4 PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS 298

5.5 ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS 305

Ejercicios de repaso del Capítulo 5 315

6 Funciones trigonométricas 319

6.1 ÁNGULOS 320

6.2 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS 329

6.3 APLICACIONES DONDE INTERVIENEN TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS 340

6.4 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO CUALQUIERA 350

6.5 GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS 360

6.6 GRÁFICAS TRIGONOMÉTRICAS GENERALIZADAS 373

6.7 OTRAS GRÁFICAS TRIGONOMÉTRICAS 386

6.8 MOVIMIENTO ARMÓNICO 396

Ejercicios de repaso del Capítulo 6 401

7 *Trigonometría analítica* **409**

7.1 **VERIFICACIÓN DE LAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS** 410

7.2 **ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS** 414

7.3 **FÓRMULAS DE ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN** 426

7.4 **FÓRMULAS PARA ÁNGULOS MÚLTIPLES** 436

7.5 **FÓRMULAS DE PRODUCTO A SUMA Y DE SUMA A PRODUCTO** 445

7.6 **FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS** 450

Ejercicios de repaso del Capítulo 7 462

8 *Aplicaciones de la Trigonometría* **467**

8.1 **LEY DE LOS SENOS** 468

8.2 **LEY DE LOS COSENOS** 478

8.3 **FORMA TRIGONOMÉTRICA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS** 486

8.4 **TEOREMA DE DE MOIVRE Y RAÍCES *n*-ÉSIMAS DE NÚMEROS COMPLEJOS** 492

8.5 **VECTORES Y CANTIDADES VECTORIALES** 496

8.6 **EL PRODUCTO ESCALAR (O PRODUCTO PUNTO)** 508

Ejercicios de repaso del Capítulo 8 517

9 Sistemas de ecuaciones y desigualdades 523

9.1 SISTEMAS DE ECUACIONES 524

9.2 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN DOS VARIABLES 533

9.3 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN MÁS DE DOS VARIABLES 540

9.4 FRACCIONES PARCIALES 554

9.5 SISTEMAS DE DESIGUALDADES 560

9.6 PROGRAMACIÓN LINEAL 567

9.7 ÁLGEBRA DE MATRICES 575

9.8 INVERSA DE UNA MATRIZ 582

9.9 DETERMINANTES 587

9.10 PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES 593

Ejercicios de repaso del Capítulo 9 601

10 Sucesiones, series y probabilidad 605

10.1 SUCESIONES INFINITAS Y NOTACIÓN DE SUMATORIA 606

10.2 SUCESIONES ARITMÉTICAS 614

10.3 SUCESIONES GEOMÉTRICAS 620

10.4 INDUCCIÓN MATEMÁTICA 629

10.5 TEOREMA DEL BINOMIO 635

10.6 PERMUTACIONES 643

10.7 PERMUTACIONES DISTINGUIBLES Y COMBINACIONES 650

10.8 PROBABILIDAD 655

Ejercicios de repaso del Capítulo 10 665

11 *Temas de geometría analítica* **669**

11.1 PARÁBOLAS 670

11.2 ELIPSES 681

11.3 HIPÉRBOLAS 693

11.4 ROTACIÓN DE EJES 704

11.5 COORDENADAS POLARES 709

11.6 ECUACIONES POLARES DE LAS CÓNICAS 719

11.7 CURVAS PLANAS Y ECUACIONES PARAMÉTRICAS 725

Ejercicios de repaso del Capítulo 11 734

Apéndices **737**

A.I USO DE LAS TABLAS LOGARÍTMICAS Y TROGONOMÉTRICAS 737

A.II TABLAS DE LOGARÍTMOS Y FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS 748

A.III UNIDADES DE MEDIDA – EL SI 756

Respuestas a ejercicios seleccionados **759**

Índice **829**

PREFACIO

Una de nuestras metas principales en la elaboración de esta edición (la octava en inglés) de ***Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica***, es ampliar la claridad de las descripciones y análisis. Nuestro deseo es capacitar al estudiante a comprender con más facilidad los conceptos presentados, pero sin sacrificar la solidez y coherencia matemáticas que han sido tan importantes para el éxito educativo de esta obra. Nos acercamos más al logro de nuestro objetivo de ayudar al estudiante, conservando a la vez el rigor matemático, al mejorar las explicaciones de los conceptos más difíciles, y presentar comentarios paso a paso en el proceso de resolución de los ejemplos.

Se ha actualizado el estudio de diversos temas a fin de incluir el empleo de calculadora con graficación. Los ejercicios y ejemplos con aplicación de tal calculadora, se encuentran en el texto en sitios donde son adecuados al tema que se expone.

Las sugerencias enviadas por examinadores de la obra y por profesores para mejorar la disposición de los temas y la redacción del texto, originaron una notable reorganización didáctica del material para esta edición, respecto de las anteriores.

CAMBIOS PARA LA PRESENTE EDICIÓN

Capítulo 1 Se amplió la descripción del concepto de valor absoluto. El tema de la notación científica se cambió a la Secc. 1.1. El teorema del binomio, que estaba antes en el Cap. 1 de la edición anterior, se trata ahora en el Cap. 10

Capítulo 2 Las fórmulas de aplicación se presentan ahora en la Secc. 2.1. La descripción del uso de los diagramas de signos para resolver desigualdades, se amplió y mejoró.

Capítulo 3 En la Secc. 3.2 aparecen por primera vez ejemplos y ejercicios en los que se utiliza la calculadora con graficación. La Secc. 3.4 presenta más destacadamente las funciones lineales. El aspecto de la ampliación o la reducción horizontales de gráficas, se agregó a la Secc. 3.5. Las funciones cuadráticas, que estaban antes en el Cap. 4, se trasladaron a la Secc. 3.6.

Capítulo 4 Se ha enfatizado más la interpretación gráfica de las relaciones entre una raíz (o cero) de un polinomio, y su multiplicidad. La descripción de las funciones racionales de la Secc. 4.5 se ha redactado de nuevo extensamente, con más orientación intuitiva.

Capítulo 5 Dos nuevos teoremas elucidan el hecho de que son biunívocas las funciones exponenciales y logarítmicas. Se considera en mayor grado el cambio de formas exponenciales a formas logarítmicas equivalentes (y viceversa), en la resolución de ecuaciones del tipo exponencial y logarítmico.

Capítulo 6 En la Secc. 6.1 se agregó la fórmula para el área de una sección circular. En la Secc. 6.2 se amplió la descripción de soluciones con calculadora que requieren funciones trigonométricas inversas. A las Seccs. 6.2 y 6.5 se agregó la verificación de identidades trigonométricas simples.

Capítulos 7 y 8 Se ha reforzado la inclusión del uso y ejercicios para calculadora en estos capítulos, y la reformulación general facilita la comprensión general de todas las secciones.

Capítulo 9 Los sistemas de desigualdades y la programación lineal se han pasado a las Seccs. 9.5 y 9.6, respectivamente. Se destaca el concepto de punto de prueba en la resolución de sistemas de desigualdades.

Capítulo 10 La inducción matemática aparece ahora en la Secc. 10.4, después de la descripción y estudio de las sucesiones. En la Secc. 10.8 se han incluido los temas de eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes.

Capítulo 11 Se incluye en este capítulo la graficación de semiparábolas, semielipses y porciones de hipérbola, así como ejercicios que tratan de las propiedades de los paraboloides y elipsoides. En la Secc. 11.7 se estudia ampliamente la orientación de curvas parametrizadas.

INNOVACIONES

Ejemplo ilustrativos Breves demostraciones del uso de definiciones, leyes y teoremas se proporcionan en forma de ejemplos de ilustración.

Ejemplos Todos los ejemplos propiamente estructurados y graduados por dificultad, son especiales para esta edición. Muchos contienen gráficas, diagramas o tablas que ayudan al estudiante a comprender los procedimientos y las soluciones.

Explicaciones paso a paso Se han agregado explicaciones detalladas a la resolución de ejemplos, a fin de que los estudiantes las sigan más facilmente.

Comprobaciones Las soluciones de algunos ejemplos se comprueban explícitamente, para recordar a los estudiantes que las soluciones obtenidas por ellos, satisfacen las condiciones de los problemas.

Ejemplos para calculadora Donde resulte apropiado, se agregan al texto ejemplos que requieren el uso de calculadora con graficación. Se indican mediante el icono respectivo, y se ilustran con una figura reproducida de la que aparece en la pantalla de una calculadora real de dicho tipo.

Ejercicios para calculadora Se incluyen en las secciones apropiadas, ejercicios especificamente elaborados para su resolución con calculadora del tipo graficador o mediante programa de computadora para graficación. Esta edición contiene más de 200 de tales ejecicios, los cuales tienen la indicación

Ejercicios de aplicación Aplicaciones específicas en los conjuntos de ejercicios, se identifican con títulos que muestran a los estudiantes cómo se relacionan los problemas a situaciones de la práctica.

Conjuntos de ejercicios Se inician con problemas de repaso o práctica, y luego se pasa a los de especial dificultad. Se incluyen muchos ejercicios ilustrados con gráficas.

Advertencias Esparcidas dentro del texto se tienen notas que alertan a los estudiantes contra equivocaciones usuales.

Diseño gráfico Cada figura ha sido trazada y rotulada de nuevo, y las gráficas se generaron por computadora, a fin de lograr mayor precisión aplicando el avance tecnológico en informática. En algunos casos se aplica otro color (además del negro) para distinguir los componentes de figuras.

Diseño del texto Todo el material del texto se rediseñó por completo para asegurar que lo expresado sea fácil de seguir, y se resaltan los conceptos más importantes. El uso del color se emplea pedagógicamente con el fin de aclarar gráficas complicadas, y ayudar en mejor forma a los estudiantes a visualizar los problemas de aplicación.

Respuestas a los ejercicios La parte de las respuestas al final del libro, proporciona la solución de la mayoría de los ejercicios de número impar, así como las respuestas para todos los ejercicios de repaso en los capítulos. Se asignó una consideración y esfuerzo considerables para hacer que esta parte sea un eficaz medio de aprendizaje del estudiante. Por ejemplo, se dan las comprobaciones de las identidades trigonométricas y de los problemas de inducción matemática. Además, se enuncian las respuestas numéricas a muchos ejercicios, en términos tanto exactos como aproximados. Asimismo se incluyen en los sitios apropiados, gráficas, demostraciones y sugerencias.

Flexibilidad Los planes de estudios de escuelas que han empleado y adoptado las ediciones anteriores de ***Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica***, corroboran la flexibilidad didáctica de este libro. Las secciones y capítulos pueden utilizarse según muchas ordenaciones, dependiendo de los objetivos y la duración de los cursos referentes a estas partes de la ciencia matemática.

AYUDAS DIDÁCTICAS PARA EL PROFESOR*

Instructor's Solutions Manual Este, *Manual de soluciones para el profesor,* contiene las respuestas de todos los ejercicios, y soluciones, razonablemente detalladas para la mayoría de ellos. Esta publicación se ha revisado extensamente para su mayor exactitud.

EXPTest Este banco de pruebas computadorizado, para equipo IBM y compatible, contiene más de 700 problemas, y 500 son nuevos para esta edición. Las preguntas son de selección múltiple, del tipo cierto-falso, y de la modalidad de extremo abierto. Los profesores pueden interaccionar con el programa, aumentando material a las preguntas existentes y originando *tests* o pruebas individuales.

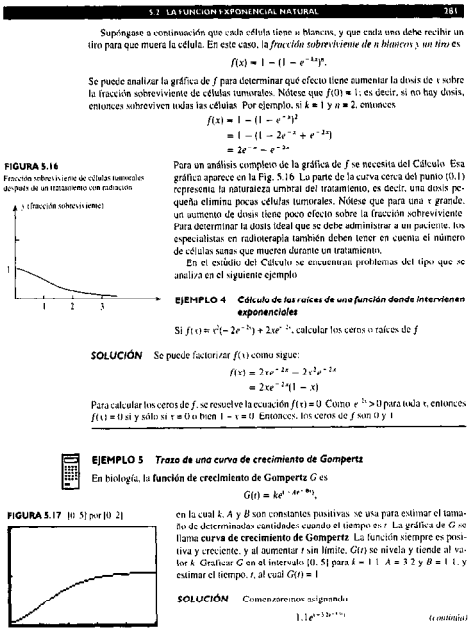
EXPTest Sampler con disco demostrador Este muestreador señala las posibilidades del banco de pruebas computadorizado, y contiene pruebas de muestra.

ExamBuilder Banco de pruebas computadorizado para equipo Macintosh; posee características y preguntas similares al las de EXPTest, antes descrito. Se dispone de un *demo*.

* Material en inglés

Muestras de la nueva presentación

Nuevos ejemplos con mejor estructura y graduación por dificultad.



5.2 LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL 381

Supóngase a continuación que cada célula tiene n blancos, y que cada uno debe recibir un tiro para que muera la célula. En este caso, la *fracción sobreviviente de n blancos y un tiro* es

$$f(x) = 1 - (1 - e^{-kx})^n.$$

Se puede analizar la gráfica de f para determinar qué efecto tiene aumentar la dosis de x sobre la fracción sobreviviente de células tumorales. Nótese que $f(0) = 1$; es decir, si no hay dosis, entonces sobreviven todas las células. Por ejemplo, si $k = 1$ y $n = 2$, entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - (1 - e^{-x})^2 \\ &= 1 - (1 - 2e^{-x} + e^{-2x}) \\ &= 2e^{-x} - e^{-2x}. \end{aligned}$$

FIGURA 5.16
Fracción sobreviviente de células tumorales después de un tratamiento con radiación

Para un análisis completo de la gráfica de f se necesita del Cálculo. Esa gráfica aparece en la Fig. 5.16. La parte de la curva cerca del punto (0,1) representa la naturaleza umbral del tratamiento, es decir, una dosis pequeña elimina pocas células tumorales. Nótese que para una x grande, un aumento de dosis tiene poco efecto sobre la fracción sobreviviente. Para determinar la dosis ideal que se debe administrar a un paciente, los especialistas en radioterapia también deben tener en cuenta el número de células sanas que mueren durante un tratamiento.

En el estudio del Cálculo se encuentran problemas del tipo que se analiza en el siguiente ejemplo

EJEMPLO 4 ***Cálculo de las raíces de una función donde intervienen exponenciales***

Si $f(x) = e^x(-2e^{-2x}) + 2xe^{-2x}$, calcular los ceros o raíces de f.

SOLUCIÓN Se puede factorizar $f(x)$ como sigue:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2xe^{-2x} - 2x^2e^{-2x} \\ &= 2xe^{-2x}(1 - x) \end{aligned}$$

Para calcular los ceros de f, se resuelve la ecuación $f(x) = 0$. Como $e^{-2x} > 0$ para toda x, entonces $f(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$ o bien $1 - x = 0$. Entonces, los ceros de f son 0 y 1.

EJEMPLO 5 ***Trazo de una curva de crecimiento de Gompertz***

En biología, la **función de crecimiento de Gompertz** G es

$$G(t) = ke^{(-Ae^{-Bt})},$$

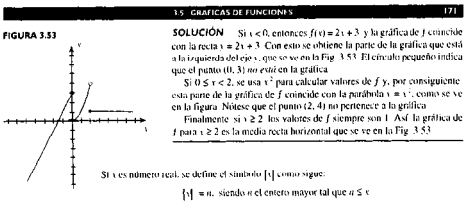
FIGURA 5.17 [0, 5] por [0, 2]

en la cual k, A y B son constantes positivas. Se usa para estimar el tamaño de determinadas cantidades cuando el tiempo es t. La gráfica de G se llama **curva de crecimiento de Gompertz**. La función siempre es positiva y creciente, y al aumentar t sin límite, $G(t)$ se nivela y tiende al valor k. Graficar G en el intervalo [0, 5] para $k = 1.1$, $A = 3.2$ y $B = 1.1$, y estimar el tiempo, t, al cual $G(t) = 1$.

SOLUCIÓN Comenzaremos asignando

$$1.1e^{(-3.2e^{-1.1x})} \qquad \textit{(continúa)}$$

Ejemplos que requieren el uso de calculadora con graficación, se presentan en temas donde resultan apropiados. Están indicados mediante un icono, y se ilustran con una figura reproducida de una pantalla de calculadora de dicho tipo.



3.5 GRAFICAS DE FUNCIONES 171

FIGURA 3.53

SOLUCIÓN Si $x < 0$, entonces $f(x) = 2x + 3$ y la gráfica de f coincide con la recta $x = 2x + 3$. Con esto se obtiene la parte de la gráfica que está a la izquierda del eje y, que se ve en la Fig. 3.53. El círculo pequeño indica que el punto (0, 3) *no está* en la gráfica.

Si $0 \le x < 2$, se usa x^2 para calcular valores de f y, por consiguiente esta parte de la gráfica de f coincide con la parábola $y = x^2$, como se ve en la figura. Nótese que el punto (2, 4) no pertenece a la gráfica.

Finalmente si $x \ge 2$ los valores de f siempre son 1. Así la gráfica de f para $x \ge 2$ es la media recta horizontal que se ve en la Fig. 3.53.

Si x es número real, se define el símbolo $\lfloor x \rfloor$ como sigue:

$$\lfloor x \rfloor = n, \text{ siendo } n \text{ el entero mayor tal que } n \le x$$

Si se identifica a $\mathbf{R}$ con los puntos de una recta numérica, entonces n es el primer entero a la *izquierda* de x, o *igual* a x.

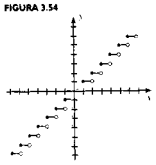
EJEMPLO ILUSTRATIVO

El símbolo $\lfloor x \rfloor$

- $\lfloor 0.5 \rfloor = 0$
- $\lfloor 1.8 \rfloor = 1$
- $\lfloor \sqrt{5} \rfloor = 2$
- $\lfloor 3 \rfloor = 3$
- $\lfloor -3 \rfloor = -3$
- $\lfloor -2.7 \rfloor = -3$
- $\lfloor -\sqrt{3} \rfloor = -2$
- $\lfloor -0.5 \rfloor = -1$

La **función mayor entero** f se define mediante $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

FIGURA 3.54



EJEMPLO 9 ***Trazo de la gráfica de la función mayor entero***

Graficar la función citada.

SOLUCIÓN A continuación se da una lista de las coordenadas de algunos puntos de la gráfica.

Valores de x	$f(x) = \lfloor x \rfloor$
⋮	⋮
$-2 \le x < -1$	-2
$-1 \le x < 0$	-1
$0 \le x < 1$	0
$1 \le x < 2$	1
$2 \le x < 3$	2

Siempre que x está entre enteros sucesivos, la parte correspondiente de la gráfica es una recta horizontal. Parte de la gráfica aparece en la Fig. 3.54. Esta gráfica continúa indefinidamente hacia la derecha y hacia la izquierda.

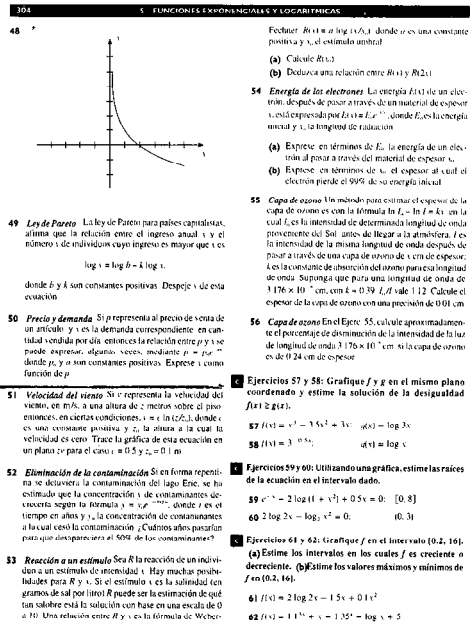
Los ejemplos ilustrativos proporcionan breves explicaciones de la aplicación de definiciones, leyes y teoremas.

Muchos ejemplos contienen gráficas, diagramas o tablas que ayudan al estudiante a comprender mejor los métodos y las soluciones.

Los conjuntos de ejercicios comienzan con problemas de repaso o práctica, y luego presentan problemas de más dificultad.

Se incluyen en muchas secciones ejercicios para utilizar calculadora con graficación, los cuales están señalados con la marca C . En la actual edición se agregan más de 200 de tales ejercicios.

Se identifican claramente los ejercicicos con problemas de aplicación, que muestran al estudiante la relación con situaciones de la vida real.



304 5 FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

48

49 **Ley de Pareto** La ley de Pareto para países capitalistas, afirma que la relación entre el ingreso anual x y el número y de individuos cuyo ingreso es mayor que x es

$$\log y = \log b - k \log x$$

donde b y k son constantes positivas. Despeje y de esta ecuación

50 **Precio y demanda** Si p representa al precio de venta de un artículo y x es la demanda correspondiente en cantidad vendida por día, entonces la relación entre p y x se puede expresar, algunas veces, mediante $p = p_0 e^{-ax}$, donde p_0 y a son constantes positivas. Exprese x como función de p.

51 **Velocidad del viento** Si v representa la velocidad del viento, en m/s, a una altura de z metros sobre el piso entonces, en ciertas condiciones, $z = c \ln(v/v_0)$, donde c es una constante positiva y v_0 la altura a la cual la velocidad es cero. Trace la gráfica de esta ecuación en un plano zv para el caso $c = 0.5$ y $v_0 = 0.1$ m.

52 **Eliminación de la contaminación** Si en forma repentina se descubriera la contaminación del lago Erie, se ha estimado que la concentración y de contaminantes decrecería según la fórmula $y = y_0 e^{-0.058t}$, donde t es el tiempo en años y y_0 la concentración de contaminantes a la cual cesó la contaminación. ¿Cuántos años pasarían para que desaparecieran el 50% de los contaminantes?

53 **Reacción a un estímulo** Sea R la reacción de un individuo a un estímulo de intensidad x. Hay muchas posibilidades para R y x. Si el estímulo x es la salinidad (en gramos de sal por litro) R puede ser la estimación de qué tan salobre está la solución con base en una escala de 0 a 10. Una relación entre R y x es la fórmula de Weber-

Fechner $R(x) = a \log(x/x_0)$, donde a es una constante positiva y x_0 el estímulo umbral.

(a) Calcule $R(x_0)$.

(b) Deduzca una relación entre $R(x)$ y $R(2x)$.

54 **Energía de los electrones** La energía $E(x)$ de un electrón, después de pasar a través de un material de espesor x, está expresada por $E(x) = E_0 e^{-kx}$, donde E_0 es la energía inicial y x, la longitud de radiación.

(a) Exprese en términos de E_0 la energía de un electrón al pasar a través del material de espesor x_0.

(b) Exprese en términos de x_0 el espesor al cual el electrón pierde el 99% de su energía inicial.

55 **Capa de ozono** Un método para estimar el espesor de la capa de ozono es con la fórmula $\ln I_0 - \ln I = kx$, en la cual I_0 es la intensidad de determinada longitud de onda proveniente del Sol antes de llegar a la atmósfera, I es la intensidad de la misma longitud de onda después de pasar a través de una capa de ozono de x cm de espesor, k es la constante de absorción del ozono para esa longitud de onda. Suponga que para una longitud de onda de $3\,176 \times 10^{-7}$ cm, con $k = 0.39$, I_0/I vale 1.12. Calcule el espesor de la capa de ozono con una precisión de 0.01 cm.

56 **Capa de ozono** En el Ejerc. 55, calcule aproximadamente el porcentaje de disminución de la intensidad de la luz de longitud de onda $3\,176 \times 10^{-7}$ cm si la capa de ozono es de 0.24 cm de espesor.

C **Ejercicios 57 y 58: Grafique f y g en el mismo plano coordenado y estime la solución de la desigualdad $f(x) \geq g(x)$.**

57 $f(x) = x^3 - 3.5x^2 + 3x$; $g(x) = \log 3x$

58 $f(x) = 3^{-0.5x}$; $g(x) = \log x$

C **Ejercicios 59 y 60: Utilizando una gráfica, estime las raíces de la ecuación en el intervalo dado.**

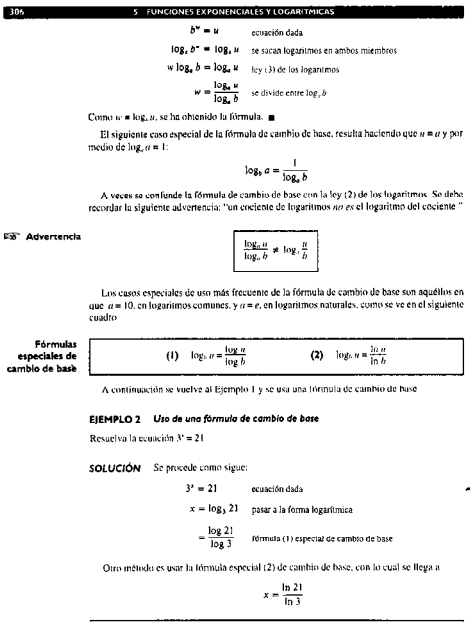
59 $e^{-x} - 2\log(1 + x^2) + 0.5x = 0$; $[0, 8]$

60 $2\log 2x - \log_2 x^2 = 0$; $(0, 3]$

C **Ejercicios 61 y 62: Grafique f en el intervalo $[0.2, 16]$. (a) Estime los intervalos en los cuales f es creciente o decreciente. (b) Estime los valores máximos y mínimos de f en $[0.2, 16]$.**

61 $f(x) = 2\log 2x - 1.5x + 0.1x^2$

62 $f(x) = 1.1^{\ln x} + \sqrt{x} - 1.35^x - \log x + 5$



306 5 FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

$b^w = u$ ecuación dada

$\log_a b^w = \log_a u$ se sacan logaritmos en ambos miembros

$w \log_a b = \log_a u$ ley (3) de los logaritmos

$w = \dfrac{\log_a u}{\log_a b}$ se divide entre $\log_a b$

Como $w = \log_b u$, se ha obtenido la fórmula. ■

El siguiente caso especial de la fórmula de cambio de base, resulta haciendo que $u = a$ y por medio de $\log_a a = 1$:

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

A veces se confunde la fórmula de cambio de base con la ley (2) de los logaritmos. Se debe recordar la siguiente advertencia: "un cociente de logaritmos *no es* el logaritmo del cociente."

☞ **Advertencia**

$$\frac{\log_a u}{\log_a b} \neq \log_a \frac{u}{b}$$

Los casos especiales de uso más frecuente de la fórmula de cambio de base son aquéllos en que $a = 10$, en logaritmos comunes, y $a = e$, en logaritmos naturales, como se ve en el siguiente cuadro.

Fórmulas especiales de cambio de base

(1) $\log_b u = \dfrac{\log u}{\log b}$ (2) $\log_b u = \dfrac{\ln u}{\ln b}$

A continuación se vuelve al Ejemplo 1 y se usa una fórmula de cambio de base.

EJEMPLO 2 ***Uso de una fórmula de cambio de base***

Resuelva la ecuación $3^x = 21$.

SOLUCIÓN Se procede como sigue:

$3^x = 21$ ecuación dada

$x = \log_3 21$ pasar a la forma logarítmica

$= \dfrac{\log 21}{\log 3}$ fórmula (1) especial de cambio de base

Otro método es usar la fórmula especial (2) de cambio de base, con lo cual se llega a

$$x = \frac{\ln 21}{\ln 3}$$

En el texto figuran distribuidas numerosas notas de advertencia acerca de errores o equivocaciones frecuentes en el estudio.

Se incluyen explicaciones paso a paso en los ejemplos, como ayuda adicional para seguir más fácilmente los procedimientos de resolución.

Test Bank, con pruebas de capítulo Todas las preguntas que aparecen en EXPTest (y en ExamBuilder), junto con sus respuestas, se tienen en forma impresa en este *Banco de pruebas.* Dos pruebas de muestra se incluyen también para cada capítulo.

Transparencias Acetatos policromáticos que proporcionan versiones ampliadas de las ilustraciones que figuran en el texto. *Este material* sólo está disponible para los adoptantes del libro.

AYUDAS DIDÁCTICAS PARA EL ESTUDIANTE*

Guía Rápida de Fórmulas Se anexa a esta edición un medio adicional útil para la más fácil resolución de ejercicios y el mejor estudio: una *Guía Rápida de Fórmulas* separada. Contiene ecuaciones, fórmulas, gráficas y datos básicos, para una inmediata consulta, que evita tener que buscar en el texto. Ello reduce el tiempo necesario para la resolución laboriosa de problemas y ejercicios, permitiendo así que el estudiante se concentre mejor en la visualización de los conceptos y principios fundamentales del curso.

Student's Solutions Manual (*Cole*) Se proporcionan aquí las soluciones para aproximadamente un tercio de los ejercicios, así como estrategias para resolver ejercicios adicionales. Se incluyen también muchas sugerencias y notas útiles.

INVESTIGATE Este paquete de *software* tutorial para texto específico –utilizable en equipos Macintosh, IBM y compatibles– ayuda al estudiante a repasar el material del libro, según sea necesario.

College Algebra: In Simplest Terms Serie de videocintas, producidas por Annenberg/CPB Collection, disponible para adoptantes calificados. Esta lúcida ayuda didáctica presenta al "álgebra de nivel universitario", en acción en la vida diaria. Símbolos, diagramas, figuras, etc., de los medios gráficos de computadora, ilustran adecuadamente las técnicas algebraicas fundamentales.

Precalculus in Context: Functioning in the Real World (*Davis/Moran/Murphy*) Este manual de laboratorio consta de 12 proyectos que animan a los estudiantes a explorar los conceptos del Precálculo. Se emplean las calculadoras con graficación, y *software* graficador, para resolver cada experimento, así como sus ejercicios correspondientes.

College Algebra Activities for the TI-81 Graphics Calculator (*Huff/Peterson*) Diseñado para complementar un curso cualquiera de álgebra de nivel universitario, este manual presenta instrucciones concisas para utilizar la calculadora con graficación TI-81, proporciona ejemplos de cómo aplicar las instrucciones, y describe técnicas para aplicar la calculadora como medio para resolver problemas. Los ejercicios dan experiencia adicional a los estudiantes.

TrueBasic for College Algebra (*Kemeny/Kurtz*) Este paquete computacional para graficación es ideal para demostraciones en clase, estudio individual y resolución de problemas.

Student Edition of Theorist Este programa, compatible con Macintosh, combina las amplias posibilidades para álgebra y graficación, con una interfaz intuitiva y amistosa para el usuario

* Material en inglés. Con excepción de la Guía Rápida de Fórmulas

RECONOCIMIENTOS Un agradecimiento especial para Gary Rockswold, de Mankato State University, por proporcionar la mayor parte del amplio surtido de nuevos problemas aplicativos, y de los ejercicios para calculadora. También deseamos agradecer a Thomas Vanden Eynden, de Thomas More College, por efectuar una comprobación detallada de la exactitud de los ejercicios; y a George Morris, de Scientific Illustrators, por la creación del paquete computacional de arte gráfico, matemáticamente preciso.

En esta edición, muchos cambios se deben a las personas siguientes, que examinaron el manuscrito. Sus comentarios acerca del aspecto pedagógico, y sus recomendaciones acerca del contenido de cursos de Precálculo, nos ayudaron a mejorar el libro:

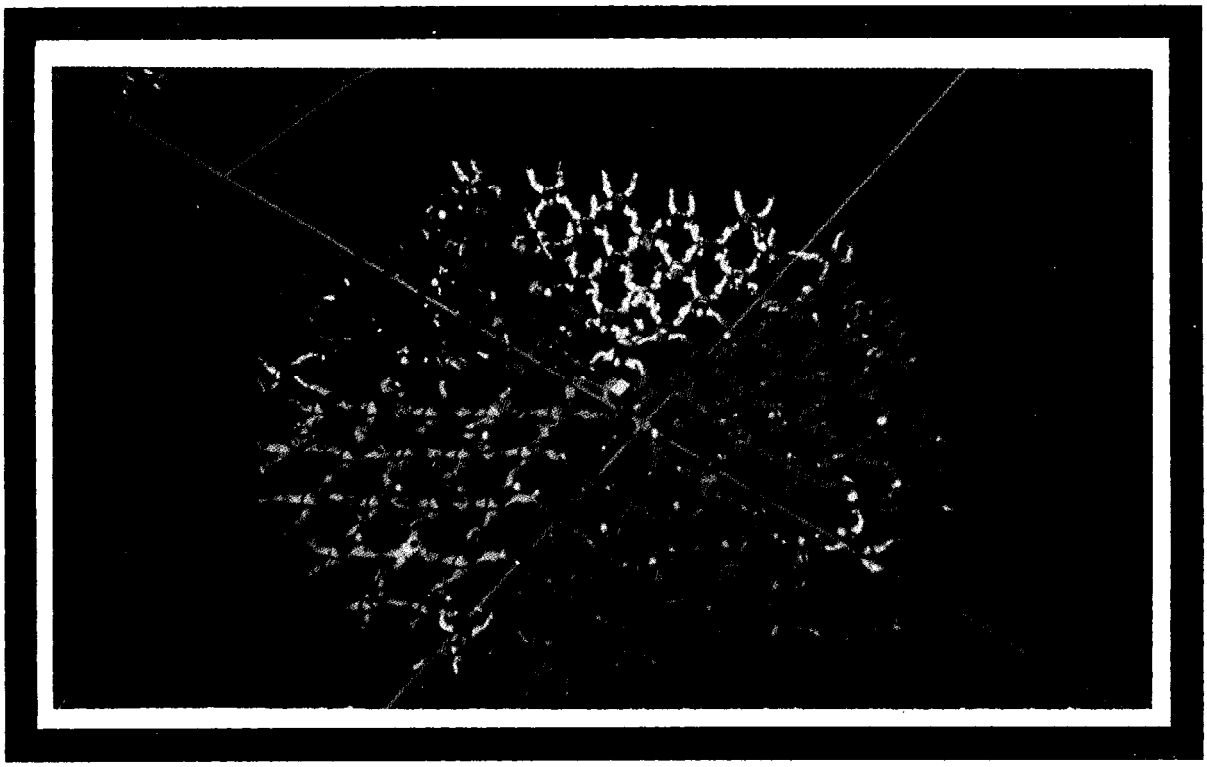
Norma M. Agras
Miami-Dade Community College, South Campus
Daniel D. Anderson
University of Iowa
Duane E. Deal
Ball State University
Marcy Diles
University of Arkansas at Little Rock
David E. Dobbs
University of Tennessee
John P. Edwards, Jr.
Anne Arundel Community College
Norman Eric Ellis
Essex Community College
Lucinda Gallagher
Florida State University
Albert A. Grasser
Oakland Community College
Sarita Gupta
Northern Illinois University
Keith Kuchar
Northern Illinois University
Nancy Long
Trinity Valley Community College
Carl C. Maneri
Wright State University
Eldon L. Miller
University of Mississippi
Roger B. Nelsen
Lewis and Clark College
Bonny J. Peters
St. Petersburg Junior College
John M. Plachy
Metropolitan State College
Richard Quint
Ventura College
Gerald E. Rubin
Marshall University
Jean E. Rubin
Purdue University
Fred Safier
City College of San Francisco
Shirley C. Sorenson
University of Maryland, College Park
Chris R. Siragusa
Cypress College
David Fred Snyder
Southwest Texas State University
Marvel D. Townsend
University of Florida
Jan Vandever
South Dakota State University
Arnold L. Villone
San Diego State University
Bruce Williamson
University of Wisconsin—River Falls
Mary Woods
University of Louisville

Agradecemos la excelente colaboración del personal editorial de PWS-KENT. Algunos merecen una mención especial. Los editores David Geggis y Tim Anderson supervisaron el proyecto y proporcionaron, en forma continua, información y asesoría. Elise Kaiser coordinó la producción del texto, y es la responsable del adecuado y grato diseño. Sally Lifland, Denise Throckmorton y Gladys Moore– todas ellas de la organización Lifland et al., Bookmakers– tuvieron especial cuidado en que no se presentaran inconsistencias, y también proporcionaron muchas sugerencias útiles.

Además de todas las personas que hemos nombrado, se expresa nuestra sincera gratitud a los muchos estudiantes y profesores que ayudaron a conformar nuestras perspectivas acerca de la *educación matemática*. Esperamos la opinión por carta de nuestros lectores, acerca de cualquier aspecto de este libro; su opinión será muy apreciada.

EARL W. SWOKOWSKI
JEFFERY A. COLE

ALGEBRA Y TRIGONOMETRÍA CON GEOMETRÍA ANALÍTICA



Los números reales son esenciales para calcular las distancias, velocidades de objetos en movimiento y magnitudes de cantidades físicas.

1.1	**NÚMEROS REALES**
1.2	**EXPONENTES Y RADICALES**
1.3	**EXPRESIONES ALGEBRAICAS**
1.4	**EXPRESIONES FRACCIONARIAS**

CAPÍTULO 1

CONCEPTOS FUNDAMENTALES DEL ÁLGEBRA

■ *La palabra* ***álgebra*** *proviene de* ***ilm al-jabr w'al muqabala,*** *título en arábigo de un libro escrito en el siglo IX por el matemático árabe al-Khwarizmi. Ese título se ha traducido como "ciencia de la restauración y la reducción", lo cual proviene de trasponer y combinar términos semejantes (de una ecuación). La transliteración latina de "al-jabr" originó el nombre de "algebra" para esta rama de las matemáticas, que pasó al español como álgebra.*

En el álgebra se utilizan símbolos o letras, como a, b, c, d, x, y, para representar números arbitrarios. Esta naturaleza general del álgebra se ve en la gran cantidad de fórmulas que se emplean en la ciencia y la industria. Al avanzar en este texto y pasar a otros más avanzados de matemáticas, o a campos en los que se usa la ciencia matemática, el lector se percatará cada vez más de la importancia y poder de las técnicas algebraicas. ■

1.1 NÚMEROS REALES

Los números reales se usan en las matemáticas, y el lector debe estar familiarizado con los símbolos que los representan, como

$$1,\quad 73,\quad -5,\quad \tfrac{49}{12},\quad \sqrt{2},\quad 0,\quad \sqrt[3]{-85},\quad 0.33333\ldots,\quad 596.25,$$

etc. Los **números enteros positivos**, o **números naturales**, son

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad \ldots.$$

Con frecuencia, los **enteros** se enuncian del siguiente modo:

$$\ldots,\quad -4,\quad -3,\quad -2,\quad -1,\quad 0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad \ldots$$

En este capítulo, las letras minúsculas, $a, b, c, x, y, \ldots$ representan cualquier número real. Si a y b representan al mismo número, se escribe $a = b$. Toda expresión de este tipo se llama **igualdad.**

Si a, b y c son enteros, y $c = ab$, entonces a y b son **factores**, o **divisores** de c. Por ejemplo, como

$$6 = 2 \cdot 3 = (-2)(-3) = 1 \cdot 6 = (-1)(-6),$$

entonces 1, – 1, 2, – 2, 3, – 3, 6 y – 6, son factores de 6.

Un entero positivo, p, distinto de 1, es **número primo** si sus factores positivos únicos son 1 y p. Los primeros números primos son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 y 19. El **Teorema Fundamental de la Aritmética** establece que todo entero positivo distinto de 1 se puede expresar como producto de primos de manera única, excepto por el orden de los factores. Algunos ejemplos son

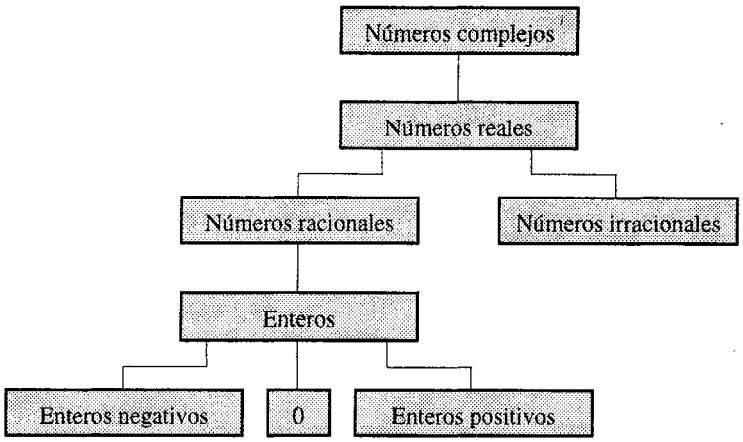
$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3, \qquad 126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7,$$
$$540 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5.$$

Un **número racional** es un número real que se puede expresar en la forma a/b, siendo a y b enteros, y $b \neq 0$. Los números reales que no son racionales se denominan **números irracionales**. Un número irracional que se encuentra con frecuencia es el de la razón o cociente del perímetro de un círculo a su diámetro, que se representa con la letra griega pi minúscula, π. A veces se emplea la notación $\pi \approx 3.1416$ para indicar que π *es aproximadamente igual a* 3.1416.

No hay un número racional, b, tal que $b^2 = 2$, donde b^2 indica $b \cdot b$. Sin embargo, hay un número irracional, representado por $\sqrt{2}$ (la **raíz cuadrada** de 2), de modo que $(\sqrt{2})^2 = 2$.

El sistema de **números reales** consiste en todos los números, racionales e irracionales. Nótese que todo entero, a, es un número racional, porque se puede expresar en la forma $a/1$. El diagrama de la Fig. 1.1 indica las relaciones entre los tipos de números que se emplean en álgebra. La línea que une dos rectángulos indica que los números citados en el rectángulo superior abarcan a los del rectángulo inferior. Los números complejos, que se estudian en el Cap. 2, contienen a todos los números reales.

FIGURA 1.1 Tipos de números que se utilizan en álgebra



Todo número real se puede expresar en forma decimal. Las representaciones decimales para los números racionales pueden ser terminantes o no terminantes y repetitivas. Por ejemplo, se puede demostrar, con el proceso aritmético de la división larga, que

$$\tfrac{5}{4} = 1.25 \qquad \text{y} \qquad \tfrac{177}{55} = 3.2181818\ldots,$$

donde los dígitos 1 y 8, en la representación de $\frac{177}{5}$ se repiten indefinidamente (lo cual, a veces, se indica con $3.2\overline{18}$). Las representaciones decimales de los números irracionales son siempre no terminantes y no repetitivas.

Los números reales son **cerrados respecto a la operación de adición**, que se indica con +; esto es, a cada par a, b de números reales, corresponde exactamente un número real, $a + b$, llamado **suma** de a y b. Los números reales son también **cerrados respecto a la operación de multiplicación**, que se indica con $\cdot$ o bien con $\times$; esto es, a cada par a, b de números reales, corresponde exactamente un número real $a \cdot b$ que también se representa mediante ab, o bien con $a \times b$, que se llama **producto** de a y b.

Las propiedades importantes de la adición y la multiplicación se presentan en la tabla siguiente:

Propiedades de los números reales

Terminología	Caso general	Significado
La adición es **conmutativa.**	$a + b = b + a$	No importa el orden al sumar dos números.
La adición es **asociativa.**	$a + (b + c) = (a + b) + c$	No importa el agrupamiento al sumar tres números.
0 es el **neutro aditivo.**	$a + 0 = a$	Al sumar 0 a todo número se obtiene el mismo número.
$-a$ es el **inverso aditivo** (o **negativo**) de a.	$a + (-a) = 0$	Al sumar un número con su negativo se obtiene 0.

(continúa)

(continuación)

Terminología	Caso general	Significado
La multiplicación es **conmutativa.**	$ab = ba$	No importa el orden cuando se multiplican dos números.
La multiplicación es **asociativa.**	$a(bc) = (ab)c$	No importa el agrupamiento cuando se multiplican tres números.
1 es el **neutro multiplicativo.**	$a \cdot 1 = a$	Al multiplicar cualquier número por 1 se obtiene el mismo número.
Si $a \neq 0, \frac{1}{a}$ es el **inverso multiplicativo** o **recíproco** de a.	$a\left(\frac{1}{a}\right) = 1$	Al multiplicar un número diferente de cero por su recíproco, se obtiene 1.
La multiplicación es **distributiva** en la adición.	$a(b + c) = ab + ac$ y $(a + b)c = ac + bc$	Multiplicar un número por una suma de dos números, equivale a multiplicar cada uno de los dos números de la suma por el primer número y a continuación sumar los productos.

Como $a + (b + c)$ y $(a + b) + c$ siempre son iguales, podemos emplear $a + b + c$ para representar este número real. Se usa abc para representar $a(bc)$, o bien, $(ab)c$. Igualmente, si se suman o multiplican cuatro números reales, o más, como a, b, c, d, se representa su suma mediante $a + b + c + d$, y su producto como $abcd$, independientemente de cómo se agrupen o intercambien esos números.

Las propiedades distributivas sirven para calcular productos de muchos tipos de expresiones donde intervienen sumas. El ejemplo que sigue presenta un caso.

EJEMPLO 1 ***Aplicación de las propiedades distributivas***

Si p, q, r y s son números reales, demostrar que

$$(p + q)(r + s) = pr + ps + qr + qs.$$

SOLUCIÓN Se aplicarán ambas propiedades distributivas:

$$\begin{aligned}
&(p + q)(r + s) \\
&\quad = p(r + s) + q(r + s) && \text{segunda propiedad distributiva con } c = r + s \\
&\quad = (pr + ps) + (qr + qs) && \text{primera propiedad distributiva} \\
&\quad = pr + ps + qr + qs && \text{se eliminan los paréntesis}
\end{aligned}$$

A continuación se enuncian las propiedades básicas de la igualdad.

Propiedades de la igualdad

Si $a = b$, y c es cualquier número real, entonces

(1) $a + c = b + c$

(2) $ac = bc$

Las propiedades (1) y (2) establecen que se puede sumar el mismo número a ambos lados o miembros de una igualdad, y que ambos lados se pueden multiplicar por el mismo número sin que se altere. Usaremos mucho estas propiedades, en el Cap. 2, como ayuda para obtener las soluciones de las ecuaciones.

El siguiente resultado se puede demostrar.

Productos en los que interviene el cero

(1) $a \cdot 0 = 0$, para todo número real a.
(2) Si $ab = 0$, entonces $a = 0$, o bien, $b = 0$.

Cuando empleamos las palabras *o bien*, como lo hicimos en (2), queremos decir que *cuando menos* uno de los dos, a o b, es cero.

Algunas propiedades de los números negativos se presentan en la siguiente tabla:

Propiedades de los números negativos

Propiedad	Ejemplo
$-(-a) = a$	$-(-3) = 3$
$(-a)b = -(ab) = a(-b)$	$(-2)3 = -(2 \cdot 3) = 2(-3)$
$(-a)(-b) = ab$	$(-2)(-3) = 2 \cdot 3$
$(-1)a = -a$	$(-1)3 = -3$

El recíproco $\frac{1}{a}$ de un número a distinto de cero se representa, con frecuencia, con a^{-1}, como se ve en la tabla siguiente:

Notación para los números recíprocos

Definición	Ejemplo
Si $a \neq 0$, entonces $a^{-1} = \frac{1}{a}$.	$2^{-1} = \frac{1}{2}$ $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{1}{(3/4)} = \frac{4}{3}$

Nótese que si $a \neq 0$, entonces

$$a \cdot a^{-1} = a\left(\frac{1}{a}\right) = 1.$$

Las operaciones de **sustracción** (–), y de **división** (÷), se definen como sigue.

Sustracción y división

Definición	Significado	Ejemplo
$a - b = a + (-b)$	Para restar un número de otro, se suma el negativo.	$3 - 7 = 3 + (-7)$
$a \div b = a \cdot \left(\frac{1}{b}\right)$ $= a \cdot b^{-1};\ b \neq 0$	Para dividir un número entre otro este último distinto de cero se multiplica el primero por el recíproco del segundo.	$3 \div 7 = 3 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)$ $= 3 \cdot 7^{-1}$

Se usa a/b, o bien, $\frac{a}{b}$ para representar $a \div b$, y a a/b se le llama **cociente de a y b**, o **fracción a sobre b**. Los números a y b son el **numerador** y el **denominador**, respectivamente, de a/b. Como 0 no tiene inverso multiplicativo, a/b no está definida si $b = 0$; esto es, *la división entre cero no está definida*. Nótese que

$$1 \div b = \frac{1}{b} b^{-1} \text{ si } b \neq 0.$$

ESCUELA POLITECNICA

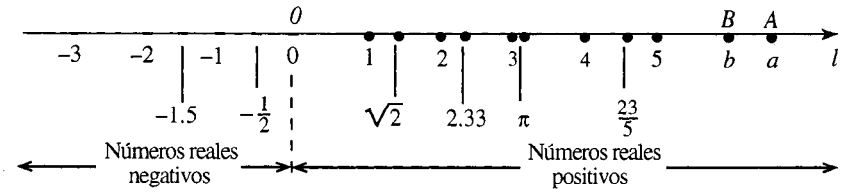
Las siguientes propiedades de los cocientes son válidas, siempre que los denominadores sean números reales distintos de cero.

Propiedades de los cocientes

Propiedad	Ejemplo
(1) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si $ad = bc$	$\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$ porque $2 \cdot 15 = 5 \cdot 6$
(2) $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$	$\frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{2}{5}$
(3) $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$	$\frac{2}{-5} = \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5}$
(4) $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$	$\frac{2}{5} + \frac{9}{5} = \frac{2+9}{5} = \frac{11}{5}$
(5) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$	$\frac{2}{5} + \frac{4}{3} = \frac{2 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{5 \cdot 3} = \frac{26}{15}$
(6) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \frac{14}{15}$
(7) $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$	$\frac{2}{5} \div \frac{7}{3} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{35}$

Los números reales se pueden representar mediante puntos en una recta l, de modo que a cada número real, a, le corresponda exactamente un punto de l, y que a cada punto P, en l, le corresponda un número real. A esto se le llama **correspondencia biunívoca**. Primero se escoge un punto arbitrario, O, llamado **origen**, y a él se relaciona el número real 0 (cero). Los puntos asociados a los enteros se determinan, entonces, trazando segmentos de recta sucesivos de igual longitud a uno y otro lado de O, como se ve en la Fig. 1.2. El punto que corresponde a un número racional, como $\frac{23}{5}$, se obtiene al subdividir los segmentos. Los puntos asociados a determinados números irracionales como, por ejemplo, $\sqrt{2}$, se pueden determinar mediante construcción geométrica (véase el Ejercicio 41).

FIGURA 1.2



El número a asociado a un punto A en l, es la **coordenada** de A. Se dice que tales coordenadas constituyen un **sistema coordenado**, y que l es un **eje coordenado**, una **línea de coordenadas**, o bien una **recta numérica real**. Se puede asignar un *sentido* (o dirección) a l expresando que el **sentido positivo** es hacia la derecha, y el sentido **negativo**, hacia la izquierda. Se indica el sentido positivo colocando una punta de flecha en l, como se ve en la Fig. 1.2.

Los números que corresponden a puntos a la derecha de O en la Fig. 1.2, son los **números reales positivos**. Los que corresponden a puntos a la izquierda de O son los **números reales negativos**. *El número real* 0 *no es positivo ni negativo.*

Nótese la diferencia entre un número real negativo y el *negativo* de un número real. En particular, el negativo de un número real, a, puede ser positivo. Por ejemplo, si a es negativo, digamos $a = -3$, entonces, el negativo de a es $-a = -(-3) = 3$, que es positivo. En general, tenemos las siguientes relaciones:

Relaciones entre a y $-a$

(1) Si a es positivo, entonces $-a$ es negativo.
(2) Si a es negativo, entonces $-a$ es positivo.

En la tabla siguiente, se definen las nociones de **mayor que**, y **menor que**, para números reales a y b. Los símbolos $>$ y $<$ son **signos de desigualdad**, y las expresiones $a > b$ y $a < b$ se llaman **desigualdades**.

Mayor que o menor que

Notación	Definición	Terminología
$a > b$	$a - b$ es positivo	a es mayor que b
$a < b$	$a - b$ es negativo	a es menor que b

Referidos a una recta coordenada, si los puntos A y B tienen las coordenadas a y b, respectivamente, entonces $a > b$ *equivale al enunciado "A está a la derecha de B"*, mientras que $a < b$ *equivale a "A está a la izquierda de B"*.

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Mayor que (>) y menor que (<)

- $5 > 3$, porque $5 - 3 = 2$ es positivo.
- $-6 < -2$, porque $-6 - (-2) = -6 + 2 = -4$ es negativo.
- $\frac{1}{3} > 0.33$, porque $\frac{1}{3} - 0.33 = \frac{1}{3} - \frac{33}{100} = \frac{1}{300}$ es positivo.
- $7 > 0$, ya que $7 - 0 = 7$ es positivo.
- $-4 < 0$, ya que $-4 - 0 = -4$ es negativo.

La siguiente ley permite comparar, u *ordenar*, dos números reales cualesquiera.

Ley de tricotomía

Si a y b son números reales, entonces sólo una de las expresiones siguientes es cierta:

$$a = b \qquad a > b, \quad \text{o bien} \quad a < b$$

Decimos que el **signo** de un número real es positivo o negativo si el número es positivo o negativo, respectivamente. Dos números reales *tienen el mismo signo* si ambos son positivos o negativos. Los números son de *signos opuestos o contrarios,* si uno es positivo y el otro negativo. Los siguientes resultados acerca de los signos de productos y cocientes de dos números reales, a y b, se pueden demostrar con las propiedades de los negativos y los cocientes.

Leyes de los signos

(1) Si a y b tienen el mismo signo, entonces ab y $\frac{a}{b}$ son positivos.

(2) Si a y b tienen signos diferentes, entonces ab y $\frac{a}{b}$ son negativos.

Las **recíprocas*** de las leyes de los signos también son ciertas. Por ejemplo, si un cociente es negativo, entonces el numerador y el denominador tienen signos opuestos.

La notación $a \geq b$ (***a* es mayor que o igual a *b***), quiere decir que $a > b$, o bien que $a = b$, pero no ambas cosas a la vez. Por ejemplo, $a^2 \geq 0$ para todo número real a. El símbolo $a \leq b$ (***a* es menor que o igual a *b***) quiere decir que $a < b$, o bien que $a = b$. La expresión $a < b < c$ significa que $a < b$ y que $b < c$, al mismo tiempo, y decimos entonces que ***b* está entre *a* y *c***. Igualmente, la expresión $c > b > a$ significa que $c > b$ y que $b > a$, al mismo tiempo.

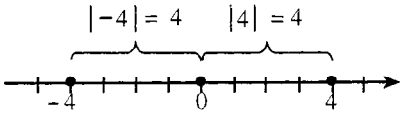
EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Ordenación de tres números reales

- $1 < 5 < \frac{11}{2}$
- $-4 < \frac{2}{3} < \sqrt{2}$
- $3 > -6 > -10$

Hay otros tipos de desigualdades. Por ejemplo, $a < b \leq c$ quiere decir que $a < b$ y que $b \leq c$ al mismo tiempo. Igualmente, $a \leq b < c$ quiere decir que tanto $a \leq b$ como $b < c$. Finalmente, $a \leq b \leq c$ significa que $a \leq b$ y $b \leq c$.

FIGURA 1.3



Si a es un entero, entonces es la coordenada de un punto A en una recta coordenada (o recta numérica), y el símbolo $|a|$ indica el número de unidades entre A y el origen, sin importar el sentido (o dirección). El número $|a|$, no negativo, se llama *valor absoluto de a*. En la Fig. 1.3 se observa que para el punto con coordenada -4 se tiene que $|-4| = 4$. Similarmente, $|4| = 4$. En general, *si a es negativo, se cambia su signo para obtener* $|a|$*; si a es no negativo, entonces* $|a| = a$. La siguiente definición extiende este concepto a todo número real.

Definición de valor absoluto

El **valor absoluto** de un número real, a, representado por $|a|$, se define como sigue.

(1) Si $a \geq 0$, entonces $|a| = a$.
(2) Si $a < 0$, entonces $|a| = -a$.

En los ejemplos siguientes se exponen algunos casos especiales de esta definición.

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

La notación de valor absoluto, $|a|$

- $|3| = 3$, porque $3 > 0$.
- $|-3| = -(-3)$, ya que $-3 < 0$. Entonces, $|-3| = 3$.

* Si un teorema se expresa en la forma "si P, entonces Q", siendo P y Q enunciados matemáticos llamados *hipótesis* y *conclusión*, respectivamente, entonces, la *recíproca* o *inversa* del teorema tiene la forma "si Q, entonces P". Si tanto el teorema como su recíproca son verdaderos, con frecuencia eso se expresa como "P si y sólo si Q".

- $|2-\sqrt{2}|=2-\sqrt{2}$, porque $2-\sqrt{2}>0$.
- $|\sqrt{2}-2|=-(\sqrt{2}-2)$, ya que $\sqrt{2}-2<0$. Así, $|\sqrt{2}-2|=2-\sqrt{2}$.

En el ejemplo anterior, $|-3|=|3|$, y $|2-\sqrt{2}|=|\sqrt{2}-2|$. En general, se tiene lo siguiente:

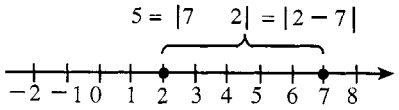
$$|a|=|-a| \quad \text{para todo número real } a.$$

EJEMPLO 2 ***Eliminación del signo de valor absoluto***
Si $x<1$, escribir de nuevo $|x-1|$ sin usar el signo de valor absoluto.

SOLUCIÓN Si $x<1$, entonces $x-1$ es negativo y, por consiguiente, según la definición (2) de valor absoluto,

$$|x-1|=-(x-1)=-x+1=1-x.$$

FIGURA 1.4



Se usa el concepto de valor absoluto para definir la distancia entre dos puntos cualesquiera en una recta numérica. Primero, nótese que la distancia entre los puntos con coordenadas 2 y 7, que se indican en la Fig. 1.4, es igual a 5 unidades. Esta distancia es la diferencia que se obtiene al restar la coordenada menor de la mayor ($7-2=5$). Si se emplean valores absolutos, entonces, como $|7-2|=|2-7|$, no importa el orden de la resta. Este hecho da lugar a la siguiente definición.

Definición de la distancia entre dos puntos en una recta numérica

Sean a y b las coordenadas de dos puntos, A y B, respectivamente, en una recta coordenada. La **distancia entre A y B**, denotada por $d(A, B)$, se define como

$$d(A, B)=|b-a|.$$

El número $d(A, B)$ es la longitud del segmento de recta AB.

Como $d(B, A)=|a-b|$ y $|b-a|=|a-b|$, se tiene que

$$d(A, B)=d(B, A).$$

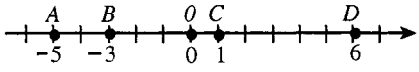
Nótese que la distancia entre el origen, O, y el punto A, es

$$d(O, A)=|a-0|=|a|,$$

lo cual concuerda con la interpretación geométrica del valor absoluto que se dio en la Fig. 1.4. La fórmula $d(A, B)=|b-a|$ es cierta sin importar qué signos tengan a y b, como se ve en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 ***Cálculo de la distancia entre puntos***

FIGURA 1.5



Sean los puntos A, B, C y D con coordenadas -5, -3, 1 y 6, respectivamente, en una recta numérica, como se ve en la Fig. 1.5. Calcular $d(A, B)$, $d(C, B)$, $d(O, A)$, y $d(C, D)$.

SOLUCIÓN Con la definición de la distancia entre puntos, se evalúan las distancias:

$$d(A, B) = |-3 - (-5)| = |-3 + 5| = |2| = 2$$
$$d(C, B) = |-3 - 1| = |-4| = 4$$
$$d(O, A) = |-5 - 0| = |-5| = 5$$
$$d(C, D) = |6 - 1| = |5| = 5$$

El concepto de valor absoluto tiene otros usos, además del cálculo de distancias entre puntos; se utiliza siempre que se tenga interés por la magnitud o valor numérico de un número real, sin importar su signo.

En la siguiente sección se estudiará la *notación exponencial* a^n, donde a es un número real, llamado *base*, y n un entero, que se llama *exponente*. En especial, para la base 10, se tiene que

$$10^0 = 1, \quad 10^1 = 10, \quad 10^2 = 10 \cdot 10 = 100, \quad 10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000,$$

y así sucesivamente. Para exponentes negativos, se usan los recíprocos del exponente positivo que corresponde, como sigue:

$$10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10}, \quad 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}, \quad 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$$

Se puede usar esta notación para escribir cualquier representación decimal finita de un número real, como una suma del siguiente tipo:

$$\begin{aligned} 437.56 &= 4(100) + 3(10) + 7(1) + 5(\tfrac{1}{10}) + 6(\tfrac{1}{100}) \\ &= 4(10^2) + 3(10^1) + 7(10^0) + 5(10^{-1}) + 6(10^{-2}) \end{aligned}$$

Con frecuencia, en los campos de la ciencia y la técnica es necesario trabajar con números muy grandes o muy pequeños, y comparar las magnitudes relativas de cantidades como ésas. Por lo general se representa un número positivo, a, grande o pequeño, mediante la *notación científica*, en la que se emplea × para indicar multiplicación.

Notación científica

$a = c \times 10^n$, donde $1 \leq c < 10$, y n entero.

La distancia que recorre un rayo de luz en un año es, aproximadamente, 9.5×10^{12} km. Este número se escribe, en notación científica, como 9.5×10^{12}. El exponente positivo 12 indica que el punto decimal se debe correr 12 lugares hacia *la derecha*. La notación se aplica similarmente para números pequeños. Por ejemplo, el peso estimado de una molécula de oxígeno es

$$0.000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 053 \text{ gramos},$$

o bien, en notación científica, 5.3×10^{-23} g (gramos). El exponente negativo indica que se debe desplazar el punto decimal 23 lugares hacia *la izquierda*.

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

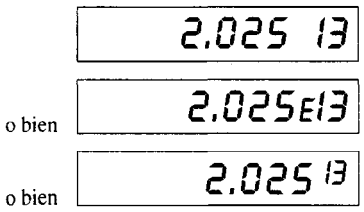
Notación científica

- $513 = 5.13 \times 10^2$
- $7.3 = 7.3 \times 10^0$

- ❑ $93\,000\,000 = 9.3 \times 10^{7}$
- ❑ $20\,700 = 2.07 \times 10^{4}$
- ❑ $0.000\,000\,000\,43 = 4.3 \times 10^{-10}$
- ❑ $0.000\,648 = 6.48 \times 10^{-4}$

Muchas calculadoras hacen uso de la notación científica en sus pantallas: para el número $c \times 10^{n}$, se suprime el 10 y, con frecuencia, el exponente aparece precedido de la letra E. Por ejemplo, para calcular $(4\,500\,000)^2$ en una calculadora científica, se podría introducir el entero 4 500 000 y oprimir la tecla $\boxed{x^2}$, de la elevación al cuadrado; se obtendría una presentación semejante a la de la Fig. 1.6.

FIGURA 1.6



Lo anterior se traduce como 2.025×10^{13}. Así,

$$(4{,}500{,}000)^2 = 20{,}250{,}000{,}000{,}000.$$

También se puede usar la notación científica para introducir cantidades a las calculadoras. Los detalles específicos se deben encontrar en el manual de la calculadora.

Como nota final, en los problemas de aplicación se usan, con frecuencia, números que se obtienen mediante diversos tipos de mediciones y, por lo tanto, son aproximaciones a valores exactos. Las respuestas se deben redondear, porque el resultado final de un cálculo no puede ser más preciso que los datos de que provenga. Por ejemplo, si se miden la longitud y la anchura de un rectángulo con una exactitud de dos cifras decimales, no se puede esperar más que una exactitud de dos cifras decimales en el valor calculado del área del rectángulo. Para trabajo exclusivamente *matemático*, si los valores de longitud y anchura de un rectángulo son datos, se supone que las dimensiones son *exactas* y no se requiere redondeo.

Si un número a se expresa en notación científica como $a = c \times 10^{n}$, donde $1 \le c < 10$, y si c se redondea a k cifras decimales, entonces se dice que a es exacta (o que se ha redondeado) a $k + 1$ **cifras significativas**. Por ejemplo, 37.2638 redondeado a 5 cifras significativas es 3.7264×10^{1}, o sea, 37.264; con redondeo a 3 cifras significativas, 3.73×10^{1}, o sea, 37.3. Y a 1 cifra significativa, es 4×10^{1}, o sea 40.

EJERCICIOS 1.1

Ejercicios 1 y 2: Si $x < 0$ y $y > 0$, determine el signo del número real.

1 **(a)** xy **(b)** x^2y **(c)** $\frac{x}{y} + x$ **(d)** $y - x$

2 **(a)** $\frac{x}{y}$ **(b)** xy^2 **(c)** $\frac{x - y}{xy}$ **(d)** $y(y - x)$

Ejercicios 3 – 6: Reemplace el símbolo □ con <, con >, o con =, para que sea válida la afirmación resultante.

3 **(a)** $-7 \square -4$ **(b)** $\frac{\pi}{2} \square 1.57$ **(c)** $\sqrt{225} \square 15$

4 **(a)** $-3 \square -5$ **(b)** $\frac{\pi}{4} \square 0.8$ **(c)** $\sqrt{289} \square 17$

5 **(a)** $\frac{1}{11} \square 0.09$ **(b)** $\frac{2}{3} \square 0.6666$ **(c)** $\frac{22}{7} \square \pi$

6 **(a)** $\frac{1}{7} \square 0.143$ **(b)** $\frac{5}{6} \square 0.833$ **(c)** $\sqrt{2} \square 1.4$

Ejercicios 7 y 8: Exprese el enunciado en forma de desigualdad.

7 **(a)** x es negativo.
(b) y es no negativo.
(c) q es menor que o igual que π.
(d) d está entre 4 y 2.
(e) t no es menor que 5.
(f) El negativo de z no es mayor que 3.
(g) El cociente de p y q es, cuando mucho, 7.
(h) El recíproco de w es, cuando menos, 9.
(i) El valor absoluto de x es mayor que 7.

8 **(a)** b es positivo.
(b) s es no positivo.
(c) w es mayor que o igual a -4.
(d) c está entre $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{3}$.
(e) p no es mayor que -2.
(f) El negativo de m no es menor que -2.
(g) El cociente de r y s es por lo menos $\frac{1}{5}$.
(h) El recíproco de f es, cuando mucho, 14.
(i) El valor absoluto de x es menor que 4.

Ejercicios 9 – 14: Exprese de nuevo el número sin usar el símbolo de valor absoluto, y simplifique el resultado.

9 **(a)** $|-3-2|$ **(b)** $|-5|-|2|$ **(c)** $|7|+|-4|$

10 **(a)** $|-11+1|$ **(b)** $|6|-|-3|$ **(c)** $|8|+|-9|$

11 **(a)** $(-5)|3-6|$ **(b)** $|-6|/(-2)$ **(c)** $|-7|+|4|$

12 **(a)** $(4)|6-7|$ **(b)** $5/|-2|$ **(c)** $|-1|+|-9|$

13 **(a)** $|4-\pi|$ **(b)** $|\pi-4|$ **(c)** $|\sqrt{2}-1.5|$

14 **(a)** $|\sqrt{3}-1.7|$ **(b)** $|1.7-\sqrt{3}|$ **(c)** $|\frac{1}{5}-\frac{1}{3}|$

Ejercicios 15 – 18: Los números que se dan a continuación son coordenadas de los puntos A, B, C, respectivamente, en una línea coordenada (o recta numérica). Encuentre la distancia entre ellos.

(a) $d(A, B)$ **(b)** $d(B, C)$

(c) $d(C, B)$ **(d)** $d(A, C)$

15 3, 7, -5 **16** -6, -2, 4

17 -9, 1, 10 **18** 8, -4, -1

Ejercicios 19 – 24: Los números que se dan a continuación son coordenadas de los puntos A y B, respectivamente, en una línea coordenada (o recta numérica). Exprese el enunciado que se indica en forma de desigualdad donde intervenga el símbolo de valor absoluto.

19 x, 7; $d(A, B)$ es menor que 5.

20 x, $-\sqrt{2}$; $d(A, B)$ es mayor que 1.

21 x, -3; $d(A, B)$ es al menos 8.

22 x, 4; $d(A, B)$ es cuando mucho 2.

23 4, x; $d(A, B)$ no es mayor que 3.

24 -2, x; $d(A, B)$ no es menor que 2.

Ejercicios 25 – 32: Escriba de nuevo la expresión sin utilizar el símbolo de valor absoluto, y simplifique el resultado.

25 $|3+x|$ si $x<-3$ **26** $|5-x|$ si $x>5$

27 $|2-x|$ si $x<2$ **28** $|7+x|$ si $x\geq -7$

29 $|a-b|$ si $a<b$ **30** $|a-b|$ si $a>b$

31 $|x^2+4|$ **32** $|-x^2-1|$

Ejercicios 33 – 40: Reemplace el símbolo $\square$ con $=$ o bien con $\neq$ para que el enunciado se cumpla con todos los números reales a, b, c, d, siempre que las expresiones estén definidas.

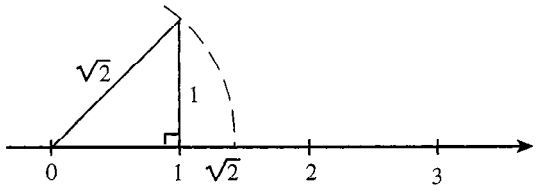
33 $\dfrac{ab+ac}{a} \square\ b+ac$ **34** $\dfrac{ab+ac}{a} \square\ b+c$

35 $\dfrac{b+c}{a} \square\ \dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}$ **36** $\dfrac{a+c}{b+d} \square\ \dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}$

37 $(a\div b)\div c \square\ a\div(b\div c)$ **38** $(a-b)-c \square\ a-(b-c)$

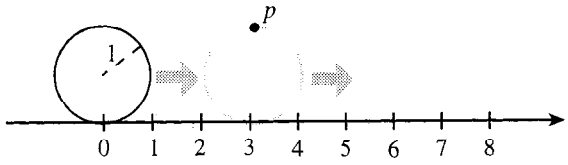
39 $\dfrac{a-b}{b-a} \square\ -1$ **40** $-(a+b) \square\ -a+b$

41 En una línea (o eje) de coordenadas, el punto que corresponde a $\sqrt{2}$ se puede determinar trazando un triángulo rectángulo cuyos catetos tengan longitud 1, como se ve en la figura. Determine los puntos que corresponden a $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$, respectivamente. (*Sugerencia:* Emplee el teorema de Pitágoras.)

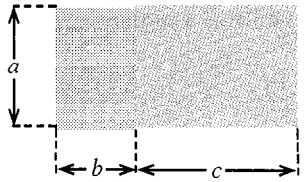


42 Un círculo de radio 1 rueda sobre una recta numérica en el sentido positivo, como se ve en la figura. Si el punto P está inicialmente en el origen, determine la coordenada de P después de

(a) una, **(b)** dos, y **(c)** diez revoluciones o vueltas completas.



43 Las demostraciones geométricas de las propiedades de los números reales fueron presentadas por los antiguos griegos. Para establecer la propiedad distributiva $a(b + c) = ab + ac$ para los números reales positivos a, b y c, determine el área del rectángulo que se ve en la figura, aplicando dos métodos.



44 Se pueden determinar aproximaciones racionales a las raíces cuadradas mediante una fórmula que descubrieron los antiguos babilonios. Sea x_1 la primera aproximación racional de $\sqrt{n}$. Si se considera que

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{n}{x_1}\right),$$

entonces, x_2 será una mejor aproximación de $\sqrt{n}$, y se puede repetir el cálculo reemplazando con x_2 a x_1. Iniciando con $x_1 = \frac{3}{2}$, calcule las dos aproximaciones racionales siguientes para $\sqrt{2}$.

Ejercicios 45 y 46: Exprese el número en notación científica.

45 **(a)** 427,000 **(b)** 0.000 000 098 **(c)** 810,000,000

46 **(a)** 85,200 **(b)** 0.000 005 5 **(c)** 24,900,000

Ejercicios 47 y 48: Exprese el número en forma decimal.

47 **(a)** 8.3×10^5 **(b)** 2.9×10^{-12} **(c)** 5.63×10^8

48 **(a)** 2.3×10^7 **(b)** 7.01×10^{-9} **(c)** 1.23×10^{10}

49 *Masa de un átomo de hidrógeno* La masa aproximada de un átomo de hidrógeno es

0.000 000 000 000 000 000 000 001 7 g

Exprese este número en notación científica.

50 *Masa de un electrón* La masa aproximada de un electrón es 9.1×10^{-31} kg. Exprese este número en notación decimal.

51 *Año luz* En astronomía, las distancias a las estrellas se miden en años luz. Un *año luz* es la distancia que recorre un rayo de luz durante un año. Si la velocidad aproximada de la luz es 300 000 km/s, calcule el número de kilómetros que recorre la luz en 1 año.

52 *La Vía Láctea*

(a) Los astrónomos han calculado que la Vía Láctea, nuestra galaxia, tiene 100 mil millones de estrellas. Exprese este número en notación científica.

(b) El diámetro, d, de la Vía Láctea, es de unos 100 000 años luz. Exprese d en kilómetros. Vea el Ejercicio 51.

53 *Número de Avogadro* El número de átomos de hidrógeno en un mol es el número de Avogadro, 6.02×10^{23}. Si un mol del elemento tiene 1.01 g de masa, calcule la masa de un átomo de hidrógeno.

54 *Población piscial* La dinámica poblacional de muchas especies de peces se caracteriza por altísimas tasas de fertilidad entre los adultos, y tasas muy bajas de sobrevivencia entre los jóvenes. Un hipogloso (especie de bacalao) maduro puede poner hasta 2.5 millones de huevos, pero sólo sobrevive el 0.00035% de la descendencia hasta la edad de 3 años. Con notación científica, calcule el número aproximado de descendientes que sobreviven hasta la edad de 3 años.

55 *Cuadros de una película* La cinta cinematográfica más larga que se ha hecho es una elaborada en Gran Bretaña en 1970, que dura 48 h. Suponiendo que la velocidad de la película es de 24 cuadros por segundo, determine el número aproximado total de cuadros de la cinta o película. Exprese su respuesta en notación científica.

56 *Números primos grandes* El número $2^{44\,497} - 1$ es primo. Cuando se determinó que este número era primo, se necesitó que una de las computadoras más rápidas del mundo trabajara durante 60 días para comprobar que sí lo es. Esta computadora era capaz de llevar a cabo 2×10^{11} cálculos por segundo. Con notación científica, estime el número de operaciones que se necesitan para llevar a cabo esta comprobación. (En fecha más reciente, en 1992, se demostró que $2^{756\,839} - 1$, número que tiene 227 832 cifras o dígitos, también es primo.)

57 *Cociente de inteligencia* El cociente de inteligencia (IQ, de *intelligence quotient*) de una persona, se calcula multiplicando por 100 el cociente de su edad mental entre su edad cronológica.

(a) Determine el IQ de un niño de 12 años cuya edad mental es 15 años.

(b) Evalúe la edad mental de una persona de 15 años de edad cuyo IQ es 140.

58 *Superficie de la Tierra* El agua cubre el 70.8%, o sea 361×10^6 km^2, de la superficie de nuestro planeta. Calcule, aproximadamente, la superficie total de la Tierra.

1.2 EXPONENTES Y RADICALES

Si n es un entero positivo, la notación exponencial, a^n, definida en la tabla siguiente, representa el producto del número real a por sí mismo n veces. Se dice que a^n es ***a* elevado a la potencia *n*** o, simplemente, *a a la n*. El entero positivo n se llama **exponente**, y el número real a se denomina **base**.

Notación exponencial

Caso general (n es cualquier entero positivo)	Casos especiales
$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores de } a}$	$a^1 = a$ $a^2 = a \cdot a$ $a^3 = a \cdot a \cdot a$ $a^6 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$

En el siguiente ejemplo ilustrativo se presentan varios casos numéricos de la notación exponencial.

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Notación exponencial a^n

- $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$
- $(\frac{1}{2})^5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$
- $(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27$
- $(-\frac{1}{3})^4 = (-\frac{1}{3})(-\frac{1}{3})(-\frac{1}{3})(-\frac{1}{3}) = (\frac{1}{9})(\frac{1}{9}) = \frac{1}{81}$

Es importante darse cuenta que si n es un entero positivo, entonces una expresión como $3a^n$ quiere decir $3(a^n)$, y *no* $(3a)^n$. El número real 3 es el **coeficiente** de a^n en la expresión $3a^n$. Igualmente, $-3a^n$ quiere decir $(-3)a^n$, y no $(-3a)^n$.

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Notación ca^n

- $5 \cdot 2^3 = 5 \cdot 8 = 40$
- $-5 \cdot 2^3 = -5 \cdot 8 = -40$
- $-2^4 = -(2^4) = -16$
- $3(-2)^3 = 3(-2)(-2)(-2) = 3(-8) = -24$

A continuación se amplía la definición de a^n, a exponentes no positivos.

Exponentes cero y negativos

Definición ($a \neq 0$)	Ejemplo
$a^0 = 1$	$3^0 = 1, (-\sqrt{2})^0 = 1$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$5^{-3} = \frac{1}{5^3}, 3^{-5} = \frac{1}{3^5}$

Si m y n son enteros positivos, entonces

$$a^m a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m \text{ factores de } a} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores de } a}.$$

Como el número total de factores de a en el lado derecho es $m + n$, esta expresión es igual a a^{m+n}, es decir

$$a^m a^n = a^{m+n}.$$

Se puede ampliar esta fórmula a $m \leq 0$ o bien a $n \leq 0$, mediante las definiciones de exponentes cero y negativo. Esto da como resultado la regla o ley (1), que aparece en la tabla siguiente.

Para demostrar la ley 2, se puede escribir, para m y n positivos,

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdot \cdots \cdot a^m}_{n \text{ factores de } a^m}$$

y se cuenta el número de veces que aparece a como factor en el lado derecho. Como $a^m = a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a$, donde a es factor m veces, y como el número de esos grupos de m factores es n, el número total de factores de a es $m \cdot n$. Así,

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Se pueden demostrar los casos de $m \leq 0$ o de $n \leq 0$, con la definición de exponentes no positivos. Las tres leyes restantes pueden demostrarse de forma semejante, contando los factores. En las leyes (4) y (5) se supone que los denominadores no son cero.

Leyes de los exponentes para números reales, a y b, y enteros m y n

Ley	Ejemplo
(1) $a^m a^n = a^{m+n}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$
(2) $(a^m)^n = a^{mn}$	$(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12} = 4096$
(3) $(ab)^n = a^n b^n$	$(20)^3 = (2 \cdot 10)^3 = 2^3 \cdot 10^3 = 8 \cdot 1000 = 8000$
(4) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$
(5) (a) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2 = 4$
(b) $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$	$\frac{2^3}{2^5} = \frac{1}{2^{5-3}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

Si $m > n$, se usa, por lo general, (5)(a), y si $m < n$, se emplea (5)(b).

Se pueden ampliar las leyes de los exponentes para obtener reglas como la de que $(abc)^n = a^n b^n c^n$, y $a^m a^n a^p = a^{m+n+p}$.

A continuación se ilustran otros ejemplos de las leyes de los exponentes.

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Leyes de los exponentes

- $x^5 x^6 x^2 = x^{5+6+2} = x^{13}$
- $(y^5)^7 = y^{5 \cdot 7} = y^{35}$

- $(3st)^4 = 3^4 s^4 t^4 = 81 s^4 t^4$
- $\left(\frac{p}{2}\right)^5 = \frac{p^5}{2^5} = \frac{p^5}{32}$
- $\frac{c^8}{c^3} = c^{8-3} = c^5$
- $\frac{u^3}{u^8} = \frac{1}{u^{8-3}} = \frac{1}{u^5}$

Simplificar una expresión cuyas potencias sean números reales quiere decir cambiarla para tener una expresión en la cual cada número real sólo aparezca una vez, y que todos los exponentes sean positivos. *Se supone, siempre, que los denominadores representan números reales distintos de cero.*

EJEMPLO 1 *Simplificación de expresiones que tienen exponentes*

Usar las leyes de los exponentes para simplificar la expresión:

(a) $(3x^3y^4)(4xy^5)$ **(b)** $(2a^2b^3c)^4$ **(c)** $\left(\frac{2r^3}{s}\right)^2\left(\frac{s}{r^3}\right)^3$ **(d)** $(u^{-2}v^3)^{-3}$

SOLUCIÓN

(a)
$$\begin{aligned}(3x^3y^4)(4xy^5) &= (3)(4)x^3xy^4y^5 && \text{reordenación de factores}\\ &= 12x^4y^9 && \text{ley 1}\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}(2a^2b^3c)^4 &= 2^4(a^2)^4(b^3)^4c^4 && \text{ley 3}\\ &= 16a^8b^{12}c^4 && \text{ley 2}\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}\left(\frac{2r^3}{s}\right)^2\left(\frac{s}{r^3}\right)^3 &= \frac{(2r^3)^2}{s^2}\cdot\frac{s^3}{(r^3)^3} && \text{ley 4}\\ &= \frac{2^2(r^3)^2}{s^2}\cdot\frac{s^3}{(r^3)^3} && \text{ley 3}\\ &= \left(\frac{4r^6}{s^2}\right)\left(\frac{s^3}{r^9}\right) && \text{ley 2}\\ &= 4\left(\frac{r^6}{r^9}\right)\left(\frac{s^3}{s^2}\right) && \text{reordenación de factores}\\ &= 4\left(\frac{1}{r^3}\right)(s) && \text{leyes 5(b) y 5(a)}\\ &= \frac{4s}{r^3} && \text{reordenación de factores}\end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned}(u^{-2}v^3)^{-3} &= (u^{-2})^{-3}(v^3)^{-3} && \text{ley 3}\\ &= u^6v^{-9} && \text{ley 2}\\ &= \frac{u^6}{v^9} && \text{definición de } a^{-n}\end{aligned}$$

El teorema siguiente ayuda en problemas donde intervienen exponentes negativos.

Teorema sobre los exponentes negativos

(1) $\dfrac{a^{-m}}{b-n} = \dfrac{b^n}{a^m}$ **(2)** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$

DEMOSTRACIÓN Con las propiedades de los exponentes negativos y los cocientes, se obtiene

(1) $\dfrac{a^{-m}}{b^{-n}} = \dfrac{1/a^m}{1/b^n} = \dfrac{1}{a^m} \cdot \dfrac{b^n}{1} = \dfrac{b^n}{a^m}$

(2) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \dfrac{a^{-n}}{b^{-n}} = \dfrac{b^n}{a^n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$ ■

EJEMPLO 2 ***Simplificación de expresiones que tienen exponentes negativos***

Simplificar:

(a) $\dfrac{8x^3y^{-5}}{4x^{-1}y^2}$ **(b)** $\left(\dfrac{u^2}{2v}\right)^{-3}$

SOLUCIÓN Se aplica el teorema anterior y las leyes de los exponentes.

(a)
$$\frac{8x^3y^{-5}}{4x^{-1}y^2} = \frac{8x^3}{4y^2} \cdot \frac{y^{-5}}{x^{-1}}$$ reordenación de cocientes para que los exponentes negativos queden en una fracción

$$= \frac{8x^3}{4y^2} \cdot \frac{x^1}{y^5}$$ teorema sobre exponentes negativos (1)

$$= \frac{2x^4}{y^7}$$ ley 1 de los exponentes

(b)
$$\left(\frac{u^2}{2v}\right)^{-3} = \left(\frac{2v}{u^2}\right)^3$$ teorema sobre exponentes negativos (2)

$$= \frac{2^3v^3}{(u^2)^3}$$ leyes 4 y 3 de los exponentes

$$= \frac{8v^3}{u^6}$$ ley 2 de los exponentes

A continuación se define la **raíz *n*-ésima principal**, $\sqrt[n]{a}$, de un número real a.

Definición de $\sqrt[n]{a}$

Sean n un entero positivo mayor que 1, y a un número real.

(1) Si $a = 0$, entonces $\sqrt[n]{a} = 0$.

(2) Si $a > 0$, entonces $\sqrt[n]{a}$ es el número real *positivo*, b, tal que $b^n = a$.

(3) (a) Si $a < 0$ y n es impar, entonces $\sqrt[n]{a}$ es el número real *negativo* b, tal que $b^n = a$.

(b) Si $a < 0$ y n es par, entonces $\sqrt[n]{a}$ no es un número real.

Los números complejos, que se estudiarán en la Secc. 2.4, se necesitan para definir $\sqrt[n]{a}$ si $a < 0$ y n es un entero positivo *par*, ya que para todos los números reales b se tiene que $b^n \geq 0$ cuando n es par.

Si $n = 2$, se escribe simplemente $\sqrt{a}$, en vez de $\sqrt[2]{a}$, y se dice que $\sqrt{a}$ es la **raíz cuadrada principal** —la **raíz cuadrada positiva**—, o simplemente la **raíz cuadrada** de a. El número $\sqrt[3]{a}$ es la **raíz cúbica** (principal) de a.

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

La raíz n-ésima principal $\sqrt[n]{a}$

- $\sqrt{16} = 4$, ya que $4^2 = 16$.
- $\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$, ya que $(\frac{1}{2})^5 = \frac{1}{32}$.
- $\sqrt[3]{-8} = -2$, ya que $(-2)^3 = -8$.
- $\sqrt[4]{-16}$ no es un número real.

Nótese que $\sqrt{16} \neq \pm 4$, porque —por definición— las raíces de los números reales positivos, son positivas.

Para completar la terminología, la expresión $\sqrt[n]{a}$ es un **radical**, el número a es el **radicando**, y el número n es el **índice** del radical. Al símbolo $\sqrt{\ }$ se le llama **signo radical**.

Si $\sqrt{a} = b$, entonces $b^2 = a$; es decir, $(\sqrt{a})^2 = a$. Si $\sqrt[3]{a} = b$, entonces $b^3 = a$, o sea, $(\sqrt[3]{a})^3 = a$. Al generalizar este comportamiento se llega a la propiedad 1 de la siguiente tabla.

Propiedades de $\sqrt[n]{\ }$ (n es un entero positivo)

Propiedad	Ejemplo
(1) $(\sqrt[n]{a})^n = a$, si $\sqrt[n]{a}$ existe	$(\sqrt{5})^2 = 5$, $(\sqrt[3]{-8})^3 = -8$
(2) $\sqrt[n]{a^n} = a$, si $a \geq 0$	$\sqrt{5^2} = 5$, $\sqrt[3]{2^3} = 2$
(3) $\sqrt[n]{a^n} = a$, si $a < 0$ y n es impar	$\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$, $\sqrt[5]{(-2)^5} = -2$
(4) $\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$, si $a < 0$ y n es par	$\sqrt{(-3)^2} = \lvert -3 \rvert = 3$, $\sqrt[4]{(-2)^4} = \lvert -2 \rvert = 2$

Si $a \geq 0$, entonces la propiedad 4 se reduce a la propiedad 2. Se observa también que, según la propiedad 4,

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

para todo número real x. En especial, si $x \geq 0$, entonces $\sqrt{x^2} = x$; sin embargo, si $x < 0$, entonces $\sqrt{x^2} = -x$, que es positivo.

Las tres leyes que aparecen en la tabla siguiente son válidas para enteros positivos m y n, *siempre y cuando existan las raíces indicadas.*

Leyes de los radicales

Ley	Ejemplo
(1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$	$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25}\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ $\sqrt[3]{-108} = \sqrt[3]{(-27)(4)} = \sqrt[3]{-27}\sqrt[3]{4} = -3\sqrt[3]{4}$
(2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[3]{\frac{5}{8}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{2}$
(3) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[3(2)]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

Los radicandos en las leyes 1 y 2 incluyen productos y cocientes. Se debe tener cuidado si en el radicando se tienen sumas o restas. La tabla siguiente presenta dos casos precautorios particulares, de equivocaciones que ocurren con frecuencia al trabajar con radicales que tienen sumas.

☞ **Precaución**

Si $a \neq$ y $b \neq 0$	Ejemplo
$\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$	$\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \neq 3 + 4 = 7$
$\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$	$\sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \neq \sqrt{4} + \sqrt{9} = 5$

Si c es un número real, y c^n aparece como factor en un radical de índice n, entonces se puede sacar a c del radicando si se tiene en cuenta el signo de c. Por ejemplo, si $c > 0$, o si $c < 0$ y n es *impar*, entonces

$$\sqrt[n]{c^n d} = \sqrt[n]{c^n}\sqrt[n]{d} = c\sqrt[n]{d},$$

siempre que exista $\sqrt[n]{d}$. Si $c < 0$ y n es *par*, entonces

$$\sqrt[n]{c^n d} = \sqrt[n]{c^n}\sqrt[n]{d} = |c|\sqrt[n]{d},$$

siempre que exista $\sqrt[n]{d}$.

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Eliminación de potencias n-ésimas de $\sqrt[n]{\ }$

- $\sqrt[5]{x^7} = \sqrt[5]{x^5 \cdot x^2} = \sqrt[5]{x^5}\sqrt[5]{x^2} = x\sqrt[5]{x^2}$
- $\sqrt[3]{x^7} = \sqrt[3]{x^6 \cdot x} = \sqrt[3]{(x^2)^3 x} = \sqrt[3]{(x^2)^3}\sqrt[3]{x} = x^2\sqrt[3]{x}$
- $\sqrt{x^2 y} = \sqrt{x^2}\sqrt{y} = |x|\sqrt{y}$
- $\sqrt{x^6} = \sqrt{(x^3)^2} = |x^3|$
- $\sqrt[4]{x^6 y^3} = \sqrt[4]{x^4 \cdot x^2 y^3} = \sqrt[4]{x^4}\sqrt[4]{x^2 y^3} = |x|\sqrt[4]{x^2 y^3}$

Nota: Para evitar tener valores absolutos, *en los ejemplos y ejercicios con radicales de este capítulo, se supone que todas las letras —a, b, c, d, x, y, etc.— que aparezcan en radicandos, representan números reales positivos, a menos que se indique otra cosa.*

Como se vio en el ejemplo anterior y en los siguientes, si el índice de un radical es n, entonces se puede reordenar, o reagrupar, el radicando, aislando un factor de la forma p^n, donde p puede estar formado por varias letras. A continuación se saca a p del radical, ya que $\sqrt[n]{p^n} = p$, como se indicó antes. Así, en el Ejem. 3(b), el índice del radical es 3 y se reagrupa el radicando en *cubos*, con lo que se obtiene un factor p^3, donde $p = 2xy^2z$. En la parte (c), el índice del radical es 2, y se reagrupa al radicando en cuadrados; así se obtiene un factor p^2, donde $p = 3a^3b^2$.

Simplificar un radical quiere decir sacar factores del mismo hasta que ningún factor del radicando tenga un exponente mayor que o igual al índice, y el índice sea lo más pequeño posible.

EJEMPLO 3 *Remoción de factores en radicales*

Simplificar los siguientes radicales; todas las letras representan números reales positivos:

(a) $\sqrt[3]{320}$ **(b)** $\sqrt[3]{16x^3y^8z^4}$ **(c)** $\sqrt{3a^2b^3}\sqrt{6a^5b}$

SOLUCIÓN

(a)
$$\begin{aligned}\sqrt[3]{320} &= \sqrt[3]{64 \cdot 5} && \text{se saca a 64 como factor, por ser el cubo mayor en 320}\\ &= \sqrt[3]{4^3}\sqrt[3]{5} && \text{ley 1 de los radicales}\\ &= 4\sqrt[3]{5} && \text{propiedad 2 de } \sqrt[n]{}\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\sqrt[3]{16x^3y^8z^4} &= \sqrt[3]{(2^3x^3y^6z^3)(2y^2z)} && \text{se reagrupa el radicando en cubos}\\ &= \sqrt[3]{(2xy^2z)^3(2y^2z)} && \text{leyes 2 y 3 de los exponentes}\\ &= \sqrt[3]{(2xy^2z)^3}\sqrt[3]{2y^2z} && \text{ley 1 de los radicales}\\ &= 2xy^2z\sqrt[3]{2y^2z} && \text{propiedad 2 de } \sqrt[n]{}\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}\sqrt{3a^2b^3}\sqrt{6a^5b} &= \sqrt{3a^2b^3 \cdot 2 \cdot 3a^5b} && \text{ley 1 de los radicales}\\ &= \sqrt{(3^2a^6b^4)(2a)} && \text{se reagrupa el radicando en cuadrados}\\ &= \sqrt{(3a^3b^2)^2(2a)} && \text{leyes 2 y 3 de los exponentes}\\ &= \sqrt{(3a^3b^2)^2}\sqrt{2a} && \text{ley 1 de los radicales}\\ &= 3a^3b^2\sqrt{2a} && \text{propiedad 2 de la } \sqrt[n]{}\end{aligned}$$

Si el denominador de un cociente tiene un factor de la forma $\sqrt[n]{a^k}$, con $k < n$ y $a > 0$, entonces, si se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt[n]{a^{n-k}}$, se elimina el radical del denominador, ya que

$$\sqrt[n]{a^k}\sqrt[n]{a^{n-k}} = \sqrt[n]{a^{k+n-k}} = \sqrt[n]{a^n} = a.$$

A este proceso se le llama **racionalización de un denominador**. En la tabla siguiente se presentan varios casos especiales.

Racionalización de denominadores de cocientes ($a > 0$)

Factor en el denominador	Multiplicar numerador y denominador por	Factor resultante
$\sqrt{a}$	$\sqrt{a}$	$\sqrt{a}\sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a$
$\sqrt[3]{a}$	$\sqrt[3]{a^2}$	$\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a^3} = a$
$\sqrt[7]{a^3}$	$\sqrt[7]{a^4}$	$\sqrt[7]{a^3}\sqrt[7]{a^4} = \sqrt[7]{a^7} = a$

El ejemplo siguiente ilustra esta técnica.

EJEMPLO 4 ***Racionalización de denominadores***

Racionalizar el denominador en los siguientes casos:

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ **(b)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ **(c)** $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ **(d)** $\sqrt[5]{\dfrac{x}{y^2}}$

SOLUCIÓN

(a) $$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

(b) $$\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}$$

(c) $$\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2\cdot 3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

(d) $$\sqrt[5]{\frac{x}{y^2}} = \frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{y^2}} = \frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{y^2}}\frac{\sqrt[5]{y^3}}{\sqrt[5]{y^3}} = \frac{\sqrt[5]{xy^3}}{\sqrt[5]{y^5}} = \frac{\sqrt[5]{xy^3}}{y}$$

Si se utiliza una calculadora para determinar aproximaciones decimales de radicales, no existe ventaja alguna si se racionalizan los denominadores como, por ejemplo, $1/\sqrt{5} = \sqrt{5}/5$ o $\sqrt{2/3} = \sqrt{6}/3$, como se hizo en el Ejemplo 4(a) y (c). Sin embargo, para simplificaciones *algebraicas*, a veces es preferible pasar las expresiones a esas formas. Igualmente, en matemáticas avanzadas, como en Cálculo, si se cambia $1/\sqrt[3]{x}$ a $\sqrt[3]{x^2}/x$, como en el Ejem. 4(b), ello podría *complicar* un problema. En esos niveles es más sencillo trabajar con la expresión $1/\sqrt[3]{x}$, que con la forma racionalizada.

A continuación se usan los radicales para definir los *exponentes racionales*.

Definición de exponentes racionales

Sea m/n un número racional, donde n es un entero positivo mayor que 1. Si a es un número real tal que $\sqrt[n]{a}$ existe, entonces

(1) $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$

(2) $a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

(3) $a^{m/n} = (a^{1/n})^m = (a^m)^{1/n}$

Cuando se evalúa $a^{m/n}$ en (2), con frecuencia se emplea $(\sqrt[n]{a})^m$; es decir, se obtiene primero la raíz n-ésima de a, y después se eleva ese resultado a la m-ésima potencia, como se ve en el siguiente ejemplo.

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Notación exponencial $a^{m/n}$

- $x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$
- $x^{3/5} = (\sqrt[5]{x})^3 = \sqrt[5]{x^3}$
- $125^{2/3} = (\sqrt[3]{125})^2 = (\sqrt[3]{5^3})^2 = 5^2 = 25$
- $(\frac{32}{243})^{3/5} = (\sqrt[5]{\frac{32}{243}})^3 = (\sqrt[5]{(\frac{2}{3})^5})^3 = (\frac{2}{3})^3 = \frac{8}{27}$

Las leyes de los exponentes son válidas para exponentes racionales y también para *irracionales*, como $3^{\sqrt{2}}$, o 5^{π}, que se verán en el Cap. 5.

Para simplificar una expresión donde intervengan potencias racionales de literales que representan números reales, se convierte en una expresión en la cual cada letra sólo aparezca una vez y todos los exponentes sean positivos. Como se hizo con los radicales, se supone que todas las literales o letras representan números reales positivos, a menos que se especifique otra cosa.

EJEMPLO 5 *Simplificación de potencias racionales*

Simplificar:

(a) $(-27)^{2/3}(4)^{-5/2}$ **(b)** $(r^2s^6)^{1/3}$ **(c)** $\left(\dfrac{2x^{2/3}}{y^{1/2}}\right)^2\left(\dfrac{3x^{-5/6}}{y^{1/3}}\right)$

SOLUCIÓN

(a)
$$(-27)^{2/3}(4)^{-5/2} = (\sqrt[3]{-27})^2(\sqrt{4})^{-5} \quad \text{definición de exponentes racionales}$$
$$= (-3)^2(2)^{-5} \quad \text{se obtienen raíces}$$
$$= \frac{(-3)^2}{2^5} = \frac{9}{32} \quad \text{definición de exponente negativo; se eleva a potencias}$$

(b)
$$(r^2s^6)^{1/3} = (r^2)^{1/3}(s^6)^{1/3} \quad \text{ley 3 de los exponentes}$$
$$= r^{2/3}s^2 \quad \text{ley 2 de los exponentes}$$

(c)
$$\left(\frac{2x^{2/3}}{y^{1/2}}\right)^2\left(\frac{3x^{-5/6}}{y^{1/3}}\right) = \left(\frac{4x^{4/3}}{y}\right)\left(\frac{3x^{-5/6}}{y^{1/3}}\right) \quad \text{leyes de los exponentes}$$
$$= \frac{(4 \cdot 3)x^{4/3-5/6}}{y^{1+(1/3)}} \quad \text{ley 1 de los exponentes}$$
$$= \frac{12x^{8/6-5/6}}{y^{4/3}} \quad \text{denominador común}$$
$$= \frac{12x^{1/2}}{y^{4/3}} \quad \text{se simplifica}$$

Los exponentes racionales son de utilidad en problemas en los que intervienen radicales que no tienen el mismo índice, como se ve en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 *Combinación de radicales*

Cambiar a una expresión que sólo contenga un radical, $\sqrt[n]{a^m}$:

(a) $\sqrt[3]{a}\sqrt{a}$ **(b)** $\dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a^2}}$

SOLUCIÓN Si se introducen exponentes racionales, se obtiene

(a)
$$\sqrt[3]{a}\sqrt{a} = a^{1/3}a^{1/2} = a^{(1/3)+(1/2)} = a^{5/6} = \sqrt[6]{a^5}$$

(b)
$$\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{a^{1/4}}{a^{2/3}} = a^{(1/4)-(2/3)} = a^{-5/12} = \frac{1}{a^{5/12}} = \frac{1}{\sqrt[12]{a^5}}$$

En los Ejercicios 1.2, siempre que un índice de un radical sea par, o cuando se emplee un exponente m/n, donde n es par, se supondrá que las letras que aparecen en el radicando indican números reales positivos, a menos que se indique otra cosa.

EJERCICIOS 1.2

Ejercicios 1 – 10: Exprese el número en la forma a/b, donde a y b son enteros.

1 $(-\frac{2}{3})^4$

2 $(-3)^3$

3 $\dfrac{2^{-3}}{3^{-2}}$

4 $\dfrac{2^0 + 0^2}{2 + 0}$

5 $-2^4 + 3^{-1}$

6 $(-\frac{3}{2})^4 - 2^{-4}$

7 $16^{-3/4}$

8 $9^{5/2}$

9 $(-0.008)^{2/3}$

10 $(0.008)^{-2/3}$

Ejercicios 11 – 46: Simplifique:

11 $(\frac{1}{2}x^4)(16x^5)$

12 $(-3x^{-2})(4x^4)$

13 $\dfrac{(2x^3)(3x^2)}{(x^2)^3}$

14 $\dfrac{(2x^2)^3}{4x^4}$

15 $(\frac{1}{6}a^5)(-3a^2)(4a^7)$

16 $(-4b^3)(\frac{1}{6}b^2)(-9b^4)$

17 $\dfrac{(6x^3)^2}{(2x^2)^3}$

18 $\dfrac{(3y^3)(2y^2)^2}{(y^4)^3}$

19 $(3u^7v^3)(4u^4v^{-5})$

20 $(x^2yz^3)(-2xz^2)(x^3y^{-2})$

21 $(8x^4y^{-3})(\frac{1}{2}x^{-5}y^2)$

22 $\left(\dfrac{4a^2b}{a^3b^2}\right)\left(\dfrac{5a^2b}{2b^4}\right)$

23 $(\frac{1}{3}x^4y^{-3})^{-2}$

24 $(-2xy^2)^5\left(\dfrac{x^7}{8y^3}\right)$

25 $(3y^3)^4(4y^2)^{-3}$

26 $(-3a^2b^{-5})^3$

27 $(-2r^4s^{-3})^{-2}$

28 $(2x^2y^{-5})(6x^{-3}y)(\frac{1}{3}x^{-1}y^3)$

29 $(5x^2y^{-3})(4x^{-5}y^4)$

30 $(-2r^2s)^5(3r^{-1}s^3)^2$

31 $\left(\dfrac{3x^5y^4}{x^0y^{-3}}\right)^2$

32 $(4a^2b)^4\left(\dfrac{-a^3}{2b}\right)^2$

33 $(4a^{3/2})(2a^{1/2})$

34 $(-6x^{7/5})(2x^{8/5})$

35 $(3x^{5/6})(8x^{2/3})$

36 $(8r)^{1/3}(2r^{1/2})$

37 $(27a^6)^{-2/3}$

38 $(25z^4)^{-3/2}$

39 $(8x^{-2/3})x^{1/6}$

40 $(3x^{1/2})(-2x^{5/2})$

41 $\left(\dfrac{-8x^3}{y^{-6}}\right)^{2/3}$

42 $\left(\dfrac{-y^{3/2}}{y^{-1/3}}\right)^3$

43 $\left(\dfrac{x^6}{9y^{-4}}\right)^{-1/2}$

44 $\left(\dfrac{c^{-4}}{16d^8}\right)^{3/4}$

45 $\dfrac{(x^6y^3)^{-1/3}}{(x^4y^2)^{-1/2}}$

46 $a^{4/3}a^{-3/2}a^{1/6}$

Ejercicios 47 – 52: Reescriba la expresión empleando exponentes racionales.

47 $\sqrt[4]{x^3}$

48 $\sqrt[3]{x^5}$

49 $\sqrt[3]{(a+b)^2}$

50 $\sqrt{a+\sqrt{b}}$

51 $\sqrt{x^2+y^2}$

52 $\sqrt[3]{r^3-s^3}$

Ejercicios 53 – 56: Reescriba la expresión empleando un radical.

53 **(a)** $4x^{3/2}$ **(b)** $(4x)^{3/2}$

54 **(a)** $4 + x^{3/2}$ **(b)** $(4 + x)^{3/2}$

55 **(a)** $8 - y^{1/3}$ **(b)** $(8 - y)^{1/3}$

56 **(a)** $8y^{1/3}$ **(b)** $(8y)^{1/3}$

Ejercicios 57 – 80: Simplifique la expresión y racionalice el denominador, cuando sea el caso.

57 $\sqrt{81}$

58 $\sqrt[3]{-125}$

59 $\sqrt[5]{-64}$

60 $\sqrt[4]{256}$

61 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

62 $\sqrt{\dfrac{1}{7}}$

63 $\sqrt{9x^{-4}y^6}$

64 $\sqrt{16a^8b^{-2}}$

65 $\sqrt[3]{8a^6b^{-3}}$

66 $\sqrt[4]{81r^5s^8}$

67 $\sqrt{\dfrac{3x}{2y^3}}$

68 $\sqrt{\dfrac{1}{3x^3y}}$

69 $\sqrt[3]{\dfrac{2x^4y^4}{9x}}$

70 $\sqrt[3]{\dfrac{3x^2y^5}{4x}}$

71 $\sqrt[4]{\dfrac{5x^8y^3}{27x^2}}$

72 $\sqrt[4]{\dfrac{x^7y^{12}}{125x}}$

73 $\sqrt[5]{\dfrac{5x^7y^2}{8x^3}}$

74 $\sqrt[5]{\dfrac{3x^{11}y^3}{9x^2}}$

75 $\sqrt[4]{(3x^5y^{-2})^4}$ **76** $\sqrt[6]{(2u^{-3}v^4)^6}$

77 $\sqrt[5]{\frac{8x^3}{y^4}}\sqrt[5]{\frac{4x^4}{y^2}}$ **78** $\sqrt{5xy^7}\sqrt{10x^3y^3}$

79 $\sqrt[3]{3t^4v^2}\sqrt[3]{-9t^{-1}v^4}$ **80** $\sqrt[3]{(2r-s)^3}$

Ejercicios 81 – 84: Simplifique la expresión, suponiendo que x y y puedan ser negativos.

81 $\sqrt{x^6y^4}$ **82** $\sqrt{x^4y^{10}}$

83 $\sqrt[4]{x^5(y-1)^6}$ **84** $\sqrt[4]{(x+2)^{12}y^7}$

Ejercicios 85 – 90: Remplace el símbolo □ por =, o bien, por ≠, para hacer válido el enunciado que resulte, siempre que la expresión tenga significado. Explique su respuesta.

85 $(a^r)^2 \square a^{(r^2)}$ **86** $(a^2+1)^{1/2} \square a+1$

87 $a^xb^y \square (ab)^{xy}$ **88** $\sqrt{a^r} \square (\sqrt{a})^r$

89 $\sqrt[n]{\frac{1}{c}} \square \frac{1}{\sqrt[n]{c}}$ **90** $a^{1/k} \square \frac{1}{a^k}$

91 ***Cuenta de ahorros*** Uno de los bancos más antiguos en Estados Unidos es el Bank of America, fundado en 1812. Si en ese tiempo se hubieran depositado 200 dólares en una cuenta que pagara el 4% de interés anual, entonces, 180 años después, el monto hubiera sido $200(1.04)^{180}$ dólares. Evalúe esta cantidad, redondeándola a centavos.

92 ***Visibilidad*** En un día claro, la distancia d, en millas, a la que puede verse desde la azotea de un edificio alto, de altura h (en pies) es, aproximadamente, $d = 1.2\sqrt{h}$. Calcule la distancia aproximada hasta la que se puede ver desde la azotea de la Torre Sears, en Chicago, que tiene 1 454 pies de altura.

93 ***Longitud de un pescado*** La relación longitud-peso de un hipogloso del Pacífico es $L = 0.46\sqrt[3]{W}$, aproximadamente, donde W es el peso, en kilogramos, y L la longitud, en metros. El hipogloso más grande que se ha registrado pesó 230 kg. Estime su longitud.

94 ***Peso de una ballena*** La relación longitud-peso de la ballena *sei* es, aproximadamente, $W = 0.0016L^{2.43}$, con W en toneladas y L en pies. Calcule el peso de una ballena que tenga 25 pies de longitud.

95 ***Ventaja de un levantador de pesas*** Para determinar la ventaja de los levantadores de pesas, se emplea la fórmula de O'Carroll. Si un levantador, que pesa b kg, levanta w kg de pesas, entonces, el peso de ventaja, W, está expresado por

$$W = \frac{w}{\sqrt[3]{b-35}}.$$

Dos pesistas, uno de 75 kg y otro de 120 kg, levantan, respectivamente, 180 kg y 250 kg. Con la fórmula de O'Carroll, determine quién es mejor.

96 ***Superficie del cuerpo humano*** El área superficial de una persona, S, en pies cuadrados es, aproximadamente,

$$S = (0.1091)w^{0.425}h^{0.725},$$

con la estatura, h, expresada en pulgadas, y el peso, w, en libras.

(a) Calcule S para una persona de 6 pies de alto, que pesa 175 lb.

(b) Si una persona tiene 5 pies 6 pulg (5' 6") de estatura o altura, ¿qué efecto tiene un 10% de aumento de peso sobre S ?

1.3 EXPRESIONES ALGEBRAICAS

A veces se emplea la notación y terminología de los conjuntos para describir relaciones matemáticas. Un **conjunto** es una colección de objetos de cierto tipo, que se llaman **elementos** del conjunto. Frecuentemente se usan letras mayúsculas: R, S, T, ... para designar conjuntos, y letras minúsculas: a, b, x, y, ... para representar elementos de conjuntos. En este libro, $\mathbb{R}$ simboliza al conjunto de los números reales, y $\mathbb{Z}$ denota al conjunto de los enteros.

Dos conjuntos, S y T, son **iguales**, lo cual se representa mediante $S = T$, si S y T contienen exactamente los mismos elementos. Se escribe $S \neq T$ si S y T no son iguales. En la tabla siguiente se presentan la terminología y notación que se emplean.

Notación o terminología	Significado	Ejemplo
$a \in S$	a es un elemento de S.	$3 \in \mathbb{Z}$
$a \notin S$	a no es un elemento de S.	$\frac{3}{5} \notin \mathbb{Z}$
S es un **subconjunto** de T	Todo elemento de S es un elemento de T.	$\mathbb{Z}$ es subconjunto de $\mathbb{R}$
Constante	Letra o símbolo que representa un elemento *específico* de un conjunto.	$5, -\sqrt{2}, \pi$
Variable	Letra o símbolo que representa *cualquier* elemento de un conjunto.	Sea x cualquier número real.

Por lo general se emplean las últimas letras del alfabeto, x, y, z, para indicar variables, y las primeras del alfabeto, a, b, c, para indicar constantes. En este libro, a menos que se indique otra cosa, las variables representan números reales.

Si los elementos de un conjunto S tienen determinada propiedad, a veces se escribe $S = \{x: \}$ y se enuncia la propiedad que describe a la variable x en el espacio que está después de los dos puntos. La expresión en donde intervienen las llaves y los dos puntos se lee "el conjunto de todas las x tales que", y se completa la frase enunciando la propiedad deseada. Por ejemplo, $\{x: x > 3\}$ se lee "el conjunto de todas las x tales que x es mayor que 3".

Para conjuntos finitos, a veces se enumeran todos los elementos del conjunto entre llaves. Así, si el conjunto T está formado por los primeros cinco enteros positivos, se escribe $T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Cuando representamos los conjuntos de esta manera, no importa el orden que se use al enunciar los elementos, de modo que se podría haber escrito también $T = \{1, 3, 2, 4, 5\}$, o bien, $T = \{4, 3, 2, 5, 1\}$, etc.

Si se comienza con cualquier grupo de variables y números reales, entonces, una **expresión algebraica** es el resultado obtenido aplicando adiciones, sustracciones, multiplicaciones, divisiones, potencias, o sacando raíces a ese grupo. Si las variables se sustituyen por números específicos en una expresión algebraica, el número que resulta se llama **valor** de la expresión para esos números. El **dominio** de una expresión algebraica consiste en todos los números reales que están representados por las variables. *A menos que se diga otra cosa, se supondrá que el dominio está formado por los valores de las variables que no hagan que la expresión carezca de significado, en el sentido de que los denominadores no pueden ser iguales a cero, y que siempre existen las raíces.* En la tabla siguiente se dan algunos ejemplos.

Expresiones algebraicas

Ejemplo	Dominio	Valor característico
$x^3 - 5x + \frac{6}{\sqrt{x}}$	toda $x > 0$	En $x = 4$: $4^3 - 5(4) + \frac{6}{\sqrt{4}} = 64 - 20 + 3 = 47$
$\frac{2xy + (3/x^2)}{\sqrt[3]{y^2 - 1}}$	toda $x \neq 0$ y toda $y \neq \pm 1$	En $x = 1$ y $y = 3$: $\frac{2(1)(3) + (3/1^2)}{\sqrt[3]{3^2 - 1}} = \frac{6 + 3}{\sqrt[3]{8}} = \frac{9}{2}$

ESCUELA POLITECNI

Si x es una variable, entonces un **monomio** en x es una expresión de la forma ax^n, en la cual a es un número real, y n es un entero no negativo. Un **binomio** es una suma de dos monomios, y un **trinomio** es una suma de tres monomios. Un *polinomio en x* es una suma de cualquier número de monomios en x. Otro modo de decir lo anterior es el siguiente:

Definición de polinomio

Un **polinomio en x** es una suma de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

donde n es un entero no negativo y cada coeficiente a_k es un número real. Si $a_n \neq 0$, entonces se dice que el polinomio es de **grado n.**

Cada expresión $a_k x^k$ en la suma es un **término** del polinomio. Si un coeficiente a_k es cero, por lo general se omite el término $a_k x^k$. El coeficiente a_k de la mayor potencia de x se llama **coeficiente principal** del polinomio.

La tabla siguiente contiene ejemplos específicos de polinomios.

Polinomios

Ejemplo	Coeficiente principal	Grado
$3x^4 + 5x^3 + (-7)x + 4$	3	4
$x^8 + 9x^2 + (-2)x$	1	8
$-5x^2 + 1$	-5	2
$7x + 2$	7	1
8	8	0

Por definición, dos polinomios son **iguales** si y sólo si tienen el mismo grado y son iguales los coeficientes de potencias iguales de x. Si todos los coeficientes de un polinomio son cero, se llama entonces **polinomio cero** y se representa con 0. Sin embargo, por convención, el grado del polinomio cero *no* es cero sino indefinido. Si c es un *número real distinto de cero*, entonces c es un polinomio de grado 0. Tales polinomios, junto con el polinomio cero, se denominan **polinomios constantes**.

Si el coeficiente de un polinomio es negativo, por lo general se emplea un signo menos entre los términos adecuados. Por ejemplo,

$$3x^2 + (-5)x + (-7) = 3x^2 - 5x - 7.$$

También pueden considerarse polinomios en variables diferentes de x. Por ejemplo, $\frac{2}{5}z^2 - 3z^7 + 8 - \sqrt{5}z^4$ es un polinomio en z de grado 7. Con frecuencia se acomodan los términos de un polinomio en orden de las potencias decrecientes de la variable; en ese caso, se escribe

$$\tfrac{2}{5}z^2 - 3z^7 + 8 - \sqrt{5}z^4 = -3z^7 - \sqrt{5}z^4 + \tfrac{2}{5}z^2 + 8.$$

Se puede considerar a un polinomio en x como una expresión algebraica que se obtiene empleando un número finito de adiciones, sustracciones y multiplicaciones donde interviene x. Si una expresión algebraica contiene denominadores o raíces en donde aparezca la variable x, no es entonces un polinomio en x.

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

No polinomios

- $\frac{1}{x} + 3x$
- $\frac{x-5}{x^2+2}$
- $3x^2 + \sqrt{x} - 2$

Como los polinomios representan números reales, se pueden usar las propiedades que se estudiaron en la Secc. 1.1. En especial si las adiciones, sustracciones y multiplicaciones se llevan a cabo con polinomios, se pueden simplificar los resultados mediante las propiedades de los números reales.

EJEMPLO 1 *Adición y sustracción de polinomios*

(a) Determinar la suma en $(x^3 + 2x^2 - 5x + 7) + (4x^3 - 5x^2 + 3)$.
(b) Determinar la resta o diferencia en $(x^3 + 2x^2 - 5x + 7) - (4x^3 - 5x^2 + 3)$.

SOLUCIÓN

(a) Para obtener la suma de dos polinomios cualesquiera en x, se suman los coeficientes de potencias iguales de x.

$$
\begin{aligned}
&(x^3 + 2x^2 - 5x + 7) + (4x^3 - 5x^2 + 3) \\
&\quad = (1 + 4)x^3 + (2 - 5)x^2 - 5x + (7 + 3) && \text{se suman los coeficientes de las potencias iguales de } x \\
&\quad = 5x^3 - 3x^2 - 5x + 10 && \text{se simplifica}
\end{aligned}
$$

Se indicó el agrupamiento en el primer paso para que estuviera todo completo. El lector puede omitir ese paso cuando se tenga dominio sobre las operaciones.

(b) Cuando se restan polinomios, primero se eliminan los paréntesis, tomando en cuenta que el signo menos que precede a la segunda expresión entre paréntesis, cambia el signo de *cada* término de ese polinomio.

$$
\begin{aligned}
&(x^3 + 2x^2 - 5x + 7) - (4x^3 - 5x^2 + 3) \\
&\quad = x^3 + 2x^2 - 5x + 7 - 4x^3 + 5x^2 - 3 && \text{se eliminan los paréntesis} \\
&\quad = (1 - 4)x^3 + (2 + 5)x^2 - 5x + (7 - 3) && \text{se suman los coeficientes de las potencias iguales de } x \\
&\quad = -3x^3 + 7x^2 - 5x + 4 && \text{se simplifica}
\end{aligned}
$$

EJEMPLO 2 *Multiplicación de binomios*

Determinar el producto $(4x + 5)(3x - 2)$.

SOLUCIÓN Ya que $3x - 2 = 3x + (-2)$, se procede como en el Ejem. 1 de la Secc. 1.1:

$$
\begin{aligned}
&(4x + 5)(3x - 2) \\
&\quad = (4x)(3x) + (4x)(-2) + (5)(3x) + (5)(-2) && \text{propiedades distributivas} \\
&\quad = 12x^2 - 8x + 15x - 10 && \text{se multiplica} \\
&\quad = 12x^2 + 7x - 10 && \text{se simplifica}
\end{aligned}
$$

Con suficiente práctica en la resolución de problemas del tipo del Ejem. 2, el lector podrá llevar a cabo los dos primeros pasos en forma mental, y llegar directamente a la expresión final.

En el ejemplo que sigue se presentan distintos métodos para determinar el producto de dos polinomios.

EJEMPLO 3 *Multiplicación de polinomios*

Determinar el producto $(x^2 + 5x - 4)(2x^3 + 3x - 1)$

SOLUCIÓN

Método 1 Se comienza con una propiedad distributiva, considerando al polinomio $2x^3 + 3x - 1$ como un número real único:

$$(x^2 + 5x - 4)(2x^3 + 3x - 1)$$
$$= x^2(2x^3 + 3x - 1) + 5x(2x^3 + 3x - 1) - 4(2x^3 + 3x - 1)$$

A continuación se usa tres veces otra propiedad distributiva y se simplifica el resultado, obteniendo

$$\begin{aligned}(x^2 + 5x - 4)(2x^3 + 3x - 1) &= 2x^5 + 3x^3 - x^2 + 10x^4 + 15x^2 - 5x - 8x^3 - 12x + 4 \\ &= 2x^5 + 10x^4 - 5x^3 + 14x^2 - 17x + 4.\end{aligned}$$

Nótese que los tres monomios del primer polinomio fueron multiplicados por cada uno de los tres monomios del segundo polinomio, lo que da un total de 9 términos.

Método 2 Se colocan verticalmente los polinomios y se multiplica; se deja espacio para las potencias de x que tengan coeficiente cero, como sigue:

$$\begin{array}{rrrrrrl}
2x^3 & +3x & -1 & & & & \\
x^2 & +5x & -4 & & & & \\
\hline
2x^5 & & +3x^3 & -x^2 & & & = x^2\ (2x^3 + 3x - 1) \\
 & 10x^4 & & +15x^2 & -5x & & = 5x\ (2x^3 + 3x - 1) \\
 & & -8x^3 & & -12x & +4 & = -4\,(2x^3 + 3x - 1) \\
\hline
2x^5 & +10x^4 & -5x^3 & +14x^2 & -17x & +4 & = \text{suma de lo de arriba}
\end{array}$$

En la práctica se omitirían las explicaciones (igualdades) anotadas a la derecha, en los últimos cuatro renglones.

Es posible manejar polinomios de más de una variable. Por ejemplo, un polinomio en *dos* variables, x, y, es una suma finita de términos, cada uno de la forma ax^my^k para un número real, a, y enteros no negativos, m y k. Un ejemplo sería

$$3x^4y + 2x^3y^5 + 7x^2 - 4xy + 8y - 5.$$

En otros polinomios pueden intervenir tres variables, como x, y, z, o bien, *cualquier* número de variables. Se llevan a cabo la adición, sustracción y multiplicación empleando las propiedades de los números reales, igual que para polinomios de una variable.

Con el ejemplo siguiente se ilustra la división de un polinomio entre un monomio.

EJEMPLO 4 ***División de un polinomio entre un monomio***

Expresar como polinomio en x y y:

$$\frac{6x^2y^3 + 4x^3y^2 - 10xy}{2xy}$$

SOLUCIÓN

$$\frac{6x^2y^3 + 4x^3y^2 - 10xy}{2xy} = \frac{6x^2y^3}{2xy} + \frac{4x^3y^2}{2xy} - \frac{10xy}{2xy} \quad \text{se divide cada término entre } 2xy$$

$$= 3xy^2 + 2x^2y - 5 \quad \text{se simplifica}$$

Los productos que aparecen en la siguiente tabla aparecen con tanta frecuencia que merecen atención especial. El lector puede comprobar la validez de cada fórmula mediante multiplicación. En (2) y en (3), el símbolo $\pm$ se lee "más menos". Cuando se emplean estas fórmulas se usa el signo anterior en ambos miembros, o el signo de abajo, también en ambos miembros. Así, (2) es en realidad *dos* fórmulas:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad \text{y} \quad (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Del mismo modo, (3) representa dos fórmulas.

Fórmulas de producto

Fórmula	Ejemplo
(1) $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$	$(2a + 3)(2a - 3) = (2a)^2 - 3^2 = 4a^2 - 9$
(2) $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$	$(2a - 3)^2 = (2a)^2 - 2(2a)(3) + (3)^2 = 4a^2 - 12a + 9$
(3) $(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$	$(2a + 3)^3 = (2a)^3 + 3(2a)^2(3) + 3(2a)(3)^2 + (3)^3 = 8a^3 + 36a^2 + 54a + 27$

En el ejemplo que sigue se dan otros casos de las fórmulas de producto.

EJEMPLO 5 ***Empleo de fórmulas de producto***

Determinar el producto:

(a) $(2r^2 - \sqrt{s})(2r^2 + \sqrt{s})$ **(b)** $\left(\sqrt{c} + \frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2$ **(c)** $(2a - 5b)^3$

SOLUCIÓN

(a) Se usa la fórmula (1) de productos con $x = 2r^2$ y $y = \sqrt{s}$:

$$(2r^2 - \sqrt{s})(2r^2 + \sqrt{s}) = (2r^2)^2 - (\sqrt{s})^2$$

$$= 4r^4 - s$$

(b) Se utiliza la fórmula (2) de productos con $x = \sqrt{c}$ y $y = \frac{1}{\sqrt{c}}$:

$$\left(\sqrt{c} + \frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 = (\sqrt{c})^2 + 2\sqrt{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}} + \left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2$$

$$= c + 2 + \frac{1}{c}$$

Nótese que la última expresión *no es* un polinomio.

(c) Se utiliza la fórmula (2) de productos, con $x = 2a$ y $y = 5b$:

$$(2a - 5b)^3 = (2a)^3 - 3(2a)^2(5b) + 3(2a)(5b)^2 - (5b)^3$$
$$= 8a^3 - 60a^2b + 150ab^2 - 125b^3$$

Si un polinomio es producto de otros polinomios, entonces cada polinomio en el producto es un **factor** del polinomio original. La **factorización** es el proceso de expresar una suma de términos en forma de un producto. Por ejemplo, como $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$, los polinomios $x + 3$, y $x - 3$, son factores de $x^2 - 9$.

La factorización es importante en matemáticas, porque se puede usar para reducir el estudio de una expresión complicada, al de varias expresiones más simples. Por ejemplo, pueden determinarse las propiedades del polinomio $x^2 - 9$ examinando los factores $x + 3$ y $x - 3$. Como se ve en el Cap. 2, otro uso importante para la factorización es determinar soluciones de ecuaciones.

Son importantes, ante todo, los **factores no triviales** de los polinomios; es decir, factores que contengan polinomios de grado positivo. Sin embargo, al restringir los coeficientes a *enteros*, entonces, por lo general, se elimina un factor común entero de cada término del polinomio. Por ejemplo,

$$4x^2y + 8z^3 = 4(x^2y + 2z^3).$$

Un polinomio con coeficientes en algún conjunto S de números, es **primo**, o **irreducible** sobre S, si no se puede escribir como producto de dos polinomios de grado positivo con coeficientes en S. Un polinomio puede ser irreducible sobre un conjunto de S, pero no sobre otro. Por ejemplo, $x^2 - 2$ es irreducible sobre los números racionales, porque no puede expresarse como producto de dos polinomios de grado positivo que tengan coeficientes *racionales*. Sin embargo, $x^2 - 2$ *no* es irreducible sobre los números reales, porque es posible escribir

$$x^2 - 2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}).$$

Igualmente, $x^2 + 1$ es irreducible sobre los números reales, pero –como se verá en la Secc. 2.4– no lo es sobre los números complejos.

Todo polinomio $ax + b$ de grado 1 es irreducible.

Antes de factorizar un polinomio, se debe especificar el sistema (o conjunto) numérico del cual se toman los coeficientes de los factores. En este capítulo se aplica la regla de que *si un polinomio tiene coeficientes enteros, entonces los factores deben ser polinomios con coeficientes enteros*. **Factorizar un polinomio** quiere decir expresarlo en forma de producto de polinomios irreducibles.

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Polinomios factorizados

❑ $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$ ❑ $4x^2 - 9y^2 = (2x - 3y)(2x + 3y)$

Por lo general, es difícil factorizar polinomios de grado mayor que 2. En casos sencillos, las fórmulas de factorización siguientes pueden ser de utilidad. Cada fórmula se puede comprobar multiplicando los factores al lado derecho del signo igual. Se puede demostrar que los factores $x^2 + xy + y^2$, y $x^2 - xy + y^2$ en la diferencia y la suma de dos cubos, respectivamente, son irreducibles sobre los números reales.

Fórmulas de factorización

Fórmula	Ejemplo
(1) Diferencia de cuadrados: $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$	$9a^2 - 16 = (3a)^2 - (4)^2 = (3a + 4)(3a - 4)$
(2) Diferencia de cubos: $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$	$8a^3 - 27 = (2a)^3 - (3)^3$ $= (2a - 3)[(2a)^2 + (2a)(3) + (3)^2]$ $= (2a - 3)(4a^2 + 6a + 9)$
(3) Suma de cubos: $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$	$125a^3 + 1 = (5a)^3 + (1)^3$ $= (5a + 1)[(5a)^2 - (5a)(1) + (1)^2]$ $= (5a + 1)(25a^2 - 5a + 1)$

En los dos ejemplos siguientes se presentan algunos otros casos del uso de fórmulas de factorización.

EJEMPLO 6 *Diferencia de cuadrados*

Factorizar el polinomio:

(a) $25r^2 - 49s^2$ **(b)** $81x^4 - y^4$ **(c)** $16x^4 - (y - 2z)^2$

SOLUCIÓN

(a) Se aplica la fórmula de la diferencia de cuadrados, con $x = 5r$, y $y = 7s$:

$$25r^2 - 49s^2 = (5r)^2 - (7s)^2 = (5r + 7s)(5r - 7s)$$

(b) Se considera $81x^4 = (9x^2)^2$, y $y^4 = (y^2)^2$, y se aplica dos veces la fórmula de la diferencia de cuadrados:

$$\begin{aligned} 81x^4 - y^4 &= (9x^2)^2 - (y^2)^2 \\ &= (9x^2 + y^2)(9x^2 - y^2) \\ &= (9x^2 + y^2)[(3x)^2 - (y)^2] \\ &= (9x^2 + y^2)(3x + y)(3x - y) \end{aligned}$$

(c) Se escribe $16x^4 = (4x^2)^2$, y se aplica la fórmula de la diferencia de cuadrados:

$$16x^4 - (y - 2z)^2 = (4x^2)^2 - (y - 2z)^2$$

$$= [(4x^2) + (y - 2z)][(4x^2) - (y - 2z)]$$
$$= (4x^2 + y - 2z)(4x^2 - y + 2z)$$

EJEMPLO 7 ***Suma y diferencia de cubos***

Factorizar el polinomio:

(a) $a^3 + 64b^3$ **(b)** $8c^6 - 27d^9$

SOLUCIÓN

(a) Se aplica la fórmula de la suma de cubos, haciendo $x = a$ y $y = 4b$:

$$a^3 + 64b^3 = a^3 + (4b)^3$$
$$= (a + 4b)[a^2 - a(4b) + (4b)^2]$$
$$= (a + 4b)(a^2 - 4ab + 16b^2)$$

(b) Se aplica la fórmula de la diferencia de cubos, con $x = 2c^2$ y $y = 3d^3$:

$$8c^6 - 27d^9 = (2c^2)^3 - (3d^3)^3$$
$$= (2c^2 - 3d^3)[(2c^2)^2 + (2c^2)(3d^3) + (3d^3)^2]$$
$$= (2c^2 - 3d^3)(4c^4 + 6c^2d^3 + 9d^6)$$

La factorización de un trinomio $px^2 + qx + r$, en la cual p, q y r son enteros, debe tener la forma

$$px^2 + qx + r = (ax + b)(cx + d),$$

donde a, b, c, d son enteros. Por consiguiente,

$$ac = p, \qquad bd = r, \qquad \text{y} \qquad ad + bc = q.$$

Sólo hay un número limitado de selecciones de a, b, c y d que satisface estas condiciones. Si ninguna selección las cumple, entonces $px^2 + qx + r$ es irreducible. Tratar las diversas posibilidades, como se ve en el ejemplo siguiente, se llama **método de tanteos o método de ensayo y error.** Este procedimiento también se puede aplicar a trinomios de la forma $px^2 + qxy + ry^2$, en cuyo caso la factorización debe tener la forma $(ax + by)(cx + dy)$.

EJEMPLO 8 ***Factorización de un trinomio por ensayo y error***

Factorizar $6x^2 - 7x - 3$.

SOLUCIÓN Si se escribe

$$6x^2 - 7x - 3 = (ax + b)(cx + d),$$

entonces deben ser válidas las siguientes relaciones:

$$ac = 6, \qquad bd = -3, \qquad \text{y} \qquad ad + bc = -7$$

Si se supone que tanto a como c son positivos, entonces en la siguiente tabla aparecen todos los valores posibles:

a	1	6	2	3
c	6	1	3	2

De modo que si $6x^2 - 7x - 3$ es factorizable, entonces una de las ecuaciones siguientes debe ser válida:

$$6x^2 - 7x - 3 = (x + b)(6x + d)$$
$$6x^2 - 7x - 3 = (6x + b)(x + d)$$
$$6x^2 - 7x - 3 = (2x + b)(3x + d)$$
$$6x^2 - 7x - 3 = (3x + b)(2x + d)$$

A continuación se dan todos los valores posibles de b y d. Como $bd = -3$, los valores son los siguientes:

b	1	-1	3	-3
d	-3	3	-1	1

Al probar varios (quizá todos) valores, se llega a $b = -3$ y $d = 1$; es decir,

$$6x^2 - 7x - 3 = (2x - 3)(3x + 1).$$

Como comprobación, el lector debe multiplicar en la factorización final para ver si obtiene el polinomio dado.

El método de ensayo y error que se empleo en el Ejemplo 8 puede ser largo y tedioso si los coeficientes del polinomio son grandes y tienen muchos factores primos. Para casos sencillos, con frecuencia se puede llegar con rapidez a la selección correcta.

EJEMPLO 9 *Factorización de polinomios*

Factorizar:

(a) $12x^2 - 36xy + 27y^2$ **(b)** $4x^4y - 11x^3y^2 + 6x^2y^3$

SOLUCIÓN

(a) Como cada término tiene a 3 como factor común, se empieza escribiendo

$$12x^2 - 36xy + 27y^2 = 3(4x^2 - 12xy + 9y^2).$$

La factorización de $4x^2 - 12xy + 9y^2$ como producto de dos polinomios de primer grado debe tener la forma

$$4x^2 - 12xy + 9y^2 = (ax + by)(cx + dy)$$

con

$$ac = 4, \qquad bd = 9, \qquad \text{y} \qquad ad + bc = -12.$$

Por medio del método de ensayo y error, como en el Ejem. 8, se obtiene

$$4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x - 3y)(2x - 3y) = (2x - 3y)^2.$$

Así,

$$12x^2 - 36xy + 27y^2 = 3(4x^2 - 12xy + 9y^2) = 3(2x - 3y)^2.$$

(b) Como cada término tiene a x^2y como factor, se comienza escribiendo

$$4x^4y - 11x^3y^2 + 6x^2y^3 = x^2y(4x^2 - 11xy + 6y^2).$$

Por prueba y error se tiene la factorización

$$4x^4y - 11x^3y^2 + 6x^2y^3 = x^2y(4x - 3y)(x - 2y).$$

Si una suma contiene cuatro términos o más, es posible agruparlos de manera adecuada y, a continuación, hallar una factorización mediante las propiedades distributivas. Esta técnica, que se llama **factorización por agrupamiento**, se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 10 *Factorización por agrupamiento*

Factorizar:

(a) $4ac + 2bc - 2ad - bd$ **(b)** $3x^3 + 2x^2 - 12x - 8$

(c) $x^2 - 16y^2 + 10x + 25$

SOLUCIÓN

(a) Se agrupan los dos primeros términos y los dos últimos, y después se procede como sigue:

$$\begin{aligned} 4ac + 2bc - 2ad - bd &= (4ac + 2bc) - (2ad + bd) \\ &= 2c(2a + b) - d(2a + b) \end{aligned}$$

En esta etapa no se ha factorizado la expresión dada debido a que el miembro derecho tiene la forma

$$2ck - dk \quad \text{siendo} \quad k = 2a + b.$$

Sin embargo, si se toma a k como factor común, entonces

$$2ck - dk = (2c - d)k = (2c - d)(2a + b).$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} 4ac + 2bc - 2ad - bd &= 2c(2a + b) - d(2a + b) \\ &= (2c - d)(2a + b). \end{aligned}$$

(b) Se agrupan los dos primeros y los dos últimos términos, y a continuación se procede como sigue:

$$\begin{aligned} 3x^3 + 2x^2 - 12x - 8 &= (3x^3 + 2x^2) - (12x + 8) \\ &= x^2(3x + 2) - 4(3x + 2) \\ &= (x^2 - 4)(3x + 2) \end{aligned}$$

Por último, con la fórmula de la diferencia de cuadrados para $x^2 - 4$, se tiene la factorización:

$$3x^3 + 2x^2 - 12x - 8 = (x + 2)(x - 2)(3x + 2)$$

(c) Primero se agrupan los términos y, a continuación, se aplica la fórmula de la diferencia de cuadrados, como sigue:

$$\begin{aligned} x^2 - 16y^2 + 10x + 25 &= (x^2 + 10x + 25) - 16y^2 \\ &= (x + 5)^2 - (4y)^2 \\ &= [(x + 5) + 4y][(x + 5) - 4y] \\ &= (x + 4y + 5)(x - 4y + 5) \end{aligned}$$

EJERCICIOS 1.3

Ejercicios 1-44: Exprese en forma de polinomio.

1 $(3x^3 + 4x^2 - 7x + 1) + (9x^3 - 4x^2 - 6x)$

2 $(7x^3 + 2x^2 - 11x) + (-3x^3 - 2x^2 + 5x - 3)$

3 $(4x^3 + 5x - 3) - (3x^3 + 2x^2 + 5x - 7)$

4 $(6x^3 - 2x^2 + x - 2) - (8x^2 - x - 2)$

5 $(2x + 5)(3x - 7)$

6 $(3x - 4)(2x + 9)$

7 $(5x + 7y)(3x + 2y)$

8 $(4x - 3y)(x - 5y)$

9 $(2u + 3)(u - 4) + 4u(u - 2)$

10 $(3u - 1)(u + 2) + 7u(u + 1)$

11 $(3x + 5)(2x^2 + 9x - 5)$

12 $(7x - 4)(x^3 - x^2 + 6)$

13 $(t^2 + 2t - 5)(3t^2 - t + 2)$

14 $(r^2 - 8r - 2)(-r^2 + 3r - 1)$

15 $(x + 1)(2x^2 - 2)(x^3 + 5)$

16 $(2x - 1)(x^2 - 5)(x^3 - 1)$

17 $\dfrac{8x^2y^3 - 10x^3y}{2x^2y}$

18 $\dfrac{6a^3b^3 - 9a^2b^2 + 3ab^4}{3ab^2}$

19 $\dfrac{3u^3v^4 - 2u^5v^2 + (u^2v^2)^2}{u^3v^2}$

20 $\dfrac{6x^2yz^3 - xy^2z}{xyz}$

21 $(2x + 3y)(2x - 3y)$

22 $(5x + 4y)(5x - 4y)$

23 $(x^2 + 2y)(x^2 - 2y)$

24 $(3x + y^3)(3x - y^3)$

25 $(x^2 + 9)(x^2 - 4)$

26 $(x^2 + 1)(x^2 - 16)$

27 $(3x + 2y)^2$

28 $(5x - 4y)^2$

29 $(x^2 - 3y^2)^2$

30 $(2x^2 + 5y^2)^2$

31 $(x + 2)^2(x - 2)^2$

32 $(x + y)^2(x - y)^2$

33 $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})$

34 $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$

35 $(x^{1/3} - y^{1/3})(x^{2/3} + x^{1/3}y^{1/3} + y^{2/3})$

36 $(x^{1/3} + y^{1/3})(x^{2/3} - x^{1/3}y^{1/3} + y^{2/3})$

37 $(x - 2y)^3$

38 $(x + 3y)^3$

39 $(2x + 3y)^3$

40 $(3x - 4y)^3$

41 $(a + b - c)^2$

42 $(x^2 + x + 1)^2$

43 $(2x + y - 3z)^2$

44 $(x - 2y + 3z)^2$

Ejercicios 45-100: Factorice el polinomio.

45 $rs + 4st$

46 $4u^2 - 2uv$

47 $3a^2b^2 - 6a^2b$

48 $10xy + 15xy^2$

49 $3x^2y^3 - 9x^3y^2$

50 $16x^5y^2 + 8x^3y^3$

51 $15x^3y^5 - 25x^4y^2 + 10x^6y^4$

52 $121r^3s^4 + 77r^2s^4 - 55r^4s^3$

53 $8x^2 - 53x - 21$

54 $7x^2 + 10x - 8$

55 $x^2 + 3x + 4$

56 $3x^2 - 4x + 2$

57 $6x^2 + 7x - 20$

58 $12x^2 - x - 6$

59 $12x^2 - 29x + 15$

60 $21x^2 + 41x + 10$

61 $4x^2 - 20x + 25$

62 $9x^2 + 24x + 16$

63 $25z^2 + 30z + 9$

64 $16z^2 - 56z + 49$

65 $45x^2 + 38xy + 8y^2$

66 $50x^2 + 45xy - 18y^2$

67 $36r^2 - 25t^2$

68 $81r^2 - 16t^2$

69 $z^4 - 64w^2$

70 $9y^4 - 121x^2$

71 $x^4 - 4x^2$

72 $x^3 - 25x$

73 $x^2 + 25$

74 $4x^2 + 9$

75 $75x^2 - 48y^2$

76 $64x^2 - 36y^2$

77 $64x^3 + 27$

78 $125x^3 - 8$

79 $64x^3 - y^6$

80 $216x^9 + 125y^3$

81 $343x^3 + y^9$

82 $x^6 - 27y^3$

83 $2ax - 6bx + ay - 3by$

84 $2ay^2 - axy + 6xy - 3x^2$

85 $3x^3 + 3x^2 - 27x - 27$

86 $5x^3 + 10x^2 - 20x - 40$

87 $x^4 + 2x^3 - x - 2$

88 $x^4 - 3x^3 + 8x - 24$

89 $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$

90 $6w^8 + 17w^4 + 12$

91 $a^6 - b^6$

92 $x^8 - 16$

93 $x^2 + 4x + 4 - 9y^2$

94 $x^2 - 4y^2 - 6x + 9$

95 $y^2 - x^2 + 8y + 16$

96 $y^2 + 9 - 6y - 4x^2$

97 $y^6 + 7y^3 - 8$

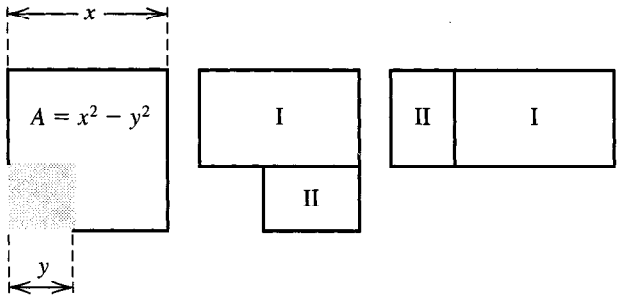
98 $8c^6 + 19c^3 - 27$

99 $x^{16} - 1$

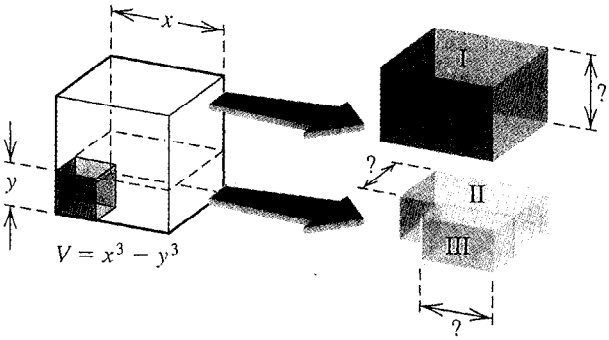
100 $4x^3 + 4x^2 + x$

Ejercicios 101 y 102: Los antiguos griegos proporcionaron demostraciones geométricas de las fórmulas de factorización para la diferencia de cuadrados y de cubos. Deduzca la fórmula para el caso especial que se describe.

101 Determine las áreas de las regiones I y II de la figura, a fin de establecer la fórmula de la diferencia de cuadrados, para el caso especial en el que $x > y$.



102 Determine los volúmenes de los prismas o cajas I, II y III en la figura, a fin de establecer la fórmula de la diferencia de cubos, para el caso especial en el que $x > y$.



1.4 EXPRESIONES FRACCIONARIAS

Una **expresión fraccionaria** es el cociente de dos expresiones algebraicas. Como caso especial, una **expresión racional** es el cociente, p/q, de dos *polinomios*, p y q. Como no se permite la división entre cero, el dominio de p/q es todos los números reales, a excepción de los que hacen que el denominador sea cero. En la tabla siguiente se presentan dos ejemplos.

Expresiones racionales

Ejemplo	Dominio
$\dfrac{6x^2 - 5x + 4}{x^2 - 9}$	Para toda $x \neq \pm 3$
$\dfrac{x^3 - 3x^2y + 4y^2}{y - x^3}$	Para toda x y y tales que $y \neq x^3$

En la mayor parte de los casos presentados se estudiarán expresiones racionales en las cuales tanto numerador como denominador son polinomios en una variable.

Como las variables en una expresión racional representan números reales, se usan las propiedades de los cocientes de la Secc. 1.1, reemplazando las letras a, b, c, d con polinomios. La propiedad siguiente tiene especial importancia donde $bd \neq 0$:

$$\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{d} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$$

A veces se describe este proceso de simplificación diciendo que *se puede cancelar un factor distinto de cero cuando aparece en el numerador y el denominador de una fracción o cociente.* En la práctica, se indica normalmente esta simplificación mediante un cruce con diagonal (tache) del factor común, como en el siguiente ejemplo ilustrativo, en el cual se supone que todos los denominadores son distintos de cero.

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Cancelación de factores comunes

- $\frac{a\cancel{d}}{b\cancel{d}} = \frac{a}{b}$
- $\frac{m\cancel{n}}{\cancel{n}pq} = \frac{m}{pq}$
- $\frac{\cancel{p}q\cancel{r}}{\cancel{r}\cancel{p}v} = \frac{q}{v}$

Una expresión racional se *simplifica*, o se *reduce a sus términos mínimos*, si el numerador y el denominador no tienen factores polinomiales comunes de grado positivo, y no tienen factores enteros comunes mayores que 1. Para simplificar una expresión, se factorizan tanto el numerador como el denominador en sus factores primos, para después –suponiendo que los factores del denominador no sean cero– cancelar los factores comunes, como en el ejemplo siguiente:

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Simplificación de expresiones racionales

- $\frac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 - 4} = \frac{(3x + 1)\cancel{(x - 2)}}{(x + 2)\cancel{(x - 2)}} \overset{\text{si } x \neq 2}{=} \frac{3x + 1}{x + 2}$
- $\frac{2 - x - 3x^2}{6x^2 - x - 2} = \frac{-(3x^2 + x - 2)}{6x^2 - x - 2} = -\frac{\cancel{(3x - 2)}(x + 1)}{\cancel{(3x - 2)}(2x + 1)} \overset{\text{si } x \neq 2}{=} -\frac{x + 1}{2x + 1}$
- $\frac{(x^2 + 8x + 16)(x - 5)}{(x^2 - 5x)(x^2 - 16)} = \frac{(x + 4)^{\overset{1}{2}}\cancel{(x - 5)}}{x\cancel{(x - 5)}\cancel{(x + 4)}(x - 4)} \overset{\text{si } x \neq 5,\ \text{si } x \neq -4}{=} \frac{x + 4}{x(x - 4)}$

Como se indica en el ejemplo siguiente, cuando se simplifica un producto o un cociente de expresiones racionales, suelen emplearse las propiedades de los cocientes para obtener una expresión racional. A continuación, se factorizan numerador y denominador, y se simplifican los factores comunes, como se hizo en el ejemplo ilustrativo anterior.

EJEMPLO 1 *Productos y cocientes de expresiones racionales*

Efectuar la operación que se indica, y simplificar:

(a) $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 1} \cdot \frac{2x - 2}{x - 3}$ **(b)** $\frac{x + 2}{2x - 3} \div \frac{x^2 - 4}{2x^2 - 3x}$

SOLUCIÓN

(a) $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-1}\cdot\dfrac{2x-2}{x-3}=\dfrac{(x^2-6x+9)(2x-2)}{(x^2-1)(x-3)}$ propiedad de los cocientes

$=\dfrac{(x-3)^2\cdot 2(x-1)}{(x+1)(x-1)(x-3)}$ se factorizan todos los polinomios

si $x\neq 3, x\neq 1$

$=\dfrac{2(x-3)}{x+1}$ se simplifican factores comunes

(b) $\dfrac{x+2}{2x-3}\div\dfrac{x^2-4}{2x^2-3x}=\dfrac{x+2}{2x-3}\cdot\dfrac{2x^2-3x}{x^2-4}$ propiedad de los cocientes

$=\dfrac{(x+2)x(2x-3)}{(2x-3)(x+2)(x-2)}$ propiedad de los cocientes
factorización de todos los polinomios

si $x\neq -2, x\neq \frac{3}{2}$

$=\dfrac{x}{x-2}$ se cancelan factores comunes

Para sumar o restar dos expresiones racionales, normalmente se determina un denominador común, y se utilizan las siguientes propiedades de los cocientes:

$$\frac{a}{d}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{d};\qquad \frac{a}{d}-\frac{c}{d}=\frac{a-c}{d}$$

Si los denominadores de las expresiones no son iguales, se obtiene un denominador común al multiplicar por una expresión adecuada el numerador y el denominador de cada fracción. Por lo general, se usa el **mínimo común denominador** (MCD) de los dos cocientes. Para determinar el MCD se factoriza cada denominador en sus factores primos, y a continuación se forma el producto de los factores primos distintos, empleando el exponente *más grande* que aparezca en cada factor primo. Se inicia con un ejemplo numérico de esta técnica.

EJEMPLO 2 *Suma de fracciones usando el MCD*

Expresar como número racional simplificado:

$$\tfrac{7}{24}+\tfrac{5}{18}$$

SOLUCIÓN Las factorizaciones de primos en los denominadores 24 y 18 son: $24=2^3\cdot 3$ y $18=2\cdot 3^2$. Para determinar el MCD, se forma el producto de los distintos factores primos, empleando el exponente mayor de cada uno. Esto da $2^3\cdot 3^2$. Ahora se transforma cada fracción a una equivalente, que tenga el denominador $2^3\cdot 3^2$, y después se suma:

$$\frac{7}{24}+\frac{5}{18}=\frac{7}{2^3\cdot 3}+\frac{5}{2\cdot 3^2}$$
$$=\frac{7}{2^3\cdot 3}\cdot\frac{3}{3}+\frac{5}{2\cdot 3^2}\cdot\frac{2^2}{2^2}$$

(continúa)

$$= \frac{21}{2^3 \cdot 3^2} + \frac{20}{2^3 \cdot 3^2}$$
$$= \frac{41}{2^3 \cdot 3^2} = \frac{41}{72}$$

La forma de hallar el MCD, para expresiones racionales, es análoga al proceso que se vio en el Ejem. 2. La única diferencia es que se usaron factorizaciones de polinomios, en lugar de números enteros.

EJEMPLO 3 ***Sumas y restas de expresiones racionales***

Ejecutar las operaciones y simplificar:

$$\frac{6}{x(3x-2)} + \frac{5}{3x-2} - \frac{2}{x^2}$$

SOLUCIÓN Los denominadores ya están factorizados. El MCD es $x^2(3x-2)$. Para obtener 3 cocientes que tengan el denominador $x^2(3x-2)$, se multiplican por x el numerador y el denominador del primer cociente, los del segundo, por x^2, y los del tercero, por $3x-2$, con lo cual se obtiene

$$\frac{6}{x(3x-2)} + \frac{5}{3x-2} - \frac{2}{x^2} = \frac{6}{x(3x-2)} \cdot \frac{x}{x} + \frac{5}{3x-2} \cdot \frac{x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2} \cdot \frac{3x-2}{3x-2}$$
$$= \frac{6x}{x^2(3x-2)} + \frac{5x^2}{x^2(3x-2)} - \frac{2(3x-2)}{x^2(3x-2)}$$
$$= \frac{6x + 5x^2 - 2(3x-2)}{x^2(3x-2)}$$
$$= \frac{5x^2 + 4}{x^2(3x-2)}.$$

EJEMPLO 4 ***Simplificación de sumas de expresiones racionales***

Efectuar las operaciones y simplificar:

$$\frac{2x+5}{x^2+6x+9} + \frac{x}{x^2-9} + \frac{1}{x-3}$$

SOLUCIÓN Se comienza factorizando los denominadores:

$$\frac{2x+5}{x^2+6x+9} + \frac{x}{x^2-9} + \frac{1}{x-3} = \frac{2x+5}{(x+3)^2} + \frac{x}{(x+3)(x-3)} + \frac{1}{x-3}$$

Como el MCD es $(x+3)^2(x-3)$, se multiplican por $x-3$ numerador y denominador del primer cociente, los del segundo, por $x+3$, y los del tercero, por $(x+3)^2$; después se suma:

$$\frac{(2x+5)(x-3)}{(x+3)^2(x-3)} + \frac{x(x+3)}{(x+3)^2(x-3)} + \frac{(x+3)^2}{(x+3)^2(x-3)}$$
$$= \frac{(2x^2 - x - 15) + (x^2 + 3x) + (x^2 + 6x + 9)}{(x+3)^2(x-3)}$$

(continúa)

$$= \frac{4x^2 + 8x - 6}{(x+3)^2(x-3)} = \frac{2(2x^2 + 4x - 3)}{(x+3)^2(x-3)}$$

A veces es necesario simplificar una **fracción complicada**, es decir, un cociente en el cual numerador y denominador pueden ser expresiones fraccionarias, como se ve en los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 5 ***Simplificación de fracciones complejas***

Simplificar

$$\frac{1 - \dfrac{2}{x+1}}{x - \dfrac{1}{x}}.$$

SOLUCIÓN Se convierte numerador y denominador de la expresión dada, a cocientes sencillos y, a continuación, se usa la regla para dividir cocientes.

$$\frac{1 - \dfrac{2}{x+1}}{x - \dfrac{1}{x}} = \frac{\dfrac{(x+1)-2}{x+1}}{\dfrac{x^2-1}{x}}$$

se combinan expresiones en numerador y denominador

$$= \frac{\dfrac{x-1}{x+1}}{\dfrac{x^2-1}{x}}$$

se simplifica

$$= \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{x}{x^2-1}$$

propiedad de los cocientes

$$= \frac{\cancel{(x-1)}x}{(x+1)(x+1)\cancel{(x-1)}}$$

propiedad de los cocientes; se factoriza $x^2 - 1$

si $x \neq 1$

$$= \frac{x}{(x+1)^2}$$

se cancela $x - 1$

Otra forma es multiplicar por $x(x+1)$ numerador y denominador de la expresión dada, que es el MCD de $2/(x+1)$ y $1/x$, y luego se simplifica el resultado.

Algunos cocientes que no son expresiones racionales contienen denominadores de la forma $a + \sqrt{b}$, o bien, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. Como en el ejemplo siguiente, esos cocientes se pueden simplificar multiplicando numerador y denominador por el **conjugado** $a - \sqrt{b}$, o bien, $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, respectivamente. Desde luego, si aparece $a - \sqrt{b}$, se multiplica, en ese caso, por $a + \sqrt{b}$.

EJEMPLO 6 ***Racionalización de un denominador***

Racionalizar el denominador de

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}.$$

SOLUCIÓN

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

se multiplican numerador y denominador por el conjugado de $\sqrt{x}+\sqrt{y}$

$$= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2}$$

propiedad de los cocientes y diferencia de cuadrados

$$= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$$

ley de los radicales

En Cálculo, a veces es necesario racionalizar el *numerador* de un cociente, como veremos en el ejemplo que sigue.

EJEMPLO 7 ***Racionalización de un numerador***

Si $h \neq 0$, racionalizar el numerador de

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}.$$

SOLUCIÓN

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

se multiplican numerador y denominador por el conjugado de $\sqrt{x+h}-\sqrt{x}$

$$= \frac{(\sqrt{x+h})^2-(\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

propiedad de los cocientes y la diferencia de cuadrados

$$= \frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

ley de los radicales

$$= \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

se simplifica

$$= \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

se cancela $h \neq 0$

Parece que se ha ganado muy poco, ya que hay radicales en el denominador. Sin embargo, en Cálculo interesa determinar lo que ocurre cuando h tiende, o se aproxima, a cero. Nótese que si se usa la expresión *dada* se llega a lo siguiente:

$$\text{Si } h \approx 0, \text{ entonces } \quad \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \approx \frac{\sqrt{x+0}-\sqrt{x}}{0} = \frac{0}{0},$$

que es una expresión sin significado. Sin embargo, si se utiliza la forma *racionalizada*, se obtiene la información siguiente:

Si $h \approx 0$, entonces $\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \approx \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

En algunos problemas en Cálculo es necesario simplificar expresiones del tipo que aparece en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 8 ***Simplificación de una expresión racional***

Si $h \neq 0$, simplificar:

$$\frac{\dfrac{1}{(x+h)^2} - \dfrac{1}{x^2}}{h}$$

SOLUCIÓN

$$\frac{\dfrac{1}{(x+h)^2} - \dfrac{1}{x^2}}{h} = \frac{\dfrac{x^2-(x+h)^2}{(x+h)^2x^2}}{h}$$ se combinan cocientes en el numerador

$$= \frac{x^2-(x^2+2xh+h^2)}{(x+h)^2x^2} \cdot \frac{1}{h}$$ se eleva al cuadrado $x+h$; se usa una propiedad de los cocientes

$$= \frac{x^2-x^2-2xh-h^2}{(x+h)^2x^2h}$$ se eliminan paréntesis

$$= \frac{-h(2x+h)}{(x+h)^2x^2h}$$ se simplifica; se saca $-h$ como factor común

$$= -\frac{2x+h}{(x+h)^2x^2}$$ se cancela $h \neq 0$.

También, en Cálculo, se encuentran problemas como el que se presenta en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 9 ***Simplificación de una expresión fraccionaria***

Simplificar:

$$\frac{3x^2(2x+5)^{1/2} - x^3(\frac{1}{2})(2x+5)^{-1/2}(2)}{[(2x+5)^{1/2}]^2}.$$

SOLUCIÓN Un modo de simplificar la expresión es el siguiente:

$$\frac{3x^2(2x+5)^{1/2} - x^3(\frac{1}{2})(2x+5)^{-1/2}(2)}{[(2x+5)^{1/2}]^2}$$

$$= \frac{3x^2(2x+5)^{1/2} - \dfrac{x^3}{(2x+5)^{1/2}}}{2x+5}$$ definición de exponente negativo

(continúa)

$$= \frac{\dfrac{3x^2(2x+5) - x^3}{(2x+5)^{1/2}}}{2x+5}$$ se combinan términos en el numerador

$$= \frac{6x^3 + 15x^2 - x^3}{(2x+5)^{1/2}} \cdot \frac{1}{2x+5}$$ propiedad de los cocientes

$$= \frac{5x^3 + 15x^2}{(2x+5)^{3/2}}$$ se simplifica

$$= \frac{5x^2(x+3)}{(2x+5)^{3/2}}$$ se factoriza el numerador

Otra forma de simplificar es eliminar la potencia negativa, $(2x+5)^{-1/2}$ en la expresión dada, como sigue:

$$\frac{3x^2(2x+5)^{1/2} - x^3(\frac{1}{2})(2x+5)^{-1/2}(2)}{[(2x+5)^{1/2}]^2} \cdot \frac{(2x+5)^{1/2}}{(2x+5)^{1/2}}$$ se multiplican numerador y denominador por $(2x+5)^{1/2}$

$$= \frac{3x^2(2x+5) - x^3}{(2x+5)(2x+5)^{1/2}}$$ propiedad de los cocientes y ley de los exponentes

El resto de la simplificación es semejante.

Un tercer método de simplificación es sacar primero como factor común el *máximo factor común* (MFC) del numerador. El MFC es el producto de los factores comunes, elevado cada uno al menor exponente distinto de cero. En este caso, los factores comunes son x y $(2x+5)$, y los exponentes menores son 2 y $-\frac{1}{2}$, respectivamente. Así que el MFC es $x^2(2x+5)^{-1/2}$; se factoriza el numerador y se simplifica como sigue:

$$\frac{x^2(2x+5)^{-1/2}[3(2x+5)^1 - x]}{(2x+5)^1} = \frac{x^2(5x+15)}{(2x+5)^{3/2}} = \frac{5x^2(x+3)}{(2x+5)^{3/2}}$$

EJERCICIOS 1.4

Ejercicios 1 – 4: Escriba la expresión en forma de número racional simplificado.

1 $\frac{3}{50} + \frac{7}{30}$

2 $\frac{4}{63} + \frac{5}{42}$

3 $\frac{5}{24} - \frac{3}{20}$

4 $\frac{11}{54} - \frac{7}{72}$

Ejercicios 5 – 44: Simplifique la expresión.

5 $\dfrac{2x^2 + 7x + 3}{2x^2 - 7x - 4}$

6 $\dfrac{2x^2 + 9x - 5}{3x^2 + 17x + 10}$

7 $\dfrac{y^2 - 25}{y^3 - 125}$

8 $\dfrac{y^2 - 9}{y^3 + 27}$

9 $\dfrac{12 + r - r^2}{r^3 + 3r^2}$

10 $\dfrac{10 + 3r - r^2}{r^4 + 2r^3}$

11 $\dfrac{9x^2 - 4}{3x^2 - 5x + 2} \cdot \dfrac{9x^4 - 6x^3 + 4x^2}{27x^4 + 8x}$

12 $\dfrac{4x^2 - 9}{2x^2 + 7x + 6} \cdot \dfrac{4x^4 + 6x^3 + 9x^2}{8x^7 - 27x^4}$

13 $\dfrac{5a^2 + 12a + 4}{a^4 - 16} \div \dfrac{25a^2 + 20a + 4}{a^2 - 2a}$

14 $\dfrac{a^3-8}{a^2-4} \div \dfrac{a}{a^3+8}$

15 $\dfrac{6}{x^2-4} - \dfrac{3x}{x^2-4}$

16 $\dfrac{15}{x^2-9} - \dfrac{5x}{x^2-9}$

17 $\dfrac{2}{3s+1} - \dfrac{9}{(3s+1)^2}$

18 $\dfrac{4}{(5s-2)^2} + \dfrac{s}{5s-2}$

19 $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3x+1}{x^2} - \dfrac{x-2}{x^3}$

20 $\dfrac{5}{x} - \dfrac{2x-1}{x^2} + \dfrac{x+5}{x^3}$

21 $\dfrac{3t}{t+2} + \dfrac{5t}{t-2} - \dfrac{40}{t^2-4}$

22 $\dfrac{t}{t+3} + \dfrac{4t}{t-3} - \dfrac{18}{t^2-9}$

23 $\dfrac{4x}{3x-4} + \dfrac{8}{3x^2-4x} + \dfrac{2}{x}$

24 $\dfrac{12x}{2x+1} - \dfrac{3}{2x^2+x} + \dfrac{5}{x}$

25 $\dfrac{2x}{x+2} - \dfrac{8}{x^2+2x} + \dfrac{3}{x}$

26 $\dfrac{5x}{2x+3} - \dfrac{6}{2x^2+3x} + \dfrac{2}{x}$

27 $\dfrac{p^4+3p^3-8p-24}{p^3-2p^2-9p+18}$

28 $\dfrac{2ac+bc-6ad-3bd}{6ac+2ad+3bc+bd}$

29 $3 + \dfrac{5}{u} + \dfrac{2u}{3u+1}$

30 $4 + \dfrac{2}{u} - \dfrac{3u}{u+5}$

31 $\dfrac{2x+1}{x^2+4x+4} - \dfrac{6x}{x^2-4} + \dfrac{3}{x-2}$

32 $\dfrac{2x+6}{x^2+6x+9} + \dfrac{5x}{x^2-9} + \dfrac{7}{x-3}$

33 $\dfrac{\frac{b}{a}-\frac{a}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$

34 $\dfrac{\frac{1}{x+2}-3}{\frac{4}{x}-x}$

35 $\dfrac{\frac{x}{y^2}-\frac{y}{x^2}}{\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2}}$

36 $\dfrac{\frac{r}{s}+\frac{s}{r}}{\frac{r^2}{s^2}-\frac{s^2}{r^2}}$

37 $\dfrac{\frac{5}{x+1}+\frac{2x}{x+3}}{\frac{x}{x+1}+\frac{7}{x+3}}$

38 $\dfrac{\frac{3}{w}-\frac{6}{2w+1}}{\frac{5}{w}+\frac{8}{2w+1}}$

39 $\dfrac{(x+h)^2-3(x+h)-(x^2-3x)}{h}$

40 $\dfrac{(x+h)^3+5(x+h)-(x^3+5x)}{h}$

41 $\dfrac{\frac{1}{(x+h)^3}-\frac{1}{x^3}}{h}$

42 $\dfrac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$

43 $\dfrac{\frac{4}{3x+3h-1}-\frac{4}{3x-1}}{h}$

44 $\dfrac{\frac{5}{2x+2h+3}-\frac{5}{2x+3}}{h}$

Ejercicios 45 – 50: Racionalice el denominador.

45 $\dfrac{\sqrt{t}+5}{\sqrt{t}-5}$

46 $\dfrac{\sqrt{t}-4}{\sqrt{t}+4}$

47 $\dfrac{81x^2-16y^2}{3\sqrt{x}-2\sqrt{y}}$

48 $\dfrac{16x^2-y^2}{2\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

49 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$ (*Sugerencia:* Multiplique numerador y denominador por $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$.)

50 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$

Ejercicios 51 – 56: Racionalice el numerador.

51 $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a^2-b^2}$

52 $\dfrac{\sqrt{b}+\sqrt{c}}{b^2-c^2}$

53 $\dfrac{\sqrt{2(x+h)+1}-\sqrt{2x+1}}{h}$

54 $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}}$

55 $\dfrac{\sqrt{1-x-h}-\sqrt{1-x}}{h}$

56 $\dfrac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$ (*Sugerencia:* Compare con el Ejercicio 49.)

Ejercicios 57 – 60: Exprese como suma de términos de la forma ax^r, donde r es número racional.

57 $\dfrac{4x^2-x+5}{x^{2/3}}$

58 $\dfrac{x^2+4x-6}{\sqrt{x}}$

59 $\dfrac{(x^2+2)^2}{x^5}$

60 $\dfrac{(\sqrt{x}-3)^2}{x^3}$

Ejercicios 61 – 64: Exprese en forma de cociente.

61 $x^{-3}+x^2$

62 $x^{-4}-x$

63 $x^{-1/2} - x^{3/2}$ **64** $x^{-2/3} + x^{7/3}$

Ejercicios 65 – 76: Simplifique la expresión.

65 $(2x^2 - 3x + 1)(4)(3x + 2)^3(3) + (3x + 2)^4(4x - 3)$

66 $(6x - 5)^3(2)(x^2 + 4)(2x) + (x^2 + 4)^2(3)(6x - 5)^2(6)$

67 $(x^2 - 4)^{1/2}(3)(2x + 1)^2(2) + (2x + 1)^3(\frac{1}{2})(x^2 - 4)^{-1/2}(2x)$

68 $(3x + 2)^{1/3}(2)(4x - 5)(4) + (4x - 5)^2(\frac{1}{3})(3x + 2)^{-2/3}(3)$

69 $(3x + 1)^6(\frac{1}{2})(2x - 5)^{-1/2}(2) + (2x - 5)^{1/2}(6)(3x + 1)^5(3)$

70 $(x^2 + 9)^4(-\frac{1}{3})(x + 6)^{-4/3} + (x + 6)^{-1/3}(4)(x^2 + 9)^3(2x)$

71 $\dfrac{(6x + 1)^3(27x^2 + 2) - (9x^3 + 2x)(3)(6x + 1)^2(6)}{(6x + 1)^6}$

72 $\dfrac{(x^2 - 1)^4(2x) - x^2(4)(x^2 - 1)^3(2x)}{(x^2 - 1)^8}$

73 $\dfrac{(x^2 + 4)^{1/3}(3) - (3x)(\frac{1}{3})(x^2 + 4)^{-2/3}(2x)}{[(x^2 + 4)^{1/3}]^2}$

74 $\dfrac{(1 - x^2)^{1/2}(2x) - x^2(\frac{1}{2})(1 - x^2)^{-1/2}(-2x)}{[(1 - x^2)^{1/2}]^2}$

75 $\dfrac{(4x^2 + 9)^{1/2}(2) - (2x + 3)(\frac{1}{2})(4x^2 + 9)^{-1/2}(8x)}{[(4x^2 + 9)^{1/2}]^2}$

76 $\dfrac{(3x+2)^{1/2}(\frac{1}{3})(2x+3)^{-2/3}(2) - (2x+3)^{1/3}(\frac{1}{2})(3x+2)^{-1/2}(3)}{[(3x+2)^{1/2}]^2}$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 1

1 Exprese como número racional simplificado a:

(a) $(\frac{2}{3})(-\frac{5}{8})$ **(b)** $\frac{3}{4} + \frac{6}{5}$ **(c)** $\frac{5}{8} - \frac{6}{7}$ **(d)** $\frac{3}{4} \div \frac{6}{5}$

2 Reemplace el símbolo □ con <, >, o bien, =, para que la afirmación que resulte sea válida.

(a) -0.1 □ -0.001 **(b)** $\sqrt{9}$ □ -3 **(c)** $\frac{1}{6}$ □ 0.166

3 Exprese en forma de desigualdad,

(a) x es negativo.

(b) a está entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$.

(c) El valor absoluto de x no es mayor que 4.

4 Escriba de nuevo la expresión sin usar el símbolo de valor absoluto, y simplifique:

(a) $|-7|$ **(b)** $\dfrac{|-5|}{-5}$ **(c)** $|3^{-1} - 2^{-1}|$

5 Si los puntos A, B y C en una recta coordenada o numérica tienen, respectivamente, las coordenadas -8, 4 y -3, calcule la distancia

(a) $d(A,C)$ **(b)** $d(C,A)$ **(c)** $d(B,C)$

6 Determine si la expresión es cierta para todos los valores de las variables, siempre que la expresión esté definida.

(a) $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ **(b)** $\dfrac{1}{\sqrt{x + y}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}}$

(c) $\dfrac{1}{\sqrt{c} - \sqrt{d}} = \dfrac{\sqrt{c} + \sqrt{d}}{c - d}$

7 Exprese el número en notación científica.

(a) 93,700,000,000 **(b)** 0.000 004 02

8 Exprese el número en notación decimal.

(a) 6.8×10^7 **(b)** 7.3×10^{-4}

Ejercicios 9 y 10: Vuelva a escribir la expresión sin usar el símbolo de valor absoluto, y simplifique el resultado.

9 $|x + 3|$ si $x \leq -3$

10 $|(x - 2)(x - 3)|$ si $2 < x < 3$

Ejercicios 11 y 12: Exprese el número en forma *a/b*, donde *a* y *b* son enteros.

11 $-3^2 + 2^0 + 27^{-2/3}$ **12** $(\frac{1}{2})^0 - 1^2 + 16^{-3/4}$

Ejercicios 13 – 38: Simplifique la expresión y racionalice el denominador, cuando sea pertinente.

13 $(3a^2b)^2(2ab^3)$ **14** $\dfrac{6r^3y^2}{2r^5y}$

15 $\dfrac{(3x^2y^{-3})^{-2}}{x^{-5}y}$ **16** $\left(\dfrac{a^{2/3}b^{3/2}}{a^2b}\right)^6$

17 $(-2p^2q)^3\left(\dfrac{p}{4q^2}\right)^2$ **18** $c^{-4/3}c^{3/2}c^{1/6}$

19 $\left(\dfrac{xy^{-1}}{\sqrt{z}}\right)^4 \div \left(\dfrac{x^{1/3}y^2}{z}\right)^3$ **20** $\left(\dfrac{-64x^3}{z^6y^9}\right)^{2/3}$

21 $[(a^{2/3}b^{-2})^3]^{-1}$ **22** $\dfrac{(3u^2v^5w^{-4})^3}{(2uv^{-3}w^2)^4}$

23 $\dfrac{r^{-1}+s^{-1}}{(rs)^{-1}}$ **24** $(u+v)^3(u+v)^{-2}$

25 $s^{5/2}s^{-4/3}s^{-1/6}$ **26** $x^{-2}-y^{-1}$

27 $\sqrt[3]{(x^4y^{-1})^6}$ **28** $\sqrt[3]{8x^5y^3z^4}$

29 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$ **30** $\sqrt{\dfrac{a^2b^3}{c}}$

31 $\sqrt[3]{4x^2y}\sqrt[3]{2x^5y^2}$ **32** $\sqrt[4]{(-4a^3b^2c)^2}$

33 $\dfrac{1}{\sqrt{t}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}-1\right)$ **34** $\sqrt{\sqrt[3]{(c^3d^6)^4}}$

35 $\dfrac{\sqrt{12x^4y}}{\sqrt{3x^2y^5}}$ **36** $\sqrt[3]{(a+2b)^3}$

37 $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi^2}}$ **38** $\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{9y}}$

Ejercicios 39 – 42: Racionalice el denominador.

39 $\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ **40** $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a-2}}$

41 $\dfrac{81x^2-y^2}{3\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ **42** $\dfrac{3+\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}$

Ejercicios 43 – 58: Exprese en forma de polinomio.

43 $(3x^3-4x^2+x-7)+(x^4-2x^3+3x^2+5)$

44 $(4z^4-3z^2+1)-z(z^3+4z^2-4)$

45 $(x+4)(x+3)-(2x-1)(x-5)$

46 $(4x-5)(2x^2+3x-7)$

47 $(3y^3-2y^2+y+4)(y^2-3)$

48 $(3x+2)(x-5)(5x+4)$

49 $(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$

50 $\dfrac{9p^4q^3-6p^2q^4+5p^3q^2}{3p^2q^2}$

51 $(3a-5b)(2a+7b)$ **52** $(4r^2-3s)^2$

53 $(13a^2+4b)(13a^2-4b)$ **54** $(a^3-a^2)^2$

55 $(2a+b)^3$ **56** $(c^2-d^2)^3$

57 $(3x+2y)^2(3x-2y)^2$ **58** $(a+b+c+d)^2$

Ejercicios 59 – 74: Factorice el polinomio.

59 $60xw+70w$ **60** $2r^4s^3-8r^2s^5$

61 $28x^2+4x-9$ **62** $16a^4+24a^2b^2+9b^4$

63 $2wy+3yx-8wz-12zx$ **64** $2c^3-12c^2+3c-18$

65 $8x^3+64y^3$ **66** $u^3v^4-u^6v$

67 p^8-q^8 **68** $x^4-8x^3+16x^2$

69 w^6+1 **70** $3x+6$

71 x^2+25 **72** $x^2-49y^2-14x+49$

73 $x^5-4x^3+8x^2-32$ **74** $4x^4+12x^3+20x^2$

Ejercicios 75 – 86: Simplifique la expresión.

75 $\dfrac{6x^2-7x-5}{4x^2+4x+1}$ **76** $\dfrac{r^3-t^3}{r^2-t^2}$

77 $\dfrac{6x^2-5x-6}{x^2-4}\div\dfrac{2x^2-3x}{x+2}$ **78** $\dfrac{2}{4x-5}-\dfrac{5}{10x+1}$

79 $\dfrac{7}{x+2}+\dfrac{3x}{(x+2)^2}-\dfrac{5}{x}$ **80** $\dfrac{x+x^{-2}}{1+x^{-2}}$

81 $\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2+x}-\dfrac{3}{x+3}$ **82** $(a^{-1}+b^{-1})^{-1}$

83 $\dfrac{x+2-\dfrac{3}{x+4}}{\dfrac{x}{x+4}+\dfrac{1}{x+4}}$ **84** $\dfrac{\dfrac{x}{x+2}-\dfrac{4}{x+2}}{x-3-\dfrac{6}{x+2}}$

85 $(x^2+1)^{3/2}(4)(x+5)^3+(x+5)^4(\frac{3}{2})(x^2+1)^{1/2}(2x)$

86 $\dfrac{(4-x^2)(\frac{1}{3})(6x+1)^{-2/3}(6)-(6x+1)^{1/3}(-2x)}{(4-x^2)^2}$

Ejercicios 87 y 88: Algunas calculadoras utilizan un algoritmo semejante al siguiente, para calcular de modo aproximado, $\sqrt{N}$ cuando N es un número real positivo: Sea $x_1 = N/2$, y calcule aproximaciones sucesivas, $x_2, x_3, \ldots$, con las fórmulas

$$x_2=\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{N}{x_1}\right),\quad x_3=\frac{1}{2}\left(x_2+\frac{N}{x_2}\right),\quad \ldots$$

hasta llegar a tener la exactitud deseada. Use este método para evaluar el radical con precisión hasta la sexta cifra decimal.

87 $\sqrt{5}$ **88** $\sqrt{18}$

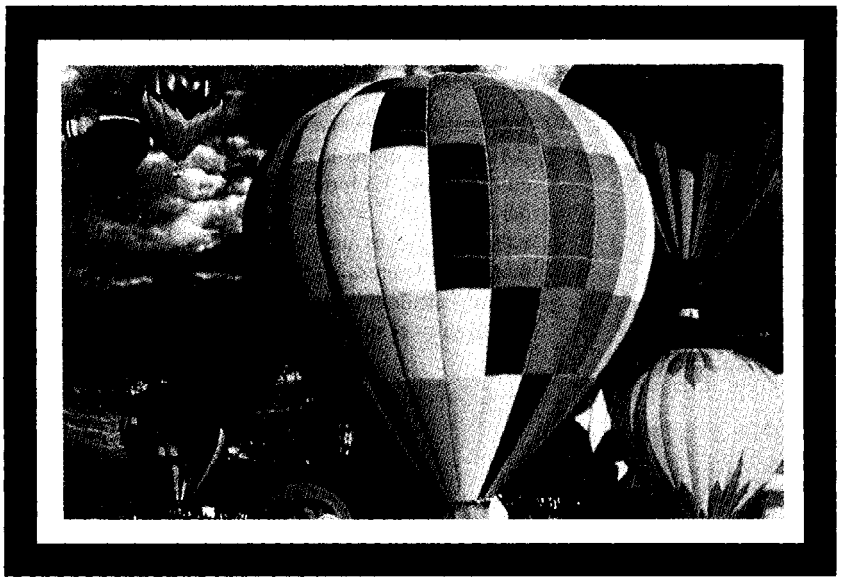
89 ***Glóbulos rojos en el organismo*** El organismo de una persona promedio contiene 5.5 L (litros) de sangre, y unos 5 millones de glóbulos rojos por milímetro cúbico

de ese líquido. Si 1 L = 10^6 mm^3, estime el número de glóbulos rojos en el organismo de una persona promedio.

90 ***Latidos cardiacos durante la vida*** Un corazón saludable late entre 70 y 90 veces por minuto. Estime el número de latidos durante la vida de una persona que llega a los 80 años.

91 ***Área de la superficie del cuerpo*** A los 2 años de edad, un niño característico tiene 86 cm de estatura y su peso es 13 kg. Haga uso de la fórmula de DuBois y DuBois, $S = (0.007184)w^{0.425}h^{0.725}$ para calcular el área superficial del cuerpo. S es esa área en metros cuadrados, w es el peso, en kilogramos, y h la estatura, en centímetros.

92 ***Expansión adiabática*** Se dice que un gas se expande *adiabáticamente* si no hay pérdida ni ganancia de calor en el proceso. La fórmula para la expansión adiabática del aire es $pv^{-1.4} = c$, en la cual p es la presión, v es el volumen, y c es una constante. Si –en determinado momento– la presión es 40 din/cm^2 y el volumen es de 60 cm^3, calcule el valor de c. [Una *dina* (din) es la unidad de fuerza en el antiguo sistema cgs.]



Pueden usarse ecuaciones para especificar la distancia entre objetos que viajan a distintas velocidades y en diferentes direcciones.

2.1	ECUACIONES
2.2	PROBLEMAS DE APLICACIÓN
2.3	ECUACIONES CUADRÁTICAS
2.4	NÚMEROS COMPLEJOS
2.5	OTROS TIPOS DE ECUACIONES
2.6	DESIGUALDADES
2.7	ALGO MÁS SOBRE DESIGUALDADES

CAPÍTULO 2

ECUACIONES Y DESIGUALDADES

■ *Los métodos para resolver ecuaciones se remontan a los babilonios (2000 a. C.), quienes las describían con palabras, en lugar de con símbolos de variables, como x, y, etc. como lo hacemos hoy. En Italia, en el siglo XVI, se efectuaron grandes progresos en la obtención de soluciones de ecuaciones, y los avances continuaron en todo el mundo hasta mediados del siglo XIX. En la actualidad se emplean computadoras para obtener soluciones aproximadas a ecuaciones muy complicadas.*

Actualmente, las desigualdades en las que intervienen variables han alcanzado el mismo nivel de importancia que las ecuaciones, y se emplean mucho en aplicaciones matemáticas. En este capítulo se estudian varios métodos para resolver ecuaciones y desigualdades básicas. ■

2.1 ECUACIONES

Una **ecuación** es un enunciado de que dos cantidades o expresiones son iguales. Se emplean las ecuaciones siempre que se usan números reales. Como ejemplo, se utiliza la ecuación

$$d = rt, \quad \text{o} \quad \text{distancia recorrida} = (\text{rapidez})\,(\text{tiempo})$$

para resolver problemas en los que un objeto se mueve con rapidez o velocidad constante. Si la rapidez r es de 45 millas/h (mi por hora), entonces la distancia d, recorrida en millas cuando el tiempo es t (en horas), está expresada por

$$d = 45t.$$

Por ejemplo, si $t = 2$h, entonces $d = 45 \cdot 22 = 90$ mi. Si se desea calcular cuánto tiempo se necesita para recorrer 75 mi, se establece que $d = 75$ *y se resuelve* la ecuación

$$75 = 45t \quad \text{o equivalentemente,} \quad 45t = 75.$$

Dividiendo entre 45 ambos lados de la última ecuación, se obtiene

$$t = \frac{75}{45} = \frac{5}{3}.$$

Por lo tanto, si $r = 45$ mi/h, entonces el tiempo necesario para recorrer 75 millas es $1\frac{2}{3}$ h, o sea, 1 hora y 40 minutos.

Nótese que la ecuación $d = rt$ tiene tres variables: d, r y t. En gran parte de este capítulo se estudian ecuaciones que sólo contienen una variable. La tabla siguiente se aplica a una variable, x, pero puede manejarse cualquiera otra. Las abreviaturas PM y SM del segundo ejemplo designan al "primer miembro" y al "segundo miembro" de la ecuación.

Terminología	Definición	Ejemplo
Ecuación en x	Un enunciado o declaración de igualdad en donde interviene una variable, x	$x^2 - 5 = 4x$
Solución, o **raíz** de una ecuación en x	Un número, a, que origina una declaración cierta cuando se introduce en lugar de x	5 es una solución de $x^2 - 5 = 4x$, porque su introducción produce PM: $5^2 - 5 = 25 - 5 = 20$ y SM: $4 \cdot 5 = 20$, y $20 = 20$ es una afirmación cierta.
Un número a **satisface** a una ecuación en x	a es una solución de la ecuación	5 satisface a $x^2 - 5 = 4x$.
Ecuaciones equivalentes	Ecuaciones que tienen exactamente las mismas soluciones	$2x + 1 = 7$ $2x = 7 - 1$ $2x = 6$ $x = 3$
Resolver una ecuación en x	Determinar todas las soluciones de la ecuación	Para resolver $(x + 3)(x - 5) = 0$, se iguala a 0 cada factor: $x + 3 = 0$, $x - 5 = 0$, obteniendo así las soluciones -3 y 5.

Una **ecuación algebraica** en x sólo tiene expresiones algebraicas, como polinomios, expresiones racionales, radicales, etc. A una ecuación de este tipo se le llama **ecuación condicional** si hay números en los dominios de las expresiones que no son soluciones. Por ejemplo, la ecuación $x^2 = 9$ es condicional, porque el número $x = 4$ (y otros) no es una solución. Si *todo* número en los dominios de las expresiones de una ecuación algebraica es una solución, a la ecuación se le llama **identidad**.

A veces es difícil determinar si una ecuación es condicional o es una identidad. Con frecuencia se indica una identidad cuando, después de aplicar las propiedades de los números reales, se obtiene una ecuación de la forma $p = p$, donde p es una expresión. Como ejemplo, si se multiplican por $x^2 - 4$, ambos lados de la ecuación

$$\frac{x}{x^2 - 4} = \frac{x}{(x + 2)(x - 2)}$$

se obtiene $x = x$. Esto advierte acerca del hecho que posiblemente se trate de una identidad; sin embargo, no demuestra nada. Un método normal para comprobar que una ecuación es una identidad es demostrar, con las propiedades de los números reales, que la expresión que aparece en un lado de la ecuación, se puede transformar en la expresión que está en el lado contrario. Esto fue fácil en el ejemplo anterior, porque ya se sabe que $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$. Desde luego, para demostrar que una ecuación no es una identidad, sólo se necesita encontrar un número real en el dominio de la variable que no pueda satisfacer la ecuación original.

El tipo básico de las ecuaciones del álgebra es la *ecuación lineal*, que se define en la siguiente tabla, en la cual a y b representan números reales.

Terminología	Definición	Ejemplo
Ecuación lineal en x	Una ecuación que se puede escribir en la forma $ax + b = 0$, donde $a \neq 0$	$4x + 5 = 0$ $4x = -5$ $x = -\frac{5}{4}$

El ejemplo de la tabla anterior indica un método característico de resolver una ecuación lineal. Si se sigue el mismo procedimiento, se ve que

$$\text{si } ax + b = 0, \text{ entonces } x = -\frac{b}{a},$$

siempre y cuando $a \neq 0$. Así que una ecuación lineal tiene exactamente una solución.

A veces se resuelve una ecuación haciendo una lista de ecuaciones equivalentes, cada una menos complicada, en cierto sentido, que la anterior, y terminamos el listado con una ecuación para la cual se pueden obtener con facilidad las soluciones. Con frecuencia se simplifica una ecuación sumando la misma expresión a ambos lados, o restándola de ambos miembros o lados. También en ambos lados o miembros de la ecuación se puede multiplicar por o dividir entre una expresión que represente a un número real *distinto de cero*. En los ejemplos siguientes, las indicaciones marcadas al lado derecho señalan cómo se obtuvo una ecuación equivalente partiendo de la anterior. Para abreviar tales expresiones se ha usado, como en el Ejem. 1, "se suma 7", en lugar de lo que es más exacto —pero más largo— *sumar 7 a ambos miembros*. Igualmente, "se resta $2x$" quiere decir *restar* $2x$ *de ambos lados*, y "se divide entre 4" significa *dividir ambos lados entre* 4.

EJEMPLO 1 ***Resolución de una ecuación lineal***

Resolver la ecuación $6x - 7 = 2x + 5$.

SOLUCIÓN Son equivalentes las ecuaciones de la siguiente lista:

$6x - 7 = 2x + 5$	ecuación dada
$(6x - 7) + 7 = (2x + 5) + 7$	se suma 7
$6x = 2x + 12$	se simplifica
$6x + 2x = (2x + 12) - 2x$	se resta $2x$
$4x = 12$	se simplifica
$\frac{4x}{4} = \frac{12}{4}$	se divide entre 4
$x = 3$	se simplifica

✓ ***Comprobación*** $x = 3$ PM: $6(3) - 7 = 18 - 7 = 11$
SM: $2(3) + 5 = 6 + 5 = 11$

Como $11 = 11$ es una afirmación cierta, se comprueba que $x = 3$ sí es una solución.

Como se indicó en el ejemplo anterior, con frecuencia se comprueba una solución al sustituir con ella la variable en la ecuación dada. Tales comprobaciones pueden descubrir errores que se hayan introducido por mal manejo o equivocaciones en la aritmética.

Se dice que la ecuación del Ejemplo1 *tiene la solución* $x = 3$. Igualmente, se diría que la ecuación $x^2 = 4$ *tiene como soluciones* $x = 2$ y $x = -2$

El ejemplo siguiente muestra que una ecuación de apariencia complicada se puede simplificar para obtener una ecuación lineal.

EJEMPLO 2 ***Resolución de una ecuación***

Resolver la ecuación $(8x - 2)(3x + 4) = (4x + 3)(6x + 1)$

SOLUCIÓN Las ecuaciones de la lista siguiente son equivalentes:

$(8x - 2)(3x + 4) = (4x + 3)(6x - 1)$	ecuación dada
$24x^2 + 26x - 8 = 24x^2 + 14x - 3$	se multiplican los factores
$26x - 8 = 14x - 3$	se resta $24x^2$
$12x - 8 = -3$	se resta $14x$
$12x = 5$	se suma 8
$x = \frac{5}{12}$	se divide entre 12

Por lo tanto, la solución de esta ecuación es $\frac{5}{12}$.

No se comprueba la solución anterior porque cada paso da como resultado una ecuación equivalente; sin embargo, cuando el lector resuelva ejercicios o conteste un examen, siempre se aconseja comprobar las respuestas, para evitar errores aritméticos.

Si una ecuación contiene expresiones racionales, con frecuencia se eliminan los denominadores multiplicando ambos miembros por el mínimo común denominador (MCD) de esas expresiones. Si se multiplican ambos lados por una expresión que sea igual a cero, para algún valor de x, puede ser que la ecuación resultante no equivalga a la ecuación original, como se ve en el ejemplo siguiente:

EJEMPLO 3 ***Una ecuación que no tiene soluciones***

Resolver $\dfrac{3x}{x-2} = 1 + \dfrac{6}{x-2}$.

SOLUCIÓN

$$\frac{3x}{x-2} = 1 + \frac{6}{x-2} \qquad \text{ecuación dada}$$

$$\left(\frac{3x}{x-2}\right)(x-2) = (1)(x-2) + \left(\frac{6}{x-2}\right)(x-2) \qquad \text{se multiplica por } x-$$

$$3x = (x-2) + 6 \qquad \text{se simplifica}$$

$$3x = x + 4 \qquad \text{se simplifica}$$

$$2x = 4 \qquad \text{se resta } x$$

$$x = 2 \qquad \text{se divide entre 2}$$

✓ ***Comprobación*** $x = 2$ PM: $\dfrac{3(2)}{(2)-2} = \dfrac{6}{0}$

Como no se permite la división entre 0, $x = 2$ no es una solución. Por lo tanto, la ecuación dada no tiene soluciones.

En el proceso de resolver una ecuación, se puede obtener, como solución *posible*, un número que *no* es una solución de la ecuación dada. A ese número se le llama **solución extraña**, o **raíz extraña**, de la ecuación dada. En el Ejem. 3, $x = 2$ es una solución (o raíz) extraña de la ecuación dada.

Las siguientes reglas sirven también para resolver la ecuación del Ejem. 3. En este caso, si se sigue la regla 2, se hace innecesario comprobar la solución extraña $x = 2$.

Reglas para resolver una ecuación que contiene expresiones racionales

1. Determinar el MCD de las expresiones racionales.
2. Calcular los valores de la variable que hacen cero al MCD. Esos valores no son soluciones, porque producen cuando menos un denominador igual a cero al sustituirlos en la ecuación dada.
3. Multiplicar cada término de la ecuación por el MCD y simplificar, eliminando con ello todos los denominadores.
4. Resolver la ecuación obtenida en la regla 3.
5. Las soluciones de la ecuación dada son las que se encontraron en la regla 4, excepto los valores que corresponden a la regla 2.

En el siguiente ejemplo se siguen las reglas anteriores.

EJEMPLO 4 ***Ecuación que tiene expresiones racionales***

Resolver $\dfrac{3}{2x-4} - \dfrac{5}{x+3} = \dfrac{2}{x-2}$.

SOLUCIÓN

Regla 1 Al escribir de nuevo el denominador $2x-4$ como $2(x-2)$, se ve que el MCD de las tres expresiones racionales es $2(x-2)(x+3)$.

Regla 2 Los valores de x que hacen cero al MCD $2(x-2)(x+3)$, son 2 y -3, de modo que tales números no pueden ser soluciones de la ecuación.

Regla 3 Al multiplicar cada término de la ecuación por el MCD y simplificar, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{3}{2(x-2)}2(x-2)(x+3) - \frac{5}{x+3}2(x-2)(x+3) = \frac{2}{x-2}2(x-2)(x+3)$$

$3(x+3) - 10(x-2) = 4(x+3)$ se cancelan los factores iguales

$3x + 9 - 10x + 20 = 4x + 12$ se multiplican los factores

Regla 4 Resolver la última ecuación obtenida en la regla 3.

$3x - 10x - 4x = 12 - 9 - 20$ se restan $4x$, 9 y 20

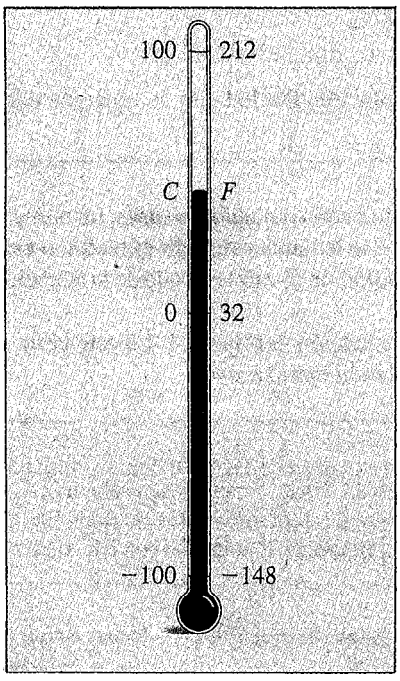
$-11x = -17$ se combinan términos semejantes

$x = \frac{17}{11}$ se divide entre -11

Regla 5 Como $\frac{17}{11}$ no se incluye entre los valores (2 y -3) que anulan o hacen cero al mínimo común divisor (regla 2), entonces $x = \frac{17}{11}$ es una solución de la ecuación dada.

No se comprueba la solución sustituyendo $x = \frac{17}{11}$, porque las operaciones aritméticas necesarias son complicadas. Es más sencillo comprobar con cuidado las operaciones algebraicas que se utilizaron en cada paso.

FIGURA 2.1



En muchas aplicaciones de las matemáticas se encuentran fórmulas en las que intervienen varias variables. A veces es necesario despejar una variable específica en términos de las demás que aparezcan en la fórmula, como se ve en los tres ejemplos siguientes:

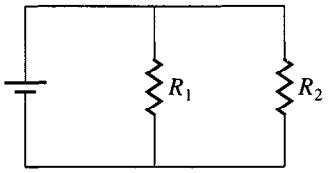
EJEMPLO 5 ***Relaciones entre escalas de temperatura***

En el termómetro de la Fig. 2.1 se ven las escalas de temperatura Celsius y Fahrenheit. La relación entre lecturas respectivas C y F de temperatura es $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. Despejar F.

SOLUCIÓN Para *despejar F*, se debe obtener una fórmula que tenga a F sola a un lado del signo igual, y que no aparezca en el otro. Se puede hacer como sigue:

$$C = \tfrac{5}{9}(F - 32) \quad \text{ecuación dada}$$
$$\tfrac{9}{5}C = F - 32 \quad \text{se multiplica por } \tfrac{9}{5}$$
$$\tfrac{9}{5}C + 32 = F \quad \text{se suma 32}$$
$$F = \tfrac{9}{5}C + 32 \quad \text{ecuación equivalente}$$

FIGURA 2.2



EJEMPLO 6 ***Resistores conectados en paralelo***

En electricidad se usa la fórmula

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

para calcular la resistencia total, R, cuando dos resistores, R_1 y R_2, se conectan en paralelo, como se ve en la Fig. 2.2. Despejar R_1.

SOLUCIÓN Primero se multiplican ambos miembros de la ecuación dada por el mínimo común divisor de las tres fracciones y, a continuación, se despeja R_1, como sigue:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{ecuación dada}$$
$$\frac{1}{R} \cdot RR_1R_2 = \frac{1}{R_1} \cdot RR_1R_2 + \frac{1}{R_2} \cdot RR_1R_2 \quad \text{se multiplica por el mínimo común denominador, } RR_1R_2$$
$$R_1R_2 = RR_2 + RR_1 \quad \text{se cancelan los factores comunes}$$
$$R_1R_2 - RR_1 = RR_2 \quad \text{se agrupan a un lado los términos en } R_1$$
$$R_1(R_2 - R) = RR_2 \quad \text{se saca } R_1 \text{ como factor común}$$
$$R_1 = \frac{RR_2}{R_2 - R} \quad \text{se divide entre } R_2 - R$$

Otro método de resolución es despejar primero $\frac{1}{R_1}$:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{ecuación dada}$$
$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R} \quad \text{ecuación equivalente}$$
$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_2} \quad \text{se resta } \frac{1}{R_2}$$
$$\frac{1}{R_1} = \frac{R_2 - R}{RR_2} \quad \text{se combinan fracciones}$$

Si son iguales dos números distintos de cero, sus recíprocos también son iguales. Por lo tanto,

$$R_1 = \frac{RR_2}{R_2 - R}.$$

EJERCICIOS 2.1

Ejercicios 1– 44: Resuelva la ecuación.

1 $-3x + 4 = -1$

2 $2x - 2 = -9$

3 $4x - 3 = -5x + 6$

4 $5x - 4 = 2(x - 2)$

5 $4(2y + 5) = 3(5y - 2)$

6 $6(2y + 3) \cdot 3(y - 5) = 0$

7 $\frac{1}{5}x + 2 = 3 - \frac{2}{7}x$

8 $\frac{5}{3}x - 1 = 4 + \frac{2}{3}x$

9 $0.3(3 + 2x) + 1.2x = 3.2$

10 $1.5x - 0.7 = 0.4(3 - 5x)$

11 $\dfrac{3 + 5x}{5} = \dfrac{4 - x}{7}$

12 $\dfrac{2x - 9}{4} = 2 + \dfrac{x}{12}$

13 $\dfrac{13 + 2x}{4x + 1} = \dfrac{3}{4}$

14 $\dfrac{3}{7x - 2} = \dfrac{9}{3x + 1}$

15 $8 - \dfrac{5}{x} = 2 + \dfrac{3}{x}$

16 $\dfrac{3}{y} + \dfrac{6}{y} - \dfrac{1}{y} = 11$

17 $(3x - 2)^2 = (x - 5)(9x + 4)$

18 $(x + 5)^2 + 3 = (x - 2)^2$

19 $(5x - 7)(2x + 1) - 10x(x - 4) = 0$

20 $(2x + 9)(4x - 3) = 8x^2 - 12$

21 $\dfrac{3x + 1}{6x - 2} = \dfrac{2x + 5}{4x - 13}$

22 $\dfrac{5x + 2}{10x - 3} = \dfrac{x - 8}{2x + 3}$

23 $\dfrac{2}{5} + \dfrac{4}{10x + 5} = \dfrac{7}{2x + 1}$

24 $\dfrac{-5}{3x - 9} + \dfrac{4}{x - 3} = \dfrac{5}{6}$

25 $\dfrac{3}{2x - 4} - \dfrac{5}{3x - 6} = \dfrac{3}{5}$

26 $\dfrac{9}{2x + 6} - \dfrac{7}{5x + 15} = \dfrac{2}{3}$

27 $2 - \dfrac{5}{3x - 7} = 2$

28 $\dfrac{6}{2x + 11} + 5 = 5$

29 $\dfrac{1}{2x - 1} = \dfrac{4}{8x - 4}$

30 $\dfrac{4}{5x + 2} - \dfrac{12}{15x + 6} = 0$

31 $\dfrac{7}{y^2 - 4} - \dfrac{4}{y + 2} = \dfrac{5}{y - 2}$

32 $\dfrac{4}{2u - 3} + \dfrac{10}{4u^2 - 9} = \dfrac{1}{2u + 3}$

33 $(x + 3)^3 - (3x - 1)^2 = x^3 + 4$

34 $(x - 1)^3 = (x + 1)^3 - 6x^2$

35 $\dfrac{9x}{3x - 1} = 2 + \dfrac{3}{3x - 1}$

36 $\dfrac{2x}{2x + 3} + \dfrac{6}{4x + 6} = 5$

37 $\dfrac{1}{x + 4} + \dfrac{3}{x - 4} = \dfrac{3x + 8}{x^2 - 16}$

38 $\dfrac{2}{2x + 3} + \dfrac{4}{2x - 3} = \dfrac{5x + 6}{4x^2 - 9}$

39 $\dfrac{4}{x + 2} + \dfrac{1}{x - 2} = \dfrac{5x - 6}{x^2 - 4}$

40 $\dfrac{2}{2x + 5} + \dfrac{3}{2x - 5} = \dfrac{10x + 5}{4x^2 - 25}$

41 $\dfrac{2}{2x + 1} - \dfrac{3}{2x - 1} = \dfrac{-2x + 7}{4x^2 - 1}$

42 $\dfrac{3}{2x + 5} + \dfrac{4}{2x - 5} = \dfrac{14x + 3}{4x^2 - 25}$

43 $\dfrac{5}{2x + 3} + \dfrac{4}{2x - 3} = \dfrac{14x + 3}{4x^2 - 9}$

44 $\dfrac{-3}{x + 4} + \dfrac{7}{x - 4} = \dfrac{-5x + 4}{x^2 - 16}$

Ejercicios 45–50: Demuestre que la ecuación es una identidad.

45 $(4x - 3)^2 - 16x^2 = 9 - 24x$

46 $(3x - 4)(2x + 1) + 5x = 6x^2 - 4$

47 $\dfrac{x^2 - 9}{x + 3} = x - 3$

48 $\dfrac{x^3 + 8}{x + 2} = x^2 - 2x + 4$

49 $\dfrac{3x^2 + 8}{x} = \dfrac{8}{x} + 3x$

50 $\dfrac{49x^2 - 25}{7x - 5} = 7x + 5$

Ejercicios 51 y 52: ¿Para qué valor de c el número a es solución de la ecuación?

51 $4x + 1 + 2c = 5c - 3x + 6; \quad a = -2$

52 $3x - 2 + 6c = 2c - 5x + 1; \quad a = 4$

Ejercicios 53 y 54: Determine si las dos ecuaciones son equivalentes.

53 **(a)** $\dfrac{7x}{x-5} = \dfrac{42}{x-5}, \qquad x = 6$

(b) $\dfrac{7x}{x-5} = \dfrac{35}{x-5}, \qquad x = 5$

54 **(a)** $\dfrac{8x}{x-7} = \dfrac{72}{x-7}, \qquad x = 9$

(b) $\dfrac{8x}{x-7} = \dfrac{56}{x-7}, \qquad x = 7$

Ejercicios 55 y 56: Determine valores de a y b tales que $\frac{5}{3}$ sea una solución de la ecuación:

55 $ax + b = 0$ **56** $ax^2 + bx = 0$

Ejercicios 57 y 58: Determine cuál ecuación no es equivalente a la que la precede.

57
$$x^2 - x - 2 = x^2 - 4$$
$$(x + 1)(x - 2) = (x + 2)(x - 2)$$
$$x + 1 = x + 2$$
$$1 = 2$$

58
$$5x + 6 = 4x + 3$$
$$x^2 + 5x + 6 = x^2 + 4x + 3$$
$$(x + 2)(x + 3) = (x + 1)(x + 3)$$
$$x + 2 = x + 1$$
$$2 = 1$$

Ejercicios 59–72: La fórmula se usa en la aplicación indicada. Despeje la variable especificada.

59	$I = Prt,$	P	(interés simple)
60	$C = 2\pi r,$	r	(circunferencia de un círculo)
61	$A = \frac{1}{2}bh,$	h	(área de un triángulo)
62	$V = \frac{1}{3}rh,$	h	(volumen de un cono)
63	$F = g\dfrac{mM}{d^2},$	m	(Ley de Newton, de la gravitación)
64	$R = \dfrac{V}{I},$	I	(Ley de Ohm, en electricidad)
65	$P = 2l + 2w,$	w	(perímetro de un rectángulo)
66	$A = P + Prt,$	r	(principal más interés)
67	$A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h,$	b_1	(área de un trapecio)
68	$s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t,$	v_0	(recorrido de un objeto que cae)
69	$S = \dfrac{p}{q + p(1 - q)}$	q	(Ley de Amdahl, para supercomputadoras)
70	$S = 2(lw + hw + hl),$	h	(superficie de una caja rectangular)
71	$\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q},$	q	(ecuación de las lentes)
72	$\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3},$	R_2	(tres resistencias conectadas en paralelo)

2.2 PROBLEMAS DE APLICACIÓN

A menudo se emplean las ecuaciones para resolver *problemas de aplicación*, es decir, problemas en los que las matemáticas se aplican en otros campos. Debido a la variedad ilimitada de tales problemas, es difícil enunciar reglas específicas para obtener soluciones. Las siguientes reglas pueden ser útiles, siempre que el problema pueda formularse en términos de una ecuación con una variable.

Reglas para resolver problemas aplicados

Si el problema se plantea por escrito, léalo con cuidado varias veces y piense en los datos y en la cantidad desconocida que se debe calcular.
Elija una letra para representar a la cantidad desconocida. Es uno de los pasos cruciales en la solución. Las frases con palabras como *qué, hallar, cuánto, hasta dónde* o *cuándo,* le deben advertir acerca de cuál es la cantidad desconocida.
Si es el caso, trace una figura.
Haga una lista de lo conocido, junto con toda relación en que intervenga la cantidad desconocida. Es posible representar una relación mediante una ecuación en la cual aparecen expresiones en modo escrito, en lugar de letras o números, en uno o ambos miembros.
Después de analizar la lista en la regla 4, formule una ecuación que represente precisamente lo que se expresa en palabras.
Resuelva la ecuación formulada en la regla 5.
Compruebe las soluciones obtenidas en la regla 6, en relación con el planteamiento inicial del problema. Compruebe que la solución concuerda con las condiciones del enunciado.

En el siguiente ejemplo se demuestra la aplicación de estas reglas.

EJEMPLO 1 *Promedio de calificaciones*

Un estudiante tiene calificaciones de 64 y 78, en sus exámenes. ¿Qué calificación debe alcanzar en la tercera prueba para obtener un promedio de 80?

SOLUCIÓN

Regla 1 Lea el problema cuando menos una vez más.

Regla 2 La cantidad desconocida es la calificación de la tercera prueba, de modo que se define

$$x = \text{calificación en la tercera prueba.}$$

Regla 3 Para este problema no es necesario un esquema o croquis.

Regla 4 (a) Lo que se conoce son las calificaciones de 64 y 78 en los dos primeros exámenes.
(b) Una relación en la que interviene x es el promedio de las calificaciones 64, 78 y x. Así,

$$\text{calificación promedio} = \frac{64 + 78 + x}{3}.$$

Regla 5 Como la calificación promedio en la regla 4 debe ser 80, entonces

$$\frac{64 + 78 + x}{3} = 80.$$

Regla 6 Resuelva la ecuación formulada en la regla 5:

$$64 + 78 + x = 80 \cdot 3 \qquad \text{se multiplica por 3}$$

$$142 + x = 240 \qquad \text{se simplifica}$$

$$x = 98 \qquad \text{se resta 142}$$

Regla 7 Comprobación: Si las tres calificaciones son 64, 78 y 98, entonces su promedio es

$$\frac{64 + 78 + 98}{3} = \frac{240}{3} = 80,$$

que es lo que se deseaba.

En los ejemplos restantes, trate de identificar las reglas explícitas que se usaron para resolverlos.

EJEMPLO 2 *Cálculo de un precio normal*

Un almacén de ropa tiene venta de liquidación, y anuncia que todos los precios tienen 20% de descuento. Si el precio de oferta de una camisa es \$28 (por ejemplo, dólares), ¿cuál es su precio normal?

SOLUCIÓN Como la cantidad desconocida es el precio normal, se define

$$x = \text{precio normal.}$$

A continuación, se anota lo siguiente:

$$0.20x = \text{descuento de 20\% en el precio normal, para la oferta}$$

$$28 = \text{precio de oferta}$$

El precio de oferta se calcula como sigue:

$$\text{(precio normal)} - \text{(descuento)} = \text{precio de oferta}$$

Se traduce la última ecuación a símbolos y luego se resuelve

$$x - 0.20x = 28 \qquad \text{se formula una ecuación}$$

$$0.80x = 28 \qquad \text{se resta } 0.20x \text{ de } 1x$$

$$x = \frac{28}{0.80} = 35 \qquad \text{se divide entre } 0.80$$

El precio normal es \$35.

✓ ***Comprobación*** Si al precio normal de una camisa, \$35, se le descuenta el 20%, entonces el descuento es (0.20)(35) = 7, y el precio de oferta es 35 – 7, o sea, \$28.

Los bancos e instituciones financieras pagan interés sobre inversiones o depósitos de ahorro. Por lo general tal interés es *compuesto*, como se estudia en la Secc. 5.1. Sin embargo, si se invierte o se toma prestado el dinero durante un lapso corto, se puede pagar *interés simple* empleando la siguiente fórmula.

Fórmula del interés simple

Si una cantidad de dinero, P, **monto principal** (o **principal**), se invierte a la tasa r, en interés simple (r expresado como decimal), entonces I, el **interés simple**, al final de t años, es

$$I = Prt.$$

La tabla siguiente muestra el interés simple para tres casos.

Monto principal, P	Tasa de interés, r	Número de años, t	Interés $I = Prt$
\$1000	$8\% = 0.08$	1	\$1000(0.08)(1) = \$80
\$2000	$5\% = 0.06$	$1\frac{1}{2}$	\$2000(0.06)(1.5) = \$180

EJEMPLO 3 *Inversión de dinero en acciones*

Una empresa de inversiones debe invertir \$100 000 (dólares) de un cliente y decide hacerlo en dos tipos de acciones, A y B. La tasa anual de rendimiento esperado, o interés simple, para las acciones A es 15%, pero hay algo de riesgo, y el cliente no desea invertir en ellas más de \$50 000. Se espera que la tasa anual de rendimiento en las acciones B, que son más estables, sea 10%. Calcular si hay una forma de inversión para la que el interés anual sea

(a) \$12,000 **(b)** \$13,000

SOLUCIÓN El interés anual es $I = Pr$, que se deduce de la fórmula del interés simple, $I = Prt$ cuando $t = 1$ (año). Si x es la cantidad invertida en las acciones A, entonces, $100\,000 - x$ se invertirá en las acciones B. Con lo anterior obtenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} x &= \text{cantidad invertida en A al 15\%} \\ 100{,}000 - x &= \text{cantidad invertida en B al 10\%} \\ 0.15x &= \text{interés anual de la inversión en A} \\ 0.10(100{,}000 - x) &= \text{interés anual de la inversión en B} \end{aligned}$$

Sumando los intereses de ambas acciones,

$$\text{interés anual total} = 0.15x + 0.10(100{,}000 - x).$$

Simplificando el lado derecho obtenemos

$$\text{(*)} \qquad \text{interés anual total} = 10{,}000 + 0.05x.$$

(a) El interés anual total es 12 000 dólares si

$$\begin{aligned} 10{,}000 + 0.05x &= 12{,}000 && \text{según (*)} \\ 0.05x &= 2000 && \text{se resta 10 000} \\ x &= \frac{2000}{0.05} = 40{,}000 && \text{se divide entre 0.05} \end{aligned}$$

Entonces, se deben invertir 40 000 dólares en las acciones A, y los restantes 60 000 en las acciones B. Como la cantidad invertida en A no es mayor que \$50 000, esta forma de inversión cumple con lo especificado por el cliente.

✓ ***Comprobación*** Si se invierten 40 000 dólares en las acciones A, y 60 000 dólares en las B, entonces el interés anual total es

$$40{,}000(0.15) + 60{,}000(0.10) = 6000 + 6000 = 12{,}000.$$

(b) El interés anual total es \$13 000 dólares si

$$\begin{aligned} 10{,}000 + 0.05x &= 13{,}000 && \text{según (*)} \\ 0.05x &= 3000 && \text{se resta 10 000} \\ x &= \frac{3000}{0.05} = 60{,}000 && \text{se divide entre 0.05} \end{aligned}$$

Entonces, se deben invertir 60 000 dólares en A y los 40 000 restantes en B. Este plan *no* cumple con el requisito de no invertir más de 50 000 en las acciones A. En consecuencia, la inversionista no puede invertir los fondos de su cliente en las acciones A y B, de modo que el interés anual total sea 13 000 dólares.

En algunas aplicaciones, es necesario combinar dos sustancias para obtener determinada composición, como se muestra en los dos ejemplos siguientes.

EJEMPLO 4 *Mezcla de sustancias químicas*

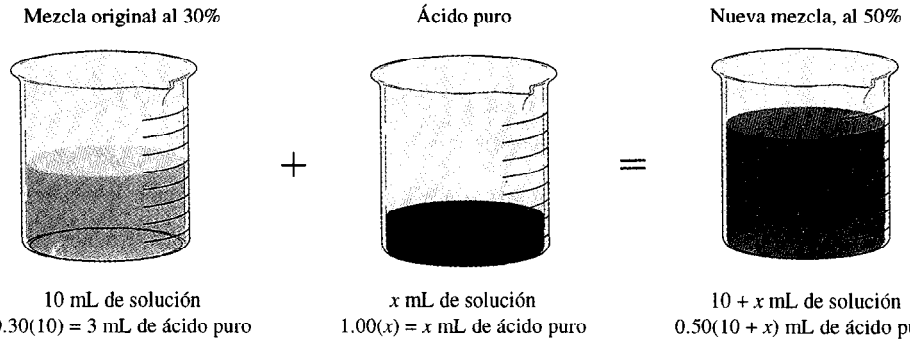
Un químico tiene 10 mililitros (mL) de una solución que contiene un ácido a la concentración de 30%. ¿Cuántos mililitros de ácido puro se deben agregar para aumentar la concentración a 50%?

SOLUCIÓN Como la cantidad desconocida es la cantidad de ácido que se debe agregar, sea

$$x = \text{número de mL de ácido puro que se deben añadir.}$$

Para ayudar a entender el problema, se traza un esquema, como el de la Fig. 2.3, con sus respectivas identificaciones.

FIGURA 2.3



Puesto que es posible expresar la cantidad de ácido puro en la solución final como $3 + x$ (a partir de los dos primeros recipientes), o bien como $0.50(10 + x)$, se obtiene la ecuación

$$3 + x = 0.50(10 + x).$$

A continuación se despeja x:

$$\begin{aligned} 3 + x &= 5 + 0.5x && \text{multiplicación de factores} \\ 0.5x &= 2 && \text{se resta } 0.5x \text{ y } 3 \\ x &= \frac{2}{0.5} = 4 && \text{se divide entre 0.05} \end{aligned}$$

Por consiguiente, se necesita agregar 4 mL de ácido a la solución original.

✓ ***Comprobación*** Si se agregan 4 mL de ácido a la solución dada, entonces la nueva solución contiene 14 mL, 7 de los cuales son de ácido puro. Es la concentración de 50% que se deseaba.

EJEMPLO 5 ***Remplazo de anticongelante***

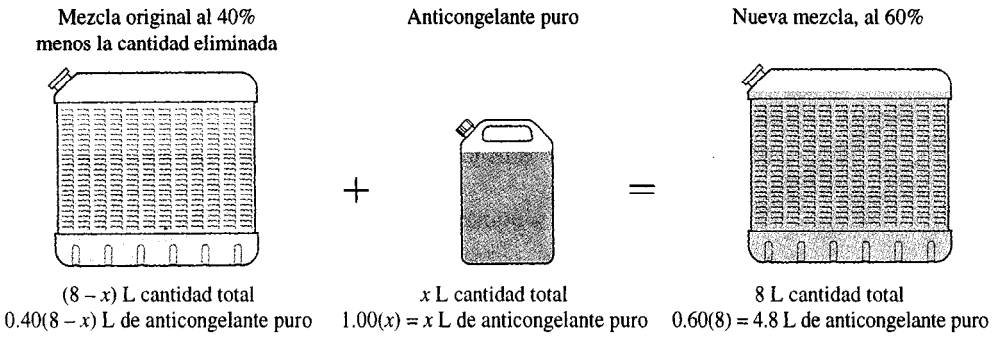
Un radiador contiene 8 L de una mezcla de agua y anticongelante. Si el 40% de la mezcla es anticongelante, ¿cuánta mezcla se debe eliminar y remplazar por anticongelante puro para que la mezcla resultante contenga 60% del mismo?

SOLUCIÓN Sea

$$x = \text{el número de litros de mezcla que se eliminarán.}$$

Como había 8 L de la mezcla original al 40%, se puede representar el problema como en la Fig. 2.4.

FIGURA 2.4



Como el número de litros de anticongelante puro en la mezcla final se puede expresar como $0.40(8 - x) + x$, o como 4.8, se llega a la ecuación

$$0.40(8 - x) + x = 4.8.$$

A continuación se despeja x:

$$3.2 - 0.4x + x = 4.8 \qquad \text{multiplicación de factores}$$

$$0.6x = 1.6 \qquad \text{se suman los términos semejantes y se resta 3.2}$$

$$x = \frac{1.6}{0.6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \qquad \text{se divide entre 0.6}$$

Por consiguiente, se deben eliminar $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ L del radiador.

✓ ***Comprobación*** Notaremos primero que la cantidad de anticongelante en la mezcla original del radiador de 8 L era 0.4(8), o sea, 3.2 L Al vaciar $\frac{8}{3}$ L de la mezcla original al 40%, perdemos $0.4(\frac{8}{3})$ L de anticongelante, y, por consiguiente, quedan $3.2 - 0.4(\frac{8}{3})$ L de anticongelante en el radiador. Si se agrega entonces $\frac{8}{3}$ L de anticongelante puro, la cantidad de éste en la mezcla final es

$$3.2 - 0.4(\tfrac{8}{3}) + \tfrac{8}{3} = 4.8 \text{ litros (L)}$$

Este número, 4.8, es el 60% de 8.

EJEMPLO 6 ***Comparación de tiempos de recorrido de automóviles***

Una carretera une a dos ciudades. Un automóvil sale de la ciudad B a la 1:00 P.M. y viaja a velocidad constante de 40 mi/h hacia la ciudad C. 30 min después, otro automóvil sale de B y viaja hacia C a una velocidad constante de 55 mi/h. Si no se tienen en cuenta las longitudes de los automóviles, ¿a qué hora alcanzará el segundo al primero?

SOLUCIÓN Sea t el número de horas, después de la 1:00 P.M. que viaja el primer automóvil. Como el segundo automóvil sale de B a la 1:30 P.M., viaja $\frac{1}{2}$ h menos que el primero. Esto conduce a la siguiente tabla.

Automóvil	Velocidad mi/h	Horas de viaje	Millas recorridas
Primero	40	t	$40t$
Segundo	55	$t-\frac{1}{2}$	$55(t-\frac{1}{2})$

En el esquema de la Fig. 2.5, se muestran las posiciones posibles de los automóviles a las t horas después de la 1:00 P.M. El segundo automóvil alcanza al primero cuando el número de millas recorridas por los dos es igual, es decir, cuando

$$55(t-\tfrac{1}{2}) = 40t.$$

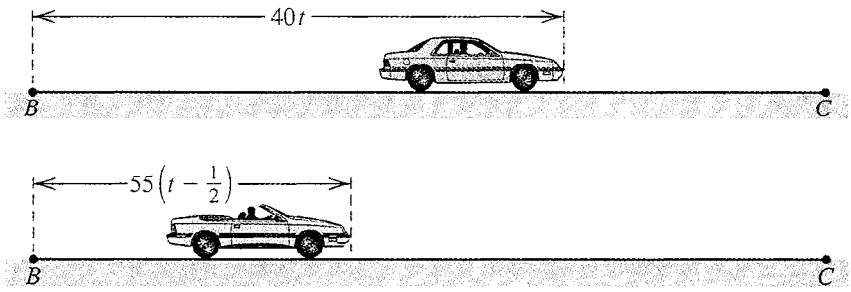
Ahora ya es posible despejar t:

$$55t - \frac{55}{2} = 40t \qquad \text{multiplicación de los factores}$$

$$15t = \frac{55}{2} \qquad \text{se resta } 40t \text{ y se suman } \frac{55}{2}$$

$$t = \frac{55}{30} = \frac{11}{6} \qquad \text{se divide entre 15}$$

FIGURA 2.5

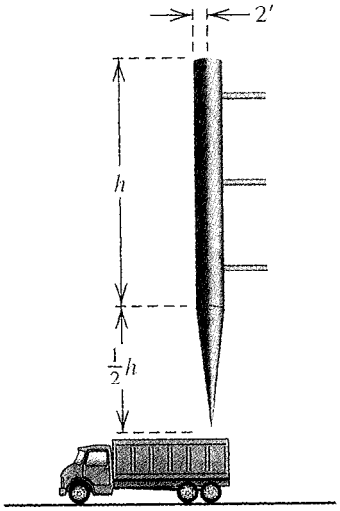


Así, t es $1\frac{5}{6}$ h, o sea, 1 h 50 min después de la 1:00 P.M. En consecuencia, el segundo automóvil alcanza al primero a las 2:50 P.M.

✓ ***Comprobación*** A las 2:50 P.M., el primer automóvil ha viajado $1\frac{5}{6}$ h, y su distancia a partir de B es $40(\frac{11}{6}) = \frac{220}{3}$ mi. A las 2:50 P.M., el segundo automóvil ha viajado durante $1\frac{1}{3}$ h y está a $55(\frac{4}{3}) = \frac{220}{3}$ mi de B. Por tanto, están en el mismo lugar a las 2:50 P.M.

EJEMPLO 7 *Construcción de la tolva de un elevador de granos*

FIGURA 2.6



Se necesita construir la tolva de un elevador de granos como se ve en la Fig. 2.6, en forma de cilindro circular recto de 2 pies de radio y h pies de altura, sobre un cono circular recto, invertido, cuya altura es la mitad de la del cilindro. ¿Qué valor de h hará que el volumen V de esta tolva sea 500 pies^3?

SOLUCIÓN Si V_{cil} y V_{con} representan los volúmenes, en pies^3, del cilindro y del cono, respectivamente, entonces, empleando las fórmulas de volúmenes que aparecen en la segunda de forros al principio del libro, se obtiene lo siguiente:

$$V_{cil} = \pi r^2 h = \pi(2)^2 h = 4\pi h$$

$$V_{con} = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h = \tfrac{1}{3}\pi(2)^2(\tfrac{1}{2}h) = \tfrac{2}{3}\pi h$$

Como el volumen total V de la tolva debe ser 500 pies^3, entonces

$$4\pi h + \tfrac{2}{3}\pi h = 500 \qquad V_{cil} + V_{con} = V$$

$$12\pi h + 2\pi h = 1500 \qquad \text{se multiplica por 3}$$

$$14\pi h = 1500 \qquad \text{se combinan términos}$$

$$h = \frac{1500}{14\pi} \approx 34.1 \text{ pies} \qquad \text{se divide entre } 14\pi$$

EJEMPLO 8 *Tiempo necesario para terminar un trabajo*

Se dispone de dos bombas para llenar un depósito de gasolina. Con sólo la bomba A se puede llenar el tanque en 3 h, y con sólo la B, en 4 h. Si se usan ambas bombas al mismo tiempo, ¿cuánto tardará en llenarse el tanque?

SOLUCIÓN Sea t el número de horas que necesitan A y B para llenar el tanque, si se usan simultáneamente. Es conveniente introducir la *parte* del depósito llenada en 1 h, como sigue:

$\frac{1}{3}$ = parte del depósito que llena A en 1 h.

$\frac{1}{4}$ = parte del depósito que llena B en 1 h.

$\frac{1}{t}$ = parte del depósito que llenan A *y* B en 1 h.

Si se aplica el hecho de que

$$\begin{pmatrix}\text{parte llenada por}\\ \text{A en 1 h}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{parte llenada por}\\ \text{B en 1 h}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{parte llenada por}\\ \text{A } y \text{ B en 1 h}\end{pmatrix}$$

se tiene

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{t}, \text{ o sea, } \frac{7}{12} = \frac{1}{t}.$$

Sacando el recíproco de cada lado de esta ecuación se obtiene $t = \frac{12}{7}$. Así que, si se usan las bombas A y B en forma simultánea, el tanque quedará lleno en $1\frac{5}{7}$ h, o sea, aproximadamente 1 h y 43 min.

EJERCICIOS 2.2

1 ***Calificaciones en exámenes*** Un alumno de álgebra tiene calificaciones parciales de 75, 82, 71 y 84. ¿Qué calificación debe obtener en la siguiente prueba para elevar su promedio a 80?

2 ***Promedio final de la clase*** Antes del examen final, un alumno tiene calificaciones parciales de 72, 80, 65, 78 y 60. El examen final cuenta como la tercera parte de la calificación definitiva. ¿Qué calificación debe recibir el alumno para tener un promedio final de 76?

3 ***Sueldo bruto*** La cantidad que un trabajador lleva a su casa es \$492, después de haberle deducido un total de 40% del pago bruto. ¿Cuál es su sueldo bruto?

4 ***Costo de salir a cenar*** Una pareja no desea gastar más de \$70 por cenar en un restaurante. A la cuenta se agrega un impuesto del 6%, y piensan pagar 15% de propina, después de haber sumado el impuesto, ¿cuál es lo más que pueden gastar en alimentos?

5 ***Costo del aislante*** El costo de instalar material aislante en una casa habitación particular, de dos recámaras, es \$1080. Los costos actuales de calefacción son \$60, en promedio, pero se espera que el material aislante los reduzca en 10%. ¿Cuántos meses se necesitarán para recuperar el costo del material?

6 ***Pago de tiempo extra*** El salario básico de un trabajador es \$10 por hora, pero cuando trabaja más de 40 h por semana, recibe vez y media este salario horario. Si su cheque en una semana es por \$595, ¿cuántas horas de tiempo extra trabajó?

7 ***Cuenta de ahorros*** Un alumno de álgebra ganó \$100 000 en una lotería, y desea depositarlos en cuentas de ahorros en dos bancos. En una cuenta le pagan el 8% de interés simple, pero los depósitos sólo están asegurados hasta \$50 000. La segunda cuenta le paga 6.4% de interés simple, y los depósitos están asegurados hasta \$100 000. Calcule si se puede depositar el dinero de tal manera que quede totalmente asegurado y que gane un interés anual de \$7 500.

8 ***Financiamiento municipal*** Un gobierno municipal ha aprobado la construcción de un estadio deportivo de \$50 millones. Se obtendrán hasta \$30 millones con la venta de bonos que paguen interés simple a una tasa anual de 12%. La cantidad restante, hasta un máximo de \$40 millones, se obtendrá mediante un préstamo a interés simple de 10%. Determine si el estadio se puede financiar de tal manera que el interés anual sea \$5.2 millones.

9 ***Asistencia a cines*** A la *premiere* de una película asistieron 600 personas. Los boletos de adulto cuestan \$5, y los de niño \$2. Los recibos fueron por un total de \$2 400. ¿Cuántos niños asistieron a la *premiere*?

10 ***Honorarios por hora*** El tiempo de un ingeniero consultor se factura a \$60 por hora, y el de su ayudante, a \$20 por hora. Un cliente recibió una factura por \$580 por determinado trabajo. Si el ayudante trabajó 5 h menos que el ingeniero, ¿cuánto tiempo trabajó cada uno en este asunto?

11 ***Preparación de una solución de glucosa*** En determinado análisis clínico cuyo objeto es medir la tolerancia a los carbohidratos, un adulto ingiere 7 onzas de una solución de glucosa al 30%. Cuando se hace la prueba a un niño, se debe disminuir al 20% la concentración de glucosa. ¿Cuánta solución de glucosa al 30% y cuánta agua se necesitan para preparar 7 onzas de solución de glucosa al 20%?

12 ***Preparación de gotas para ojos*** Un farmacéutico debe preparar 15 mL de gotas especiales para un paciente con glaucoma. La solución debe tener 2% de ingrediente activo, pero el farmacéutico sólo tiene disponibles soluciones al 10% y al 1%. ¿Qué cantidad de cada solución debe usar para completar la receta?

13 ***Preparación de una aleación*** La plata esterlina es una aleación de plata y cobre, que tiene 7.5% en peso de cobre. ¿Cuántos gramos de cobre puro, y cuántos de plata esterlina se deben emplear para preparar 200 g de una aleación de plata y cobre que tenga 10% de cobre, en peso?

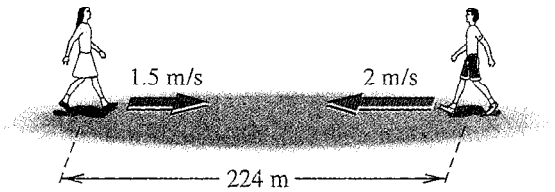
14 ***Concentración de un medicamento*** Se debe preparar teofilina, medicamento para el asma, con un elíxir que la tiene en concentración de 5 mg/mL, y con un jarabe sabor cereza, que se debe agregar para disimular el sabor del medicamento. ¿Cuánto se debe usar de cada ingrediente para preparar 100 mL de solución cuya concentración de teofilina sea 2 mg/mL?

15 ***Rapidez de caminata*** Dos niños, que se encuentran a una distancia de 224 m, comienzan a caminar uno hacia el otro, al mismo instante, a velocidades de 1.5 m/s y 2 m/s, respectivamente (véase la figura).

(a) ¿Cuándo se encontrarán?

(b) ¿Qué distancia habrán caminado?

ESCUELA POLITECNIC BIBLIO



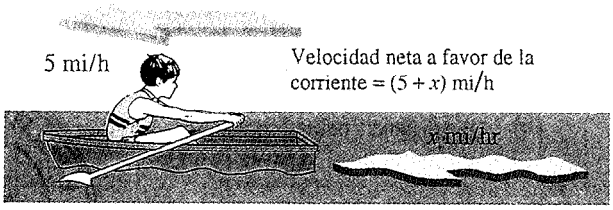
16 ***Velocidad de carrera*** Un corredor inicia en el principio de una pista y corre a velocidad constante de 6 mi/h. Cinco minutos después, un segundo corredor comienza en el mismo punto, y su velocidad es de 8 mi/h, siguiendo por la misma pista. ¿Cuánto tiempo tardará el segundo corredor en alcanzar al primero?

17 ***Velocidad de una barredora de nieve*** A las 6 A.M., una barredora de nieve, viajando a velocidad constante, comienza a despejar una carretera que sale de un pueblo. A las 8 A. M., un automóvil comienza a viajar por la carretera a una velocidad de 30 mi/h, y alcanza a la barredora 30 min después. Calcule la velocidad de la barredora.

18 ***Alcance de un radiocomunicador*** Dos niños tienen radiocomunicadores cuyo alcance máximo es de 2 mi. Uno de ellos sale de determinado lugar a la 1:00 P.M., camina hacia el norte a una velocidad de 4 mi/h. El otro sale del mismo punto, a la 1:15 P.M., caminando hacia el sur, a 6 millas/h. ¿A qué hora ya no podrán comunicarse entre sí?

19 ***Velocidad del bote*** Un muchacho puede remar en un bote a una velocidad constante de 5 mi/h en agua estacionaria, como se ve en la figura. Rema contra la corriente durante 15 min, y a continuación corriente abajo, regresando a su punto de partida en 12 min.

(a) Calcule la velocidad de la corriente.
(b) Calcule la distancia total recorrida.



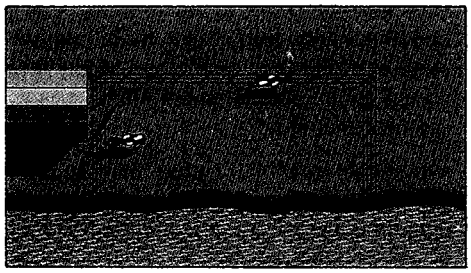
20 ***Rendimiento de la gasolina*** Un agente de ventas compró un automóvil que, según se anunciaba, en promedio recorre 25 mi/gal, en la ciudad, y 40 mi/gal en carretera. En un viaje reciente, de 1 800 mi, necesitó 51 gal de gasolina. Suponiendo que sea real la propaganda del rendimiento, ¿cuántas millas manejó en la ciudad?

21 ***Distancia al blanco*** Se dispara una bala en dirección horizontal, hacia un blanco, y se oye el impacto de la misma 1.5 s después; su velocidad es 3 300 pies/s, y la del sonido es 1 100 pies/s. ¿A qué distancia está el blanco?

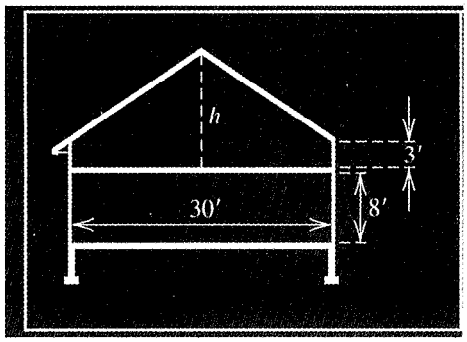
22 ***Velocidad de trote*** Una mujer comienza a correr a las 3:00 P.M., hacia el norte, a un paso de 6 min/mi. Después, invierte su dirección, y corre hacia el sur a un paso de 7 min/mi. Si regresa a su punto de partida a las 3:45 P.M., calcule el número total de millas que corrió.

23 ***Cercado de un terreno*** Un campesino piensa utilizar 180 pies de malla para encerrar un terreno rectangular, aprovechando parte de la orilla recta de un río como cerca de uno de los lados del rectángulo, como se ve en la figura. Calcule el área del terreno, si la longitud del lado paralelo al río es

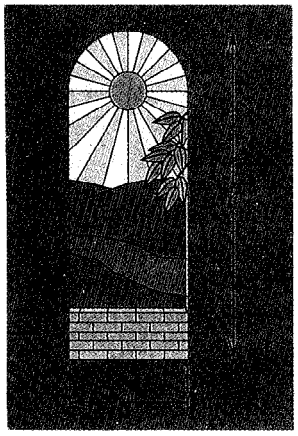
(a) el doble de la longitud de uno de los lados adyacentes.
(b) la mitad de la longitud de uno de dichos lados adyacentes.
(c) igual a la longitud de uno de los lados adyacentes.



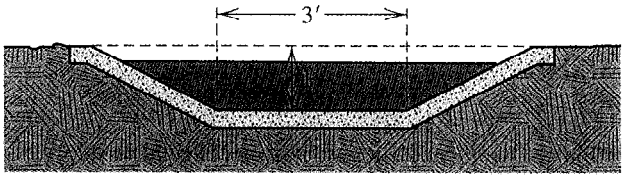
24 ***Dimensiones de una casa*** En la figura se ve un corte de una casa de dos plantas. La altura central, h, del segundo piso, no se ha determinado todavía. Calcule h de tal manera que el corte del segundo piso tenga la misma área que el corte de la planta baja. (Dimensiones en pies)



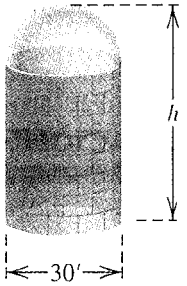
25 ***Dimensiones de una ventana*** Una ventana con emplomado tiene la forma de un rectángulo con un semicírculo en su parte superior, como se ve en la figura. El ancho de la ventana debe ser 3 pies, pero la altura aún debe determinarse. Si se usan 24 pies^2 de emplomado, calcule la altura h.



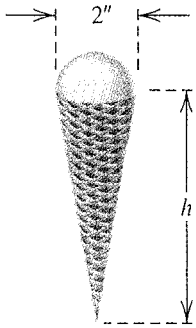
26 ***Dimensiones de un canal de drenaje*** Toda sección transversal de un canal de drenaje es un trapecio isósceles con una base menor de 3 pies y una altura de 1 pie, como se ve en la figura. Calcule el ancho de la base mayor que se necesita para que el área de la sección transversal del canal sea 5 pies^2.



27 ***Construcción de un silo*** Se construirá un gran silo para granos, en forma de un cilindro circular con tapa de hemisferio (véase la figura). El diámetro del silo debe ser 30 pies, pero la altura está por determinarse. Calcule la altura h del silo, que haga que la capacidad total sea 11 250π pies^3.



28 ***Dimensiones de un barquillo*** El barquillo de un helado, como el que se ve en la figura, debe contener 8 pulg^3 del helado, cuando está lleno hasta la punta. El diámetro del barquillo es 2 pulg, y la parte superior del helado tiene la forma de una semiesfera. Calcule la altura h del barquillo.



29 ***Rapidez para cortar el césped*** Un joven necesita 90 min para podar el césped, pero su hermana lo puede hacer en 60 min. ¿Cuánto tardarían los dos en podar el césped, si trabajaran juntos, con dos podadoras?

30 ***Llenado de una alberca*** Con el agua de una manguera, se puede llenar una alberca en 8 h. Una segunda manguera, más gruesa, puede llenarla en 5 h. ¿Cuánto tiempo se necesitará para llenarla, si se usan ambas mangueras en forma simultánea?

31 ***Entrega de diarios*** Una muchacha necesita 45 min para entregar los diarios de su ruta; sin embargo, si la ayuda su hermano, juntos sólo necesitan 20 min. ¿Cuánto tardaría el hermano en entregar los diarios él solo?

32 ***Vaciado de un depósito*** Se puede vaciar un depósito de agua con una bomba en 5 h. Una segunda bomba, más pequeña, lo puede vaciar en 8 h. Si la bomba grande arrancara a la 1:00 P. M., ¿a qué hora se debería poner en marcha la bomba pequeña para que el depósito quedara vacío a las 5:00 P.M.?

33 ***Estadísticas de béisbol*** Después de 100 juegos, un equipo de béisbol de liga mayor tiene un récord de 0.650; es decir, ha ganado el 65% de sus juegos. Si el equipo sólo gana el 50% de sus juegos durante el resto de la temporada, ¿después de cuántos juegos tendrá un promedio de 0.600?

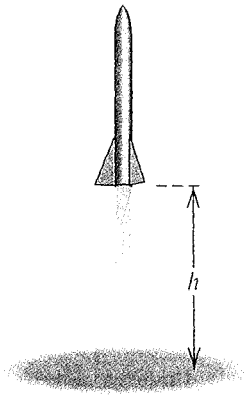
34 ***Ley de Ohm*** En electricidad, la ley de Ohm establece que $I = V/R$, donde I es la corriente, en amperes, V la tensión (o voltaje) en volts, y R la resistencia, en ohms. En determinado circuito, $V = 110$ y $R = 50$. Si V y R cambian en la misma proporción numérica, ¿qué cambio en esas cantidades haría que se duplicara I?

2.3 ECUACIONES CUADRÁTICAS

Se lanza verticalmente hacia arriba un cohete de juguete, desde el piso, como se ve en la Fig. 2.7. La velocidad inicial es 120 pies/s, y la única fuerza que actúa es la gravedad. En estas condiciones, la altura sobre el piso, h (en pies), del cohete, al haber transcurrido t segundos, está expresada por

$$h = -16t^2 + 120t.$$

FIGURA 2.7



En la siguiente tabla hay algunos valores de h para los primeros 7 s de vuelo.

t (segundos)	0	1	2	3	4	5	6	7
h (pies)	0	104	176	216	224	200	144	56

Según la tabla, se observa que al ascender, el cohete llega a 180 pies sobre el piso entre $t = 2$ y $t = 3$. Al descender, está a 180 pies sobre el piso entre $t = 5$ y $t = 6$. Para calcular los valores exactos de t, para los cuales $h = 180$ pies, se debe resolver la ecuación

$$180 = -16t^2 + 120t,$$

o sea

$$16t^2 - 120t + 180 = 0.$$

Como se ve en la siguiente tabla, una ecuación de este tipo se llama *ecuación cuadrática* en t. Después de deducir una fórmula para resolver esas ecuaciones, se retomará este problema en el Ejemplo 11, y se calcularán los tiempos exactos a los cuales el cohete está a 180 pies sobre el suelo.

Terminología	Definición	Ejemplos
Ecuación cuadrática en x	Ecuación que se puede escribir en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$	$4x^2 = 8 - 11x$ $x(3 + x) = 5$ $4x = x^2$

Uno de los métodos para resolver una ecuación cuadrática se basa en el hecho de que si p y q son expresiones en una variable x, entonces $pq = 0$ *si y sólo si* $p = 0$ *o* $q = 0$. En consecuencia, *si* $ax^2 + bx + c$ se puede escribir en forma de un producto de dos polinomios de primer grado, entonces se pueden encontrar las soluciones igualando a 0 cada factor, como se ve en los dos ejemplos siguientes. A esta técnica se le llama **método de factorización**.

EJEMPLO 1 ***Resolución de una ecuación mediante factorización***

Resolver $3x^2 = 10 - x$

SOLUCIÓN Para usar el método de factorización, *es esencial que sólo aparezca el número 0 en un lado de la ecuación*. Por lo tanto, se procede como sigue:

$$\begin{aligned} 3x^2 &= 10 - x && \text{ecuación dada} \\ 3x^2 + x - 10 &= 0 && \text{se suma } x - 10 \\ (3x - 5)(x + 2) &= 0 && \text{se factoriza} \\ 3x - 5 = 0, \quad x + 2 &= 0 && \text{se iguala a 0 cada factor} \\ x = \tfrac{5}{3}, \qquad x &= -2 && \text{se despeja } x \end{aligned}$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación dada son $\frac{5}{3}$ y -2.

EJEMPLO 2 ***Resolución de una ecuación por factorización***

Resolver $x^2 + 16 = 8x$.

SOLUCIÓN Se procede como en el Ejemplo 1:

$$\begin{aligned} x^2 + 16 &= 8x && \text{ecuación dada} \\ x^2 - 8x + 16 &= 0 && \text{se resta } 8x \\ (x - 4)(x - 4) &= 0 && \text{se factoriza} \\ x - 4 = 0, \quad x - 4 &= 0 && \text{se iguala a 0 cada factor} \\ x = 4, \qquad x &= 4 && \text{se despeja } x \end{aligned}$$

Entonces, la ecuación cuadrática de este caso tiene una solución, 4.

Puesto que $x - 4$ aparece como factor dos veces en la solución anterior, decimos que 4 es **raíz doble**, o que es **raíz de multiplicidad 2**, de la ecuación $x^2 + 16 = 8x$.

Si una ecuación cuadrática tiene la forma $x^2 = d$, para cierta $d > 0$, entonces $x^2 - d = 0$, o, en forma equivalente,

$$(x + \sqrt{d})(x - \sqrt{d}) = 0.$$

Igualando cada factor a cero, se obtienen las soluciones $-\sqrt{d}$ y $\sqrt{d}$. Con frecuencia se utiliza el símbolo $\pm\sqrt{d}$ (*más menos* $\sqrt{d}$) para representar tanto $\sqrt{d}$ como $-\sqrt{d}$. Así, para $d > 0$, se ha demostrado el siguiente resultado. (El caso $d < 0$ requiere del sistema de números complejos que se estudiará en la Secc. 2.4.)

Ecuación cuadrática especial

Si $x^2 = d$, entonces $x = \pm\sqrt{d}$.

La forma de resolver $x^2 = d$, como se indica en el cuadro anterior, se llama *sacar o extraer raíz cuadrada de ambos miembros de la ecuación*. Nótese que si $d > 0$, se obtiene una raíz cuadrada positiva y una negativa al mismo tiempo, y no sólo la raíz cuadrada principal que se definió en la Secc. 1.2.

EJEMPLO 3 ***Resolución de una ecuación de la forma $x^2 = d$***

Resolver

(a) $x^2 = 5$ **(b)** $(x + 3)^2 = 5$

SOLUCIÓN

(a)

$$x^2 = 5 \qquad \text{ecuación dada}$$

$$x = \pm\sqrt{5} \qquad \text{se saca raíz cuadrada}$$

Así, las soluciones son $\sqrt{5}$ y $-\sqrt{5}$.

(b)

$$(x + 3)^2 = 5 \qquad \text{ecuación dada}$$

$$x + 3 = \pm\sqrt{5} \qquad \text{se saca raíz cuadrada}$$

$$x = -3 \pm \sqrt{5} \qquad \text{se resta 3}$$

Entonces, las soluciones son $-3 + \sqrt{5}$ y $-3 - \sqrt{5}$.

En lo siguiente se sustituye una expresión de la forma $x^2 + kx$ por $(x + d)^2$, donde k y d son números reales. En este procedimiento, que se llama **completar el cuadrado** de $x^2 + kx$, se necesita sumar $(k/2)^2$, como se indica en el siguiente cuadro. Para $x^2 - kx$ se usa el mismo método.

Completar el cuadrado

Para completar el cuadrado de $x^2 + kx$, o $x^2 - kx$, sumar $\left(\frac{k}{2}\right)^2$; es decir, *sumar el cuadrado de la mitad del coeficiente de x.*

(1) $x^2 + kx + \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{k}{2}\right)^2$

(2) $x^2 - kx + \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{k}{2}\right)^2$

EJEMPLO 4 ***Complementación del cuadrado***

Complete el cuadrado de

(a) $x^2 + 3x$ **(b)** $x^2 - 3x$

SOLUCIÓN El cuadrado de la mitad del coeficiente de x es $\left(\frac{3}{2}\right)^2$. Nótese que se puede hacer caso omiso del signo del coeficiente de x. Así,

(a) $x^2 + 3x + (\frac{3}{2})^2 = (x + \frac{3}{2})^2$

(b) $x^2 - 3x + (\frac{3}{2})^2 = (x - \frac{3}{2})^2$

En el ejemplo siguiente se resuelve una ecuación cuadrática completando un cuadrado.

EJEMPLO 5 ***Resolución de una ecuación cuadrática completando el cuadrado***

Resolver $x^2 - 5x + 3 = 0$.

SOLUCIÓN Conviene reacomodar primero la ecuación, para que sólo haya términos en x en el miembro izquierdo, como sigue:

$$x^2 - 5x + 3 = 0 \qquad \text{ecuación dada}$$

$$x^2 - 5x = -3 \qquad \text{se resta 3}$$

$$x^2 - 5x + \left(\tfrac{5}{2}\right)^2 = -3 + \left(\tfrac{5}{2}\right)^2 \qquad \text{se completa el cuadrado sumando } \left(\tfrac{5}{2}\right)^2 \text{ a ambos miembros}$$

$$\left(x - \tfrac{5}{2}\right)^2 = \tfrac{13}{4} \qquad \text{ecuación equivalente}$$

$$x - \tfrac{5}{2} = \pm\sqrt{\tfrac{13}{4}} \qquad \text{se saca raíz cuadrada}$$

$$x = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2} \qquad \text{se suma } \tfrac{5}{2}$$

Entonces, las soluciones de la ecuación son $(5 + \sqrt{13})/2 \approx 4.3$, y $(5 - \sqrt{13})/2 \approx 0.7$.

Se puede resolver una ecuación cuadrática, $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 1$, agregando una etapa al procedimiento que se usó en el ejemplo anterior. Después de reordenar la ecuación para que sólo haya términos en x a la izquierda,

$$ax^2 + bx = -c,$$

se dividen ambos miembros entre a, obteniendo

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

A continuación se completa el cuadrado sumando $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ a ambos miembros. Esta técnica se usa en la demostración de la siguiente fórmula, muy importante:

Fórmula cuadrática

Si $a \neq 0$, las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c$ son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

DEMOSTRACIÓN Se supondrá que $b^2 - 4ac \geq 0$, tal que $\sqrt{b^2 - 4ac}$ es un número real. El caso en el cual $b^2 - 4ac < 0$ se analiza en la sección siguiente. Se procede como sigue:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{ecuación dada}$$

$$ax^2 + bx = -c \qquad \text{se resta } c$$

(continúa)

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \qquad \text{se divide entre } a$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \qquad \text{se completa el cuadrado}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \qquad \text{ecuación equivalente}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \qquad \text{se saca raíz cuadrada}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \qquad \text{se resta } \frac{b}{2a}$$

El radical de la última ecuación se escribe en la siguiente forma:

$$\pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{(2a)^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|2a|}.$$

Como $|2a| = 2a$ si $a > 0$, o $|2a| = -2a$ si $a < 0$, se observa que en todos los casos

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad \blacksquare$$

Nótese que si se maneja en forma correcta la fórmula cuadrática, no es necesario comprobar las soluciones.

La expresión $b^2 - 4ac$ bajo el signo radical de la fórmula se llama **discriminante** de la ecuación cuadrática. Se puede usar el discriminante para determinar la naturaleza de las raíces de la ecuación, como se indica en la tabla siguiente:

Valor del discriminante $b^2 - 4ac$	**Naturaleza de las raíces de** $ax^2 + bx + c = 0$
Valor positivo	Dos raíces reales y distintas
0	Una raíz de multiplicidad 2
Valor negativo	Sin raíz real

El discriminante, en los dos ejemplos que siguen, es positivo. En el Ejemplo 8 es cero.

EJEMPLO 6 ***Uso de la fórmula cuadrática***

Resolver $4x^2 + x - 3 = 0$.

SOLUCIÓN Sean $a = 4$, $b = 1$ y $c = -3$ en la fórmula cuadrática

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(4)(-3)}}{2(4)}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{8} = \frac{-1 \pm 7}{8}$$

Por consiguiente, las soluciones son

$$x = \frac{-1+7}{8} = \frac{3}{4} \quad \text{y} \quad x = \frac{-1-7}{8} = -1.$$

También se puede resolver el Ejemplo 6 por factorización. Si se escribe $(4x - 3)(x + 1) = 0$, y si se iguala cada factor a cero, se obtiene $x = \frac{3}{4}$ y $x = -1$.

EJEMPLO 7 ***Uso de la fórmula cuadrática***

Resolver $2x(3 - x) = 3$.

SOLUCIÓN Para la fórmula cuadrática se escribe la ecuación en la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Las ecuaciones que siguen son equivalentes:

$$\begin{aligned} 2x(3-x) &= 3 && \text{ecuación dada} \\ 6x - 2x^2 &= 3 && \text{se multiplican los factores} \\ -2x^2 + 6x - 3 &= 0 && \text{se resta 3} \\ 2x^2 - 6x + 3 &= 0 && \text{se multiplica por } -1 \end{aligned}$$

Ahora se hace $a = 2$, $b = -6$ y $c = 3$ en la fórmula cuadrática, y se obtiene

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(2)(3)}}{2(2)} \\ &= \frac{6 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

Como 2 es factor del numerador y denominador, se simplifica la última fracción como sigue:

$$\frac{\not{2}(3 \pm \sqrt{3})}{\not{2} \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$$

Por consiguiente, las soluciones son $\frac{3+\sqrt{3}}{2} \approx 2.37$ y $\frac{3-\sqrt{3}}{2} \approx 0.63$.

Con el ejemplo que sigue se ilustra el caso de una raíz doble.

EJEMPLO 8 ***Uso de la fórmula cuadrática***

Resolver $9x^2 - 30x + 25 = 0$

SOLUCIÓN Sean $a = 9$, $b = -30$ y $c = 25$ en la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-(-30) \pm \sqrt{(-30)^2 - 4(9)(25)}}{2(9)}$$

$$= \frac{30 \pm \sqrt{900 - 900}}{18} = \frac{30 \pm 0}{18} = \frac{5}{3}$$

En consecuencia, la ecuación tiene una raíz, $\frac{5}{3}$, que es doble.

EJEMPLO 9 ***Eliminación de fracciones en una ecuación***

Resolver $\dfrac{2x}{x-3} + \dfrac{5}{x+3} = \dfrac{36}{x^2-9}$.

SOLUCIÓN Con las reglas descritas en la Secc. 2.1 para resolver una ecuación con expresiones racionales, se multiplica por el MCD, que es $(x + 3)(x - 3)$, recordando que, según la regla 2, los números –3 y +3 que hacen cero al mínimo común denominador, no pueden ser raíces. Entonces se procede como sigue:

$$\frac{2x}{x-3} + \frac{5}{x+3} = \frac{36}{x^2-9} \qquad \text{ecuación dada}$$

$$2x(x+3) + 5(x-3) = 36 \qquad \text{multiplicación por el MCD, que es } (x+3)(x-3)$$

$$2x^2 + 6x + 5x - 15 - 36 = 0 \qquad \text{se multiplican los factores y se resta 36}$$

$$2x^2 + 11x - 51 = 0 \qquad \text{se simplifica}$$

$$(2x + 17)(x - 3) = 0 \qquad \text{factorización}$$

$$2x + 17 = 0, \quad x - 3 = 0 \qquad \text{se iguala a 0 cada factor}$$

$$x = -\tfrac{17}{2}, \quad x = 3 \qquad \text{se despeja } x$$

Como $x = 3$ no puede ser solución, entonces $x = -\frac{17}{2}$ es la única solución de la ecuación dada.

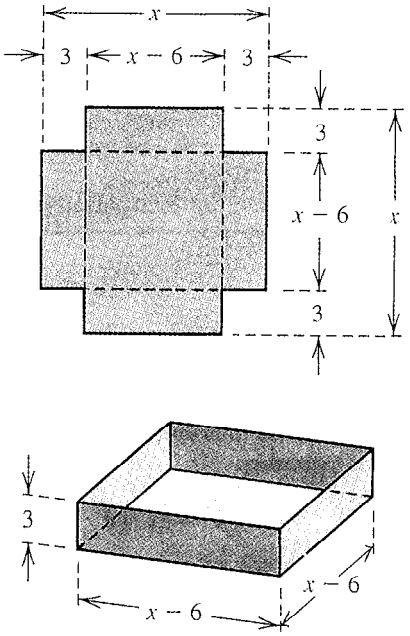
Muchos problemas de aplicación conducen a ecuaciones cuadráticas. En el ejemplo que sigue se da un caso.

EJEMPLO 10 ***Construcción de una caja rectangular***

Una caja con base cuadrada y sin tapa se construye partiendo de una lámina cuadrada de estaño, cortando un cuadrado de 3 pulg por lado en cada esquina, y doblando hacia arriba los lados. Si la caja debe contener 48 pulg^3, ¿qué dimensiones debe tener la lámina de zinc?

SOLUCIÓN Se inicia trazando el esquema de la Fig. 2.8, y haciendo que x represente la longitud desconocida del lado de la lámina de estaño. Entonces, cada lado de la base de la caja tendrá una longitud igual a $x - 3 - 3 = x - 6$.

FIGURA 2.8



Como el área de la base de la caja es $(x-6)^2$ y la altura es 3, se tiene

$$\text{volumen de la caja} = 3(x-6)^2.$$

La caja debe contener 48 pulg^3, por lo tanto,

$$3(x-6)^2 = 48.$$

A continuación se despeja x:

$$(x-6)^2 = 16 \qquad \text{se divide entre 3}$$
$$x-6 = \pm 4 \qquad \text{se saca raíz cuadrada}$$
$$x = 6 \pm 4 \qquad \text{se suma 6}$$

En consecuencia,

$$x = 10 \qquad \text{o} \qquad x = 2.$$

✓ ***Comprobación*** Si se examina la Fig. 2.8, se observa que $x = 2$ no se acepta, porque en este caso no es posible formar una caja. Sin embargo, si se toma un cuadrado de estaño de 10 pulg, se cortan esquinas cuadradas de 3 pulg y se dobla, se obtiene una caja cuyas dimensiones serán 4 pulg, 4 pulg y 3 pulg. La caja tiene el volumen deseado de 48 pulg^3. Por consiguiente, la respuesta al problema es 10 pulgadas.

Como se vio en el Ejem. 10, aun cuando se formule una ecuación en forma correcta, es posible llegar a soluciones sin significado, debido a la naturaleza física de determinados problemas. Esas soluciones se deben desechar. Por ejemplo, no se aceptaría que la edad de un individuo fuera -7 años, ni que el número de automóviles en un estacionamiento sea de $\sqrt{50}$.

En el ejemplo que sigue se resuelve el problema aplicado que se mencionó al principio de esta sección.

EJEMPLO 11 *Cálculo de la altura que alcanza un cohete de juguete*

La altura h, en pies, sobre el piso, que alcanza un cohete de juguete a los t segundos de haber sido disparado, es $h = -16t^2 + 120t$. ¿Cuándo llegará el cohete a 180 pies sobre el piso?

SOLUCIÓN Empleando $h = -16t^2 + 120t$ se obtiene

$$180 = -16t^2 + 120t \qquad \text{sea } h = 180$$
$$16t^2 - 120t + 180 = 0 \qquad \text{se suma } 16t^2 - 120t$$
$$4t^2 - 30t + 45 = 0. \qquad \text{se divide entre 4}$$

Se aplica la fórmula cuadrática con $a = 4$, $b = -30$ y $c = 45$, y se tiene

$$t = \frac{-(-30) \pm \sqrt{(-30)^2 - 4(4)(45)}}{2(4)} = \frac{30 \pm \sqrt{180}}{8}$$
$$= \frac{30 \pm 6\sqrt{5}}{8} = \frac{15 \pm 3\sqrt{5}}{4}.$$

ESCUELA POLITÉCNI

Por lo tanto, el cohete se encuentra a 180 pies sobre el piso en los siguientes instantes:

$$t = \frac{15 - 3\sqrt{5}}{4} \approx 2.07 \text{ sec}$$

$$t = \frac{15 + 3\sqrt{5}}{4} \approx 5.43 \text{ sec}$$

EJERCICIOS 2.3

Ejercicios 1–14: Resuelva, por factorización, las ecuaciones siguientes.

1 $6x^2 + x - 12 = 0$ **2** $4x^2 + x - 14 = 0$

3 $15x^2 - 12 = -8x$ **4** $15x^2 - 14 = 29x$

5 $2x(4x + 15) = 27$ **6** $x(3x + 10) = 77$

7 $75x^2 + 35x - 10 = 0$ **8** $48x^2 + 12x - 90 = 0$

9 $12x^2 + 60x + 75 = 0$ **10** $4x^2 - 72x + 324 = 0$

11 $\dfrac{2x}{x+3} + \dfrac{5}{x} - 4 = \dfrac{18}{x^2 + 3x}$

12 $\dfrac{5x}{x-2} + \dfrac{3}{x} + 2 = \dfrac{-6}{x^2 - 2x}$

13 $\dfrac{5x}{x-3} + \dfrac{4}{x+3} = \dfrac{90}{x^2 - 9}$

14 $\dfrac{3x}{x-2} + \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{-4}{x^2 - 4}$

Ejercicios 15 y 16: Determine si las dos ecuaciones son equivalentes.

15 **(a)** $x^2 = 16, \quad x = 4$ **(b)** $x = \sqrt{9}, \quad x = 3$

16 **(a)** $x^2 = 25, \quad x = 5$ **(b)** $x = \sqrt{64}, \quad x = 8$

Ejercicios 17–24: Resuelva la ecuación.

17 $x^2 = 169$ **18** $x^2 = 361$

19 $25x^2 = 9$ **20** $16x^2 = 49$

21 $(x - 3)^2 = 17$ **22** $(x + 4)^2 = 31$

23 $4(x + 2)^2 = 11$ **24** $9(x - 1)^2 = 7$

Ejercicios 25 y 26: Determine los valores de d que completen el cuadrado para la expresión.

25 **(a)** $x^2 + 9x + d$ **(b)** $x^2 - 8x + d$

(c) $x^2 + dx + 36$ **(d)** $x^2 + dx + \frac{49}{4}$

26 **(a)** $x^2 + 13x + d$ **(b)** $x^2 - 6x + d$

(c) $x^2 + dx + 25$ **(d)** $x^2 + dx + \frac{81}{4}$

Ejercicios 27–30: Resuelva las ecuaciones completando el cuadrado.

27 $x^2 + 6x + 7 = 0$ **28** $x^2 - 8x + 11 = 0$

29 $4x^2 - 12x - 11 = 0$ **30** $4x^2 + 20x + 13 = 0$

Ejercicios 31– 44: Resuelva las ecuaciones, con la fórmula cuadrática.

31 $6x^2 - x = 2$ **32** $5x^2 + 13x = 6$

33 $x^2 + 4x + 2 = 0$ **34** $x^2 - 6x - 3 = 0$

35 $2x^2 - 3x - 4 = 0$ **36** $3x^2 + 5x + 1 = 0$

37 $\frac{3}{2}z^2 - 4z - 1 = 0$ **38** $\frac{5}{3}s^2 + 3s + 1 = 0$

39 $\dfrac{5}{w^2} - \dfrac{10}{w} + 2 = 0$ **40** $\dfrac{x+1}{3x+2} = \dfrac{x-2}{2x-3}$

41 $4x^2 + 81 = 36x$ **42** $24x + 9 = -16x^2$

43 $\dfrac{5x}{x^2 + 9} = -1$ **44** $\frac{1}{7}x^2 + 1 = \frac{4}{7}x$

Ejercicios 45 y 46: Con la fórmula cuadrática, resuelva la ecuación para (a) x en términos de y, y (b) para y en términos de x.

45 $4x^2 - 4xy + 1 - y^2 = 0$ **46** $2x^2 - xy = 3y^2 + 1$

Ejercicios 47–50: Despeje la variable especificada.

47 $K = \frac{1}{2}mv^2$ para v (energía cinética)

48 $F = g\frac{mM}{d^2}$ para d (Ley de Newton, de la gravitación)

49 $A = 2\pi r(r + h)$ para r (área de la superficie de un cilindro cerrado)

50 $s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t$ para t (recorrido en caída libre de un objeto)

51 ***Velocidad de un gas*** Cuando un gas caliente sale por una chimenea cilíndrica, su velocidad varía respecto a una sección transversal circular de la chimenea; el gas cerca del centro de la sección tiene velocidad mayor que el que está cerca del perímetro. Este fenómeno se puede representar con la fórmula

$$V = V_{\text{máx}}\left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right],$$

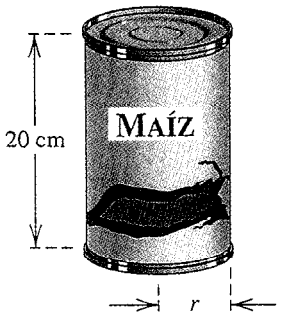
en la cual $V_{\text{máx}}$ es la velocidad máxima del gas; r_0 es el radio de la chimenea; y V es la velocidad del gas a una distancia r del centro de la sección transversal circular. De esta fórmula, despeje r.

52 ***Densidad de la atmósfera*** Para altitudes h hasta de 10 000 metros, la densidad de la atmósfera terrestre, en kg/m^3, es, aproximadamente,

$$D = 1.225 - (1.12 \times 10^{-4})h + (3.24 \times 10^{-9})h^2.$$

¿Cuál es la altura aproximada, si la densidad de la atmósfera es 0.74 kg/m^3?

53 ***Dimensiones de una lata*** Un fabricante de latas de lámina desea fabricar una lata cilídrica recta de 20 cm de altura, con capacidad de 3 000 cm^3 (véase la figura). Calcule el radio interior, r, de la lata.



54 ***Fabricación de una caja rectangular*** Véase el Ejemplo 10. Se debe fabricar una caja sin tapa, cortando cuadrados de 3 pulg de lado en las esquinas de una lámina rectangular de estaño, cuya longitud sea el doble de su ancho. ¿Qué tamaño de lámina daría como resultado una caja que tenga un volumen de 60 pulg^3?

55 ***Lanzamiento de béisbol*** Una pelota de béisbol se arroja directo hacia arriba con una velocidad inicial de 64 pies/s. El número de pies, s, sobre el terreno, después de t segundos, está expresado por la ecuación $s = -16t^2 + 64t$

¿Cuándo estará la pelota a 48 pies sobre el terreno? ¿Cuándo chocará con el piso?

56 ***Distancia de frenado*** La distancia que recorre un vehículo desde que el conductor toma la decisión de pisar los frenos y el momento en el que realmente se detiene el automóvil, se llama distancia de frenado. Para un automóvil que vaya a v mi/h, la distancia de frenado, d, en pies, es $d = v + (v^2/20)$.

(a) Calcule la distancia de frenado cuando v es 55 mi/h.

(b) Si un conductor decide enfrenar a 120 pies de distancia de un semáforo, ¿a qué velocidad puede viajar y detenerse al llegar al semáforo?

57 ***Temperatura del agua hirviente*** La temperatura, T, en °C, a la cual hierve el agua, se relaciona con la altitud, h, en metros sobre el nivel del mar, mediante la fórmula

$$h = 1000(100 - T) + 580(100 - T)^2$$

válida entre $95 \leq T \leq 100$.

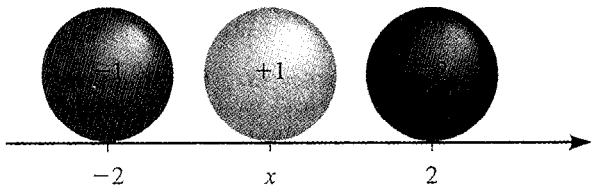
(a) ¿A qué altura hierve el agua a una temperatura de 98 °C?

(b) La elevación aproximada del Monte Everest es 8 840 metros. Estime la temperatura a la cual hierve el agua en la cima de esa montaña. (*Sugerencia:* use la fórmula cuadrática con $x = 100 - T$)

58 ***Ley de Coulomb*** Una partícula con carga −1 está en un eje de coordenadas en $x = -2$, y una partícula de carga −2, está en $x = 2$, como se ve en la figura. Si una partícula de carga +1 se coloca en una posición, x, intermedia entre −2 y 2, la ley de Coulomb en electricidad dice que la fuerza neta F que actúa sobre esta partícula está dada por

$$F = \frac{-k}{(x + 2)^2} + \frac{2k}{(2 - x)^2}$$

para una constante $k > 0$. Calcule la posición en la cual la fuerza neta es cero.



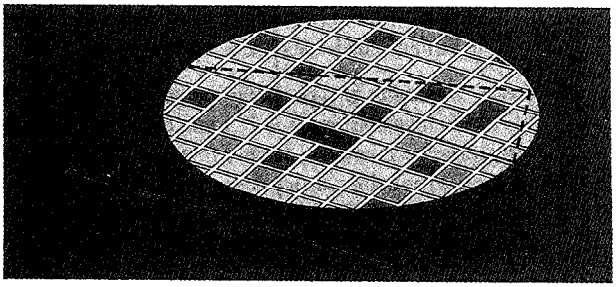
59 ***Dimensiones de una acera*** Una sección rectangular de terreno cuyas dimensiones son 26 por 30 pies, está rodeada por una acera de ancho uniforme. El área de la acera es 240 pies^2. ¿Cuál es el ancho de esa acera?

60 ***Diseño de un cartel*** Se desea usar una hoja de papel de 24 pulg × 36 pulg para un cartel rectangular cuyo largo sea vertical. Los márgenes a los lados y en la parte superior deben tener igual anchura, pero el margen inferior debe tener doble anchura que los demás. Calcule el ancho de los márgenes, si el área impresa debe tener 661.5 pulg^2.

61 ***Cercado de un jardín*** Un jardín cuadrado se va a cercar. Si la cerca cuesta \$1 (dólar) por pie, y el costo de preparar el terreno es \$0.50 por pie^2, calcule el tamaño del jardín que se puede cercar por \$120.

62 ***Cercado de un terreno*** Un campesino proyecta cercar un terreno rectangular, aprovechando parte de su granero como uno de los lados, y cercando los otros tres. Si el lado paralelo al granero debe tener doble longitud que la de sus lados adyacentes, y el área del terreno debe ser 128 pies^2, ¿cuántos pies de cerca debe comprar?

63 ***Proyecto de una autopista*** Los límites de una ciudad forman un círculo de 5 mi de diámetro. Como se indica en la figura, una carretera recta pasa por el centro de la ciudad, yendo de A a B. El departamento de carreteras planea construir una autopista de 6 mi de longitud, de A al punto P en la periferia, y después a B. Calcule la distancia de A a P. (*Indicación: APB* es un triángulo rectángulo.)

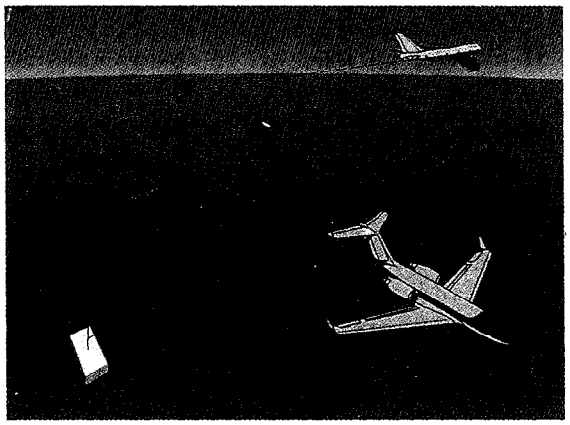


64 ***Expansión de una ciudad*** Los límites de una ciudad forman un círculo de 10 mi de diámetro. En los últimos 10 años, la ciudad ha crecido en superficie, aproximadamente, 16π mi^2, o sea, unas 50 mi^2. Suponiendo que la ciudad siempre es circular, calcule el cambio correspondiente en la distancia del centro a la periferia.

65 ***Distancia entre aeronaves*** Un aeroplano que vuela hacia el norte, a 200 mi/h, pasó sobre un punto en tierra a las 2:00 P. M. Otro aeroplano, a la misma altitud, pasó sobre ese punto a las 2:30 P.M., volando hacia el este a 400 mi/h (véase la figura).

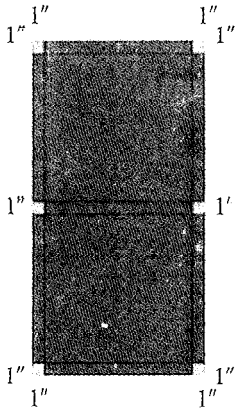
(a) Si t representa el tiempo, en horas, después de las 2:30 P.M., exprese la distancia, d, entre los aeroplanos, en función de t.

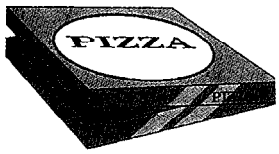
(b) ¿A qué hora, después de las 2:30 P.M., estuvieron los aviones a 500 mi de distancia?



66 ***Alcance de un radiorreceptor y transmisor*** Dos topógrafos, cada uno con sus radiocomunicadores portátiles, salen del mismo punto a las 9:00 A. M.; uno camina hacia el sur a 4 mi/h y el otro hacia el oeste a 3 mi/h. ¿Cuánto tiempo pueden comunicarse entre sí, si cada aparato tiene un alcance máximo de 2 mi?

67 ***Fabricación de una caja de pizza*** Se desea fabricar una caja de pizza con una lámina rectangular de cartoncillo, cortando 4 cuadros de 1 pulg de lado en las esquinas y 2 a la mitad del largo, y doblando luego hacia arriba los lados (véase la figura). El área de la base debe ser 144 pulg^2. ¿De qué tamaño es el rectángulo de cartoncillo?





68 ***Fabricación de bastidores*** Se desea formar dos marcos de alambre, cuadrados, con un alambre de 100 pulg de longitud. El área encerrada por uno de ellos debe ser la mitad de la otra. Calcule las dimensiones de cada cuadro. No se considere el espesor del alambre.

69 ***Velocidad de recorrido*** La velocidad de la corriente de un río es 5 mi/h. Un remero necesita 30 min más para recorrer 1.2 mi corriente arriba, que cuando rema la misma distancia corriente abajo. ¿Cuál es la velocidad del remero en agua inmóvil?

70 ***Altura de un acantilado*** Si se deja caer una piedra al mar desde un acantilado recorre, aproximadamente, $16t^2$ pies en t s. El golpe en el agua se oye 4 s después, y la velocidad del sonido es 1 100 pies/s. Calcule, en forma aproximada, la altura del acantilado.

71 ***Descuento al mayoreo*** Una empresa vende calzado deportivo a \$40 (dólares) el par si se piden menos de 50 pares. Si se piden 50 o más, hasta 600, el precio del par se reduce a una tasa de \$0.04 por el número pedido. ¿Cuántos pares se pueden comprar con \$8 400?

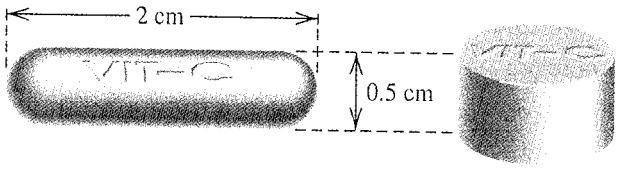
72 ***Precio de un tocadisco para CD*** Cuando un gramófono para discos compactos (CD) de una marca común se vende a \$300 (dólares), una tienda vende 15 por semana. Sin embargo, al reducir \$10 el precio, las ventas aumentan en 2 por semana. ¿Qué precio de venta hará que las entradas semanales sean \$7 000?

73 ***Dimensiones de un tambor de aceite*** Se quiere fabricar un tambor cilíndrico cerrado para aceite con una altura de 4 pies de tal modo que la superficie total sea de 10π pies^2. Calcule el diámetro del tambor.

74 ***Dimensiones de una cápsula de vitaminas*** La rapidez con la que se comienza a disolver una tableta de vitamina C, depende del área superficial de la misma. Una marca de vitaminas tiene 2 cm de longitud y tiene la forma de un cilindro con tapas hemisféricas, de 0.5 cm de diámetro, como se muestra en la figura. Las tabletas de otra marca tienen la forma de un cilindro circular recto, de 0.5 cm de altura.

(a) Calcule el diámetro de la segunda tableta para que su superficie sea igual a la de la primera.

(b) Calcule el volumen de cada tableta.



Ejercicios 75 y 76: En una explosión nuclear se producirá una bola de fuego que alcanzará un volumen máximo igual a V_0. Para temperaturas menores que 2000 K (kelvins) y con determinada fuerza explosiva, el volumen V de la bola de fuego, t segundos después de la explosión, se puede calcular con la fórmula dada. (Nótese que los kelvins se abrevian como K, y ya no como °K.) Calcule t aproximadamente, cuando V es 95% de V_0.

75 $V/V_0 = 0.8197 + 0.007752t + 0.0000281t$. (Explosión de 20 kilotones.) (ton = tonelada de TNT)

76 $V/V_0 = 0.831 + 0.00598t + 0.0000919t$. (Explosión de 10 megatones.)

Ejercicios 77 y 78: Cuando se usa una calculadora, la fórmula cuadrática no siempre da resultados exactos si b^2 es grande en comparación con ac, porque una de las raíces tenderá a cero y será difícil aproximarla.

(a) Con la fórmula cuadrática, aproxime las raíces de la ecuación dada.

(b) Para obtener una mejor aproximación de la raíz cercana a cero, racionalice el numerador de la siguiente manera

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{a} \quad x = \frac{2c}{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}},$$

y use la segunda fórmula.

77 $x^2 + 4{,}500{,}000x - 0.96 = 0$

78 $x^2 - 73{,}000{,}000x + 2.01 = 0$

2.4 NÚMEROS COMPLEJOS

Los *números complejos* se utilizan para llegar a soluciones de ecuaciones que no se puedan resolver con tan sólo el conjunto $\mathbb{R}$ de números reales. En la tabla siguiente se muestran varias ecuaciones cuadráticas sencillas y los tipos de números que se necesitan como soluciones.

Ecuación	Soluciones	Tipos de números necesarios
$x^2 = 9$	$3, -3$	Números enteros
$x^2 = \frac{9}{4}$	$\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$	Números racionales
$x^2 = 5$	$\sqrt{5}, -\sqrt{5}$	Números irracionales
$x^2 = -5$	?	Números complejos

Las soluciones de las tres primeras ecuaciones de la tabla están en $\mathbb{R}$. Sin embargo, como los cuadrados de los números reales nunca son negativos, $\mathbb{R}$ no contiene las soluciones de $x^2 = -5$. Para resolver esta ecuación es necesario el **sistema de números complejos**, $\mathbb{C}$ que contiene tanto a $\mathbb{R}$ como a números cuyos cuadrados son negativos.

Se empieza presentando la **unidad imaginaria**, que se representa con i, y tiene las propiedades siguientes:

Propiedades de i

$$i = \sqrt{-1}, \quad i^2 = -1$$

Debido a que su cuadrado es negativo, la letra i no representa un número real. Es una nueva entidad matemática que permitirá obtener $\mathbb{C}$. Como i, junto con $\mathbb{R}$, están en $\mathbb{C}$, se debe tener en cuenta productos de la forma bi, de un número real b, y también expresiones de la forma $a + bi$ para números reales a y b. La tabla siguiente presenta las definiciones que se usan en este texto.

Terminología	Definición
Número complejo	$a + bi$, donde a y b son números reales, e $i^2 = -1$
Igualdad	$a + bi = c + di$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$
Suma	$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
Producto	$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

No es necesario memorizar las definiciones de la suma y la multiplicación de números complejos de la tabla anterior. En lugar de ello, *se pueden manejar todos los símbolos como si tuvieran las propiedades para los números reales, excepto el único caso: se remplaza i^2 por* -1. Así, en el producto $(a + bi)(c + di)$ simplemente se aplican las leyes distributivas y el hecho de que

$$(bi)(di) = bdi^2 = bd(-1) = -bd.$$

EJEMPLO 1 ***Suma y multiplicación de números complejos***

Expresar lo siguiente en la forma $a + bi$, donde a y bi son números reales:

(a) $(3 + 4i) + (2 + 5i)$ **(b)** $(3 + 4i)(2 + 5i)$

SOLUCIÓN

(a) $$(3 + 4i) + (2 + 5i) = (3 + 2) + (4 + 5)i = 5 + 9i$$

(b) $$\begin{aligned}(3 + 4i)(2 + 5i) &= (3 + 4i)2 + (3 + 4i)(5i)\\ &= 6 + 8i + 15i + 20i^2\\ &= 6 + 23i + 20(-1)\\ &= -14 + 23i\end{aligned}$$

El conjunto de números reales, $\mathbb{R}$ se puede identificar con el conjunto de números complejos que tienen la forma $a + 0i$. También conviene representar al número $0 + bi$ como bi. Así,

$$(a + 0i) + (0 + bi) = (a + 0) + (0 + b)i = a + bi.$$

Por consiguiente, se considera que $a + bi$ es la suma de dos números complejos, a y bi, es decir, $a + 0i$ y $0 + bi$. A veces se dice que a es la **parte real** y b la **parte imaginaria** del número complejo $a + bi$.

Ya es posible resolver una ecuación del tipo $x^2 = -5$. En este caso específico, como

$$(\sqrt{5}i)(\sqrt{5}i) = (\sqrt{5})^2 i^2 = 5(-1) = -5,$$

se ve que una solución es $\sqrt{5}i$ y la otra es $-\sqrt{5}i$.

En la tabla siguiente definimos la diferencia de números complejos, y la multiplicación de un número complejo por un número real.

Terminología	Definición
Diferencia	$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$
Multiplicación por un número real k	$k(a + bi) = ka + (kb)i$

Si se nos pidiera escribir una expresión en la forma $a + bi$, también sería válida la forma $a - di$, porque $a - di = a + (-d)i$.

EJEMPLO 2 ***Operaciones con números complejos***

Expresar lo siguiente en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales:

(a) $4(2 + 5i) - (3 - 4i)$ **(b)** $(4 - 3i)(2 + i)$ **(c)** $i(3 - 2i)^2$ **(d)** i^{51}

SOLUCIÓN

(a) $$4(2 + 5i) - (3 - 4i) = 8 + 20i - 3 + 4i = 5 + 24i$$

(b) $$(4 - 3i)(2 + i) = 8 - 6i + 4i - 3i^2 = 11 - 2i$$

(c) $i(3 - 2i)^2 = i(9 - 12i + 4i^2) = i(5 - 12i) = 5i - 12i^2 = 12 + 5i$

(d) Al elevar i a potencias sucesivas, se obtiene

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1,$$

y el ciclo comienza de nuevo

$$i^5 = i, \quad i^6 = i^2 = -1, \quad \text{etcétera.}$$

En especial,

$$i^{51} = i^{48}i^3 = (i^4)^{12}i^3 = (1)^{12}i^3 = i^3 = -i.$$

El siguiente concepto tiene aplicaciones importantes cuando se trabaja con números complejos:

Definición del conjugado de un número complejo

El conjugado de $a + bi$ es $a - bi$

Como $a - bi = a + (-bi)$, entonces el conjugado de $a - bi$ es

$$a - (-bi) = a + bi.$$

Por consiguiente, $a + bi$ y $a - bi$ *son conjugados entre sí.*

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Conjugados

Número complejo	Conjugado
❑ $5 + 7i$	$5 - 7i$
❑ $5 - 7i$	$5 + 7i$
❑ $4i$	$-4i$
❑ 3	3

Las dos propiedades siguientes son consecuencia de las definiciones de suma y producto de números complejos.

Propiedades de los conjugados	Ejemplo
$(a + bi) + (a - bi) = 2a$	$(4 + 3i) + (4 - 3i) = 4 + 4 = 2 \cdot 4$
$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$	$(4 + 3i)(4 - 3i) = 4^2 - (3i)^2 = 4^2 - 3^2i^2 = 4^2 + 3^2$

Nótese que *la suma y el producto de un número complejo y su conjugado son números reales.*

Los conjugados son útiles para determinar el **inverso multiplicativo**, $\dfrac{1}{a+bi}$ de $a + bi$, o para simplificar el cociente $\dfrac{a+bi}{c+di}$ de dos números complejos, como se ve en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3 ***Cocientes de números complejos***

Expresar lo siguiente en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales:

(a) $\dfrac{1}{9+2i}$ **(b)** $\dfrac{7-i}{3-5i}$

SOLUCIÓN

(a)
$$\frac{1}{9+2i} = \frac{1}{9+2i}\cdot\frac{9-2i}{9-2i} = \frac{9-2i}{81+4} = \frac{9}{85} - \frac{2}{85}i$$

(b)
$$\frac{7-i}{3-5i} = \frac{7-i}{3-5i}\cdot\frac{3+5i}{3+5i} = \frac{21+35i-3i-5i^2}{9+25}$$
$$= \frac{26+32i}{34} = \frac{13}{17} + \frac{16}{17}i$$

Si p es un número positivo real, entonces las soluciones de la ecuación $x^2 = -p$ están en $\mathbb{C}$. Una solución es $\sqrt{p}\,i$, ya que

$$(\sqrt{p}i)^2 = (\sqrt{p})^2 i^2 = p(-1) = -p.$$

Igualmente, $-\sqrt{p}\,i$ también es una solución.

La definición de $\sqrt{-r}$ en la tabla siguiente es consecuencia de $(\sqrt{r}\,i)^2 = -r$, para $r > 0$. Cuando se use esta definición, se debe tener cuidado de *no* escribir $\sqrt{ri}$, cuando lo que se desea es $\sqrt{r}\,i$.

Terminología	Definición	Ejemplos
Raíz cuadrada principal $\sqrt{-r}$ para $r > 0$	$\sqrt{-r} = \sqrt{r}\,i$	$\sqrt{-9} = \sqrt{9}\,i = 3i$ $\sqrt{-5} = \sqrt{5}\,i$ $\sqrt{-1} = \sqrt{1}\,i = i$

El radical se debe usar con precaución cuando el radicando es negativo. Por ejemplo, la fórmula $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$, que es válida para números reales positivos, no es cierta cuando tanto a como b son negativos, como se demuestra a continuación:

$$\sqrt{-3}\sqrt{-3} = (\sqrt{3}\,i)(\sqrt{3}\,i) = (\sqrt{3})^2 i^2 = 3(-1) = -3,$$

pero
$$\sqrt{(-3)(-3)} = \sqrt{9} = 3.$$

Por lo tanto,
$$\sqrt{-3}\sqrt{-3} \neq \sqrt{(-3)(-3)}.$$

Si sólo a o b es negativo, entonces $\sqrt{a}\,\sqrt{b} = \sqrt{ab}$. En general, no se aplican las leyes de radicales si los radicandos son negativos, sino que se cambia la forma de los radicales antes de llevar a cabo cualquier operación, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 ***Manejo de raíces cuadradas de números negativos***

Expresar lo siguiente en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales:

$$(5 - \sqrt{-9})(-1 + \sqrt{-4})$$

SOLUCIÓN Primero se aplica la definición $\sqrt{-r} = \sqrt{r}\, i$, y a continuación se simplifica:

$$\begin{aligned}(5 - \sqrt{-9})(-1 + \sqrt{-4}) &= (5 - \sqrt{9}\,i)(-1 + \sqrt{4}\,i)\\ &= (5 - 3i)(-1 + 2i)\\ &= -5 + 10i + 3i - 6i^2\\ &= -5 + 13i + 6 = 1 + 13i\end{aligned}$$

En la demostración de la fórmula cuadrática en la sección anterior se estableció que si a, b y c son números reales tales que $b^2 - 4ac \geq 0$, y si $a \neq 0$, entonces las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

A continuación se generaliza este hecho para incluir $b^2 - 4ac < 0$. Los mismos pasos que se usaron para obtener la fórmula cuadrática y los desarrollos de esta sección, indican que si $b^2 - 4ac < 0$, entonces las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$ son los dos números *complejos* anteriores. Nótese que las soluciones son conjugadas entre sí.

EJEMPLO 5 ***Ecuación cuadrática con soluciones complejas***

Resolver $5x^2 + 2x + 1 = 0$.

SOLUCIÓN Si se aplica la fórmula cuadrática con $a = 5$, $b = 2$ y $c = 1$, se tiene

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{10} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{10} = \frac{-2 \pm 4i}{10} = \frac{-1 \pm 2i}{5}.$$

Entonces, las soluciones de la ecuación son $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$ y $-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$.

EJEMPLO 6 ***Ecuación con soluciones complejas***

Resolver $x^3 - 1 = 0$

SOLUCIÓN Se usa la fórmula de factorización para la diferencia de cubos, de la Secc. 1.3, y se expresa $x^3 - 1 = 0$ como

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0.$$

Igualando a cero cada factor, y resolviendo las ecuaciones que resultan, se llega a las soluciones

$$1, \quad \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$$

o en forma equivalente,

$$1, \quad -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

A las tres soluciones de $x^3 - 1 = 0$ se les llama las **raíces cúbicas de la unidad**.

EJERCICIOS 2.4

Ejercicios 1–34: Escriba la expresión en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

1 $(5 - 2i) + (-3 + 6i)$

2 $(-5 + 7i) + (4 + 9i)$

3 $(7 - 6i) - (-11 - 3i)$

4 $(-3 + 8i) - (2 + 3i)$

5 $(3 + 5i)(2 - 7i)$

6 $(-2 + 6i)(8 - i)$

7 $(1 - 3i)(2 + 5i)$

8 $(8 + 2i)(7 - 3i)$

9 $(5 - 2i)^2$

10 $(6 + 7i)^2$

11 $i(3 + 4i)^2$

12 $i(2 - 7i)^2$

13 $(3 + 4i)(3 - 4i)$

14 $(4 + 9i)(4 - 9i)$

15 i^{43}

16 i^{92}

17 i^{73}

18 i^{66}

19 $\dfrac{3}{2 + 4i}$

20 $\dfrac{5}{2 - 7i}$

21 $\dfrac{1 - 7i}{6 - 2i}$

22 $\dfrac{2 + 9i}{-3 - i}$

23 $\dfrac{-4 + 6i}{2 + 7i}$

24 $\dfrac{-3 - 2i}{5 + 2i}$

25 $\dfrac{4 - 2i}{-5i}$

26 $\dfrac{-2 + 6i}{3i}$

27 $(2 + 5i)^3$

28 $(3 - 2i)^3$

29 $(2 - \sqrt{-4})(3 - \sqrt{-16})$

30 $(-3 + \sqrt{-25})(8 - \sqrt{-36})$

31 $\dfrac{4 + \sqrt{-81}}{7 - \sqrt{-64}}$

32 $\dfrac{5 - \sqrt{-121}}{1 + \sqrt{-25}}$

33 $\dfrac{\sqrt{-36}\sqrt{-49}}{\sqrt{-16}}$

34 $\dfrac{\sqrt{-25}}{\sqrt{-16}\sqrt{-81}}$

Ejercicios 35–38: Determine los valores de x y y.

35 $8 + (3x + y)i = 2x - 4i$

36 $(x - y) + 3i = 7 + yi$

37 $(3x + 2y) - y^3 i = 9 - 27i$

38 $x^3 + (2x - y)i = -8 - 3i$

Ejercicios 39–54: Encuentre las soluciones de la ecuación.

39 $x^2 - 6x + 13 = 0$

40 $x^2 - 2x + 26 = 0$

41 $x^2 + 4x + 13 = 0$

42 $x^2 + 8x + 17 = 0$

43 $x^2 - 5x + 20 = 0$

44 $x^2 + 3x + 6 = 0$

45 $4x^2 + x + 3 = 0$

46 $-3x^2 + x - 5 = 0$

47 $x^3 + 125 = 0$

48 $x^3 - 27 = 0$

49 $x^4 = 256$

50 $x^4 = 81$

51 $4x^4 + 25x^2 + 36 = 0$

52 $27x^4 + 21x^2 + 4 = 0$

53 $x^3 + 3x^2 + 4x = 0$

54 $8x^3 - 12x^2 + 2x - 3 = 0$

Ejercicios 55–60: Si $z = a + bi$ es número complejo, a su conjugado se le representa, con frecuencia, como $\bar{z}$; es decir, $\bar{z} = a - bi$. Compruebe esta propiedad.

55 $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

56 $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$

57 $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

58 $\overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}$

59 $\bar{z} = z$ si y sólo si z es real

60 $\overline{z^2} = (\bar{z})^2$

2.5 OTROS TIPOS DE ECUACIONES

Las ecuaciones que se estudiaron en las secciones anteriores no se adecuan a muchos problemas. Por ejemplo, en las aplicaciones es necesario, con frecuencia, manejar potencias x^k, cuando $k > 2$. En algunas ecuaciones intervienen valores absolutos o radicales. En esta sección se presentan ejemplos de ecuaciones de ese tipo, que se pueden resolver con métodos elementales.

ESCUELA POLI

EJEMPLO 1 ***Resolución una ecuación que contiene un valor absoluto***

Resolver la ecuación $|x-5|=3$.

SOLUCIÓN Si a y b son números reales y $b>0$, entonces $|a|=b$ si y sólo si $a=b$, o si $a=-b$. Por lo tanto, si $|x-5|=3$, entonces

$$x-5=3 \qquad \text{o bien} \qquad x-5=-3.$$

Al despejar x se obtiene

$$x=5+3=8 \qquad \text{o bien} \qquad x=5-3=2.$$

Así, la ecuación dada tiene dos soluciones, que son 8 y 2.

Para una ecuación como

$$2|x-5|+3=11,$$

primero se aísla la expresión de valor absoluto restando 3 y dividiendo entre 2, para obtener

$$|x-5|=\frac{11-3}{2}=4,$$

y, a continuación, se prosigue como en el Ejemplo 1.

Si una ecuación está en la forma factorizada con *cero en un miembro de la igualdad,* entonces, con frecuencia, se pueden obtener las soluciones igualando a cero cada factor. Por tanto, si p, q y r son expresiones en x y s i $pqr=0$, entonces o $p=0$, o $q=0$, o $r=0$. En el ejemplo siguiente se factoriza por agrupación de términos.

EJEMPLO 2 ***Resolución de una ecuación por agrupamiento***

Resolver $x^3+2x^2-x-2=0$.

SOLUCIÓN

$x^3+2x^2-x-2=0$	ecuación dada
$x^2(x+2)-1(x+2)=0$	se agrupan los términos
$(x^2-\quad)(x+2)=0$	se saca como factor común a $x+2$
$(x+1)(x-1)(x+2)=0$	se factoriza x^2-1
$x+1=0, \quad x-1=0, \quad x+2=0$	se iguala a 0 cada factor
$x=-1, \quad x=1, \quad x=-2$	se despeja x

EJEMPLO 3 ***Ecuación con exponentes racionales***

Resolver $x^{3/2}=x^{1/2}$.

SOLUCIÓN

$x^{3/2}=x^{1/2}$	ecuación dada
$x^{3/2}-x^{1/2}=0$	se resta $x^{1/2}$

(continúa)

(continuación)

$x^{1/2}(x-1)=0$	se saca $x^{1/2}$ como factor común
$x^{1/2}=0, \quad x-1=0$	se iguala a cero cada factor
$x=0, \qquad x=1$	se despeja x

En el Ejemplo 3 hubiera sido incorrecto dividir ambos miembros de la ecuación $x^{3/2}=x^{1/2}$ entre $x^{1/2}$, ya que se obtendría $x=1$, con lo cual se hubiera perdido la solución $x=0$. Por lo general, *debe evitarse dividir ambos miembros de una ecuación entre una expresión que contenga variables*; en lugar de ello, *siempre* es preferible *factorizar.*

Si una ecuación incluye radicales o exponentes fraccionarios, se acostumbra elevar ambos miembros a una potencia positiva. Las soluciones de la nueva ecuación siempre contienen las de la ecuación dada. Por ejemplo, las soluciones de

$$2x-3=\sqrt{x+6}$$

también son soluciones de

$$(2x-3)^2=(\sqrt{x+6})^2.$$

En algunos casos, la nueva ecuación tiene *más* soluciones que la ecuación dada. Por ejemplo, si se tiene la ecuación $x=3$ y se elevan al cuadrado ambos miembros, se obtiene $x^2=9$. Nótese que la ecuación dada, $x=3$, sólo tiene una solución, 3, pero la nueva, $x^2=9$, tiene dos soluciones, 3 y -3. Toda solución de la nueva ecuación que no lo sea de la ecuación dada es *solución extraña.* Como se pueden tener soluciones extrañas, *es absolutamente esencial comprobar todas las soluciones obtenidas después de elevar ambos miembros de una ecuación a una potencia par.* Esas comprobaciones son innecesarias si se elevan ambos miembros a una potencia *impar*, porque en este caso no se introducen soluciones extrañas.

EJEMPLO 4 *Resolución de una ecuación con un radical*

Resolver $\sqrt[3]{x^2-1}=2$.

SOLUCIÓN

$\sqrt[3]{x^2-1}=2$	ecuación dada
$(\sqrt[3]{x^2-1})^3=2^3$	se elevan al cubo ambos miembros
$x^2-1=8$	propiedad de $\sqrt[n]{\ }$
$x^2=9$	se suma 1
$x=\pm 3$	se saca raíz cuadrada

Así, la ecuación dada tiene dos soluciones, 3 y -3. Excepto para detectar errores algebraicos, no es necesaria una comprobación, porque hemos elevado ambos miembros a una potencia impar.

En la última solución, aparece la frase *se elevan al cubo ambos miembros de la ecuación* $\sqrt[3]{x^2-1}=2$. Por lo general, para la ecuación $x^{m/n}=a$ se elevan ambos miembros a la potencia n/m, que es el recíproco de m/n, para despejar x. Si m es impar, se obtiene $x=a^{n/m}$, pero si m es par, entonces $x=\pm a^{n/m}$. Si n es par pueden presentarse soluciones extrañas.

En los dos ejemplos siguientes, antes de elevar ambos miembros de la ecuación a una potencia, *se aísla un radical*, es decir, se considera una ecuación equivalente en la cual sólo aparezca el radical en un lado.

EJEMPLO 5 ***Resolución de una ecuación que contiene un radical***

Resolver $3 + \sqrt{3x + 1} = x$.

SOLUCIÓN

$3 + \sqrt{3x + 1} = x$	ecuación dada
$\sqrt{3x + 1} = x - 3$	se aísla el radical
$(\sqrt{3x + 1})^2 = (x - 3)^2$	se elevan ambos miembros al cuadrado
$3x + 1 = x^2 - 6x + 9$	se simplifica
$x^2 - 9x + 8 = 0$	se resta $3x + 1$
$(x - 1)(x - 8) = 0$	se factoriza
$x - 1 = 0, \quad x - 8 = 0$	se iguala a 0 cada factor
$x = 1, \quad x = 8$	se despeja x

Se elevan ambos miembros a una potencia par, y con ello se necesita comprobar el resultado.

✓ ***Comprobación*** $x = 1$ PM: $3 + \sqrt{3(1) + 1} = 3 + \sqrt{4} = 3 + 2 = 5$

SM: 1

Como $5 \neq 1$, $x = 1$ no es una solución.

✓ ***Comprobación*** $x = 8$ PM: $3 + \sqrt{3(8) + 1} = 3 + \sqrt{25} = 3 + 5 = 8$

SM: 8

Como $8 = 8$ es un enunciado verdadero, $x = 8$ sí es una solución.

Por consiguiente, la ecuación dada tiene una solución, $x = 8$.

Para resolver una ecuación que contenga varios radicales, podría ser necesario elevar ambos miembros a potencias, varias veces, como en el ejemplo que sigue.

EJEMPLO 6 ***Resolución de una ecuación que contiene radicales***

Resolver $\sqrt{2x - 3} - \sqrt{x + 7} + 2 = 0$.

SOLUCIÓN

$\sqrt{2x - 3} - \sqrt{x + 7} + 2 = 0$	ecuación dada
$\sqrt{2x - 3} = \sqrt{x + 7} - 2$	se aísla $\sqrt{2x - 3}$
$2x - 3 = (x + 7) - 4\sqrt{x + 7} + 4$	se elevan ambos miembros al cuadrado

(continúa)

(continuación)

$$x - 14 = -4\sqrt{x+7}$$ se aísla el término con radical

$$x^2 - 28x + 196 = 16(x+7)$$ se elevan ambos miembros al cuadrado

$$x^2 - 28x + 196 = 16x + 112$$ se multiplican los factores

$$x^2 - 44x + 84 = 0$$ se resta $16x + 112$

$$(x-42)(x-2) = 0$$ se factoriza

$$x - 42 = 0, \quad x - 2 = 0$$ se iguala cada factor a 0

$$x = 42, \quad x = 2$$ se despeja x

Ya que se han elevado ambos lados a una potencia par, se necesita comprobar los resultados.

✓ ***Comprobación*** $x = 42$ PM: $\sqrt{84-3} - \sqrt{42+7} + 2 = 9 - 7 + 2 = 4$

SM: 0

Como $4 \neq 0$, $x = 42$ no es una solución.

✓ ***Comprobación*** $x = 2$ PM: $\sqrt{4-3} - \sqrt{2+7} + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$

SM: 0

Como $0 = 0$ es cierto, $x = 2$ es una solución.

Por consiguiente, la ecuación dada tiene una solución, $x = 2$.

Una ecuación será del **tipo cuadrático** si se puede escribir en la forma

$$au^2 + bu + c = 0,$$

en la cual $a \neq 0$, y u es una expresión en alguna variable. Si se determinan las soluciones en términos de u, entonces, las soluciones de la ecuación dada se pueden obtener consultando la forma específica de u.

EJEMPLO 7 *Resolución de una ecuación de tipo cuadrático*

Resolver $x^{2/3} + x^{1/3} - 6 = 0$

SOLUCIÓN Como $x^{2/3} = (x^{1/3})^2$, la forma de la ecuación sugiere definir $u = x^{1/3}$, como en el segundo renglón abajo:

$$x^{2/3} + x^{1/3} - 6 = 0$$ ecuación dada

$$u^2 + u - 6 = 0$$ sea $u = x^{1/3}$

$$(u+3)(u-2) = 0$$ factorización

$$u + 3 = 0, \quad u - 2 = 0$$ se iguala a 0 cada factor

(continúa)

(continuación)

$$u = -3, \quad u = 2 \qquad \text{se despeja } u$$
$$x^{1/3} = -3, \quad x^{1/3} = 2 \qquad \text{se sustituye } u = x^{1/3}$$
$$x = -27, \quad x = 8 \qquad \text{se elevan ambos miembros al cubo}$$

No es necesaria una comprobación, porque no se elevaron ambos miembros a una potencia par. Por consiguiente, la ecuación dada tiene dos soluciones, -27 y 8.

Otro método es factorizar el primer miembro de la ecuación dada, como sigue:

$$x^{2/3} + x^{1/3} - 6 = (x^{1/3} + 3)(x^{1/3} - 2)$$

Igualando cada factor a 0, se llega a las soluciones.

EJEMPLO 8 ***Resolución de una ecuación de tipo cuadrático***

Resolver $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$.

SOLUCIÓN Como $x^4 = (x^2)^2$, la forma de la ecuación sugiere definir $u = x^2$, como en el segundo renglón de abajo:

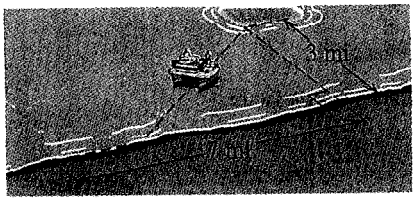
$$x^4 - 3x^2 + 1 = 0 \qquad \text{ecuación dada}$$
$$u^2 - 3u + 1 = 0 \qquad \text{se define } u = x^2$$
$$u = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad \text{fórmula cuadrática}$$
$$x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad \text{se sustituye } u = x^2$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}} \qquad \text{se saca raíz cuadrada}$$

Así, hay cuatro soluciones:

$$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}, \quad -\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}, \quad \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}, \quad -\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

Con una calculadora se obtienen las aproximaciones ± 1.62 y ± 0.62. No es necesaria la comprobación porque no se elevaron ambos miembros a una potencia par.

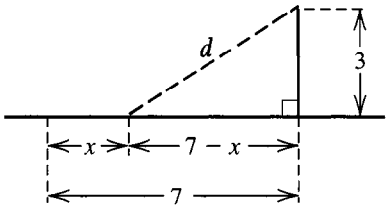
FIGURA 2.9



EJEMPLO 9 ***Determinación de la ruta de un transbordador***

Un transbordador de pasajeros hace viajes de una población a una isla, que está a 7 mi del muelle del pueblo playa abajo, y a 3 mi de la orilla. Como se ve en la Fig. 2.9, el transbordador viaja a lo largo de la orilla hasta determinado punto, y después se dirige hacia la isla. Si el transbordador viaja a 12 mi/h a lo largo de la orilla, y a 10 mi/h al dirigirse hacia el mar, determinar las rutas que tengan un tiempo de recorrido de 45 min.

FIGURA 2.10



SOLUCIÓN Sea x la distancia recorrida a lo largo de la orilla. Con los datos se hace el esquema de la Fig. 2.10, en la cual d es la distancia de un punto en la orilla hasta la isla. Véase el triángulo rectángulo que se indica:

$$\begin{aligned} d^2 &= (7-x)^2 + 3^2 && \text{teorema de Pitágoras} \\ &= 49 - 14x + x^2 + 9 && \text{se desarrollan los cuadrados} \\ &= x^2 - 14x + 58 && \text{se simplifica} \end{aligned}$$

Extrayendo raíz cuadrada en ambos miembros, y como $d > 0$, se tiene

$$d = \sqrt{x^2 - 14x + 58}.$$

Se aplica la relación distancia = (velocidad)(tiempo), o lo que es igual, tiempo = (distancia)/(velocidad), y se obtiene la tabla siguiente:

	A lo largo de la orilla	**Alejándose de la orilla**
Distancia (mi)	x	$\sqrt{x^2 - 14x + 58}$
Velocidad (mi/h)	12	10
Tiempo (h)	$\frac{x}{12}$	$\frac{\sqrt{x^2 - 14x + 58}}{10}$

El tiempo de todo el viaje es la suma de las dos expresiones del último renglón de la tabla. Como la velocidad está en mi/h, para ser consistentes, se debe expresar este tiempo, 45 min, como $\frac{3}{4}$h. Con ello, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{x}{12} + \frac{\sqrt{x^2 - 14x + 58}}{10} &= \frac{3}{4} && \text{tiempo total de viaje} \\ \frac{\sqrt{x^2 - 14x + 58}}{10} &= \frac{3}{4} - \frac{x}{12} && \text{se resta } \frac{x}{12} \\ 6\sqrt{x^2 - 14x + 58} &= 45 - 5x && \text{se multiplica por el MCD, que es 60} \\ 6\sqrt{x^2 - 14x + 58} &= 5(9 - x) && \text{se factoriza} \\ 36(x^2 - 14x + 58) &= 25(9 - x)^2 && \text{se elevan ambos miembros al cuadrado} \\ 11x^2 - 54x + 63 &= 0 && \text{se simplifica} \\ (x - 3)(11x - 21) &= 0 && \text{se factoriza} \\ x - 3 = 0, \quad 11x - 21 &= 0 && \text{se iguala cada factor a 0} \\ x = 3, \qquad x &= \frac{21}{11} && \text{se despeja } x \end{aligned}$$

Con una comprobación se verifica que esos números también son soluciones de la ecuación original. Por lo tanto, hay dos rutas posibles con un tiempo de viaje de 45 min: el transbordador puede viajar 3 mi, o $\frac{21}{11} \approx 1.9$ mi a lo largo de la orilla, antes de enfilar hacia la isla.

EJERCICIOS 2.5

Ejercicios 1–50: Resuelva la ecuación.

1 $|x+4| = 11$

2 $|x-5| = 2$

3 $|3x-2| + 3 = 7$

4 $2|5x+2| - 1 = 5$

5 $3|x+1| - 2 = -11$

6 $|x-2| + 5 = 5$

7 $9x^3 - 18x^2 - 4x + 8 = 0$

8 $3x^3 - 4x^2 - 27x + 36 = 0$

9 $\sqrt{7-5x} = 8$

10 $2 + \sqrt[3]{1-5t} = 0$

11 $\sqrt[5]{2x^2+1} - 2 = 0$

12 $y^{4/3} = -3y$

13 $4x^4 + 10x^3 = 6x^2 + 15x$

14 $\sqrt{2x-9} = \frac{1}{3}$

15 $15x^5 - 20x^4 = 6x^3 - 8x^2$

16 $\sqrt[3]{6-s^2} + 5 = 0$

17 $y^{3/2} = 5y$

18 $\sqrt[4]{2x^2-1} = x$

19 $\sqrt{7-x} = x - 5$

20 $\sqrt{3-x} - x = 3$

21 $3\sqrt{2x-3} + 2\sqrt{7-x} = 11$

22 $\sqrt{2x+15} - 2 = \sqrt{6x+1}$

23 $x = 4 + \sqrt{4x-19}$

24 $x = 3 + \sqrt{5x-9}$

25 $x + \sqrt{5x+19} = -1$

26 $x - \sqrt{-7x-24} = -2$

27 $\sqrt{7-2x} - \sqrt{5+x} = \sqrt{4+3x}$

28 $4\sqrt{1+3x} + \sqrt{6x+3} = \sqrt{-6x-1}$

29 $\sqrt{11+8x} + 1 = \sqrt{9+4x}$

30 $2\sqrt{x} - \sqrt{x-3} = \sqrt{5+x}$

31 $\sqrt{2\sqrt{x+1}} = \sqrt{3x-5}$

32 $\sqrt{5\sqrt{x}} = \sqrt{2x-3}$

33 $\sqrt{1+4\sqrt{x}} = \sqrt{x+1}$

34 $\sqrt{x+1} = \sqrt{x-1}$

35 $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$

36 $2x^4 - 10x^2 + 8 = 0$

37 $5y^4 - 7y^2 + 1 = 0$

38 $3y^4 - 5y^2 + 1 = 0$

39 $36x^{-4} - 13x^{-2} + 1 = 0$

40 $x^{-2} - 2x^{-1} - 35 = 0$

41 $3x^{2/3} + 4x^{1/3} - 4 = 0$

42 $2y^{1/3} - 3y^{1/6} + 1 = 0$

43 $6w - 23w^{1/2} + 20 = 0$

44 $2x^{-2/3} - 7x^{-1/3} - 15 = 0$

45 $\left(\frac{t}{t+1}\right)^2 - \frac{2t}{t+1} - 8 = 0$

46 $6u^{-1/2} - 13u^{-1/4} + 6 = 0$

47 $27x^3 = (x+5)^3$

48 $16x^4 = (x-4)^4$

49 $\sqrt[3]{x} = 2\sqrt[4]{x}$ (*Sugerencia:* Eleve ambos lados al mínimo común múltiplo de 3 y 4.)

50 $\sqrt{x+3} = \sqrt[4]{2x+6}$

Ejercicios 51 y 52: Determine las soluciones reales de la ecuación.

51 **(a)** $x^{5/3} = 32$ **(b)** $x^{4/3} = 16$
(c) $x^{2/3} = -36$ **(d)** $x^{3/4} = 125$
(e) $x^{3/2} = -27$

52 **(a)** $x^{3/5} = -27$ **(b)** $x^{2/3} = 25$
(c) $x^{4/3} = -49$ **(d)** $x^{3/2} = 27$
(e) $x^{3/4} = -8$

Ejercicios 53–55: Despeje la variable que se pide.

53 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ para l (periodo de un péndulo)

54 $d = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - C^2}$ para C (segmentos de círculos)

55 $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$ para h (superficie de un cono)

56 ***Experimentos nucleares*** Se llevan a cabo experimentos nucleares en el océano, que evaporan grandes cantidades de agua salada. La sal hierve y se evapora también, a 1 738 K. Después de evaporarse debido a una fuerza de 10 megatones, la sal necesita, cuando menos, de 8 s a 10 s para enfriarse lo suficiente y poder cristalizar. A veces se calcula la cantidad, A, de sal que ha cristalizado a los t segundos de la explosión, con la fórmula $A = k\sqrt{t/T}$, donde k y T son constantes. De esta ecuación, despeje t.

57 ***Potencia de un molino de viento*** La potencia, P, en watts, que genera un molino de viento tiene una eficiencia E que se expresa mediante $P = 0.31ED^2V^3$, en la cual D es el diámetro, en pies, de las aspas del molino, y V es la velocidad del viento, en pies/s. Calcule, aproximadamente, la velocidad del viento necesaria para generar 10 000 W (watts) si $E = 42\%$ y $D = 10$.

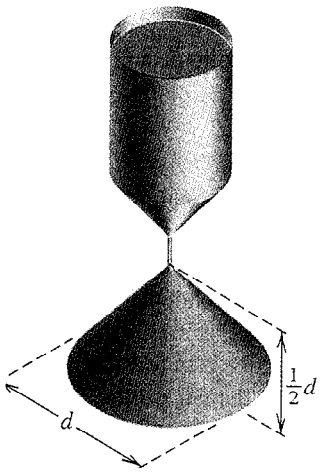
58 ***Resistencia de los clavos a ser extraídos*** La *resistencia a la extracción* de un clavo indica su poder de permanencia en la madera. Se usa una fórmula para clavos comunes, $P = 15\,700S^{5/2}RD$, donde P es la resistencia máxima a la extracción, en libras (lb); S la densidad

relativa de la madera con un contenido de humedad del 12%; R es el radio del clavo, en pulgadas; y D es la profundidad, en pulgadas, que penetra el clavo en la madera. Un clavo común de 2 pulg de longitud y 0.113 pulg de diámetro se introduce completamente en un trozo de madera de abeto Douglas. Se necesita una fuerza máxima de 380 lb para sacarlo. Calcule, aproximadamente, la densidad relativa de la madera de abeto Douglas.

59 ***Efecto del precio sobre la demanda*** La demanda de un artículo, por lo general, depende de su precio. Si otros factores no afectan la demanda, entonces la cantidad comprada, Q, a un precio P, en centavos, es $Q = kP^{-c}$, donde k y c son constantes positivas. Si $k = 10^5$ y $c = \frac{1}{2}$, calcule el precio que dé como resultado la compra de 5 000 artículos.

60 ***La isla urbana de calor*** Las áreas urbanas tienen temperaturas ambiente promedio mayores que las rurales, como resultado de la presencia de construcciones, asfalto y concreto. A este fenómeno se le ha llamado *isla urbana de calor*. La diferencia de temperaturas T (en °C) entre zonas urbanas y rurales cercanas a Montreal, que tiene una población P, entre 1 000 y 1 000 000, se puede representar con la fórmula $T = 0.25P^{1/4}/\sqrt{v}$, donde v es la velocidad media del viento, en mi/h, y $v \geq 1$. Si $T = 3$ y $v = 5$, calcule P.

61 ***Dimensiones de un montón de arena*** Al salirse la arena de un recipiente, forma un montón que tiene la forma de un cono circular recto, cuya altura siempre es la mitad del diámetro, d, de la base. ¿Cuál es el d cuando han salido 144 cm^3 de arena?



62 ***Inflamiento de un globo meteorológico*** El volumen de un globo meteorológico esférico es $10\frac{2}{3}$ pies^3. Para elevar un transmisor y equipo meteorológico, se le introducen otros $25\frac{1}{3}$ pies^3 de helio. ¿Cuántos pies aumenta su diámetro?

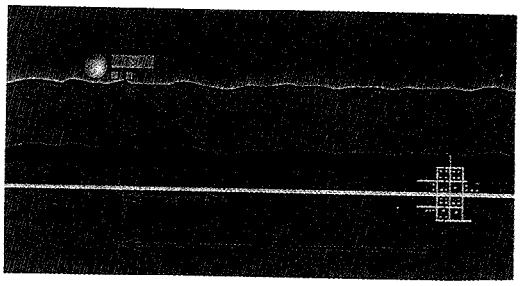
63 ***Regla del cubo en política*** Esta regla es una fórmula empírica que parece predecir el porcentaje de asientos en el Parlamento estadunidense que ganará un partido político a partir del voto popular para el candidato presidencial. Si x representa el porcentaje del voto popular para el candidato presidencial del partido, entonces la regla del cubo establece que

$$y = \frac{x^3}{x^3 + (1 - x)^3}.$$

¿Qué porcentaje del voto popular necesitará el candidato presidencial para que su partido gane el 60% de los lugares del parlamento?

64 ***Dimensiones de un vaso cónico*** Un vaso cónico de papel debe tener una altura de 3 pulg. Calcule el radio del cono que produzca una área superficial de 6π pulg^2.

65 ***Instalación de una línea de transmisión*** Se desea instalar una línea de transmisión que cruza un río de 1 milla de ancho, para llegar a un pueblo que está a 5 millas aguas abajo (véase la figura). Tender el cable submarino cuesta 7 500 dólares por milla, y tenderlo aéreo, 6 000 dólares por milla. Diga cómo se debe instalar el cable, si se han asignado 35 000 dólares para este proyecto.



66 ***Cálculo del crecimiento humano*** Adolphe Quetelet (1796-1874), director del observatorio de Bruselas de 1832 a 1874, fue el primero en tratar de ajustar una expresión matemática a los datos de estatura de la población humana. Si h representa la estatura, en metros, y t la edad en años, la fórmula de Quetelet, para hombres en Bruselas, se puede expresar como

$$h + \frac{h}{h_M - h} = at + \frac{h_0 + t}{1 + \frac{4}{3}t},$$

con $h_0 = 0.5$, la edad al nacer, $h_M = 1.684$, la estatura final del varón adulto, y $a = 0.545$.

(a) Calcule la estatura esperada de un varón de 12 años.

(b) ¿A qué edad se debe alcanzar el 50% de la estatura definitiva?

67 La ecuación $\frac{1}{3}\sqrt[3]{x} - x + 2 = 0$ tiene una raíz cercana a 2. Para aproximarla, se replantea la ecuación como $x = \frac{1}{3}\sqrt[3]{x} + 2$. Sea $x_1 = 2$; calcule aproximaciones sucesivas, x_2, x_3, ... , con las fórmulas

$$x_2 = \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{x_1} + 2, \qquad x_3 = \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{x_2} + 2, \qquad \ldots$$

hasta obtener una precisión de cuatro cifras decimales.

68 La ecuación $2x + \dfrac{1}{x^4 + x + 2} = 0$ tiene una raíz cercana a 0. Con un procedimiento semejante al del Ejercicio 67, calcule, aproximadamente, esta raíz, con exactitud de 4 cifras decimales.

2.6 DESIGUALDADES

Se tiene la desigualdad

$$2x + 3 > 11,$$

en la cual, x es una variable. Como se muestra en la tabla siguiente, algunos números producen enunciados verdaderos cuando se sustituyen en lugar de x, y otros producen enunciados falsos.

x	$2x + 3 > 11$	Conclusión
3	$9 > 11$	Enunciado falso
4	$11 > 11$	Enunciado falso
5	$13 > 11$	Enunciado verdadero
6	$15 > 11$	Enunciado verdadero

Si se llega a un enunciado verdadero cuando se sustituye un número a en lugar de x, entonces a es una **solución** de la desigualdad. Así, 5 y 6 son soluciones de $2x + 3 > 11$, pero 3 y 4 no lo son. **Resolver** una desigualdad quiere decir encontrar *todas* las soluciones. Dos desigualdades son **equivalentes** si tienen exactamente las mismas soluciones.

La mayor parte de las desigualdades tienen un número infinito de soluciones. Por ejemplo, las soluciones de la desigualdad

$$2 < x < 5$$

FIGURA 2.11

son *cada* número real x entre 2 y 5. A este conjunto de números se le llama **intervalo abierto**, y se representa por (2, 5). La **gráfica** del intervalo abierto (2, 5) es el conjunto de todos los puntos en una línea de coordenadas que están entre los puntos que corresponden a $x = 2$ y $x = 5$, pero sin incluirlos. La gráfica se representa, en la Fig. 2.11, mediante el sombreado de la parte adecuada del eje. A este proceso se le llama **trazar la gráfica** del intervalo. Los números 2 y 5 se llaman **puntos extremos**, o bien **extremos**, del intervalo (2, 5). Los paréntesis, en la notación (2, 5) y en la Fig. 2.11, sirven para indicar que no se incluyen los extremos del intervalo.

FIGURA 2.12

Si se desea incluir un extremo, se usa un paréntesis rectangular en lugar de uno circular. Por ejemplo, las soluciones de la desigualdad $2 \le x \le 5$ se representan mediante [2, 5], y al intervalo se le llama **intervalo cerrado**. La Fig. 2.12 es la gráfica de [2, 5], en la cual se usan los paréntesis rectan-

gulares, que indican que están incluidos los extremos. También se ven los **intervalos semiabiertos** $[a, b)$ y $(a, b]$, al igual que los **intervalos infinitos**, como se indica en la tabla siguiente. El símbolo ∞ (que se lee *infinito*) se usa para intervalos infinitos, y sólo es un símbolo matemático que *no* representa un número real.

Intervalos

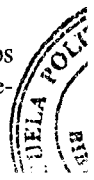
Notación	Desigualdad	Gráfica
(a, b)	$a < x < b$	
$[a, b]$	$a \leq x \leq b$	
$[a, b)$	$a \leq x < b$	
$(a, b]$	$a < x \leq b$	
(a, ∞)	$x > a$	
$[a, \infty)$	$x \geq a$	
$(-\infty, b)$	$x < b$	
$(-\infty, b]$	$x \leq b$	
$(-\infty, \infty)$	$-\infty < x < \infty$	

Los métodos para resolver desigualdades en x son semejantes a los que se usan para las ecuaciones. En particular, se usan a menudo las propiedades de las desigualdades para sustituir una desigualdad determinada por una lista de desigualdades equivalentes, que termina en una desigualdad a partir de la cual se obtienen las soluciones con facilidad. Se pueden demostrar las propiedades que aparecen en la tabla siguiente para los números reales a, b, c y d.

Propiedades de las desigualdades

Propiedad		Ejemplo
(1)	Si $a < b$, y $b < c$, entonces $a < c$.	$2 < 5$ y $5 < 9$; entonces $2 < 9$.
(2)	Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$ y $a - c < b - c$.	$2 < 7$, de modo que $2 + 3 < 7 + 3$, y $2 - 3 < 7 - 3$.
(3)	Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$ y $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.	$2 < 5$ y $3 > 0$, entonces $2 \cdot 3 < 5 \cdot 3$ y $\frac{2}{3} < \frac{5}{3}$.
(4)	Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$ y $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.	$2 < 5$ y $-3 < 0$, entonces $2(-3) > 5(-3)$ y $\frac{2}{-3} > \frac{5}{-3}$.

Es importante recordar que al multiplicar o dividir por un número real negativo ambos miembros de una desigualdad *se invierte* el signo de desigualdad (véase la propiedad 4). Propie-



dades semejantes a las anteriores son válidas para otras desigualdades y para $\leq$ o $\geq$. Así, si $a > b$, entonces $a + c > b + c$; si $a \geq b$ y $c < 0$, entonces $ac \leq bc$, etcétera.

Si x representa un número real, entonces, según la propiedad 2, al sumar o restar la misma expresión con x en ambos miembros de una desigualdad se obtiene una equivalente. Según la propiedad 3, se puede multiplicar o dividir por una expresión que contenga a x, ambos miembros de una desigualdad, si uno está seguro que esa expresión es positiva para todos los valores de x que se consideran. Para citar un ejemplo, se debería permitir la multiplicación o división por o entre $x^4 + 3x^2 + 5$, ya que esta expresión siempre es positiva. Si se multiplican o dividen por una expresión que siempre es negativa ambos miembros de una desigualdad, como por ejemplo, $-7 - x^2$, entonces, según la propiedad 4, se invierte el signo de la desigualdad.

En los ejemplos que siguen se estudian soluciones de desigualdades mediante intervalos, y también se representan en forma gráfica.

EJEMPLO 1 *Resolución de una desigualdad*

Resolver la desigualdad $-3x + 4 < 11$.

SOLUCIÓN

$-3x + 4 < 11$	desigualdad dada
$(-3x + 4) - 4 < 11 - 4$	se resta 4
$-3x < 7$	se simplifica
$\frac{-3x}{-3} > \frac{7}{-3}$	se divide entre -3; se invierte el signo de desigualdad
$x > -\frac{7}{3}$	se simplifica

FIGURA 2.13

Así, las soluciones de $-3x + 4 < 11$ consisten en todos los números reales, x, tales que $x > -\frac{7}{3}$. Éste es el intervalo $(-\frac{7}{3}, \infty)$ que se muestra en la Fig. 2.13.

EJEMPLO 2 *Resolución de una desigualdad*

Resolver $4x - 3 < 2x + 5$.

SOLUCIÓN

$4x - 3 < 2x + 5$	desigualdad dada
$(4x - 3) + 3 < (2x + 5) + 3$	se suma 3
$4x < 2x + 8$	se simplifica
$4x - 2x < (2x + 8) - 2x$	se resta $2x$
$2x < 8$	se simplifica
$\frac{2x}{2} < \frac{8}{2}$	se divide entre 2
$x < 4$	se simplifica

FIGURA 2.14

Por lo tanto, las soluciones de la desigualdad consisten en todos los números reales, x, tales que $x < 4$. Es el intervalo $(-\infty, 4)$ que se representa en la Fig 2.14.

EJEMPLO 3 ***Resolución de una desigualdad***

Resolver $-6 < 2x - 4 < 2$.

SOLUCIÓN Un número real, x, es una solución de la desigualdad dada, si y sólo si es una solución de *las dos* desigualdades

$$-6 < 2x - 4 \quad \text{y} \quad 2x - 4 < 2.$$

La primera desigualdad se resuelve como sigue:

$-6 < 2x - 4$	desigualdad dada
$-6 + 4 < (2x - 4) + 4$	se suma 4
$-2 < 2x$	se simplifica
$\frac{-2}{2} < \frac{2x}{2}$	se divide entre 2
$-1 < x$	se simplifica
$x > -1$	desigualdad equivalente

A continuación se resuelve la segunda desigualdad:

$2x - 4 < 2$	desigualdad dada
$2x < 6$	se suma 4
$x < 3$	se divide entre 2

Así, x es una solución de la desigualdad si y sólo si se cumplen *ambas* desigualdades,

$$x > -1 \quad \text{y} \quad x < 3;$$

es decir,

$$-1 < x < 3.$$

Por consiguiente, las soluciones son todos los números en el intervalo abierto $(-1, 3)$, que se representan en la Fig. 2.15.

FIGURA 2.15

Otro método más corto, es resolver en forma simultánea ambas desigualdades:

$-6 < 2x - 4 < 2$	desigualdad dada
$-6 + 4 < 2x < 2 + 4$	se suma 4
$-2 < 2x < 6$	se simplifica
$-1 < x < 3$	se divide entre 2

EJEMPLO 4 ***Resolución de una desigualdad***

Resolver $-5 \leq \frac{4 - 3x}{2} < 1$.

SOLUCIÓN Un número x es una solución de la desigualdad si y sólo si

$$-5 \le \frac{4-3x}{2} \quad \text{y} \quad \frac{4-3x}{2} < 1.$$

Es posible trabajar con cada desigualdad por separado, o resolver ambas en forma simultánea, como sigue:

$$-5 \le \frac{4-3x}{2} < 1 \qquad \text{desigualdad dada}$$

$$-10 \le 4-3x < 2 \qquad \text{multiplicación por 2}$$

$$-10-4 \le -3x < 2-4 \qquad \text{se resta 4}$$

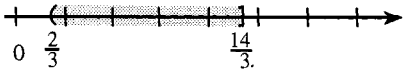
$$-14 \le -3x < -2 \qquad \text{se simplifica}$$

$$\frac{-14}{-3} \ge \frac{-3x}{-3} > \frac{-2}{-3} \qquad \text{se divide entre } -3$$

$$\tfrac{14}{3} \ge x > \tfrac{2}{3} \qquad \text{se simplifica}$$

$$\tfrac{2}{3} < x \le \tfrac{14}{3} \qquad \text{desigualdad equivalente}$$

FIGURA 2.16

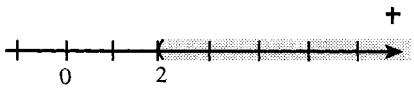


Así, las soluciones de la desigualdad son todos los números en el intervalo semiabierto $\left[\frac{2}{3}, \frac{14}{3}\right]$, que aparece en la Fig. 2.16.

EJEMPLO 5 ***Resolución de una desigualdad racional***

Resolver $\dfrac{1}{x-2} > 0$.

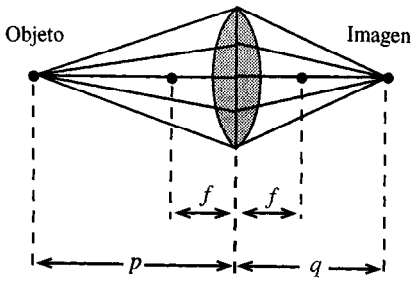
FIGURA 2.17



SOLUCIÓN Como el denominador es positivo, la fracción es positiva si y sólo si $x-2>0$ o, lo que es igual, $x>2$. Así, las soluciones son todos los números en el intervalo infinito $(2,\infty)$ que se muestra en la Fig. 2.17.

EJEMPLO 6 ***Uso de una fórmula de las lentes***

FIGURA 2.18



Como se ve en la Fig. 2.18, si una lente biconvexa tiene una distancia focal de f centímetros y se coloca un objeto a una distancia de p centímetros de la lente, donde $p > f$, entonces la distancia q de la lente a la imagen, está relacionada con p y f mediante la fórmula

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}.$$

Si $f = 5$ cm, ¿a qué distancia debe estar el objeto para que la imagen esté a más de 12 cm de la lente?

SOLUCIÓN Como $f = 5$, se puede volver a escribir la fórmula como

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{5}.$$

Se desea determinar los valores de q tales que $q > 12$. Primero se despeja q:

$5q + 5p = pq$ se multiplica por el MCD, $5pq$

$q(5 - p) = -5p$ se agrupan los términos en q en un lado y se factoriza

$q = -\dfrac{5p}{5-p} = \dfrac{5p}{p-5}$ se divide entre $5 - p$

Para resolver la desigualdad $q > 12$, se procede como sigue:

$\dfrac{5p}{p-5} > 12$ $\quad q = \dfrac{5p}{p-5}$

$5p > 12(p - 5)$ se permite, porque como $p > f$, entonces $p - 5 > 0$

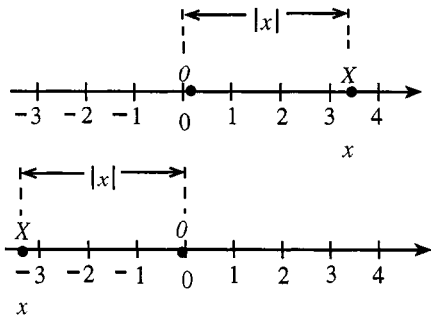
$-7p > -60$ se multiplican factores y se agrupan los términos en p en un lado

$p < \frac{60}{7}$ se divide entre -7

Como $p > 5$, entonces

$$5 < p < \tfrac{60}{7}.$$

FIGURA 2.19



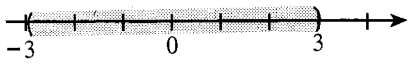
Si un punto, X, en una recta numérica tiene la coordenada x, como se ve en la Fig. 2.19, entonces X está a la derecha del origen, O, si $x > 0$; está a la izquierda de O si $x < 0$. De acuerdo con la Secc. 1.1, la distancia, $d(O, X)$, entre O y X, es el número real *no negativo* determinado por

$$d(O, X) = |x - 0| = |x|.$$

En consecuencia, las soluciones de una desigualdad como $|x| < 3$ están formadas por las coordenadas de todos los puntos cuya distancia a O es menor que 3. Es el intervalo abierto $(-3, 3)$ que se muestra en la Fig. 2.20. Así,

$$|x| < 3 \quad \text{equivale a} \quad -3 < x < 3.$$

FIGURA 2.20



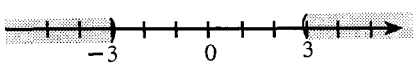
Igualmente, para $|x| > 3$, la distancia entre O y un punto con coordenada x es mayor que 3; esto es

$$|x| > 3 \quad \text{equivale a} \quad x < -3 \quad \text{o a} \quad x > 3.$$

La gráfica de las soluciones a $|x| > 3$ se representa en la Fig. 2.21. Con frecuencia se usa el **símbolo de unión**, $\cup$, y se escribe

$$(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$$

FIGURA 2.21



para representar a los números que están en $(-\infty, -3)$, o bien, $(3, \infty)$.

El **símbolo de intersección**, $\cap$, se usa para representar los elementos que son *comunes* a los dos conjuntos. Por ejemplo,

$$(-\infty, 3) \cap (-3, \infty) = (-3, 3),$$

como la intersección de $(-\infty, 3)$ y $(-3, \infty)$ consiste en todos los números reales, x, tales que se cumplen $x < 3$ y $x > -3$.

El análisis anterior se puede generalizar para llegar a lo siguiente.

Propiedades de los valores absolutos ($b > 0$)

(1) $|a| < b$ equivale a $-b < a < b$.

(2) $|a| > b$ equivale a $a < -b$, o a $a > b$.

En el ejemplo que sigue se aplica la propiedad 1, con $a = x - 3$ y $b = 0.5$.

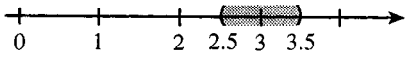
EJEMPLO 7 ***Resolución de una desigualdad que contiene un valor absoluto***

Resolver $|x - 3| < 0.5$.

SOLUCIÓN

$\lvert x - 3\rvert < 0.5$	desigualdad dada
$-0.5 < x - 3 < 0.5$	propiedad 1
$-0.5 + 3 < (x - 3) + 3 < 0.5 + 3$	se aísla x
$2.5 < x < 3.5$	se simplifica

FIGURA 2.22



De este modo, las soluciones son los números reales del intervalo abierto (2.5, 3.5). La gráfica es la de la Fig. 2.22.

En el siguiente ejemplo se usa la propiedad 2, con $a = 2x + 3$ y $b = 9$.

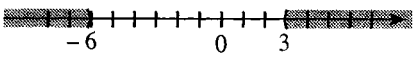
EJEMPLO 8 ***Resolución de una desigualdad que contiene un valor absoluto***

Resolver $|2x + 3| > 9$.

SOLUCIÓN

		$\lvert 2x + 3\rvert > 9$	desigualdad dada
$2x + 3 < -9$	o	$2x + 3 > 9$	propiedad 2
$2x < -12$	o	$2x > 6$	se resta 3
$x < -6$	o	$x > 3$	se divide entre 2

FIGURA 2.23



En consecuencia, las soluciones de la desigualdad $|2x + 3| > 9$ consisten en los números en $(-\infty, -6) \cup (3, \infty)$. En la Fig. 2.23 se muestra la gráfica.

La ley de tricotomía de la Secc. 1.1 establece que para todo número real, a y b, se cumple una de las siguientes condiciones:

$$a > b, \qquad a < b, \quad \text{o bien} \quad a = b.$$

Así, después de resolver $|2x + 3| > 9$ en el Ejem. 8, se obtienen con facilidad las soluciones de $|2x + 3| < 9$, y de $|2x + 3| = 9$, que son $(-6, 3)$ y $\{-6, 3\}$, respectivamente. Nótese que la unión de esos tres conjuntos de soluciones, es necesariamente el conjunto $\mathbb{R}$ de números reales.

Cuando se usa la notación $a < x < b$, se debe cumplir $a < b$. Así, *no es correcto escribir la solución* $x < -6$, *o bien,* $x > 3$, *del Ejemplo 8 en la forma* $3 < x < -6$. Otro mal uso de los signos de desigualdad es poner $a < x > b$, ya que cuando se usan varios signos de desigualdad en una expresión, *deben dirigirse hacia el mismo lado.*

EJERCICIOS 2.6

1 Dada la desigualdad $-7 < -3$, determine la que se obtiene si

(a) se suma 5 a ambos lados de la desigualdad
(b) se resta 4 a ambos lados de la desigualdad
(c) ambos miembros se multiplican por $\frac{1}{3}$
(d) ambos miembros se multiplican por $-\frac{1}{3}$

2 Dada $4 > -5$, determine la desigualdad que se obtiene si

(a) se suma 7 a ambos lados de la desigualdad
(b) se resta -5 a ambos lados de la desigualdad
(c) ambos miembros se dividen entre 6
(d) ambos miembros se dividen entre -6.

Ejercicios 3 –12: Exprese la desigualdad en forma de un intervalo y bosqueje su gráfica.

3 $x < -2$
4 $x \le 5$
5 $x \ge 4$
6 $x > -3$
7 $-2 < x \le 4$
8 $-3 \le x < 5$
9 $3 \le x \le 7$
10 $-3 < x < -1$
11 $5 > x \ge -2$
12 $-3 \ge x > -5$

Ejercicios 13 – 20: Exprese el intervalo en forma de desigualdad en la variable x.

13 $(-5, 8]$
14 $[0, 4)$
15 $[-4, -1]$
16 $(3, 7)$
17 $[4, \infty)$
18 $(-3, \infty)$
19 $(-\infty, -5)$
20 $(-\infty, 2]$

Ejercicios 21 – 68: Resuelva la desigualdad y exprese las soluciones en términos de intervalos, cuando sea posible.

21 $3x - 2 > 14$
22 $2x + 5 \le 7$
23 $-2 - 3x \ge 2$
24 $3 - 5x < 11$
25 $2x + 5 < 3x - 7$
26 $x - 8 > 5x + 3$
27 $9 + \frac{1}{3}x \ge 4 - \frac{1}{2}x$
28 $\frac{1}{4}x + 7 \le \frac{1}{3}x - 2$
29 $-3 < 2x - 5 < 7$
30 $4 \ge 3x + 5 > -1$
31 $3 \le \dfrac{2x - 3}{5} < 7$
32 $-2 < \dfrac{4x + 1}{3} \le 0$
33 $4 > \dfrac{2 - 3x}{7} \ge -2$
34 $5 \ge \dfrac{6 - 5x}{3} > 2$
35 $0 \le 4 - \frac{1}{3}x < 2$
36 $-2 < 3 + \frac{1}{4}x \le 5$
37 $(2x - 3)(4x + 5) \le (8x + 1)(x - 7)$
38 $(x - 3)(x + 3) \ge (x + 5)^2$
39 $(x - 4)^2 > x(x + 12)$
40 $2x(6x + 5) < (3x - 2)(4x + 1)$
41 $\dfrac{4}{3x + 2} \ge 0$
42 $\dfrac{3}{2x + 5} \le 0$
43 $\dfrac{-2}{4 - 3x} > 0$
44 $\dfrac{-3}{2 - x} < 0$

45 $\dfrac{2}{(1-x)^2} > 0$

46 $\dfrac{4}{x^2+4} < 0$

47 $|x| < 3$

48 $|x| \le 7$

49 $|x| \ge 5$

50 $|-x| > 2$

51 $|x+3| < 0.01$

52 $|x-4| \le 0.03$

53 $|x+2| + 0.1 \ge 0.2$

54 $|x-3| - 0.3 > 0.1$

55 $|2x+5| < 4$

56 $|3x-7| \ge 5$

57 $-\frac{1}{3}|6-5x| + 2 \ge 1$

58 $2|-11-7x| - 2 > 10$

59 $|7x+2| > -2$

60 $|6x-5| \le -2$

61 $|3x-9| > 0$

62 $|5x+2| \le 0$

63 $\left|\dfrac{2-3x}{5}\right| \ge 2$

64 $\left|\dfrac{2x+5}{3}\right| < 1$

65 $\dfrac{3}{|5-2x|} < 2$

66 $\dfrac{2}{|2x+3|} \ge 5$

67 $1 < |x-2| < 4$

68 $2 < |2x-1| < 3$

Ejercicios 69 y 70: Resuelva el inciso (a) y use la respuesta para determinar las respuestas de los incisos (b) y (c).

69 (a) $|x+5| = 3$ **(b)** $|x+5| < 3$ **(c)** $|x+5| > 3$

70 (a) $|x-3| < 2$ **(b)** $|x-3| = 2$ **(c)** $|x-3| > 2$

Ejercicios 71–74: Exprese los enunciados en términos de una desigualdad en la que intervenga un valor absoluto.

71 El peso, w, de un luchador, debe tener una diferencia máxima de 2 lb respecto a 148 lb.

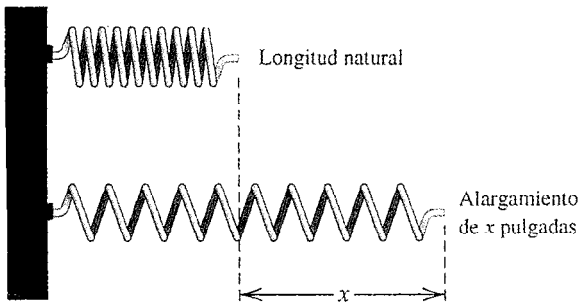
72 El radio, r, de un rodamiento de bolas, no debe diferir 0.01 cm de 1 cm.

73 La diferencia de dos temperaturas, T_1 y T_2, dentro de una mezcla de reactivos, debe estar entre 5° y 10 °C.

74 El tiempo de llegada, t, del tren B, debe ser, cuando menos, 5 min distinto del tiempo de llegada del tren A, las 4:00 P. M.

75 ***Escalas de temperatura*** Las lecturas de temperatura en las escalas Fahrenheit y Celsius se relacionan mediante la fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. ¿Qué valores de F corresponden a los valores de C tales que $30 \le C \le 40$?

76 ***Ley de Hooke*** Según la Ley de Hooke, la fuerza F, en libras, necesaria para estirar x pulgadas determinado resorte respecto a su longitud natural, es $F = (4.5)x$ (véase la figura). Si $10 \le F \le 18$, ¿cuáles son los valores correspondientes de x?



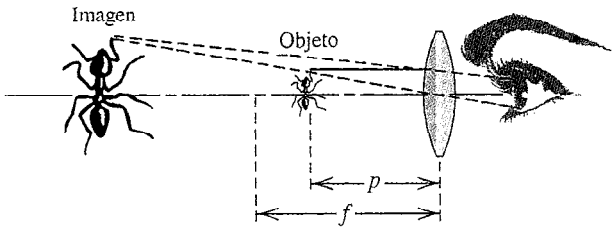
77 ***Ley de Ohm*** La Ley de Ohm, en electricidad, establece que, si R representa la resistencia, en ohms (Ω), de un conductor; V la diferencia de potencial, en volts (V), a través del conductor; e I la corriente que pasa por él, en amperes (A), entonces $R = V/I$. Si la diferencia de potencial es 110, ¿qué valores de la resistencia harán que la corriente no sea mayor que 10 A?

78 ***Resistencia eléctrica*** Si dos resistores con resistencias, R_1 y R_2, se conectan en paralelo en un circuito eléctrico, la resistencia neta R está dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Si $R_1 = 10\ \Omega$, ¿qué valores de R_2 harán que la resistencia neta sea menor que 5 Ω?

79 ***Aumento lineal*** En la figura se muestra una lupa simple que consta de una lente biconvexa. El objeto que será aumentado se coloca de tal modo que la distancia p a la lente, sea menor que la distancia focal f de la misma. El aumento lineal M es la relación del tamaño de la imagen a la del objeto. En física se puede demostrar que $M = f/(f-p)$. Si $f = 6$ cm, ¿a qué distancia de la lente se debe colocar el objeto para que su imagen sea tres veces mayor, cuando menos? (Compárese esto con el Ejemplo 6.)



80 ***Concentración de medicamento*** Para el tratamiento de la arritmia (latidos irregulares), se inyecta, intravenosamente, un medicamento. Supóngase que la concentración c del fármaco, después de t horas, está dado por $c = 3.5t/(t+1)$ mg/L. Si la concentración terapéutica

mínima es 1.5 mg/L, determine cuándo se rebasa esa concentración.

81 ***Costos totales*** Una constructora trata de decidir cuál de dos modelos de grúa comprar. El modelo A cuesta \$50 000 (dólares) y necesita \$4 000 anuales por mantenimiento. El modelo B cuesta \$40 000 y sus costos anuales de mantenimiento son \$5 500. ¿Durante cuántos años debe usarse el modelo A para que sea más económico que el B?

82 ***Compra de automóvil*** Un cliente trata de decidir si compra el automóvil A o el B. El A que cuesta \$10 000 (dólares), tiene un rendimiento de 30 mi/gal, y su seguro es \$550 anual. El automóvil B cuesta \$12 000, su rendimiento es 40 mi/gal, y su seguro cuesta \$600 anuales. Suponga que el cliente recorre 15 000 millas por año, y que el precio de la gasolina permanece constante a \$1.25 por galón. Tan sólo con estos datos, determine cuánto tiempo pasará para que el costo del automóvil B sea menor que el del A.

2.7 ALGO MÁS SOBRE DESIGUALDADES

Para resolver una desigualdad que incluye polinomios de grado mayor que 1, se expresa cada uno de ellos como producto de factores lineales, $ax + b$, o como factores cuadráticos irreducibles, $ax^2 + bx + c$ o en las dos formas. Si alguno de esos factores es distinto de cero en un intervalo, entonces es positivo en el intervalo, o es negativo en él. Por consiguiente, si se escoge cualquier k en el intervalo, y si el factor es positivo (o negativo) cuando $x = k$, entonces es positivo (o negativo) en el intervalo. El valor del factor en $x = k$ se llama **valor de prueba**, o **de tanteo**, en k. Este concepto se ve en el ejemplo siguiente.

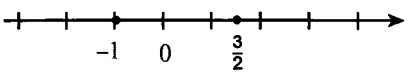
EJEMPLO 1 ***Resolución de una desigualdad cuadrática***

Resolver $2x^2 - x < 3$.

SOLUCIÓN Para emplear valores de prueba, *es esencial tener* 0 *en un lado* del signo de desigualdad. Por lo tanto, se procede como sigue:

$$2x^2 - x < 3 \quad \text{desigualdad dada}$$
$$2x^2 - x - 3 < 0 \quad \text{se hace que un miembro sea 0}$$
$$(x + 1)(2x - 3) < 0 \quad \text{se factoriza}$$

FIGURA 2.24



Los factores $x + 1$ y $2x - 3$ son cero cuando x es -1 y $\frac{3}{2}$, respectivamente. Los puntos correspondientes en una recta numérica (véase Fig. 2.24) determinan los intervalos, que no se traslapan

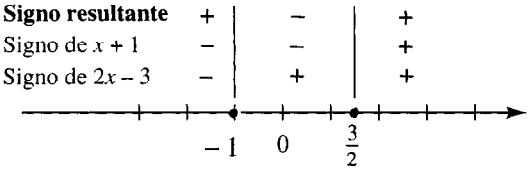
$$(-\infty, -1), \quad (-1, \tfrac{3}{2}), \quad \text{y} \quad (\tfrac{3}{2}, \infty).$$

Se pueden determinar los signos de $x + 1$ y de $2x + 3$ en cada intervalo mediante un valor de prueba. Por ejemplo, si se escoge $k = -10$ en $(-\infty, -1)$, los valores tanto de $x + 1$ como de $2x - 3$ son negativos y, por consiguiente, serán negativos en $(-\infty, -1)$. Un procedimiento semejante para los dos intervalos restantes da como resultado la siguiente *tabla de signos*, donde la expresión *signo resultante* del último renglón quiere decir el signo que se obtiene aplicando las leyes de los signos al producto de los factores. Nótese que el signo resultante es positivo o negativo, según si el número de signos o factores negativos es par o impar, respectivamente.

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, \frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2}, \infty)$
Signo de $x + 1$	−	+	+
Signo de $2x - 3$	−	−	+
Signo resultante	+	−	+

A veces conviene representar los signos de $x + 1$ y de $2x - 3$ mediante una recta numérica y un *diagrama de signos*, como se ve en la Fig. 2.25. Las líneas verticales indican dónde son cero los factores, y los signos de los factores se colocan sobre la línea de coordenadas. Los signos resultantes se marcan en negrita.

FIGURA 2.25



Las soluciones de $(x + 1)(2x - 3) < 0$ son los valores de x para los cuales el producto de los factores es *negativo*, es decir, donde el signo resultante es negativo. Esto corresponde al intervalo abierto $(-1, \frac{3}{2})$.

En los ejemplos que siguen se usa una tabla o un diagrama de signos, pero no ambos. Cuando se resuelvan ejercicios, el lector debe escoger el método de solución con el cual se sienta más cómodo.

EJEMPLO 2 *Resolución de una desigualdad cuadrática*

Resolver $x^2 > 7x - 10$.

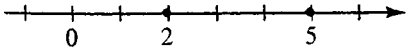
SOLUCIÓN

$$x^2 > 7x - 10 \qquad \text{desigualdad dada}$$

$$x^2 - 7x + 10 > 0 \qquad \text{se hace un miembro igual a 0}$$

$$(x - 2)(x - 5) > 0 \qquad \text{se factoriza}$$

FIGURA 2.26



Los factores son cero cuando x es 2 y 5. Los puntos correspondientes en una recta numérica (véase Fig. 2.26) determinan los intervalos que no se traslapan

$$(-\infty, 2), \quad (2, 5) \quad \text{y} \quad (5, \infty).$$

(continúa)

Como en el Ejemplo 1, es posible emplear valores de prueba para obtener la siguiente tabla de signos.

Intervalo	$(-\infty, 2)$	$(2, 5)$	$(5, \infty)$
Signo de $x - 2$	−	+	+
Signo de $x - 5$	−	−	+
Signo resultante	+	−	+

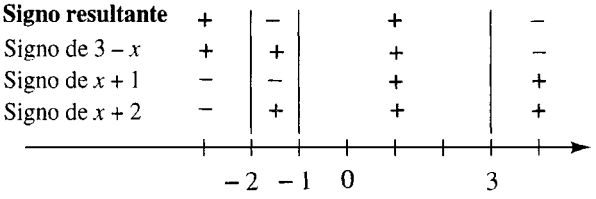
Las soluciones de $(x - 2)(x - 5) > 0$ son los valores de x para los cuales el signo resultante es *positivo*. Así, la solución de esta desigualdad es la unión $(-\infty, 2) \cup (5, \infty)$.

EJEMPLO 3 ***Uso de diagrama de signos para resolver una desigualdad***

Resolver $\dfrac{(x + 2)(3 - x)}{(x + 1)(x^2 + 1)} \leq 0$.

SOLUCIÓN Como 0 ya está a la derecha de la desigualdad y el miembro izquierdo está factorizado, se procede, en forma directa, a formar el diagrama de signos en la Fig. 2.27, en la cual las líneas verticales indican los ceros (–2, –1 y 3) de los factores. Como el factor cuadrático, $x^2 + 1$, siempre es positivo, no tiene efecto alguno sobre el signo del cociente y, por consiguiente, se puede omitir del diagrama.

FIGURA 2.27



Se pueden encontrar los diversos signos de los factores mediante valores de prueba. También, sólo es necesario recordar que, a medida que aumenta x, el signo de un factor lineal $ax + b$ cambia de negativo a positivo si el coeficiente a de x es positivo, y de positivo a negativo si a es negativo.

Para determinar si el cociente es menor que, o igual a, 0, notaremos primero, en el diagrama de signos, que es *negativo* para los números en $(-2, -1) \cup (3, \infty)$. Como el cociente es 0 cuando $x = -2$ y cuando $x = 3$, pero es *indefinido* cuando $x = -1$, los números -2 y 3 también son soluciones. Así, la solución de esta desigualdad es $[-2, -1) \cup [3, \infty)$.

EJEMPLO 4 ***Uso de un diagrama de signos para resolver una desigualdad***

Resolver $\dfrac{(2x + 1)^2(x - 1)}{x(x^2 - 1)} \geq 0$.

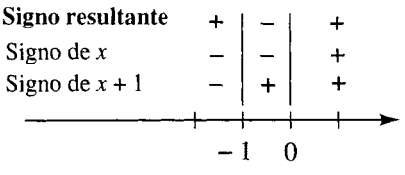
SOLUCIÓN Se escribe de nuevo la desigualdad en la forma

$$\frac{(2x+1)^2(x-1)}{x(x+1)(x-1)} \geq 0,$$

y se observa que $x-1$ es factor tanto en el numerador como en el denominador. Así, *suponiendo que* $x-1 \neq 0$, (es decir que $x \neq 1$), se elimina este factor y se reduce la búsqueda de soluciones al caso

$$\frac{(2x+1)^2}{x(x+1)} \geq 0 \qquad \text{y} \qquad x \neq 1.$$

FIGURA 2.28



A continuación se observa que este cociente es 0 si $2x+1=0$, es decir, si $x=-\frac{1}{2}$. Por consiguiente, $-\frac{1}{2}$ es una solución. Para determinar las soluciones restantes, se hace el diagrama de signos de la Fig. 2.28. En él no se incluye $(2x+1)^2$, ya que esta expresión siempre es positiva si $x \neq -\frac{1}{2}$ y, por tanto, no tiene efectos sobre el signo del cociente. En cuanto al signo resultante, y recordando que $-\frac{1}{2}$ sí es una solución, pero que 1 *no es* una solución, se ve que las soluciones de esta desigualdad son

$$(-\infty, -1) \cup \{-\tfrac{1}{2}\} \cup (0, 1) \cup (1, \infty).$$

EJEMPLO 5 ***Uso de un diagrama de signos para resolver una desigualdad***

Resolver $\dfrac{x+1}{x+3} \leq 2$.

SOLUCIÓN Un error frecuente al resolver desigualdades como ésta es multiplicar primero ambos miembros por $x+3$, en este caso. Si lo hiciéramos, tendríamos que ver varios casos, ya que $x+3$ puede ser positivo, negativo o cero. Un método más sencillo es obtener primero una desigualdad equivalente que tenga 0 en el miembro derecho y, partir de ella:

$$\frac{x+1}{x+3} \leq 2 \qquad \text{desigualdad dada}$$

$$\frac{x+1}{x+3} - 2 \leq 0 \qquad \text{se iguala un lado a 0}$$

$$\frac{x+1-2(x+3)}{x+3} \leq 0 \qquad \text{se combina en una sola fracción}$$

$$\frac{-x-5}{x+3} \leq 0 \qquad \text{se simplifica}$$

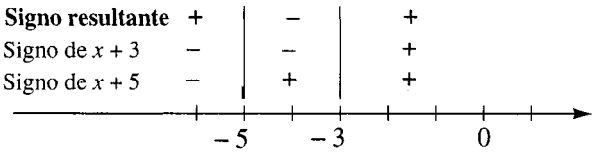
$$\frac{x+5}{x+3} \geq 0 \qquad \text{se multiplica por } -1$$

Nótese que la dirección de la desigualdad cambia en el último paso, porque se multiplica por un número negativo. Esa multiplicación se hizo por comodidad, para que todos los factores tuvieran coeficientes positivos de x.

Los factores $x+5$ y $x+3$ son 0 en $x=-5$ y $x=-3$ respectivamente. Esto conduce al diagrama de signos de la Fig. 2.29, en la que éstos se determinaron como en los ejemplos ante-

riores. En el diagrama se ve que el signo resultante y, por consiguiente el signo del cociente, es positivo en $(\infty, -5) \cup (-3, \infty)$. El cociente es 0 cuando $x = -5$, y es indefinido cuando $x = -3$. Así, la solución de $(x + 5)/(x + 3) \geq 0$ es $(-\infty, -5] \cup (-3, \infty)$.

FIGURA 2.29



Otra forma es comenzar multiplicando ambos miembros de la desigualdad por $(x + 3)^2$, *suponiendo que* $x \neq -3$. En este caso, $(x + 3)^2 > 0$, y se permite la multiplicación; sin embargo, después de resolver la desigualdad, se debe excluir el valor $x = -3$

EJEMPLO 6 *Determinación de concentraciones terapéuticas mínimas*

Para que un medicamento tenga efectos benéficos, su concentración en la sangre debe ser mayor que determinado valor, al cual se le llama *concentración terapéutica mínima.* Supóngase que la concentración, c, en mg/L, de determinado medicamento a las t horas después de haberla ingerido oralmente, es

$$c = \frac{20t}{t^2 + 4}.$$

Si la concentración terapéutica mínima es 4 mg/L, determine cuándo se rebasa ésa.

SOLUCIÓN La concentración terapéutica mínima, 4 mg/L, se excede si $c > 4$. Por consiguiente debe resolverse la desigualdad

$$\frac{20t}{t^2 + 4} > 4.$$

Como $t^2 + 4 > 0$ para toda t, se procede como sigue:

$$20t > 4t^2 + 16 \quad \text{se multiplica por } t^2 + 4$$

$$-4t^2 + 20t - 16 > 0 \quad \text{se hace un miembro igual a 0}$$

$$t^2 - 5t + 4 < 0 \quad \text{se divide entre el factor común } -$$

$$(t - 1)(t - 4) < 0 \quad \text{se factoriza}$$

Los factores de la última desigualdad son 0 cuando $t = 1$ y $t = 4$. Son los momentos en los cuales c es *igual* a 4. Como en los ejemplos anteriores, es posible usar una tabla de signos, o un diagrama de signos, donde $t \geq 0$, para demostrar que $(t - 1)(t - 4) < 0$ para toda t en el intervalo $(1, 4)$. Por consiguiente, el nivel terapéutico mínimo se rebasa si $1 < t < 4$.

Como en el siguiente capítulo se presentan las gráficas en el plano de coordenadas, sería prematuro demostrar aquí el uso de una calculadora que elabore gráficas, o los programas de computadora, para resolver desigualdades en x. Esos métodos se explican más adelante en el texto.

Algunas propiedades básicas de las desigualdades se indicaron al inicio de la última sección. Las siguientes propiedades adicionales a veces ayudan a resolver ciertos casos. Después de la tabla aparecen las demostraciones.

Otras propiedades de las desigualdades

Propiedad	Ejemplo
(1) Si $0 < a < b$, entonces $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.	Si $0 < \frac{1}{x} > 4$, entonces $\frac{1}{1/x} < \frac{1}{4}$ o bien, $x > \frac{1}{4}$.
(2) Si $0 < a < b$, entonces $0 < a^2 < b^2$.	Si $0 < \sqrt{x} < 4$, entonces $0 < (\sqrt{x})^2 < 4^2$, o $0 < x < 16$.
(3) Si $0 < a < b$, entonces $0 < \sqrt{a} < \sqrt{b}$.	Si $0 < x^2 < 4$, entonces $0 < \sqrt{x^2} < \sqrt{4}$, o $0 < \lvert x \rvert < 2$.

DEMOSTRACIONES

(1) Si $0 < a < b$, entonces $a \cdot \frac{1}{ab} < b \cdot \frac{1}{ab}$, o bien, $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$; es decir, $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

(2) Si $0 < a < b$, entonces $a \cdot a < a \cdot b$, y $b \cdot a < b \cdot b$, de modo que $a^2 < b^2$.

(3) Si $0 < a < b$, entonces $b - a > 0$, o bien, lo que es lo mismo,

$$(\sqrt{b} + \sqrt{a})(\sqrt{b} - \sqrt{a}) > 0.$$

Dividiendo entre $\sqrt{b} + \sqrt{a}$ ambos lados de la última desigualdad, obtenemos $\sqrt{b} - \sqrt{a} > 0$; es decir, $\sqrt{b} > \sqrt{a}$. ■

EJERCICIOS 2.7

Ejercicios 1–40: Resuelva la desigualdad, y exprese —cuando sea posible— la solución en términos de intervalos.

1 $(3x + 1)(5 - 10x) > 0$

2 $(2 - 3x)(4x - 7) \geq 0$

3 $(x + 2)(x - 1)(4 - x) \leq 0$

4 $(x - 5)(x + 3)(-2 - x) < 0$

5 $x^2 - x - 6 < 0$

6 $x^2 + 4x + 3 \geq 0$

7 $x^2 - 2x - 5 > 3$

8 $x^2 - 4x - 17 \leq 4$

9 $x(2x + 3) \geq 5$

10 $x(3x - 1) \leq 4$

11 $6x - 8 > x^2$

12 $x + 12 \leq x^2$

13 $x^2 < 16$

14 $x^2 > 9$

15 $25x^2 - 9 < 0$

16 $25x^2 - 9x < 0$

17 $16x^2 \geq 9x$

18 $16x^2 > 9$

19 $x^4 + 5x^2 \geq 36$

20 $x^4 + 15x^2 < 16$

21 $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \geq 0$

22 $2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 \leq 0$

23 $\frac{x^2(x + 2)}{(x + 2)(x + 1)} \leq 0$

24 $\frac{(x^2 + 1)(x - 3)}{x^2 - 9} \geq 0$

25 $\frac{x^2 - x}{x^2 + 2x} \leq 0$

26 $\frac{(x + 3)^2(2 - x)}{(x + 4)(x^2 - 4)} \leq 0$

27 $\frac{x - 2}{x^2 - 3x - 10} \geq 0$

28 $\frac{x + 5}{x^2 - 7x + 12} \leq 0$

29 $\frac{-3x}{x^2 - 9} > 0$

30 $\frac{2x}{16 - x^2} < 0$

31 $\frac{x + 1}{2x - 3} > 2$

32 $\frac{x - 2}{3x + 5} \leq 4$

33 $\frac{1}{x - 2} \geq \frac{3}{x + 1}$

34 $\frac{2}{2x + 3} \leq \frac{2}{x - 5}$

35 $\frac{4}{3x - 2} \leq \frac{2}{x + 1}$

36 $\frac{3}{5x + 1} \geq \frac{1}{x - 3}$

37 $\frac{x}{3x - 5} \leq \frac{2}{x - 1}$

38 $\frac{x}{2x - 1} \geq \frac{3}{x + 2}$

39 $x^3 > x$ **40** $x^4 \geq x^2$

Ejercicios 41 y 42: Al moverse una partícula en trayectoria recta, su velocidad, v, en cm/s, cuando el tiempo es t segundos, está expresada por la ecuación. ¿Para qué subintervalos del intervalo dado $[a, b]$ será esta velocidad cuando menos de k cm/s?

41 $v = t^3 - 3t^2 - 4t + 20$; $[0, 5]$; $k = 8$

42 $v = t^4 - 4t^2 + 10$; $[1, 6]$; $k = 10$

43 *Marca del salto de altura* *Guinness Book of World Records* informa que los perros pastores alemanes pueden efectuar saltos verticales de más de 10 pies al escalar muros. Si la distancia, s, en pies, a los t segundos, es $s = -16t^2 + 24t + 1$, ¿durante cuántos segundos está el perro a más de 9 pies del piso?

44 *Altura de un objeto disparado* Si un objeto se lanza verticalmente hacia arriba, desde el nivel del piso, con una velocidad inicial de 320 pies/s, entonces su distancia, s, al piso, a los t segundos es $s = 16t^2 + 320t$. ¿Para qué valores de t estará el objeto a más de 1 536 pies sobre el piso?

45 *Distancia de frenado* La distancia d de frenado, en pies, de determinado automóvil que viaja a v mi/h, es $d = v + (v^2/20)$. Calcule las velocidades que hagan que las distancias de frenado sean menores que 25 pies.

46 *Rendimiento de gasolina* El número de millas, M, que puede viajar determinado auto compacto con 1 galón de gasolina, se relaciona con su velocidad, v, en millas/h, mediante

$$M = -\tfrac{1}{30}v^2 + \tfrac{5}{2}v \quad \text{cuando } 0 < v < 70.$$

¿Para qué velocidades M será cuando menos 45?

47 *Propagación de salmones* Para determinada población de salmones, la relación entre el número, S, de padres, y el número, R, de descendientes que sobreviven hasta la madurez es $R = 4\,500S/(S + 500)$. ¿Bajo qué condiciones $R > S$?

48 *Densidad de población* La densidad de población, D, (en personas por milla cuadrada) en una gran ciudad, se relaciona con la distancia, x, en millas, al centro de la ciudad, mediante $D = 5\,000x/(x^2 + 36)$. ¿En qué regiones de la ciudad la densidad de población es mayor que 400 personas/milla^2?

49 *Peso en el espacio* Cuando un astronauta va hacia el espacio, su peso disminuye hasta alcanzar un estado de ingravedad. El peso de un astronauta de 125 lb, a una altitud de x km sobre el nivel del mar, es

$$W = 125\left(\frac{6400}{6400 + x}\right)^2.$$

¿A qué altitudes el peso del astronauta es menor que 5 lb?

50 *Fórmula de la contracción de Lorentz* Esta fórmula, en la teoría de la relatividad, relaciona la longitud, L, de un objeto que se mueve a una velocidad de v km/s, con respecto a un observador, a su longitud, L_0, en reposo. Si c es la velocidad de la luz, entonces

$$L^2 = L_0^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

¿Para qué velocidades será menor L que $\frac{1}{2}L_0$? Exprese la respuesta en términos de c.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 2

Ejercicios 1–24: Resuelva la ecuación.

1 $\dfrac{3x + 1}{5x + 7} = \dfrac{6x + 11}{10x - 3}$ **2** $2 - \dfrac{1}{x} = 1 + \dfrac{4}{x}$

3 $\dfrac{2}{x + 5} - \dfrac{3}{2x + 1} = \dfrac{5}{6x + 3}$

4 $\dfrac{7}{x - 2} - \dfrac{6}{x^2 - 4} = \dfrac{3}{2x + 4}$

5 $\dfrac{1}{\sqrt{x}} - 2 = \dfrac{1 - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ **6** $2x^2 + 5x - 12 = 0$

7 $x(3x + 4) = 5$ **8** $\dfrac{x}{3x + 1} = \dfrac{x - 1}{2x + 3}$

9 $(x - 2)(x + 1) = 3$ **10** $4x^4 - 33x^2 + 50 = 0$

11 $x^{2/3} - 2x^{1/3} - 15 = 0$

12 $20x^3 + 8x^2 - 35x - 14 = 0$

13 $5x^2 = 2x - 3$

14 $x^2 + \frac{1}{3}x + 2 = 0$

15 $6x^4 + 29x^2 + 28 = 0$

16 $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$

17 $|4x - 1| = 7$

18 $2|2x + 1| + 1 = 19$

19 $\frac{1}{x} + 6 = \frac{5}{\sqrt{x}}$

20 $\sqrt[3]{4x - 5} - 2 = 0$

21 $\sqrt{7x + 2} + x = 6$

22 $\sqrt{x + 4} = \sqrt[4]{6x + 19}$

23 $\sqrt{3x + 1} - \sqrt{x + 4} = 1$

24 $x^{4/3} = 16$

Ejercicios 25 y 26: Resuelva la ecuación completando el cuadrado.

25 $3x^2 - 12x + 3 = 0$

26 $x^2 + 10x + 38 = 0$

Ejercicios 27–44: Resuelva la desigualdad y exprese las soluciones en términos de intervalos, siempre que sea posible.

27 $(x - 3)^2 \le 0$

28 $10 - 7x < 4 + 2x$

29 $-\frac{1}{2} < \frac{2x + 3}{5} < \frac{3}{2}$

30 $(3x - 1)(10x + 4) \ge (6x - 5)(5x - 7)$

31 $\frac{6}{10x + 3} < 0$

32 $|4x + 7| < 21$

33 $2|3 - x| + 1 > 5$

34 $-2|x - 3| + 1 \ge -5$

35 $|16 - 3x| \ge 5$

36 $2 < |x - 6| < 4$

37 $10x^2 + 11x > 6$

38 $x(x - 3) \le 10$

39 $\frac{x^2(3 - x)}{x + 2} \le 0$

40 $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 4x + 3} \le 0$

41 $\frac{3}{2x + 3} < \frac{1}{x - 2}$

42 $\frac{x + 1}{x^2 - 25} \le 0$

43 $x^3 > x^2$

44 $(x^2 - x)(x^2 - 5x + 6) < 0$

Ejercicios 45–48: Despeje la variable que se indica.

45 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ para r (volumen de una esfera)

46 $F = \frac{\pi PR^4}{8VL}$ fo r R (Ley de Poiseuille, para fluidos)

47 $c = \sqrt{4h(2R - h)}$ para h (base de un segmento circular)

48 $V = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + R^2 + rR)$ para r (volumen de un cono truncado)

Ejercicios 49–54: Exprese lo siguiente en forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

49 $(7 + 5i) - (-8 + 3i)$

50 $(4 + 2i)(-5 + 4i)$

51 $(3 + 8i)^2$

52 $\frac{1}{9 - \sqrt{-4}}$

53 $\frac{6 - 3i}{2 + 7i}$

54 $\frac{20 - 8i}{4i}$

55 ***Resistencia eléctrica*** Cuando se conectan en paralelo dos resistores, R_1 y R_2, la resistencia neta, R, es $1/R = (1/R_1) + (1/R_2)$. Si $R_1 = 5$ ohms (Ω), ¿qué valor de R_2 hará que la resistencia neta sea de 2 Ω?

56 ***Renta de la inversión*** Un inversionista puede escoger entre dos opciones: bonos o acciones. El fondo de bonos rinde 7.186% de interés anual, que no es ingreso gravable a niveles estatal y federal. Suponga que el inversionista paga impuestos federales del 28% y estatales del 7%. Determine qué rendimiento anual deben tener las acciones, que sí son gravables, para que los dos fondos paguen el mismo ingreso neto por intereses.

57 ***Aleación de oro y plata*** Un anillo que pesa 80 gramos (g) está hecho de oro y plata. Midiendo el volumen de agua desplazada por el anillo, se ve que su volumen es de 5 cm^3. El oro pesa 19.3 g/cm^3 y la plata, 10.5 g/cm^3. ¿Cuántos gramos de oro contiene el anillo?

Preparación de alimentos en el hospital Un dietista de un hospital desea preparar un platillo de 280 g de carne y verduras, que proporcione 7 g de proteínas. Una onza (28 g) de verduras proporciona $\frac{1}{2}$ g de proteínas, y una onza de carne, 1 g. ¿Qué cantidad de cada ingrediente debe tener el platillo?

59 ***Preparación de un bactericida*** Se usará una solución de alcohol etílico al 75% en peso como bactericida. Esa solución se prepara agregando agua a una solución de alcohol al 95%. ¿Cuántos gramos de cada ingrediente se deben emplear para preparar 400 g de bactericida?

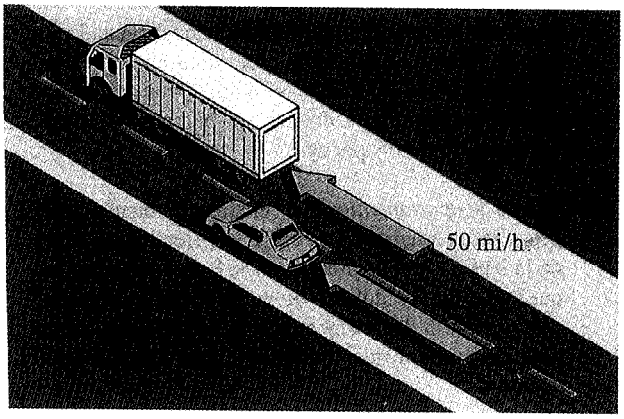
60 ***Calefacción solar*** Un gran tablero de calentamiento solar necesita 120 gal de un líquido con 30% de anticongelante. El líquido está en forma de una solución de 50% o de 20%. ¿Cuántos galones de cada solución se deben usar para preparar 120 gal de solución?

61 ***Rendimiento de combustible*** Un bote tiene su tanque de gasolina de 10 gal, y viaja a 20 mi/h con un rendimiento de combustible de 16 mi/gal, a plena marcha en agua tranquila. El bote se mueve aguas arriba en una corriente de 5 mi/h. ¿A qué distancia aguas arriba puede llegar el bote, y regresar, con 10 gal de gasolina, trabajando a plena marcha durante todo el viaje?

62 ***Viaje en tren*** Un tren de alta velocidad efectúa un recorrido sin escalas de 400 mi entre dos grandes ciudades, en $5\frac{1}{2}$ horas. Viaja a 100 mi/h en campo abierto, pero los reglamentos de seguridad indican que sólo viaje a 25 mi/h cuando pase por ciudades pequeñas. ¿Cuántas horas tarda en atravesar las ciudades pequeñas?

63 ***Velocidad del viento*** Un avión voló con el viento a su favor durante 30 min, y recorrió de regreso la misma distancia en 45 min. La velocidad de travesía, en el aire, fue 320 mi/h. ¿Cuál era la velocidad del aire?

64 ***Velocidad de rebase*** Un automóvil de 20 pies de longitud rebasa a un camión de 40 pies que viaja a 50 mi/h (véase la figura). ¿A qué velocidad constante debe viajar el automóvil para pasar al camión en 5 s?



65 ***Llenado de un silo*** Un extrusor puede llenar un silo vacío en 2 h, y una cuadrilla de empaque puede vaciar un silo lleno en 5 h. Si un silo está a la mitad, cuando el extrusor comienza a llenarlo, y en ese momento comienza a vaciarlo la cuadrilla, ¿cuánto tardará en llenarse el silo?

66 ***Rendimiento de gasolina*** Un agente de ventas estima que el rendimiento de gasolina de un automóvil es, en promedio, 28 mi/gal en carretera, y 22 mi/gal en ciudad. En un viaje recorrió 627 mi y usó 24 gal de gasolina. ¿Qué distancia en el viaje la pasó conduciendo en ciudad?

67 ***Expansión de una ciudad*** La ruta más larga al centro de una ciudad en forma de cuadro, desde las orillas, es 10 mi. En la última década la ciudad se ha agrandado 50 mi^2. Suponiendo que siempre haya tenido la forma de un cuadro, calcule el cambio correspondiente de la distancia más larga al centro de la ciudad.

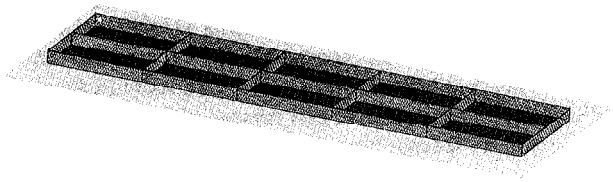
68 ***Dimensiones de una membrana celular*** La membrana de una célula es una esfera de 6 micras (o micrometros) de diámetro. ¿Qué cambio del radio aumentará el área de la membrana en 25%?

69 ***Viaje por carretera*** Una carretera con dirección norte a sur se cruza con una que va de este a oeste en el punto P. Un automóvil cruza P a las 10:00 A.M., dirigiéndose hacia el Este a una velocidad constante de 20 mi/h. En el mismo instante, otro automóvil está a 2 mi al norte de P, viajando hacia el sur a 50 mi/h.

(a) Deduzca una fórmula para la distancia, d, entre los automóviles, a las t horas después de las 10:00 A.M.

(b) Aproximadamente, ¿a qué hora estarán los automóviles a 104 mi de distancia?

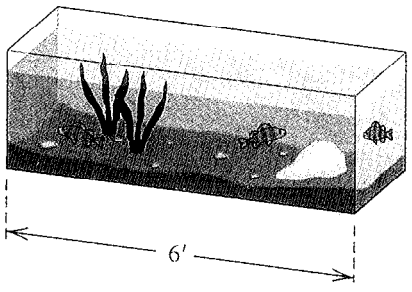
70 ***Cercado de una perrera*** El dueño de una perrera tiene 270 pies de cerca, y la usa para dividir una área rectangular en 10 lotes iguales, como se ve en la figura. Calcule las dimensiones para que cada lote tenga 100 $pies^2$.



71 ***Dimensiones de un acuario*** Se desea fabricar un acuario sin tapa que tenga 6 pies de largo y extremos cuadrados, como se ve en la figura.

(a) Calcule la altura del acuario si el volumen debe ser 48 $pies^3$.

(b) Calcule la altura si se deben usar 44 $pies^2$ de vidrio.



72 ***Dimensiones de una alberca*** El largo de una alberca rectangular será cuatro veces su ancho; también tendrá un corredor de 6 pies a su alrededor. Se ha apartado una área total de 1 440 pies^2 para la alberca. ¿Cuáles son las dimensiones de ésta?

73 ***Dimensiones de un baño*** Un contratista desea diseñar un baño rectangular de 40 pies^2 de área. El baño ha de estar rodeado por una franja de baldosas de 1 pie de ancho. El largo total de la zona de baldosas debe ser el doble de la anchura. Calcule las dimensiones de la zona de baño.

74 ***Crecimiento de la población*** La población P (en miles de habitantes) de un pueblo pequeño, se espera aumente de acuerdo con la fórmula

$$P = 15 + \sqrt{3t + 2},$$

en la cual t es el tiempo en años. ¿Cuándo llegará la población a 20 000?

75 ***Ley de Boyle*** La Ley de Boyle para los gases establece que si la temperatura es constante, entonces $pv = 200$, donde p es la presión, en lb/pulg^2, y v el volumen, en pulg^3. Si $25 \le v \le 50$, ¿cuáles son los límites correspondientes de p?

76 ***Comisión por ventas*** Un recién graduado tiene ofertas de trabajo para el área de ventas en dos empresas de computación. En el trabajo A gana \$25 000 (dólares) al año, más una comisión del 5%. En el B gana \$20 000 al año, pero la comisión es 10%. ¿Qué volumen anual de ventas debe alcanzar esta persona para que el segundo trabajo sea más lucrativo?

77 ***Velocidad del sonido*** La velocidad del sonido en el aire, a 0 °C o 273 K, es 1087 pies/s; pero esa velocidad aumenta al aumentar la temperatura. La velocidad, v, del sonido, a la temperatura T, expresada en kelvins, es $v = 1087\sqrt{T/273}$. ¿A qué temperaturas la velocidad del sonido es mayor que 1 100 pies/s?

78 ***Periodo de un péndulo*** Si la longitud del péndulo de un reloj antiguo es l centímetros, entonces su periodo es T segundos, expresado por $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, donde g es la constante gravitacional. Si, para ciertas condiciones, $g = 980$, y $98 \le l \le 100$, ¿cuáles son los límites correspondientes de T?

79 ***Órbita de un satélite*** Para que un satélite mantenga una órbita de h kilómetros de altura, su velocidad, en km/s, debe ser igual a $626.4/\sqrt{h + R}$, con $R = 6372$ km, el radio de la Tierra. ¿Qué velocidades harán que las órbitas tengan más de 100 km de altura sobre la superficie de la Tierra?

80 ***Cercado de un terreno*** Hay disponibles 100 pies de cerca para encerrar un lote rectangular. ¿Para qué longitudes tendrá la zona cercada un mínimo de 600 pies^2?

81 ***Plantación de una huerta de manzanos*** El dueño de una huerta de manzanos calcula que si planta 24 árboles por acre, entonces cada árbol maduro producirá 600 manzanas por año. Por cada árbol adicional plantado por acre, el número de manzanas producidas por cada árbol disminuye en 12 por año. ¿Cuántos manzanos debe plantar por acre, para obtener un mínimo de 16 416 manzanas por año y por acre?

82 ***Rentas de apartamentos*** Una empresa de bienes raíces posee 180 apartamentos, que se ocupan totalmente cuando la renta es 300 dólares por mes. Estima esa empresa que por cada 10 dólares de aumento en la renta, se desocuparán 5 departamentos. ¿Qué renta debe cobrar para pagar sus deudas mensuales, que suman 54 000 dólares?

Las trayectorias de los animales que saltan, normalmente son parabólicas.

3.1	**SISTEMAS DE COORDENADAS RECTANGULARES**
3.2	**GRÁFICAS DE ECUACIONES**
3.3	**RECTAS**
3.4	**DEFINICIÓN DE FUNCIÓN**
3.5	**GRÁFICAS DE FUNCIONES**
3.6	**FUNCIONES CUADRÁTICAS**
3.7	**OPERACIONES CON FUNCIONES**
3.8	**FUNCIONES INVERSAS**
3.9	**VARIACIÓN**

CAPÍTULO 3

FUNCIONES Y GRÁFICAS

■ *El término matemático "función", o su equivalente en latín, se remonta a finales del siglo XVII, cuando el Cálculo se encontraba en sus primeras etapas de desarrollo. Este concepto importante es ahora fundamental en los cursos avanzados de matemáticas, y es indispensable en todos los campos de la ciencia.*

En este capítulo estudiaremos propiedades de funciones mediante métodos algebraicos y gráficos que comprenden la graficación de puntos, la determinación de simetrías y la realización de desplazamientos horizontales y verticales. Tales técnicas son adecuadas para obtener esquemas aproximados de gráficas, que nos ayudan a comprender propiedades de funciones; sin embargo, en los métodos actuales se emplean programas complicados de computación, así como matemáticas superiores para generar representaciones gráficas muy exactas de funciones. ■

ESCUELA POLI

3.1 SISTEMAS DE COORDENADAS RECTANGULARES

En la Secc. 1.1 se explica cómo asignar un número real, o coordenada, a cada punto de una recta. Ahora se indica cómo asignar un **par ordenado,** (a, b) de números reales a cada punto de un plano. Aunque también se ha usado la notación (a, b) para indicar un intervalo abierto, hay poca probabilidad de confusión, ya que en la explicación se aclarará si (a, b) representa un punto o un intervalo.

Se representa un **sistema de coordenadas rectangulares**, o **cartesiano***, en un plano mediante dos rectas perpendiculares de coordenadas, llamadas **ejes coordenados**, o **ejes de coordenadas**, que se intersecan en el **origen**, O, como se ve en la Fig. 3.1. A la línea horizontal se le llama **eje** x, y a la línea vertical, **eje** y, lo cual se indica con una x y una y en las rectas. De esta forma, el plano es un **plano coordenado**, **plano** xy, o **plano de coordenadas.** Los ejes coordenados dividen al plano en cuatro partes, que se llaman **primer**, **segundo**, **tercer** y **cuarto cuadrantes**, los cuales se indican con I, II, III y IV, respectivamente (véase Fig. 3.1). Los puntos sobre los ejes no pertenecen a ningún cuadrante.

Cada punto P en un plano xy debe tener asignado un par ordenado (a, b), como se ve en la Fig. 3.1. a se llama **abscisa**, o **coordenada** x, de P, y b, **ordenada o coordenada** y. Se dice que *P tiene las coordenadas* (a, b), y que se trata del *punto* (a, b), o el *punto* $P(a, b)$. Recíprocamente, todo par ordenado (a, b), determina un punto P, cuyas coordenadas son a y b. Se **grafica un punto** (matemático), o se **localiza un punto**, mediante un punto (físico), como se ve en la Fig. 3.2.

FIGURA 3.1

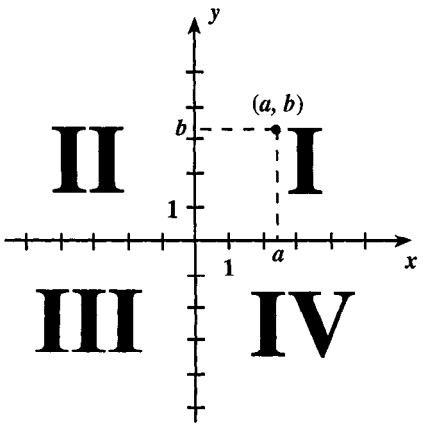
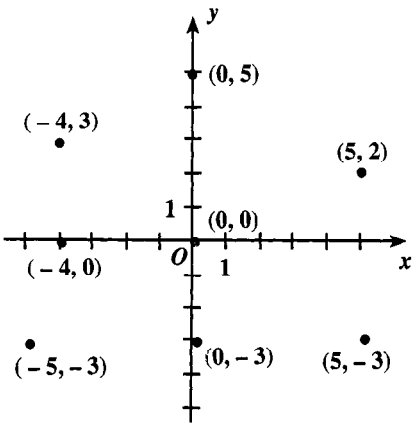


FIGURA 3.2



Para calcular la distancia entre dos puntos en un plano de coordenadas se usa la siguiente fórmula.

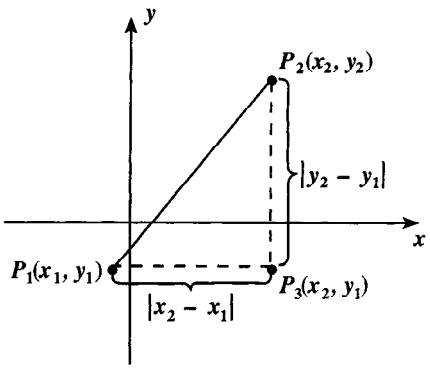
* El término *cartesianas* se utiliza en honor del matemático y filósofo francés René Descartes (1596–1650), quien fue uno de los primeros en emplear esos sistemas de coordenadas.

Fórmula de la distancia

La distancia, $d(P_1, P_2)$, entre dos puntos cualesquiera, $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, en un plano de coordenadas, es

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

FIGURA 3.3



DEMOSTRACIÓN Si $x_1 \neq x_2$, y $y_1 \neq y_2$, entonces, como se ve en la Fig. 3.3, los puntos P_1, P_2 y $P_3(x_2, y_1)$ son vértices de un triángulo rectángulo. Según el teorema de Pitágoras,

$$[d(P_1, P_2)]^2 = [d(P_1, P_3)]^2 + [d(P_3, P_2)]^2.$$

En la figura se observa que

$$d(P_1, P_3) = |x_2 - x_1| \quad \text{y} \quad d(P_3, P_2) = |y_2 - y_1|.$$

Ya que $|a|^2 = a^2$ para todo número real a, se puede escribir

$$[d(P_1, P_2)]^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Se obtiene la raíz cuadrada de cada lado de esta ecuación y como $d(P_1, P_2) \geq 0$, resulta la fórmula de la distancia.

Si $y_1 = y_2$, los puntos P_1 y P_2 quedan en la misma recta horizontal, y

$$d(P_1, P_2) = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}.$$

Igualmente, si $x_1 = x_2$, los puntos están en la misma línea vertical, y

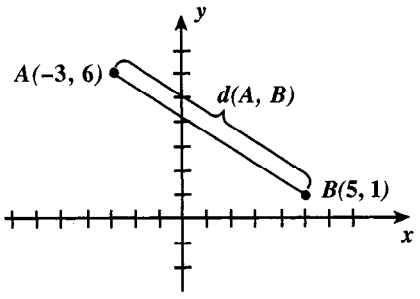
$$d(P_1, P_2) = |y_2 - y_1| = \sqrt{(y_2 - y_1)^2}.$$

Estos fueron casos especiales de la fórmula de la distancia.

Aunque se manejan los puntos que se ven en la Fig. 3.3, la demostración es independiente de las posiciones de P_1 y P_2. ■

Cuando se use la fórmula de la distancia, nótese que $d(P_1, P_2) = d(P_2, P_1)$ y, por lo tanto, no importa el orden en el que se resten las abscisas y las ordenadas de los puntos.

FIGURA 3.4



EJEMPLO 1 ***Cálculo de la distancia entre dos puntos***

Graficar los puntos $A(-3, 6)$ y $B(5, 1)$ y calcular la distancia $d(A, B)$.

SOLUCIÓN Los puntos están graficados en la Fig. 3.4. Por la fórmula de la distancia,

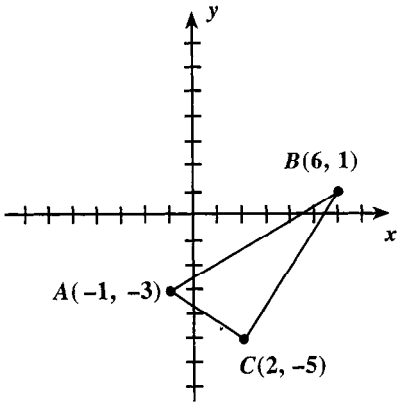
$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{[5 - (-3)]^2 + (1 - 6)^2} \\ &= \sqrt{8^2 + (-5)^2} \\ &= \sqrt{64 + 25} = \sqrt{89} \approx 9.43. \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 ***Demostración de que un triángulo es rectángulo***

(a) Graficar $A(-1, -3)$, $B(6, 1)$ y $C(2, -5)$, y demostrar que el triángulo ABC es rectángulo.

(b) Calcular el área del triángulo ABC.

FIGURA 3.5



SOLUCIÓN

(a) Los puntos están graficados en la Fig. 3.5. Según la geometría en esa figura, el triángulo ABC es rectángulo si la suma de los cuadrados de dos de sus lados es igual al cuadrado del lado restante. De acuerdo con la fórmula de la distancia,

$$d(A, B) = \sqrt{(6 + 1)^2 + (1 + 3)^2} = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65}$$
$$d(B, C) = \sqrt{(2 - 6)^2 + (-5 - 1)^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52}$$
$$d(A, C) = \sqrt{(2 + 1)^2 + (-5 + 3)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}.$$

Como $d(A, B) = \sqrt{65}$ es el mayor de los tres valores, la condición que se debe satisfacer es

$$[d(A, B)]^2 = [d(B, C)]^2 + [d(A, C)]^2.$$

Sustituyendo los valores hallados al emplear la fórmula de la distancia, se tiene

$$[d(A, B)]^2 = (\sqrt{65})^2 = 65$$

y

$$[d(B, C)]^2 + [d(A, C)]^2 = (\sqrt{52})^2 + (\sqrt{13})^2 = 52 + 13 = 65.$$

Por consiguiente, el triángulo es rectángulo, y su hipotenusa es AB.

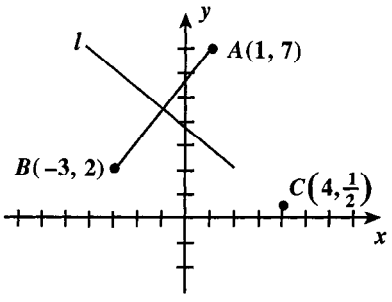
(b) El área de un triángulo con base b y altura h es $\frac{1}{2}bh$. En la Fig. 3.5 se ve que

$$b = d(B, C) = \sqrt{52} \qquad \text{y} \qquad h = d(A, C) = \sqrt{13}.$$

Por lo tanto, el área del triángulo ABC es

$$\tfrac{1}{2}bh = \tfrac{1}{2}\sqrt{52}\sqrt{13} = \tfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{13}\sqrt{13} = 13.$$

FIGURA 3.6



EJEMPLO 3 ***Aplicación de la fórmula de la distancia***

Dados los puntos $A(1, 7)$, $B(-3, 2)$ y $C(4, \frac{1}{2})$, demostrar que C está en la mediatriz del segmento AB.

SOLUCIÓN En la Fig. 3.6 se muestran los puntos A, B y C, y también la mediatriz, l. De acuerdo con la geometría plana, l se puede definir mediante una de las condiciones siguientes:

(1) l es la perpendicular al segmento AB, en su punto medio.

(2) l es el conjunto de todos los puntos que equidistan de los extremos del segmento AB.

Se usará la condición (2) para demostrar que C está en l, comprobando que

$$d(A, C) = d(B, C).$$

Se aplica la fórmula de la distancia:

$$d(A, C) = \sqrt{(4-1)^2 + (\tfrac{1}{2} - 7)^2} = \sqrt{3^2 + (-\tfrac{13}{2})^2} = \sqrt{9 + \tfrac{169}{4}} = \sqrt{\tfrac{205}{4}}$$
$$d(B, C) = \sqrt{[4-(-3)]^2 + (\tfrac{1}{2} - 2)^2} = \sqrt{7^2 + (-\tfrac{3}{2})^2} = \sqrt{49 + \tfrac{9}{4}} = \sqrt{\tfrac{205}{4}}$$

Así, C equidista de A y B, y la comprobación es completa.

EJEMPLO 4 ***Deducción de una fórmula que represente una mediatriz***

Dados $A(1, 7)$ y $B(-3, 2)$, deducir una fórmula que exprese el hecho de que un punto cualesquiera $P(x, y)$ está en la mediatriz l, del segmento AB.

SOLUCIÓN Según la condición (2) del Ejem. 3, $P(x, y)$ está en l si y sólo si $d(A, P) = d(B, P)$; es decir,

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-7)^2} = \sqrt{[x-(-3)]^2 + (y-2)^2}.$$

Para obtener una fórmula más sencilla, se elevan al cuadrado ambos miembros, y se agrupan los términos de las ecuaciones resultantes, como sigue:

$$(x-1)^2 + (y-7)^2 = [x-(-3)]^2 + (y-2)^2$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 14y + 49 = x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4$$
$$-2x + 1 - 14y + 49 = 6x + 9 - 4y + 4$$
$$-8x - 10y = -37$$
$$8x + 10y = 37$$

Nótese que, en particular, la última fórmula es cierta para las coordenadas del punto $C(4, \frac{1}{2})$ en el Ejem. 3, como si $x = 4$ y $y = \frac{1}{2}$, entonces al sustituir en $8x + 10y$ se tiene

$$8 \cdot 4 + 10 \cdot \tfrac{1}{2} = 37.$$

En el Ejem. 9 de la Secc. 3.3, se encuentra una fórmula para la mediatriz de un segmento mediante la condición (1) del Ejemplo 3.

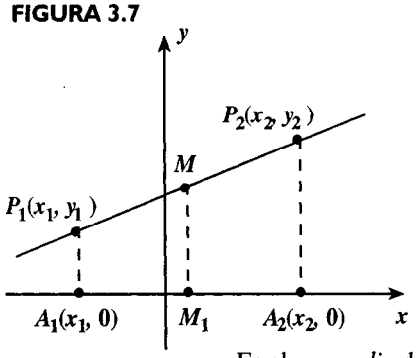
Se puede determinar el punto medio de un segmento de recta con la siguiente fórmula.

Fórmula del punto medio

El punto medio M del segmento de recta que va de $P_1(x_1, y_1)$ a $P_2(x_2, y_2)$, es

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

FIGURA 3.7



Las rectas que pasan por P_1 y P_2, paralelas al eje y, intersecan al eje x en $A_1(x_1, 0)$ y $A_2(x_2, 0)$. De acuerdo con la geometría plana, la línea que pasa por el punto medio M, paralela al eje y, corta al segmento A_1A_2 en el punto M_1 (véase la Fig. 3.7). Si $x_1 < x_2$, entonces $x_2 - x_1 > 0$ y, por lo tanto, $d(A_1A_2) = x_2 - x_1$. Como M_1 está a la mitad entre A_1 y A_2, la abscisa de M_1 es igual a la abscisa de A_1 más la mitad de la distancia de A_1 a A_2, es decir,

$$\text{abscisa de } M_1 = x_1 + \tfrac{1}{2}(x_2 - x_1).$$

La expresión del lado derecho de la última ecuación se simplifica en

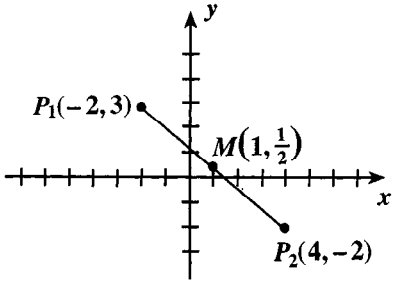
$$\frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Es el *promedio* de los números x_1 y x_2. Por consiguiente, la abscisa de M también es $(x_1 + x_2)/2$. De manera similar, la ordenada de M es $(y_1 + y_2)/2$. Estas fórmulas son válidas para todas las posiciones de P_1 y P_2.

EJEMPLO 5 *Determinación de un punto medio*

Hallar el punto medio M del segmento de recta de $P_1(-2, 3)$ a $P_2(4, -2)$, y comprobar que $d(P_1, M) = d(P_2, M)$.

FIGURA 3.8



SOLUCIÓN De acuerdo con la fórmula del punto medio, las coordenadas de M son

$$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3+(-2)}{2}\right), \text{ o bien } \left(1, \frac{1}{2}\right).$$

Los tres puntos, P_1, P_2 y M, están graficados en la Fig. 3.8. De acuerdo con la fórmula de la distancia,

$$d(P_1, M) = \sqrt{(1+2)^2 + (\tfrac{1}{2} - 3)^2} = \sqrt{9 + \tfrac{25}{4}}$$
$$d(P_2, M) = \sqrt{(1-4)^2 + (\tfrac{1}{2} + 2)^2} = \sqrt{9 + \tfrac{25}{4}}.$$

Por lo tanto, $d(P_1, M) = d(P_2, M)$.

EJERCICIOS 3.1

1 Grafique los puntos $A(5, -2)$, $B(-5, -2)$, $C(5, 2)$, $D(-5, 2)$, $E(3, 0)$ y $F(0, 3)$ en un plano de coordenadas.

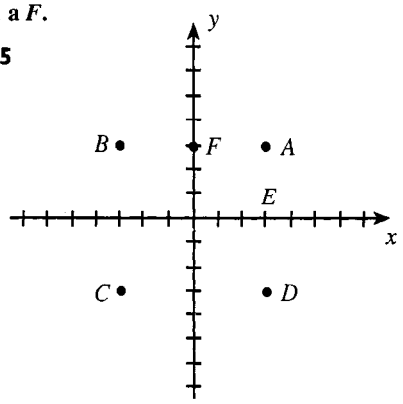
2 Grafique los puntos $A(-3, 1)$, $B(3, 1)$, $C(-2, -3)$, $D(0, 3)$ y $E(2, -3)$ en un plano de coordenadas. Trace los segmentos de recta AB, BC, CD, DE y EA.

3 Grafique los puntos $A(0, 0)$, $B(1, 1)$, $C(3, 3)$, $D(-1, -1)$ y $E(-2, -2)$. Describa el conjunto de todos los puntos de la forma (a, a), donde a es un número real.

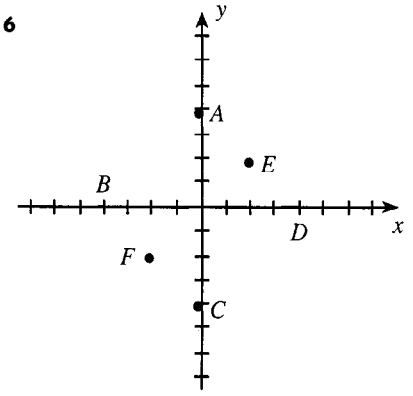
4 Grafique los puntos $A(0, 0)$, $B(1, -1)$, $C(3, -3)$, $D(-1, 1)$ y $E(-3, 3)$. Describa el conjunto de todos los puntos que tienen la forma $(a, -a)$, donde a es un número real.

Ejercicios 5 y 6: Determine las coordenadas de los puntos *A* a *F*.

5



6



Ejercicios 7 y 8: Describa el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ en un plano de coordenadas, que satisfagan la condición dada.

7 **(a)** $x = -2$ **(b)** $y = 3$ **(c)** $x \geq 0$
(d) $xy > 0$ **(e)** $y < 0$ **(f)** $x = 0$

8 **(a)** $y = -2$ **(b)** $x = -4$ **(c)** $x/y < 0$
(d) $xy = 0$ **(e)** $y > 1$ **(f)** $y = 0$

Ejercicios 9–14: (a) Calcule la distancia, $d(A, B)$ entre A y B. (b) Determine el punto medio del segmento AB.

9 $A(4, -3)$, $B(6, 2)$

10 $A(-2, -5)$, $B(4, 6)$

11

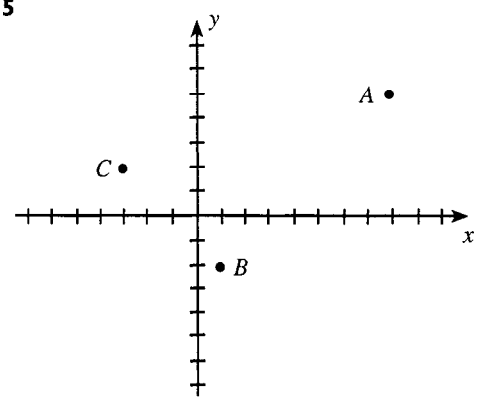
12

13

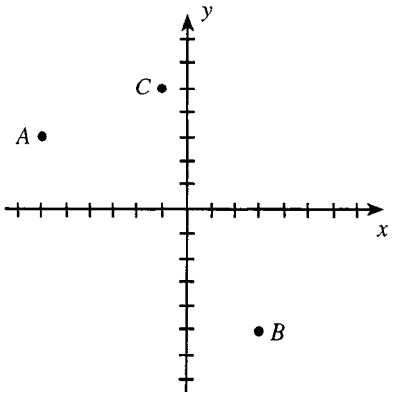
14

Ejercicios 15 y 16: Demuestre que el triángulo cuyos vértices están en A, B y C es rectángulo, y calcule su área.

15



16



17 Demuestre que $A(-4, 2)$, $B(1, 4)$, $C(3, -1)$ y $D(-2, -3)$ son los vértices de un cuadrado.

18 Demuestre que $A(-4, -1)$, $B(0, -2)$, $C(6, 1)$ y $D(2, 2)$ son los vértices de un paralelogramo.

19 Dado $A(-3, 8)$, calcule las coordenadas del punto B, de tal modo que $C(5, -10)$ quede en el punto medio del segmento AB.

20 Dados $A(5, -8)$ y $B(-6, 2)$, determine el punto del segmento AB que esté a las tres cuartas partes de la distancia de A a B.

Ejercicios 21 y 22: Demuestre que C está en la mediatriz del segmento AB.

21 $A(-4, -3)$, $B(6, 1)$, $C(5, -11)$

22 $A(-3, 2)$, $B(5, -4)$, $C(7, 7)$

Ejercicios 23 y 24: Deduzca una fórmula que exprese el hecho de que un punto cualesquiera, $P(x, y)$, esté en la mediatriz l del segmento AB.

23 $A(-4, -3)$, $B(6, 1)$

24 $A(-3, 2)$, $B(5, -4)$

25 Obtenga una fórmula que exprese el hecho de que $P(x, y)$ esté a una distancia 5 del origen. Describa el conjunto de esos puntos.

26 Halle una fórmula que diga que $P(x, y)$ se encuentra a una distancia $r > 0$ de un punto fijo, $C(h, k)$. Describa el conjunto de esos puntos.

27 Localice todos los puntos del eje y que estén a una distancia 6 de $P(5, 3)$.

28 Encuentre todos los puntos del eje x que estén a una distancia 5 de $P(-2, 4)$.

29 Determine el punto que tenga coordenadas de la forma $(2a, a)$, que esté en el tercer cuadrante y a la distancia 5 de $P(1, 3)$.

30 Ubique todos los puntos cuyas coordenadas tengan la forma (a, a), que estén a una distancia 3 de $P(-2, 1)$.

31 ¿Para qué valores de a la distancia entre $P(a, 3)$ y $Q(5, 2a)$ es mayor que $\sqrt{26}$?

32 Dados $A(-2, 0)$ y $B(2, 0)$, deduzca una fórmula donde no intervengan radicales, que exprese el hecho de que la suma de las distancias de $P(x, y)$ a A y a B, respectivamente, sea 5.

33 Demuestre que el punto medio de la hipotenusa de todo triángulo rectángulo equidista de todos los vértices. [*Sugerencia:* Marque los vértices del triángulo con $O(0, 0)$, $A(a, 0)$ y $B((0, b)$.]

34 Demuestre que las diagonales de todo paralelogramo se cortan entre sí. [*Sugerencia:* Marque tres de los vértices del paralelogramo con $O(0, 0)$, $A(a, b)$ y $C(0, c)$.]

3.2 GRÁFICAS DE ECUACIONES

Con frecuencia se emplean gráficas para mostrar cambios en cantidades. Una gráfica de la sección de finanzas de un diario puede mostrar la fluctuación del promedio Dow–Jones durante determinado mes; un meteorólogo puede usar una gráfica para indicar la variación de la temperatura ambiente durante un día; un cardiólogo usa gráficas (electrocardiogramas) para analizar irregularidades cardiacas; un ingeniero o un físico pueden recurrir a una gráfica para indicar la manera en la cual aumenta la presión de un gas confinado, al calentarlo. Estos auxiliares visuales, por lo general, revelan el comportamiento de las cantidades con mayor facilidad que una gran tabla de valores numéricos.

A veces se relacionan dos cantidades mediante una ecuación o fórmula en la que intervienen dos variables. En esta sección se estudia cómo representar en forma geométrica esas ecuaciones, mediante una gráfica en un plano de coordenadas. A continuación se puede utilizar la gráfica para conocer las propiedades de las cantidades, que no son evidentes examinando tan sólo la ecuación. La tabla siguiente presenta el concepto básico de *la gráfica de una ecuación* de dos variables x y y. Naturalmente, se pueden emplear otras letras para representar las variables.

Terminología	Definición	Ejemplo
Solución de una ecuación en x y y	Un par ordenado, (a, b) que produce una afirmación cierta si $x = a$ y $y = b$	$(2, 3)$ es una solución de $y^2 = 5x - 1$, ya que al sustituir $x = 2$ y $y = 3$, se obtiene MI: $3^2 = 9$ MD: $5(2) - 1 = 10 - 1 = 9$

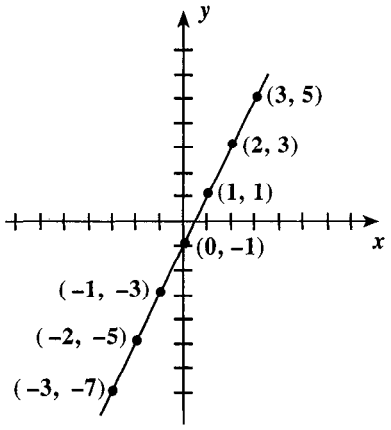
Para cada solución, (a, b), de una ecuación en x y y, hay un punto, $P(a, b)$ en el plano de coordenadas. El conjunto de todos esos puntos se llama **gráfica** de la ecuación. Para *trazar la gráfica de una ecuación*, se indican las características principales de la gráfica en un plano de coordenadas. En casos sencillos, se puede trazar la gráfica, localizando sólo algunos puntos cuando mucho. Para una ecuación complicada, la graficación de puntos puede dar muy poca información acerca de la forma de la gráfica. En esos casos se aplican métodos de Cálculo o graficación por computadora. Se comenzará con un ejemplo sencillo.

EJEMPLO 1 *Trazo de una gráfica sencilla, localizando puntos*

Trazar la gráfica de la ecuación $y = 2x - 1$.

SOLUCIÓN Se desea localizar o graficar los puntos (x, y) en un plano de coordenadas, que correspondan a las soluciones de la ecuación. Conviene hacer una lista de las coordenadas de varios de esos puntos, en una tabla en la que para cada x se dé el valor de y calculado mediante $y = 2x - 1$:

FIGURA 3.9

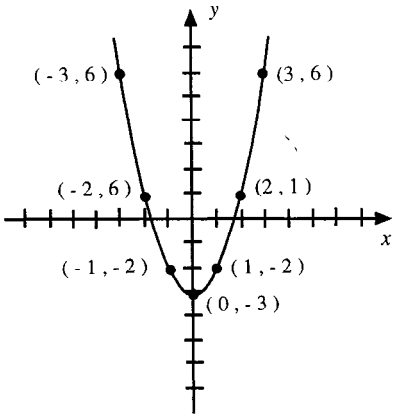


x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-7	-5	-3	-1	1	3	5

Los puntos con esas coordenadas parecen quedar en una recta, y se puede trazar la gráfica como en la Fig. 3.9. Normalmente, los pocos puntos que se han localizado no serían suficientes para definir la gráfica de una ecuación; sin embargo, en este caso elemental se tiene la seguridad razonable que la gráfica es una recta. En la siguiente sección se comprobará.

Es imposible hacer el trazo completo de la gráfica del Ejemplo 1, porque es posible asignar valores a x que sean numéricamente tan grandes como uno quiera. Sin embargo, el dibujo de la Fig. 3.9 se llama *gráfica de la ecuación.* Por lo general, la gráfica debe indicar sus propiedades esenciales, de tal modo que las partes restantes, que no se indican, sean evidentes por sí mismas. Si una gráfica termina en determinado punto, como sería el caso de una mitad de recta, o de un segmento de recta, se indica poniendo un punto en el *extremo*, o punto final, correspondiente de la gráfica. Como indicación final, *si las divisiones de los ejes coordenados no aparecen identificadas,* como en la Fig. 3.9, *entonces cada división representa una unidad.* Sólo se identifican las divisiones cuando se usan distintas unidades en cada eje. Para gráficas *arbitrarias*, en las cuales son irrelevantes las unidades de medida, se omiten por completo las divisiones. Véanse, por ejemplo, las Figs. 3.13 y 3.14.

FIGURA 3.10



EJEMPLO 2 ***Gráfica de una ecuación***

Trazar la gráfica de $y = x^2 - 3$.

SOLUCIÓN Al sustituir los valores en x, y calcular los correspondientes valores de y empleando $y = x^2 - 3$, se obtiene una tabla de coordenadas para varios puntos de la gráfica:

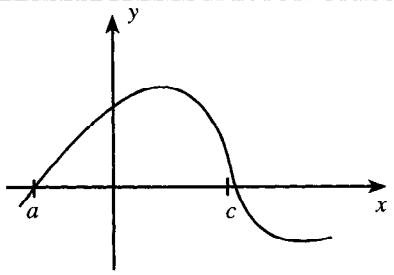
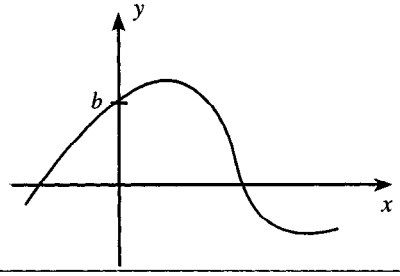
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	6	1	-2	-3	-2	1	6

Los valores mayores de $|x|$ producen valores mayores de y. Por ejemplo, los puntos (4, 13), (5, 22) y (6, 33) están en la gráfica, al igual que $(-4,13)$, $(-5, 22)$ y $(-6, 33)$. Al graficar los puntos de la tabla y trazar una curva uniforme que pase por ellos, en el orden de valores crecientes de x, obtenemos el esquema de la Fig. 3.10.

La gráfica de la Fig. 3.10 es una **parábola**, y el eje y es el **eje de la parábola**. El punto mínimo $(0, -3)$, es el **vértice** de la misma, y se dice, en este caso, que la parábola **abre hacia arriba.** Si se invierte la gráfica, entonces la parábola **abre hacia abajo**, y el vértice sería el punto más alto de la gráfica. En general, la gráfica de *toda* ecuación de la forma $y = ax^2 + c$, donde $a \neq 0$, es una parábola cuyo vértice está en $(0, c)$, abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$. Si $c = 0$, la ecuación se reduce a $y = ax^2$, y el vértice está en el origen, $(0, 0)$. Las parábolas también pueden ser cóncavas hacia la derecha o la izquierda (véase el Ejem. 3.4), o en otras direcciones.

Se usa la siguiente terminología para especificar dónde interseca la gráfica de una ecuación en x y y, el eje x o el eje y.

Intersecciones de una gráfica con los ejes x y y

Terminología	Definición	Interpretación gráfica	Cómo calcularla
Abscisa en el origen	La coordenada x de los puntos en los cuales la gráfica interseca el eje x		Igualar $y = 0$ y despejar x.
Ordenada en el origen	La coordenada y de los puntos donde la gráfica interseca el eje y		Igualar $x = 0$ y despejar y.

EJEMPLO 3 *Intersección con los ejes*

Determinar las abscisas y ordenadas en el origen de la gráfica de $y = x^2 - 3$.

SOLUCIÓN En la Fig. 3.10 está la gráfica (Ejemplo 2). Se calculan las coordenadas en el origen como se indica en la tabla anterior.

(1) *intersección con el eje x:*	$y = x^2 - 3$	ecuación dada
	$0 = x^2 - 3$	sea $y = 0$
	$x^2 = 3$	ecuación equivalente
	$x = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1.732$	se saca raíz cuadrada

Así, las coordenadas de intersección con el eje x son $-\sqrt{3}$ y $\sqrt{3}$. Los puntos en los cuales cruza la gráfica al eje x son $(-\sqrt{3}, 0)$ y $(\sqrt{3}, 0)$.

(2) *intersección con el eje y:* $y = x^2 - 3$ ecuación dada

$y = 0 - 3 = -3$ sea $x = 0$

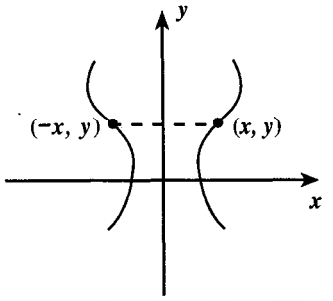
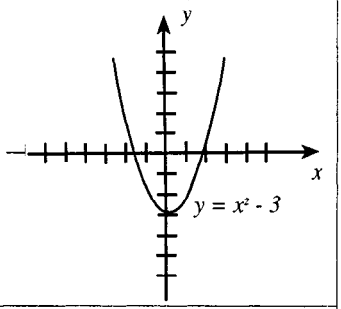
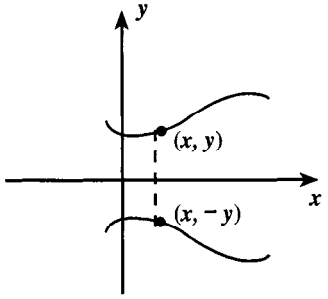
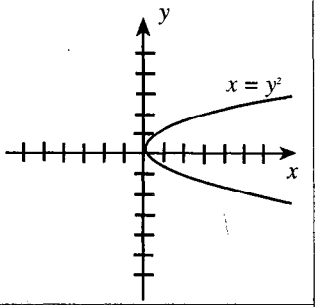
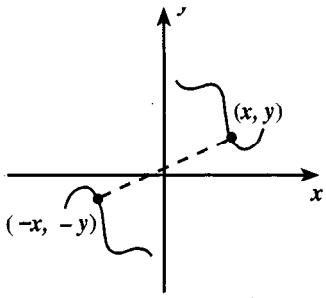
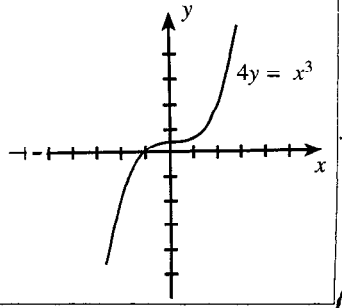
Así, la ordenada en el origen es – 3, y el punto en el cual la gráfica cruza al eje y es $(0, -3)$.

Si el plano de coordenadas de la Fig. 3.10 se dobla a lo largo del eje y, la gráfica que queda en el lado izquierdo del plano coincide con la que está en la mitad derecha del mismo. En ese caso se dice que **la gráfica es simétrica con respecto al eje y**. Una gráfica es simétrica con respecto al eje y siempre que el punto $(-x, y)$ esté en la gráfica cuando el punto (x, y) esté en ella. La gráfica de $y = x - 3$ en el Ejemplo 2 tiene esta propiedad, ya que al sustituir $-x$ en lugar de x, se obtiene la misma ecuación:

$$y = (-x)^2 - 3 = x^2 - 3$$

Esta sustitución es una aplicación de la prueba de simetría (1) en la tabla siguiente. También se indican allí otros dos tipos de simetría, y las pruebas correspondientes. En los Ejemplos 4 y 5 se estudian las gráficas de $x = y^2$ y de $4y = x^3$ de la columna de ejemplos.

Simetrías de gráficas de ecuaciones en x y y

Terminología	Interpretación gráfica	Prueba de simetría	Ejemplo
La gráfica es simétrica con respecto al eje y.		(1) Al sustituir x por $-x$ se obtiene la misma ecuación.	
La gráfica es simétrica con respecto al eje x.		(2) Al sustituir y por $-y$ se obtiene la misma ecuación.	
La gráfica es simétrica con respecto al origen.		(3) Al sustituir x por $-x$ y y por $-y$ en forma simultánea, se obtiene la misma ecuación.	

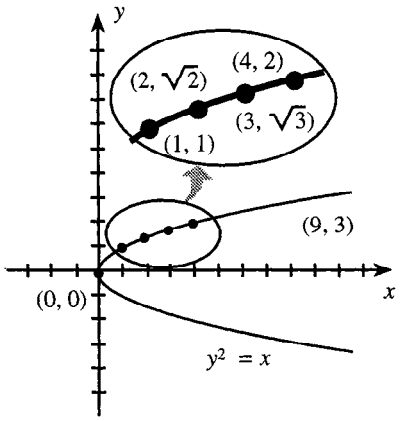
ESCUELA POLIT

Si una gráfica es simétrica con respecto a un eje, es suficiente determinarla en una mitad del plano de coordenadas, ya que se puede hacer el esquema del resto mediante *la imagen especular*, o *reflexión*, con respecto al eje que se trate.

EJEMPLO 4 *Una gráfica simétrica con respecto al eje x*

Graficar la ecuación $y^2 = x$.

FIGURA 3.11



SOLUCIÓN Como la sustitución de y por $-y$ no cambia la ecuación, la gráfica es simétrica con respecto al eje x [véase la prueba (2) de simetría]. Entonces, basta con determinar puntos con ordenadas no negativas para reflejarlos a continuación con respecto al eje x. Como $y^2 = x$, las ordenadas de los puntos sobre el eje x son $y = \sqrt{x}$. A continuación se da una lista de las coordenadas de algunos puntos de la gráfica, la cual aparece en la Fig. 3.11.

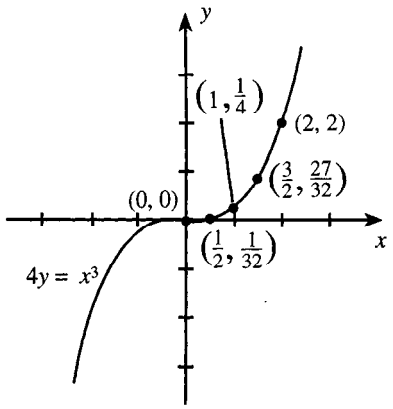
x	0	1	2	3	4	9
y	0	1	$\sqrt{2} \approx 1.4$	$\sqrt{3} \approx 1.7$	2	3

La gráfica es una parábola que abre hacia la derecha, con vértice en el origen. En este caso, el eje x es el eje de la parábola.

EJEMPLO 5 *Gráfica simétrica con respecto al origen*

Graficar $4y = x^3$.

FIGURA 3.12



SOLUCIÓN Si se sustituye en forma simultánea a x por $-x$ y a y por $-y$, entonces

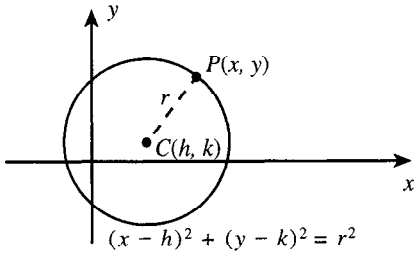
$$4(-y) = (-x)^3, \qquad \text{o bien} \qquad -4y = -x^3.$$

Si se multiplican ambos miembros por -1, se observa que la última ecuación tiene las mismas soluciones que $4y = x^3$. Por consiguiente, según la prueba (3) de simetría, la gráfica es simétrica con respecto al origen. La tabla siguiente es una lista de coordenadas de algunos de sus puntos.

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
y	0	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{27}{32}$	2

Por simetría, se ve que los puntos $(-1, -\frac{1}{4})$, $(-2, -2)$, etcétera, también están en la gráfica. Esta gráfica aparece en la Fig. 3.12.

FIGURA 3.13



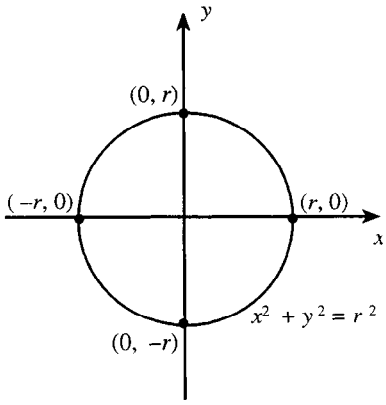
Ecuación normal de un círculo con centro en (h, k) y radio r

Si $C(h, k)$ es un punto en el plano de coordenadas, entonces un círculo* con centro en C, y con radio $r > 0$, consiste en todos los puntos del plano que están a r unidades de C. Como se ve en la Fig. 3.13, un punto, $P(x, y)$, está en el círculo, siempre y cuando $d(C, P) = r$, o bien, según la fórmula de la distancia,

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r.$$

Esta ecuación equivale a la siguiente:

$$\boxed{(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2}$$



Si $h = 0$ y $k = 0$, esta ecuación se reduce a $x^2 + y^2 = r^2$, que es la ecuación de un círculo de radio r y con centro en el origen (véase Fig. 3.14). Si $r = 1$, se dice que la gráfica es de un **círculo unitario**.

EJEMPLO 6 *Deducción de la ecuación de un círculo*

Deducir la ecuación de un círculo que tenga centro en $C(-2, 3)$ y que contenga al punto $D(4, 5)$.

SOLUCIÓN Este círculo se muestra en la Fig. 3.15. Como D está en el círculo, el radio r es $d(C, D)$. Según la fórmula de la distancia,

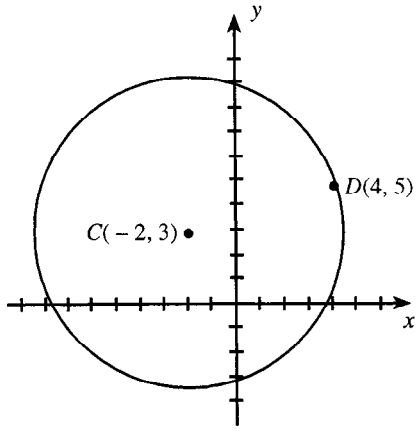
$$r = \sqrt{(4+2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}.$$

Con la ecuación normal de un círculo, igualando $h = -2$, $k = 3$ y $r = \sqrt{40}$, se obtiene

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 40.$$

Elevando los términos al cuadrado, y agrupando, se escribe la ecuación anterior en la forma

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 27 = 0.$$



Como en la solución al Ejemplo 6, al elevar al cuadrado los términos de una ecuación de la forma $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ y al agrupar términos, se llega a una ecuación de la forma

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

en la cual a, b y c son números reales. Al revés, si se comienza con esta ecuación, siempre es posible, *completando los cuadrados,* obtener una ecuación de la forma

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = d.$$

* (N.R) En la terminología matemática en español para geometría analítica, esta línea circular es una **circunferencia** y no un círculo, la superficie limitada por esa línea. [F.P.]

Este método se demuestra en el Ejem. 7. Si $d > 0$, la gráfica es un círculo con centro (h, k) y radio $r = \sqrt{d}$. Si $d = 0$, la gráfica sólo consiste en un punto, (h, k). Por último, si $d < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales y, por lo tanto, no tiene gráfica.

EJEMPLO 7 ***Determinación del centro y el radio de un círculo***

Encontrar el centro y el radio del círculo cuya ecuación es

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0.$$

SOLUCIÓN Iniciaremos reformulando la ecuación como sigue:

$$(x^2 - 4x + __) + (y^2 + 6y + __) = 3 + __ + __,$$

en la cual los espacios subrayados representan números que hay que determinar. A continuación se completan los cuadrados de las expresiones entre paréntesis, teniendo cuidado de sumar los números adecuados *en ambos* miembros de la ecuación. Para completar el cuadrado de una expresión de la forma $x^2 + ax$, se suma el cuadrado de la mitad del coeficiente de x es decir, $(a/2)^2$ se suma a ambos miembros de la ecuación (véase pág. 72). Igualmente, para $y^2 + by$, se suma $(b/2)^2$. En este ejemplo, $a = -4$, $b = 6$, $(a/2)^2 = (-2)^2 = 4$ y $(b/2)^2 = 3^2 = 9$. Estas sumas llevan a

$$(x^2 - 4x + \underline{4}) + (y^2 + 6y + \underline{9}) = 3 + \underline{4} + \underline{9} \qquad \text{completar el cuadrado}$$

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16 \qquad \text{ecuación equivalente}$$

Si comparamos la última ecuación con la ecuación normal de un círculo, llegamos a la conclusión que el círculo tiene su centro en $(2, -3)$ y su radio es $\sqrt{16} = 4$.

En algunas aplicaciones es necesario trabajar sólo con una mitad de un círculo, es decir, un **semicírculo**. En el ejemplo que sigue se indica cómo llegar a ecuaciones de determinados semicírculos con centro en el origen.

EJEMPLO 8 ***Deducción de ecuaciones de semicírculos***

Deducir las ecuaciones de la mitad superior, inferior, derecha e izquierda, del círculo $x^2 + y^2 = 81$.

SOLUCIÓN La gráfica de $x^2 + y^2 = 81$. es un círculo de radio 9 con centro en el origen (compárese con la Fig. 3.14). Para llegar a las ecuaciones de las mitades superior e inferior, se despeja y en términos de x:

$$x^2 + y^2 = 81 \qquad \text{ecuación dada}$$

$$y^2 = 81 - x^2 \qquad \text{se resta } x^2$$

$$y = \pm\sqrt{81 - x^2} \qquad \text{se saca raíz cuadrada}$$

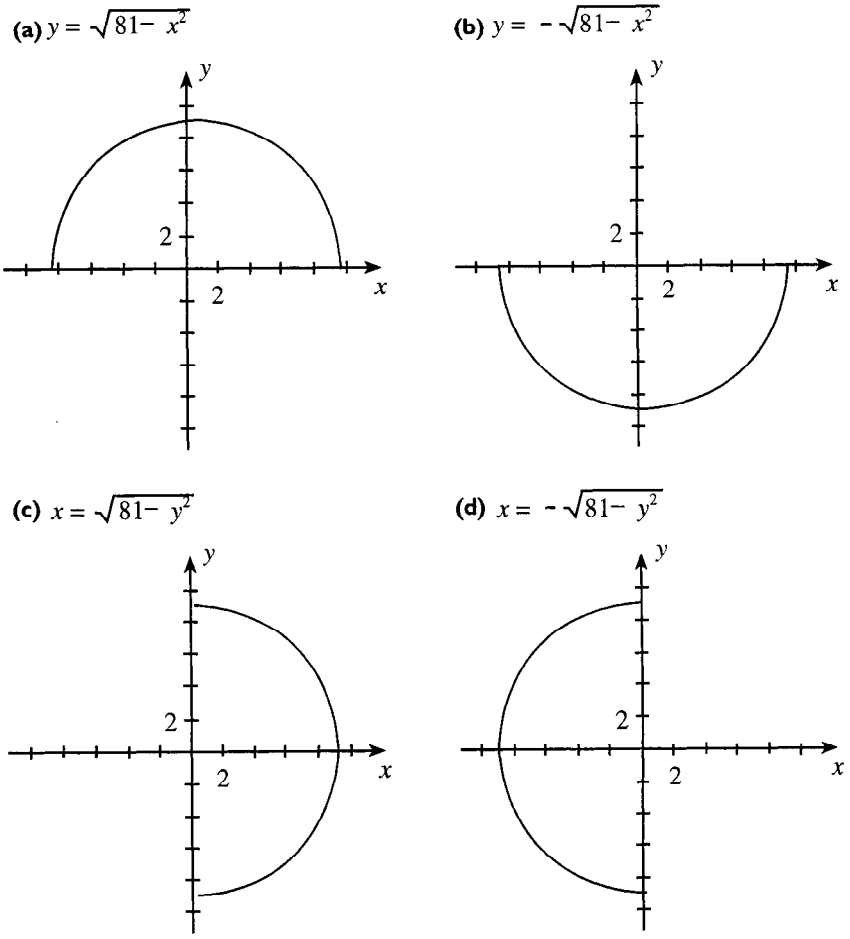
Como $\sqrt{81 - x^2} \geq 0$, entonces la mitad superior del círculo tiene la ecuación $y = \sqrt{81 - x^2}$ y la otra mitad, $y = -\sqrt{81 - x^2}$, como se ve en la Fig. 3.16(a) y (b).

Igualmente, para llegar a las ecuaciones de las mitades derecha e izquierda, despejamos x de $x^2 + y^2 = 81$, dejándola en términos de y. Así obtenemos

$$x = \pm\sqrt{81 - y^2}.$$

Ya que $\sqrt{81 - y^2} \geq 0$, entonces la mitad derecha del círculo tiene como ecuación $x = \sqrt{81 - y^2}$, y la izquierda, $x = -\sqrt{81 - y^2}$ como se ve en la Fig. 3.16(c) y (d).

FIGURA 3.16



Con frecuencia, los ingenieros, científicos y matemáticos emplean calculadoras o programas de cómputo para obtener gráficas. Estos aparatos tienen la capacidad de *ampliar* o *reducir* cualquier parte de una gráfica, permitiendo al *usuario* aproximar las abscisas en el origen, ordenadas en el origen, puntos máximos o mínimos, y demás aspectos importantes de la gráfica. Debido a la gran variedad de calculadoras que grafican y de programas de cómputo graficadores, no se explican los métodos para usar algún tipo en especial. Normalmente los manuales del usuario proporcionan las instrucciones adecuadas.

El término **graficadora** se refiere a una calculadora que hace gráficas o a una computadora con programas adecuados. El **cuadro visual** de una graficadora es solamente la parte del plano xy que aparece en la pantalla. Las fronteras o contornos (los lados) del rectángulo de visión se pueden ajustar en forma manual asignando un valor mínimo a x (Xmín), así como uno máximo (Xmáx), uno mínimo a y (Ymín) y uno máximo (Ymáx). En los ejemplos se usan con frecuencia

los valores normales (los que vienen integrados, *default*) para el rectángulo de visión. Si se desea una vista distinta de la gráfica, se usa la frase "*using* [Xmin, Xmax] *by* [Ymin,Ymax]" para indicar el cambio en el cuadro visual. Los valores normales para este rectángulo dependen de las dimensiones (en pixeles o elementos de imagen) de la pantalla de la graficadora.

Es esencial, en muchas aplicaciones, localizar los puntos en los cuales se cortan las gráficas de dos ecuaciones en x y y. Para determinar esos puntos en forma aproximada mediante una graficadora, normalmente se necesita despejar y de la ecuación para que quede expresada en términos de x. Por ejemplo, supóngase que una ecuación sea

$$4x^2 - 3x + 2y + 6 = 0.$$

Al despejar y se obtiene

$$y = \frac{-4x^2 + 3x - 6}{2} = -2x^2 + \frac{3}{2}x - 3.$$

A continuación se encuentra la gráfica de la ecuación *haciendo la asignación o transferencia*

$$Y_1 = -2x^2 + \tfrac{3}{2}x - 3$$

en la graficadora. (El símbolo Y_1 indica la *primera* ecuación, o el primer valor de y.) También se despeja y de la segunda ecuación, para que quede en términos de x, y se hace la asignación

$$Y_2 = \text{expresión en } x.$$

Al oprimir las teclas adecuadas se obtienen las gráficas, que se llaman gráficas de Y_1 y Y_2. A continuación se emplean las propiedades de ampliación y *trazo* para estimar las coordenadas de los puntos de intersección. Al hacerlo, en los ejemplos, por lo general bastan aproximaciones a una cifra decimal, a menos que se especifique otra cosa.

En el siguiente ejemplo se ilustra esta técnica con las gráficas estudiadas en los Ejemplos 1 y 2.

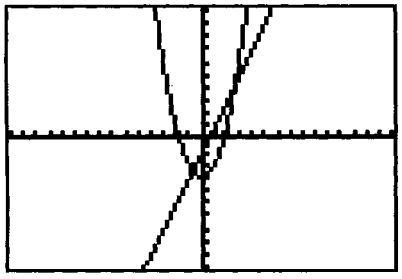
EJEMPLO 9 ***Estimación de los puntos de intersección de gráficas***

Use una graficadora para estimar los puntos de intersección de las gráficas de $y = 2x - 1$ y $y = x^2 - 3$.

SOLUCIÓN Primero se hacen las asignaciones

$$Y_1 = 2x - 1 \quad \text{y} \quad Y_2 = x^2 - 3.$$

FIGURA 3.17 [–15, 15] por [–10, 10]



Con un rectángulo de visión normal [–15, 15] por [–10, 10], se observa, en las gráficas Y_1 y Y_2 de la Fig. 3.17, que hay dos puntos de intersección: P_1 en el cuadrante I, y P_2 en el cuadrante III.

A continuación se mueve el cursor manualmente, o se usa el dispositivo de trazo (consulte su manual del usuario para tener las instrucciones específicas) para acercarse a P_1. Utilizando la posibilidad de ampliación, se estiman las coordenadas de $_1$, (2.7, 4.5).

Luego se puede reducir, o bien volver a trazar las gráficas originales, para ver P_2. Con la ampliación y el trazo se estima que (– 0.7, – 2.5) son coordenadas aproximadas de P_2.

EJEMPLO 10 ***Estimar puntos de intersección de gráficas***

Usar una graficadora para estimar los puntos de intersección de los círculos $x^2 + y^2 = 25$, y $x^2 + y^2 - 4y = 12$.

SOLUCIÓN De la primera ecuación se despeja y en términos de x, como sigue:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 && \text{ecuación dada} \\ y^2 &= 25 - x^2 && \text{se resta } x^2 \\ y &= \pm\sqrt{25 - x^2} && \text{se saca raíz cuadrada} \end{aligned}$$

Nótese que la última ecuación representa *dos* conjuntos de valores de y: $y = \sqrt{25 - x^2}$ (la mitad superior del círculo) y $y = -\sqrt{25 - x^2}$ (la mitad inferior). Para presentar el círculo completo en la graficadora, se hacen las siguientes asignaciones:

$$Y_1 = \sqrt{25 - x^2} \quad \text{y} \quad Y_2 = -Y_1$$

(Con frecuencia se asigna Y_2 en términos de Y_1, para evitar teclear en forma repetitiva, acelerando así el proceso de graficación, y eliminando errores posibles de captura.)

Llegado a este punto, el lector debe graficar Y_1 y Y_2, empleando la pantalla normal de visión. Si el círculo tiene forma elíptica, se debe consultar el manual del usuario para determinar qué dimensiones del rectángulo de visión producen una forma más circular.

Podemos considerar que la ecuación del segundo círculo $ay^2 + by + c = 0$ es cuadrática en y, si se reacomodan los términos como sigue:

$$y^2 - 4y + (x^2 - 12) = 0$$

Aplicando la fórmula cuadrática con $a = 1$, $b = -4$ y $c = x^2 - 12$ (se considera que $x^2 - 12$ es constante, ya que no contiene a la variable y) se tiene

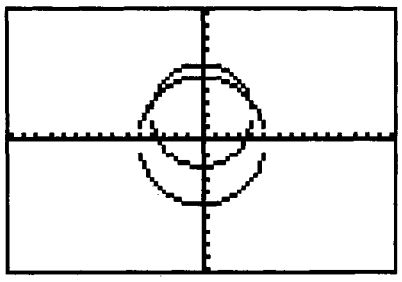
$$\begin{aligned} y &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(x^2 - 12)}}{2(1)} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(x^2 - 12)}}{2} \\ &= \frac{4 \pm 2\sqrt{4 - (x^2 - 12)}}{2} = 2 \pm \sqrt{16 - x^2}. \end{aligned}$$

(No es necesario simplificar la ecuación hasta donde sea posible, como se ha hecho, pero la forma simplificada es más fácil de capturar en una graficadora.)

A continuación se asignan los valores

$$Y_3 = \sqrt{16 - x^2}, \quad Y_4 = 2 + Y_3, \quad \text{y} \quad Y_5 = 2 - Y_3.$$

FIGURA 3.18 [–15, 15] por [–10, 10]



(Si no se dispone de Y_5 en la graficadora, consúltese el manual del usuario para obtener la información acerca de la presentación de más gráficas en la pantalla.) A continuación se escoge graficar a Y_1, Y_2, Y_4 y Y_5, y se obtiene una pantalla semejante a la de la Fig. 3.18. Hay dos puntos de intersección. Ampliando en el punto del primer cuadrante, se estima que las coordenadas son (3.8, 3.25). Como ambos círculos son simétricos con respecto al eje y, el otro punto de intersección es, aproximadamente, (– 3.8, 3.25).

Se debe hacer notar que las soluciones aproximadas que se determinaron en los Ejemplos 9 y 10 no satisfacen las ecuaciones dadas, debido a la imprecisión de los valores obtenidos mediante la gráfica. En el Cap. 6 se estudia cómo calcular los valores *exactos* para los puntos de intersección.

EJERCICIOS 3.2

Ejercicios 1–20: Grafique la ecuación y calcule los puntos de intersección con los ejes x y y.

1 $y = 2x - 3$ **2** $y = 3x + 2$

3 $y = -x + 1$ **4** $y = -2x - 3$

5 $y = -4x^2$ **6** $y = \frac{1}{3}x^2$

7 $y = 2x^2 - 1$ **8** $y = -x^2 + 2$

9 $x = \frac{1}{4}y^2$ **10** $x = -2y^2$

11 $x = -y^2 + 3$ **12** $x = 2y^2 - 4$

13 $y = -\frac{1}{2}x^3$ **14** $y = \frac{1}{2}x^3$

15 $y = x^3 - 8$ **16** $y = -x^3 + 1$

17 $y = \sqrt{x}$ **18** $y = \sqrt{-x}$

19 $y = \sqrt{x} - 4$ **20** $y = \sqrt{x - 4}$

Ejercicios 21 y 22: Emplee pruebas de simetría para determinar cuáles de las gráficas de los ejercicios son simétricas con respecto a (a) el eje y, (b) el eje x, y (c) el origen.

21 De los Ejercicios 1 a 20, los de número impar.

22 De los Ejercicios 1 a 20, los de número par.

Ejercicios 23 – 34: Trace la gráfica del círculo o semicírculo.

23 $x^2 + y^2 = 11$ **24** $x^2 + y^2 = 7$

25 $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$ **26** $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 4$

27 $(x + 3)^2 + y^2 = 16$ **28** $x^2 + (y - 2)^2 = 25$

29 $4x^2 + 4y^2 = 25$ **30** $9x^2 + 9y^2 = 1$

31 $y = -\sqrt{16 - x^2}$ **32** $y = \sqrt{4 - x^2}$

33 $x = \sqrt{9 - y^2}$ **34** $x = -\sqrt{25 - y^2}$

Ejercicios 35 – 46: Deduzca una ecuación del círculo que satisfaga las condiciones pedidas.

35 Centro $C(2, -3)$, radio 5

36 Centro $C(-4, 1)$, radio 3

37 Centro $C(\frac{1}{4}, 0)$, radio $\sqrt{5}$

38 Centro $C(\frac{3}{4}, -\frac{2}{3})$, radio $3\sqrt{2}$

39 Centro $C(-4, 6)$, que pase por $P(1, 2)$

40 Centro en el origen, que pase por $P(4, -7)$

41 Centro $C(-3, 6)$, que sea tangente al eje y

42 Centro $C(4, -1)$, que sea tangente al eje x

43 Tangente a los dos ejes, centro en el segundo cuadrante, y que tenga radio 4

44 Tangente a los dos ejes, centro en el cuarto cuadrante, y que tenga radio 3

45 Que los extremos de un diámetro estén en $A(4, -3)$ y $B(-2, 7)$

46 Que los extremos de un diámetro estén en $A(-5, 2)$ y $B(3, 6)$

Ejercicios 47 – 56: Determine el centro y el radio del círculo cuya ecuación se presenta.

47 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 36 = 0$

48 $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 37 = 0$

49 $x^2 + y^2 + 4y - 117 = 0$

50 $x^2 + y^2 - 10x + 18 = 0$

51 $2x^2 + 2y^2 - 12x + 4y - 15 = 0$

52 $9x^2 + 9y^2 + 12x - 6y + 4 = 0$

53 $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$

54 $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = 0$

55 $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 19 = 0$

56 $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 16 = 0$

Ejercicios 57 – 60: Deduzca las ecuaciones de las mitades superior, inferior, izquierda y derecha, del círculo cuya ecuación se presenta.

57 $x^2 + y^2 = 36$ **58** $(x + 3)^2 + y^2 = 64$

59 $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 49$ **60** $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 4$

Ejercicios 61 y 62: Determine si el punto P se encuentra dentro, fuera, o sobre el círculo con centro en C, y de radio r.

61 (a) $P(2, 3)$, $C(4, 6)$, $r = 4$

(b) $P(4, 2)$, $C(1, -2)$, $r = 5$

(c) $P(-3, 5)$, $C(2, 1)$, $r = 6$

62 (a) $P(3, 8)$, $C(-2, -4)$, $r = 13$

(b) $P(-2, 5)$, $C(3, 7)$, $r = 6$

(c) $P(1, -2)$, $C(6, -7)$, $r = 7$

Ejercicios 63 y 64: Para el círculo dado, calcule (a) las intersecciones con el eje x, y (b) las ordenadas al origen.

63 $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$

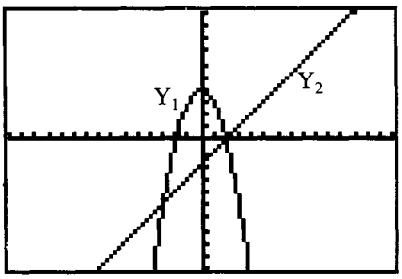
64 $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 13 = 0$

65 Deduzca la ecuación del círculo que sea concéntrico a $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$, y además que pase por $P(2, 6)$.

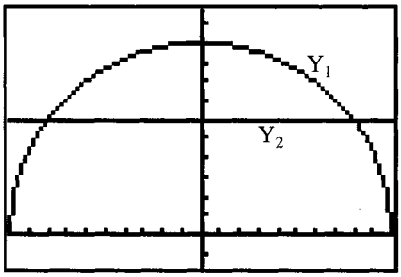
66 ***Alcances de las emisiones de radio*** La señal de una radiodifusora tiene un alcance circular de 50 mi. Otra estación de radio, que está a 100 mi al oriente, y a 80 al norte de la primera, tiene un alcance de 80 mi. ¿Hay zonas en las que se pueden recibir las señales de ambas estaciones? Explique su respuesta.

Ejercicios 67–70: La figura representa la pantalla de una graficadora; Y_1 y Y_2 son los valores asignados y para dos ecuaciones en x. Exprese, en forma de intervalo, los valores de x tales que $Y_1 < Y_2$ para el rectángulo de visión indicado. Suponga que los valores x y y de cada punto de intersección son enteros.

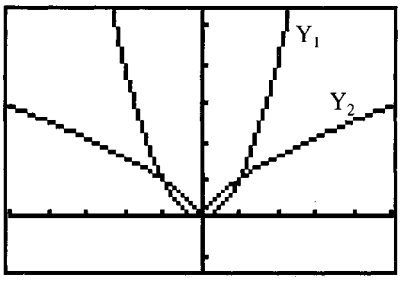
67



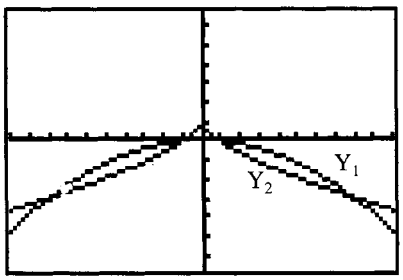
68



69



70



C **Ejercicios 71 y 72: Grafique la ecuación y estime las intersecciones con el eje x.**

71 $y = x^3 - \frac{9}{10}x^2 - \frac{43}{25}x + \frac{24}{25}$

72 $y = x^4 + 0.85x^3 - 2.46x^2 - 1.07x + 0.51$

C **Ejercicios 73–76: Grafique las dos ecuaciones en el mismo plano de coordenadas, y estime las coordenadas de sus puntos de intersección.**

73 $y = x^3 + x$; $x^2 + y^2 = 1$

74 $y = 3x^4 - \frac{3}{2}$; $x^2 + y^2 = 1$

75 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$; $(x - \frac{5}{4})^2 + y^2 = 1$

76 $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{4}$; $(x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = 1$

3.3 RECTAS

Uno de los conceptos básicos en geometría es el de *línea recta*, o simplemente, *recta*. En esta sección el estudio se limita a las rectas que están en un plano de coordenadas. Esto permitirá aplicar métodos algebraicos para estudiar sus propiedades. Dos de los objetivos principales serán:

1. Dada una recta l en un plano de coordenadas, deducir una ecuación cuya gráfica corresponda a l.

2. Dada una ecuación de una recta l en un plano coordenado, graficar la ecuación.

El siguiente concepto es fundamental en el estudio de las líneas rectas.

Definición de pendiente de una recta

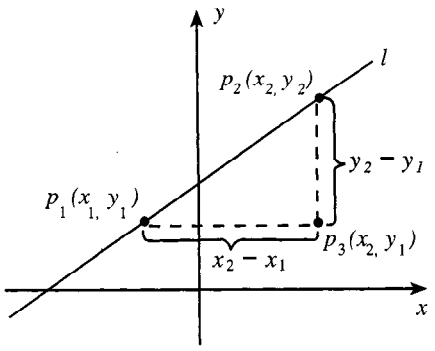
Sea l una recta no paralela al eje y, y sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ puntos distintos en l. La **pendiente** m de l es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

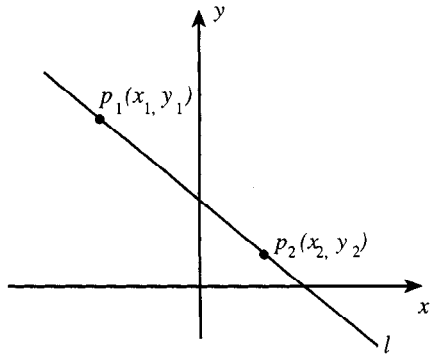
Si l es paralela al eje y, entonces la pendiente de l no está definida.

FIGURA 3.19

(a) Pendiente positiva (la línea sube)



(b) Pendiente negativa (la línea baja)



En la Fig. 3.19 se muestran dos puntos cualesquiera, P_1 y P_2, sobre una recta l. El numerador, $y_2 - y_1$, de la fórmula de m, es el cambio vertical en el sentido de P_1 a P_2, y puede ser positivo, negativo o cero. El denominador, $x_2 - x_1$, es el cambio horizontal de P_1 a P_2, y puede ser positivo o negativo, pero nunca cero, porque l no es paralela al eje y si existe inclinación. En la Fig. 3.19(a) la pendiente es positiva, y se dice que la recta *asciende*. En la Fig. 3.19(b) la pendiente es negativa, y la recta *desciende*.

Para determinar la pendiente de una recta, no importa qué punto sea P_1 y cuál sea P_2, ya que

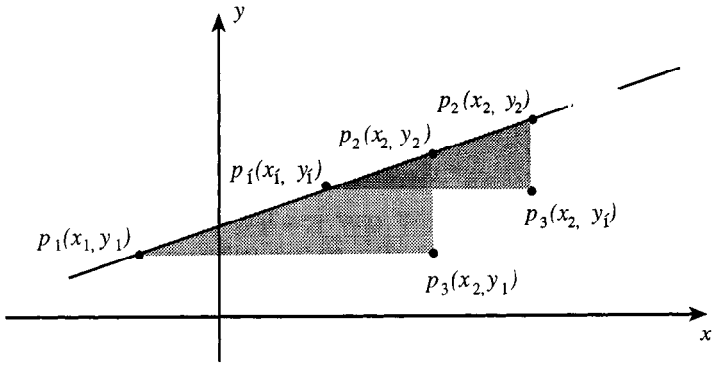
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{(-1)}{(-1)} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

Si se identifican los puntos de modo que $x_1 < x_2$, como en la Fig. 3.19, entonces $x_2 - x_1 > 0$ y, por consiguiente, la pendiente será positiva, negativa o cero, dependiendo de si $y_2 > y_1$, $y_2 < y_1$, o bien $y_2 = y_1$, respectivamente.

La definición de pendiente no depende de los dos puntos que se seleccionen en l. Si se usan otros puntos, $P_1'(x_1', y_1')$ y $P_2'(x_2', y_2')$,entonces, como en la Fig. 3.20, el triángulo con vértices P_1', P_2' y $P_3'(x_2', y_1')$ es semejante al triángulo con vértices P_1, P_2 y $P_3(x_2, y_1)$. Como son iguales las relaciones de lados correspondientes en triángulos semejantes,

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'}.$$

FIGURA 3.20



EJEMPLO 1 ***Cálculo de pendientes***

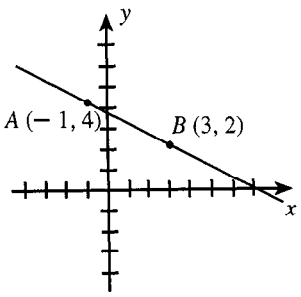
Graficar la recta que pasa por cada par de puntos, y calcular su pendiente:

(a) $A(-1, 4)$ y $B(3, 2)$ **(b)** $A(2, 5)$ y $B(-2, -1)$
(c) $A(4, 3)$ y $B(-2, 3)$ **(d)** $A(4, -1)$ y $B(4, 4)$

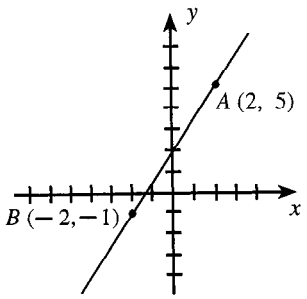
SOLUCIÓN En la Fig. 3.21 se muestran las rectas. Con la definición se determina la pendiente de cada una.

FIGURA 3.21

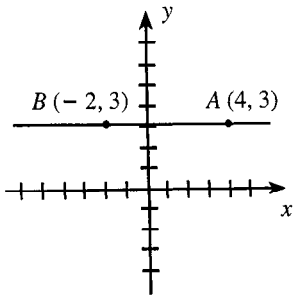
(a) $m = -\frac{1}{2}$



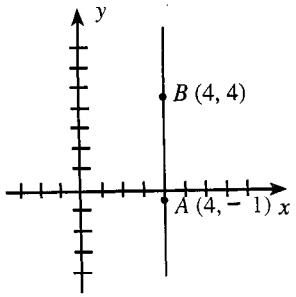
(b) $m = \frac{3}{2}$



(c) $m = 0$



(d) m indefinida



(a) $$m = \frac{2-4}{3-(-1)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

(b) $$m = \frac{5-(-1)}{2-(-2)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

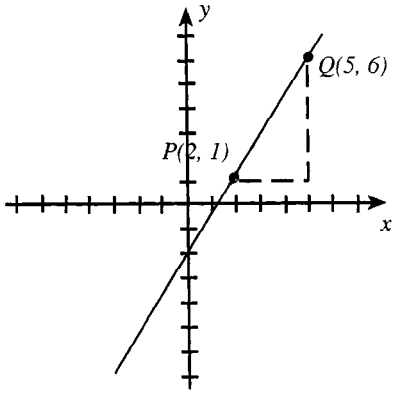
(c) $$m = \frac{3-3}{-2-4} = \frac{0}{-6} = 0$$

(d) La pendiente es indefinida, porque la recta es paralela al eje y. Nótese que si se usa la fórmula de m, el denominador es cero.

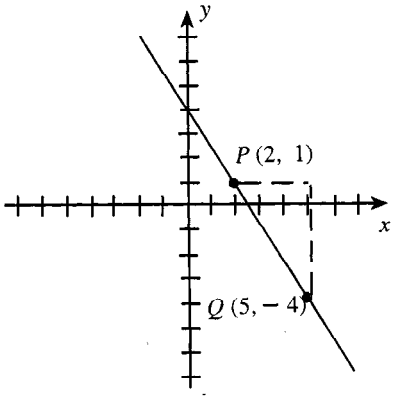
ESCUELA POLIT

FIGURA 3.22

(a) $m = \frac{5}{3}$



(b) $m = -\frac{5}{3}$



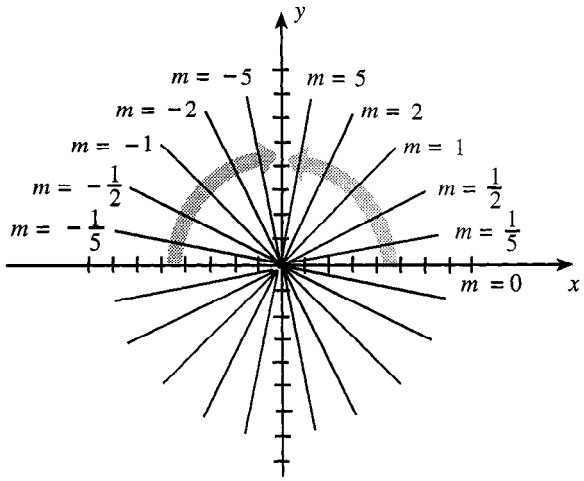
EJEMPLO 2 ***Trazo de una recta de pendiente dada***

Trazar una recta que pase por $P(2, 1)$, y que tenga
(a) pendiente $\frac{5}{3}$ **(b)** pendiente $-\frac{5}{3}$

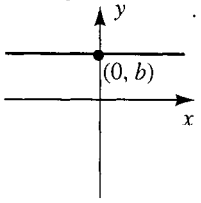
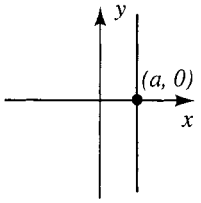
SOLUCIÓN Si la pendiente de una recta es a/b, y b es positivo, entonces por cada cambio de b unidades en la dirección horizonal, la recta sube o baja $|a|$ unidades, dependiendo de si a es positiva o negativa.
(a) Si $P(2, 1)$ está en la recta y $m = \frac{5}{3}$, se puede obtener otro punto de la línea partiendo de P y desplazándose 3 unidades hacia la derecha, y 5 unidades hacia arriba. Con ello se obtiene el punto $Q(5, 6)$, y la recta se determina como en la Fig. 3.22(a).
(b) Si $P(2, 1)$ está en la recta, y $m = -\frac{5}{3}$, al recorrer 3 unidades hacia la derecha y 5 hacia abajo, se obtiene la recta que pasa por $Q(5, -4)$, como se ve en la Fig. 3.22(b).

El diagrama de la Fig. 3.23 indica las pendientes de varias rectas que pasan por el origen. La recta que está en el eje x tiene pendiente $m = 0$. Si esa recta se hace girar con respecto a O en sentido contrario al de las manecillas del reloj, como indica la flecha de color, la pendiente es positiva y aumenta, alcanzando el valor 1 cuando la recta biseca al primer cuadrante; continúa aumentando a medida que la recta se acerca al eje y. Si se hace girar la recta de pendiente $m = 0$ en sentido *contrario al de las manecillas del reloj* (como indica la flecha negra), la pendiente es negativa y alcanza el valor -1 cuando biseca el segundo cuadrante; aumenta y se hace negativa a medida que se acerca al eje y.

FIGURA 3.23

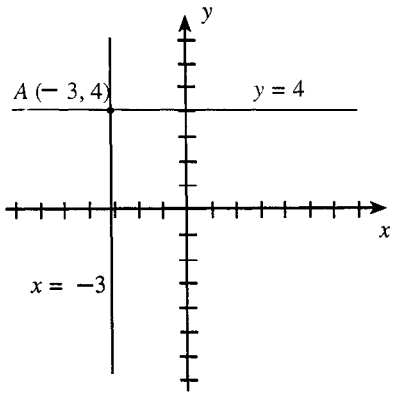


Las rectas que son horizontales o verticales tienen ecuaciones sencillas, como se ve en la tabla siguiente.

Terminología	Definición	Gráfica	Ecuación
Recta horizontal	Una recta paralela al eje x		$y = b$
Recta vertical	Una recta paralela al eje y		$x = a$

Un error que se comete con frecuencia es considerar que la gráfica de $y = b$ consiste tan sólo en el punto único $(0, b)$. Si se expresa la ecuación en la forma $0 \cdot x + y = b$, se observa que el valor de x no importa; por consiguiente, la gráfica de $y = b$ está formada por los puntos (x, b) para cada x; por consiguiente, es una recta horizontal. Igualmente, la gráfica de $x = a$ es la recta vertical formada por todos los puntos (a, y), donde y es un número real.

FIGURA 3.24

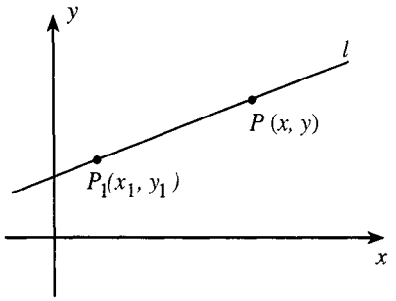


EJEMPLO 3 ***Deducción de ecuaciones de rectas horizontales y verticales***

Deducir una ecuación de la recta que pase por $A(-3, 4)$, que sea paralela a **(a)** el eje x **(b)** el eje y

SOLUCIÓN En la Fig. 3.24 se presentan las dos rectas. Como se indica en la tabla de anterior, las ecuaciones son $y = 4$ para el inciso (a), y $x = -3$ para el inciso (b).

FIGURA 3.25



A continuación se deduce la ecuación de una recta l que pasa por un punto, $P_1(x_1, y_1)$, y cuya pendiente es m. Si $P(x, y)$ es cualquier punto para el cual $x \neq x_1$ (véase Fig. 3.25), entonces P está en l si y sólo si la recta que pasa por P_1 y P es m; es decir, si

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m.$$

Esta ecuación se puede escribir en la siguiente forma:

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Nótese que (x_1, y_1) es una solución de la última ecuación y, por consiguiente, los puntos de l son exactamente los puntos que corresponden a las soluciones. A esta ecuación de l se le llama **forma de punto y pendiente.**

Forma de punto y pendiente, de la ecuación de una recta

La ecuación de la recta cuya pendiente es m, y que pasa por el punto (x_1, y_1), es

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

La forma de punto y pendiente sólo es una de las posibilidades de la ecuación de una recta. Hay un número ilimitado de ecuaciones equivalentes. A veces se simplifica la ecuación obtenida empleando la forma de punto y pendiente para tener

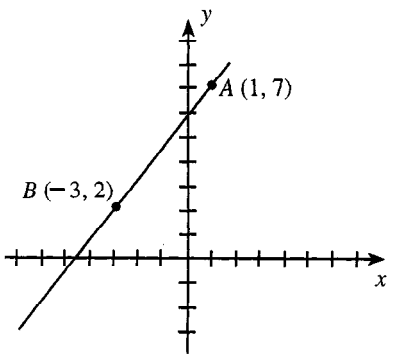
$$ax + by = c \qquad \text{o bien} \qquad ax + by + d = 0,$$

en la cual a, b y c son enteros sin factor común, $a > 0$, y $d = -c$.

EJEMPLO 4 *Deducción de la ecuación de una recta que pasa por dos puntos*

Deducir la ecuación de una recta que pasa por $A(1, 7)$ y $B(-3, 2)$.

FIGURA 3.26



SOLUCIÓN La recta se presenta en la Fig. 3.26. La fórmula de la pendiente da como resultado

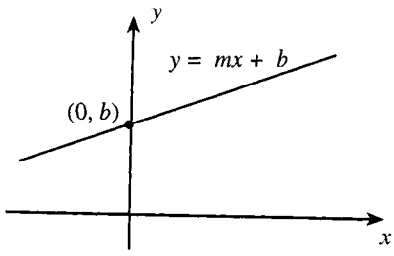
$$m = \frac{7 - 2}{1 - (-3)} = \frac{5}{4}.$$

Se pueden usar las coordenadas de A o de B como las de (x, y) en la forma de punto y pendiente. Si se usan las de $A(1, 7)$, se tiene

$y - 7 = \frac{5}{4}(x - 1)$	forma de punto y pendiente
$4(y - 7) = 5(x - 1)$	se multiplica por 4
$4y - 28 = 5x - 5$	se multiplican los factores
$-5x + 4y = 23$	se resta $5x$ y se suma 28
$5x - 4y = -23$	se multiplica por -1

La última ecuación es una de las formas deseadas de la ecuación de una recta. Otra es $5x - 4y + 23 = 0$.

FIGURA 3.27



La forma de punto y pendiente de la ecuación de una recta puede expresarse como $y = mx - mx_1 + y_1$, que es de la forma

$$y = mx + b$$

donde $b = -mx_1 + y_1$. El número real b es la ordenada en el origen de la gráfica, como se ve en la Fig. 3.27. Como la ecuación $y = mx + b$ presenta la pendiente m y la ordenada en el origen b de l, se le llama **ecuación de pendiente y ordenada en el origen**. Inversamente, si se parte de $y = mx + b$, se puede escribir

$$y - b = m(x - 0).$$

Si se compara esta ecuación con la forma de punto y pendiente, se observa que la gráfica es una recta con pendiente m, que pasa por el punto $(0, b)$. Con ello se obtiene el siguiente resultado.

Ecuación de la recta dada su pendiente y su ordenada en el origen

> La gráfica de $y = mx + b$ es una recta que tiene pendiente m y ordenada en el origen b.

EJEMPLO 5 ***Expresar una ecuación en la forma de pendiente y ordenada en el origen***

Expresar la ecuación $2x - 5y = 8$ en la forma indicada (o **simplificada**)

SOLUCIÓN El objetivo es despejar y de la ecuación dada para obtener la expresión $y = mx + b$. Se procede como sigue:

$$2x - 5y = 8 \qquad \text{ecuación dada}$$

$$-5y = -2x + 8 \qquad \text{se resta } 2x$$

$$y = \left(\frac{-2}{-5}\right)x + \left(\frac{8}{-5}\right) \qquad \text{se divide entre } -5$$

$$y = \tfrac{2}{5}x + \left(-\tfrac{8}{5}\right) \qquad \text{ecuación equivalente}$$

La última ecuación es la solicitada, $y = mx + b$, donde la pendiente es $m = \frac{2}{5}$, y la ordenada en el origen es $b = -\frac{8}{5}$.

De acuerdo con la forma en cuestión, toda recta es una gráfica de una ecuación

$$ax + by = c,$$

en la cual a, b y c son números reales; a y b no son cero en forma simultánea. A esta ecuación se le llama **ecuación lineal** en x y y. A la inversa, se muestra que la gráfica de $ax + by = c$, cuando a y b no son cero al mismo tiempo, siempre es una recta. Si $b \neq 0$, se puede despejar y, y se obtiene

$$y = \left(-\frac{a}{b}\right)x + \frac{c}{b},$$

la cual, según la forma simplificada, es la ecuación de una recta cuya pendiente es $-a/b$, y cuya ordenada en el origen es c/b. Si $b = 0$, pero $a \neq 0$, se despeja x, para obtener $x = c/a$, que es la ecuación de una recta vertical con abscisa al origen c/a. Este análisis establece el siguiente resultado.

Forma general de la ecuación de una recta

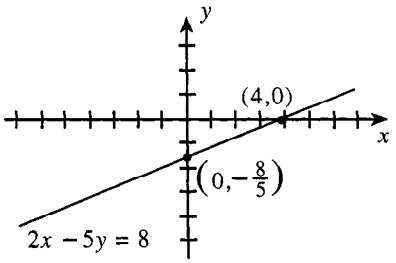
> La gráfica de una ecuación lineal, $ax + by = c$, es una recta, e inversamente, se tiene que toda recta es la gráfica de una ecuación lineal.

Para simplificar, se emplea la terminología *la recta* $ax + by = c$, y no, *la recta cuya ecuación es* $ax + by = c$.

EJEMPLO 6 *Gráfica de una ecuación lineal*

Trazar la gráfica de $2x - 5y = 8$.

FIGURA 3.28



SOLUCIÓN De acuerdo con la descripción anterior, se sabe que la gráfica es una recta, de modo que basta determinar dos puntos en dicha representación. Se localizan las intersecciones con los ejes x y y, sustituyendo, respectivamente, $y = 0$ y $x = 0$ en $2x - 5y = 8$.

intersección con el eje x: Si $y = 0$ entonces $2x = 8$, o sea, $x = 4$.

intersección con el eje y: Si $x = 0$, entonces $-5y = 8$, o sea, $y = -\frac{8}{5}$.

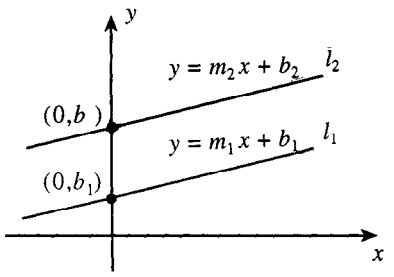
Se localizan los puntos de coordenadas (4, 0) y $(0, -\frac{8}{5})$, y al trazar una recta que pase por ellos, se obtiene la gráfica de la Fig. 3.28.

El siguiente teorema especifica la relación entre rectas paralelas (las que se hallan en un plano y no se cortan), y su pendiente.

Teorema de la pendiente de rectas paralelas

> Dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

FIGURA 3.29



DEMOSTRACIÓN Sean l_1 y l_2 rectas distintas, cuyas pendientes sean m_1 y m_2, respectivamente. Si las ordenadas en el origen son b_1 y b_2 (véase Fig. 3.29), las ecuaciones de esas rectas serán

$$y = m_1x + b_1 \qquad \text{y} \qquad y = m_2x + b_2.$$

Las rectas se intersecan en algún punto (x, y) si y sólo si los valores de y son iguales para alguna x; esto es, si

$$m_1x + b_1 = m_2x + b_2,$$

o sea,

$$(m_1 - m_2)x = b_2 - b_1.$$

x se puede despejar de esta última ecuación si y sólo si $m_1 - m_2 \neq 0$. Hemos demostrado que las rectas l_1 y l_2 se cortan solamente cuando $m_1 \neq m_2$. Por lo tanto, *no* se intersecan (son paralelas) si y sólo si $m_1 = m_2$. ■

EJEMPLO 7 *Hallar la ecuación de una recta paralela a otra*

Obtener la ecuación de la recta que pase por $P(5, -7)$, y sea paralela a la recta $6x + 3y = 4$.

SOLUCIÓN Primero expresaremos la ecuación dada en su forma simplificada:

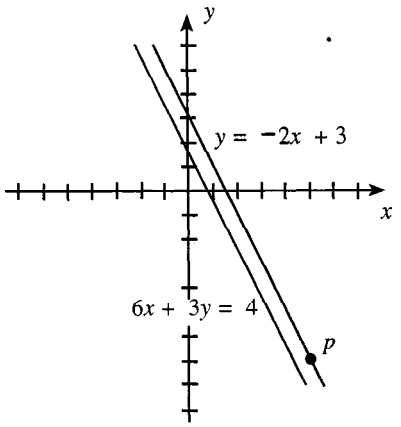
$$6x + 3y = 4 \qquad \text{ecuación dada}$$

$$3y = -6x + 4 \qquad \text{se resta } 6x$$

$$y = -2x + \tfrac{4}{3} \qquad \text{se divide entre 3.}$$

(continúa)

FIGURA 3.30



La última ecuación está en la forma $y = mx + b$, su pendiente es $m = -2$ y la ordenada en el origen es $\frac{4}{3}$. Como las rectas paralelas tienen la misma pendiente, la buscada tiene también pendiente –2. Con el punto P (5, –7) se tiene lo siguiente.

$$y - (-7) = -2(x - 5) \quad \text{forma punto-pendiente}$$
$$y + 7 = -2x + 10 \quad \text{se simplifica}$$
$$y = -2x + 3 \quad \text{se resta 7}$$

Esta última ecuación está en la forma simplificada, y muestra que la paralela que se ha encontrado tiene ordenada en el origen 3. Esta recta y la dada se ven en la Fig. 3.30.

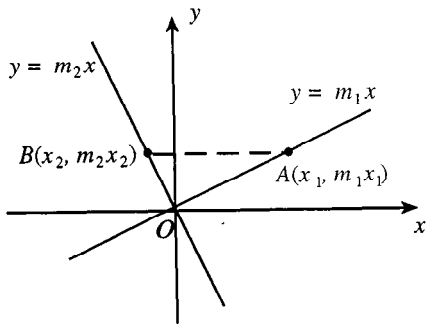
El siguiente teorema trata sobre las **rectas perpendiculares** (las que se cortan en ángulo recto).

Teorema de las pendientes de rectas perpendiculares

Dos rectas cuyas pendientes son m_1 y m_2, son perpendiculares si y sólo si

$$m_1 m_2 = -1$$

FIGURA 3.31



DEMOSTRACIÓN Para simplificar, se tomará el caso especial de dos rectas que se intersecan en el origen O, como se ve en la Fig. 3.31. Sus ecuaciones son $y = m_1 x$ y $y = m_2 x$. Si, como en la figura, se escogen los puntos $A(x_1, m_1 x_1)$ y $B(x_2, m_2 x_2)$ distintos de O en las rectas, entonces éstas serán perpendiculares si y sólo si el ángulo AOB es recto. Por el teorema de Pitágoras, se tiene que dicho ángulo es de 90° solamente cuando

$$[d(A, B)]^2 = [d(O, B)]^2 + [d(O, A)]^2$$

o bien, según la fórmula de la distancia,

$$(x_2 - x_1)^2 + (m_2 x_2 - m_1 x_1)^2 = x_2^2 + (m_2 x_2)^2 + x_1^2 + (m_1 x_1)^2.$$

Elevando los términos al cuadrado, simplificando y factorizando, se tiene

$$-2m_1 m_2 x_1 x_2 - 2x_1 x_2 = 0$$
$$-2x_1 x_2 (m_1 m_2 + 1) = 0.$$

Ya que tanto x_1 como x_2 son distintos de cero a la vez, se dividen ambos miembros entre $-2x_1 x_2$, con lo cual se obtiene $m_1 m_2 + 1 = 0$. Así que las rectas son perpendiculares si y sólo si $m_1 m_2 = -1$.

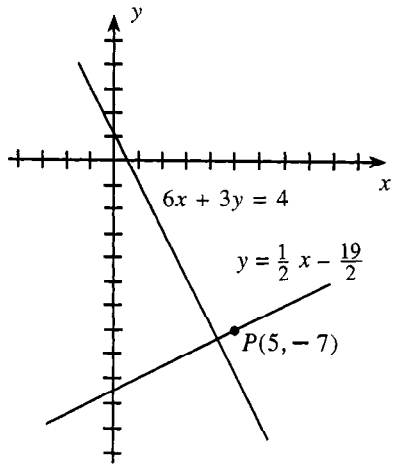
El mismo tipo de demostración se puede efectuar si las rectas se intersecan en *cualquier* punto (a, b). ■

Una manera cómoda de recordar las condiciones de las pendientes de rectas perpendiculares es notar que m_1 y m_2 deben ser *recíprocas negativas* entre sí; es decir, que $m_1 = -1/m_2$, y que $m_2 = -1/m_1$.

EJEMPLO 8 ***Encontrar la ecuación de una recta perpendicular a una recta dada***

Hallar la forma simplificada de la ecuación de la recta que pase por $P(5, -7)$ y sea perpendicular a la recta $6x + 3y = 4$.

FIGURA 3.32



SOLUCIÓN En el Ejemplo 7 se estudió la recta $6x + 3y = 4$, y se encontró que su pendiente es -2. Por lo tanto, la pendiente de la recta deseada es el recíproco negativo, $-[1/(-2)]$; es decir $\frac{1}{2}$. Con $P(5, -7)$, se tiene lo siguiente:

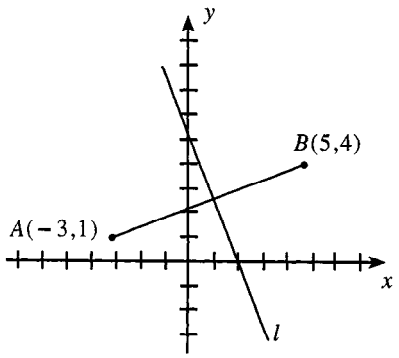
$$y - (-7) = \tfrac{1}{2}(x - 5) \quad \text{forma punto y pendiente}$$
$$y + 7 = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{5}{2} \quad \text{se simplifica}$$
$$y = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{19}{2} \quad \text{se resta 7}$$

Esta última ecuación está en forma simplificada e indica que la recta perpendicular tiene una ordenada en el origen de $-\frac{19}{2}$. Esta recta y la dada se muestran en la Fig. 3.32.

EJEMPLO 9 ***Hallar la ecuación de una mediatriz***

Dados $A(-3, 1)$ y $B(5, 4)$, encontrar la ecuación de la mediatriz del segmento de recta AB.

FIGURA 3.33



SOLUCIÓN El segmento AB y su mediatriz l se ven en la Fig. 3.33, en la cual M es el punto medio de AB. Se calcula lo siguiente:

Coordenadas de M: $\left(\dfrac{-3+5}{2}, \dfrac{1+4}{2}\right) = \left(1, \dfrac{5}{2}\right)$ fórmula del punto medio

Pendiente de AB: $\dfrac{4-1}{5-(-3)} = \dfrac{3}{8}$ fórmula de la pendiente

Pendiente de l: $-\dfrac{1}{\frac{3}{8}} = -\dfrac{8}{3}$ recíproco negativo de $\frac{3}{8}$

Con el punto $M(1, \frac{5}{2})$ y la pendiente $-\frac{8}{3}$, se obtienen a continuación las ecuaciones equivalentes de l:

$$y - \tfrac{5}{2} = -\tfrac{8}{3}(x - 1) \quad \text{forma de punto y pendiente}$$
$$6y - 15 = -16(x - 1) \quad \text{se multiplica por el mínimo común divisor, 6}$$
$$6y - 15 = -16x + 16 \quad \text{por multiplicación}$$
$$16x + 6y = 31 \quad \text{se suman } 16x \text{ y } 15$$

Se dice que dos variables, x y y, están **linealmente relacionadas** si $y = ax + b$, donde a y b son números reales y $a \neq 0$. Las relaciones lineales entre variables se presentan con frecuencia en problemas de aplicación. El ejemplo que sigue es un caso.

EJEMPLO 10 ***Relación entre temperatura del aire y altitud***

La relación entre la temperatura del aire, T (en °F) y la altitud h (en pies sobre el nivel del mar), es aproximadamente lineal para $0 \le h \le 20\,000$. Si la temperatura al nivel citado es 60 °F, un aumento de 5 000 pies hace que la temperatura ambiente baje en unos 18 °F.

(a) Expresar T en términos de h, y graficar hT en un sistema de coordenadas.

(b) Calcular la temperatura aproximada del aire a una altitud de 15 000 pies.

(c) Calcular la altitud aproximada a la cual la temperatura es 0 °F.

SOLUCIÓN

(a) Si hay una relación lineal entre T y h, entonces

$$T = ah + b$$

en la cual a y b son constantes. De acuerdo con los datos, se observa que $T = 60$ °F cuando $h = 0$ pies (el nivel del mar). Por lo tanto, la intersección con el eje T es 60, y la temperatura T a cualquier altitud h, es

$$T = ah + 60.$$

Nuevamente, según los datos, se observa que la temperatura $T = 60 - 18 = 42$ °F, cuando $h =$ 5 000 pies. Por consiguiente,

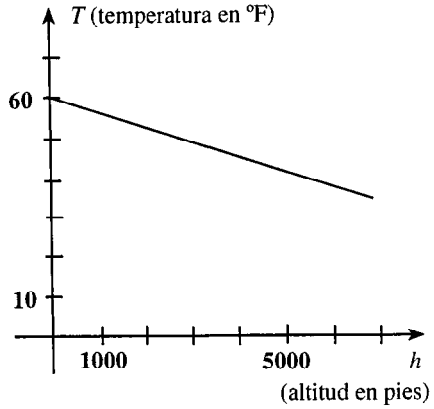
$$42 = a(5000) + 60 \qquad \text{sean } T = 42 \text{ y } h = 5\,000$$

$$-18 = 5000a \qquad \text{se resta 60}$$

$$a = -\tfrac{18}{5000} = -\tfrac{9}{2500} \qquad \text{se divide entre 5 000}$$

Sustituyendo a en $T = ah + 60$, se llega a la siguiente fórmula para T:

FIGURA 3.34



La gráfica aparece en la Fig. 3.34, con distintas escalas en los ejes.

(b) Con esta última fórmula de T obtenida en el inciso (a), se ve que la temperatura, en °F, cuando $h = 15\,000$, es

$$T = -\tfrac{9}{2500}(15{,}000) + 60 = -54 + 60 = 6.$$

(c) Para calcular la altitud h que corresponde a $T = 0$ °F, se procede como sigue:

$$T = -\tfrac{9}{2500}h + 60 \qquad \text{de la parte (a)}$$

$$0 = -\tfrac{9}{2500}h + 60 \qquad \text{sea } T = 0$$

$$\tfrac{9}{2500}h = 60 \qquad \text{sumar } \tfrac{9}{2500}h$$

$$h = 60 \cdot \tfrac{2500}{9} \qquad \text{multiplicar por } \tfrac{2500}{9}$$

$$h = \frac{50{,}000}{3} \approx 16{,}667 \text{ pies} \qquad \text{simplificar y aproximar}$$

En el Cap. 6 se estudian métodos algebraicos para determinar el punto de intersección de dos rectas no paralelas. En algunas aplicaciones, los valores que se obtienen en ecuaciones de rectas son irracionales o representan datos aproximados. En tales casos puede bastar la estimación de las coordenadas del punto con una calculadora que grafique, como en el ejemplo siguiente.

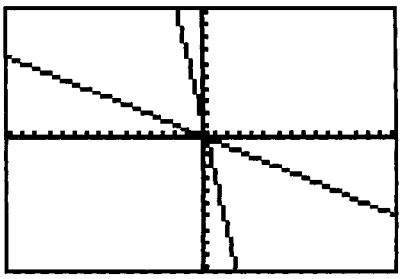
EJEMPLO 11 ***Estimación del punto de intersección de dos rectas***

Supóngase que se obtuvieron las siguientes rectas a partir de datos aproximados:

$$1.018x + 0.230y = 0.447$$

$$1.847x + 4.538y = 1.414$$

FIGURA 3.35 [–15, 15] por [–10, 10]



Con una calculadora que grafique, estimar las coordenadas del punto de intersección, con aproximación de dos cifras decimales.

SOLUCIÓN Despejando y de cada ecuación se obtiene

$$y = (0.447 - 1.018x)/0.230,$$

$$y = (1.414 - 1.847x)/4.538.$$

A continuación se asignan las expresiones anteriores de y a Y_1 y Y_2, respectivamente. En la pantalla aparece una gráfica semejante a la Fig. 3.35, donde se muestra que hay un punto de intersección cerca del origen. Con las funciones de trazar y amplificar se obtiene la solución aproximada (0.41, 0.15).

En análisis estadístico se encuentran problemas semejantes al anterior, cuando se aplica el *método de mínimos cuadrados* para determinar una *recta* (o *línea*) *de regresión lineal.*

EJERCICIOS 3.3

Ejercicios 1 – 6: Grafique la recta que pasa por A y B, y calcule su pendiente m.

1 $A(-3, 2)$, $B(5, -4)$

2 $A(4, -1)$, $B(-6, -3)$

3 $A(2, 5)$, $B(-7, 5)$

4 $A(5, -1)$, $B(5, 6)$

5 $A(-3, 2)$, $B(-3, 5)$

6 $A(4, -2)$, $B(-3, -2)$

Ejercicios 7–10: Con las pendientes, demuestre que los puntos son vértices del polígono mencionado.

7 $A(-3, 1)$, $B(5, 3)$, $C(3, 0)$, $D(-5, -2)$; paralelogramo

8 $A(2, 3)$, $B(5, -1)$, $C(0, -6)$, $D(-6, 2)$; trapecio

9 $A(6, 15)$, $B(11, 12)$, $C(-1, -8)$, $D(-6, -5)$; rectángulo

10 $A(1, 4)$, $B(6, -4)$, $C(-15, -6)$; triángulo rectángulo

11 Si tres vértices consecutivos de un paralelogramo son $A(-1, -3)$, $B(4, 2)$ y $C(-7, 5)$, localice el cuarto.

12 Sean $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ y $D(x_4, y_4)$ los vértices de un cuadrilátero arbitrario. Demuestre que los segmentos de recta que unen los puntos medios de los lados adyacentes forman un paralelogramo.

Ejercicios 13 y 14: Grafique $y = mx$ para los valores dados de m.

13 $m = 3, -2, \frac{2}{3}, -\frac{1}{4}$ **14** $m = 5, -3, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$

Ejercicios 15 y 16: Trace la recta que pasa por P para cada valor de m.

15 $P(3, 1)$; $m = \frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{5}$

16 $P(-2, 4)$; $m = 1, -2, -\frac{1}{2}$

Ejercicios 17 y 18: Trace las gráficas de las rectas en el mismo plano de coordenadas.

17 $y = x + 3$, $y = x + 1$, $y = -x + 1$

18 $y = -2x - 1$, $y = -2x + 3$, $y = \frac{1}{2}x + 3$

Ejercicios 19–30: Obtenga una forma general de la ecuación de la recta que pasa por el punto A y que satisfaga la condición dada.

19 $A(5, -2)$
- **(a)** paralela al eje y
- **(b)** perpendicular al eje y.

20 $A(-4, 2)$
- **(a)** paralela al eje x
- **(b)** perpendicular al eje x.

21 $A(5, -3)$; pendiente -4

22 $A(-1, 4)$; pendiente $\frac{2}{3}$

23 $A(4, 0)$; pendiente -3

24 $A(0, -2)$; pendiente 5

25 $A(4, -5)$; pasa por $B(-3, 6)$

26 $A(-1, 6)$; abscisa al origen 5

27 $A(2, -4)$; paralela a la recta $5x - 2y = 4$

28 $A(-3, 5)$; paralela a la recta $x + 3y = 1$

29 $A(7, -3)$; perpendicular a la recta $2x - 5y = 8$

30 $A(4, 5)$; perpendicular a la recta $3x + 2y = 7$

Ejercicios 31–34: Determine la forma simplificada de la recta que satisfaga las condiciones dadas.

31 Abscisa en el origen 4, ordenada en el origen -3

32 Abscisa en el origen -5, ordenada en el origen -1

33 Que pase por $A(5, 2)$ y $B(-1, 4)$

34 Que pase por $A(-2, 1)$ y $B(3, 7)$

Ejercicios 35 y 36: Determine una forma general de la ecuación de la mediatriz del segmento AB.

35 $A(3, -1), B(-2, 6)$ **36** $A(4, 2), B(-2, 10)$

Ejercicios 37 y 38: Determine una ecuación de la recta que biseque los cuadrantes citados.

37 II y IV **38** I y III

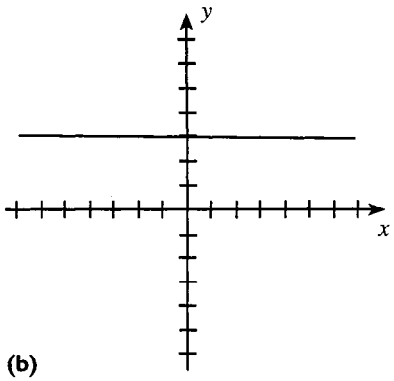
Ejercicios 39–42: Con la forma simplificada, determine la pendiente y la ordenada en el origen de la recta dada, y trácela.

39 $2x = 15 - 3y$ **40** $7x = -4y - 8$

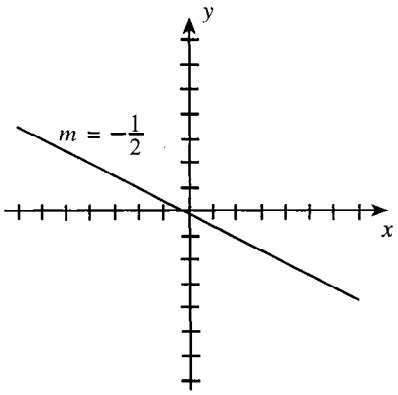
41 $4x - 3y = 9$ **42** $x - 5y = -15$

Ejercicios 43 y 44: Determine una ecuación de la recta que se muestra en la figura.

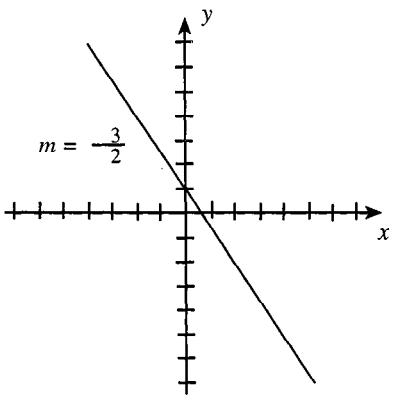
43 **(a)**



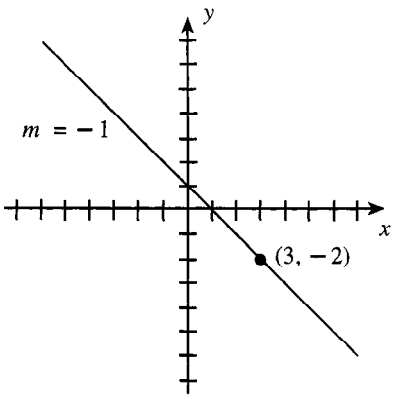
(b)



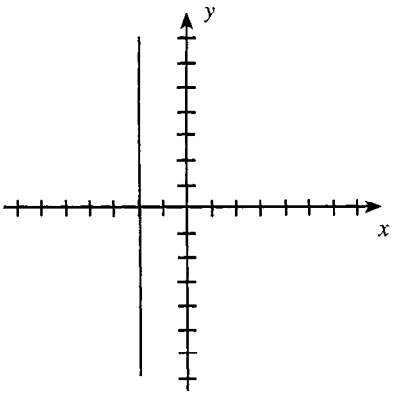
(c)



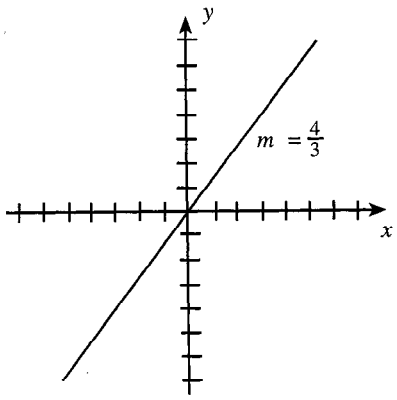
(d)



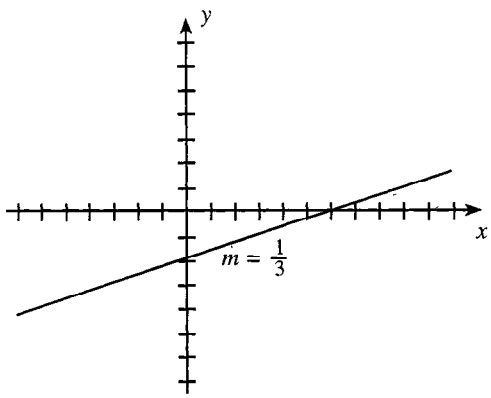
44 (a)



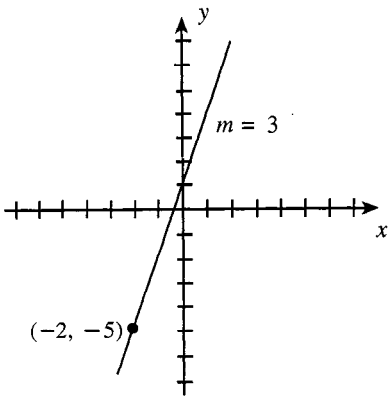
(b)



(c)



(d)



Ejercicios 45 y 46: Si una recta *l* tiene abscisa en el origen y ordenada en el origen, *a* y *b*, respectivamente, entonces, su ecuación en *forma de intersección con los ejes* es

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Obtenga esta forma para cada recta dada.

45 $4x - 2y = 6$

46 $x - 3y = -2$

47 Determine una ecuación del círculo cuyo centro es $C(3, -2)$ y que es tangente a la recta $y = 5$.

48 Encuentre una ecuación de la recta tangente al círculo $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $P(3,4)$.

49 ***Crecimiento del feto*** El crecimiento de un feto de más de 12 semanas se puede aproximar mediante la fórmula $L = 1.53t - 6.7$, en la cual L es la longitud en cm, y t la edad en semanas. La longitud prenatal se puede determinar mediante ultrasonido. Calcule la edad aproximada de un feto cuya longitud es 28 cm.

50 ***Cálculo de la salinidad*** La salinidad del mar es la cantidad de sustancias disueltas en una muestra de agua. La salinidad S se puede estimar a partir de la cantidad de cloro C en el agua, mediante $S = 0.03 + 1.805C$, donde S y C son medidas en peso, en partes por mil. Calcule aproximadamente C, si S es 0.35.

51 ***Peso de una ballena jorobada*** El peso esperado, W, en toneladas, de una ballena jorobada, se puede aproximar a partir de su longitud, L, en pies, mediante la fórmula $W = 1.70L - 42.8$, para $30 \le L \le 50$.

(a) Estime el peso de una ballena jorobada de 40 pies.

(b) Si el error en la estimación de la longitud puede ser hasta de 2 pies, ¿cuál es el error correspondiente de la estimación del peso?

52 ***Crecimiento de una ballena azul*** Las ballenas azules recién nacidas tienen aproximadamente 24 pies de longitud y pesan 3 toneladas. Las ballenas jóvenes maman durante 7 meses, y para cuando son destetadas, con frecuencia tienen 53 pies de largo y pesan 23 ton. Sean L y W la longitud (en pies) y el peso (en toneladas), respectivamente, de una ballena que tiene t meses de edad.

(a) Si L y t están relacionadas linealmente, exprese L en función de t.

(b) ¿Cuál es el aumento diario de longitud de una ballena bebé? (1 mes = 30 días.)

(c) Si W y t están linealmente relacionadas, exprese W en términos de t.

(d) ¿Cuál es el incremento diario en el peso, de una ballena bebé?

53 Suponga que un jugador de béisbol, de grandes ligas, ha logrado 5 *homeruns* en los primeros 14 juegos, y mantiene ese paso en toda la temporada, de 162 juegos.

(a) Exprese el número de *homeruns*, y, en términos del número de juegos x en que ha intervenido.

(b) ¿Cuántos *homeruns* realizará este jugador en la temporada?

54 ***Producción de queso*** Un fabricante de quesos produce 18 000 lb del 1 de enero al 24 de marzo. Suponga que este nivel de producción continúa durante el resto del año.

(a) Exprese el número de libras, y, de queso producido, en función del número del día, x, en un año que tiene 365 días.

(b) Prediga, con precisión de 1 lb, el número de libras que se producen en el año.

55 ***Peso en la niñez*** Un bebé pesa 10 lb al nacer, y 3 años después, su peso es de 30 lb. Suponga que el peso, en libras, W, está relacionado linealmente con la edad en años, t.

(a) Exprese W en términos de t.

(b) ¿Cuál es W al sexto cumpleaños del niño?

(c) ¿A qué edad pesará 70 lb el niño?

(d) Trace, en un plano tW, una gráfica que muestre la relación entre W y t para $0 \le t \le 12$.

56 ***Pago de un préstamo*** Un estudiante universitario recibe un préstamo libre de intereses, de \$8 250, de un pariente. El estudiante pagará \$125 mensual hasta liquidarlo.

(a) Exprese la cantidad P (en dólares), que falta por pagar, en términos del tiempo t (en meses).

(b) ¿Después de cuántos meses la deuda del estudiante será \$5 000?

(c) Haga una gráfica, en un plano tP, que indique la relación entre P y t durante la vigencia del préstamo.

57 ***Evaporación del agua*** La cantidad de calor H, en joules, que se necesita para convertir 1 g de agua en vapor, se relaciona linealmente con la temperatura T (en °C), de la atmósfera. A 10 °C, esta conversión necesita 2 480 joules, y cada aumento de temperatura de 15 °C disminuye en 40 joules el calor necesario. Exprese H en términos de T.

58 ***Potencia aeróbica*** En la fisiología del ejercicio, la potencia aeróbica, P, se define en términos del consumo máximo de oxígeno. Para altitudes hasta de 1 800 m, la potencia aeróbica es óptima, es decir, de 100%. Más allá de 1 800 m, P disminuye linealmente desde el máximo de 100%, hasta un valor cercano a 40% a 5 000 metros.

(a) Exprese la potencia aeróbica P en términos de la altitud, h, en metros, para $1\,800 \le h \le 5\,000$.

(b) Estime la potencia aeróbica en la ciudad de México, cuya altitud es 2 400 m; esta urbe fue sede de los Juegos Olímpicos de 1968.

59 ***Isla urbana de calor*** En Tokio se ha observado el fenómeno de la isla urbana de calor. La temperatura

media era 13.5 °C en 1915, y a partir de entonces ha aumentado 0.032 °C por año.

(a) Suponiendo que la temperatura T, en °C, está linealmente relacionada con el tiempo t, en años, y que $t = 0$ corresponde a 1915, exprese T en función de t.

(b) Prediga la temperatura media en el año 2000.

60 En 1870, la temperatura media del suelo en París fue 11.8 °C. Desde entonces ha aumentado a una tasa casi constante, y en 1969 alcanzó los 13.5 °C.

(a) Exprese la temperatura T, en °C, en términos del tiempo t, en años, siendo $t = 0$ el año de 1870, y $0 \le t \le 100$.

(b) ¿Durante qué año la temperatura promedio del suelo fue 12.5 °C?

61 ***Gastos de operación*** El dueño de un negocio de helados debe pagar, en calidad de franquicia a la empresa matriz, \$1 000 mensual, más el 5% de las ventas mensuales R. El costo de operar la franquicia comprende un costo fijo de \$2 600 mensual, por conceptos como servicios y mano de obra. El costo del helado y materiales es el 50% de las ventas.

(a) Exprese el gasto mensual E del propietario, en términos de R.

(b) Exprese la utilidad mensual P en términos de R.

(c) Determine la venta mensual que se necesita para quedar sin pérdida ni ganancia (*estar en el punto de equilibrio*).

62 ***Dosis de medicamento*** Los productos farmacéuticos deben especificar las dosis recomendadas para adultos y niños. Se tienen dos fórmulas para modificar la dosis de los adultos, cuando se trata de niños. Son

$$\text{Regla de Cowling:} \quad y = \tfrac{1}{24}(t+1)a$$

y

$$\text{Regla de Friend:} \quad y = \tfrac{2}{25}ta,$$

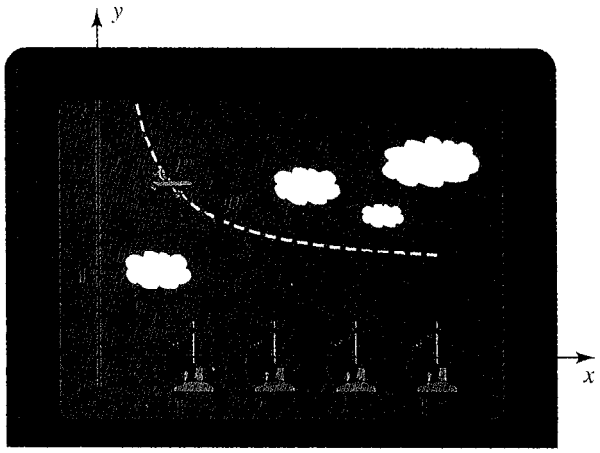
donde a representa la dosis de adultos (en miligramos), y t la edad del niño, (en años).

(a) Si $a = 100$, trace la gráfica de las dos ecuaciones lineales en el mismo plano de coordenadas, para $0 \le t \le 12$.

(b) ¿Para qué edad las dos fórmulas especifican la misma dosis?

63 ***Juegos de video*** En el juego de video que se ve en la figura, un aeroplano vuela de izquierda a derecha a lo largo de la trayectoria representada por $y = 1 + (1/x)$, y dispara proyectiles en dirección tangente a la trayectoria, a blancos que están a lo largo del eje x en las posiciones $x = 1, 2, 3, 4$ y 5. Se sabe que la pendiente de la tangente a la trayectoria en $P(1, 2)$ es $m = -1$, y en $Q(\frac{3}{2}, \frac{5}{3})$ es $m = -\frac{4}{9}$. Determine si los proyectiles darán en algún blanco si el avión los dispara cuando está en

(a) P **(b)** Q



64 ***Escalas de temperatura*** La relación entre la indicación de temperatura F en la escala Fahrenheit y la correspondiente lectura C en la escala centígrada es $C = \frac{5}{9}(F - 32)$.

(a) Determine la temperatura a la cual la indicación es igual en las dos escalas.

(b) ¿A qué temperatura es el valor en la escala Fahrenheit el doble del valor en la escala Celsius?

65 ***Acción deslizante vertical en el viento*** Este efecto en el viento se presenta cuando la velocidad de éste varía a distintas alturas sobre el terreno. El deslizante en el viento es de gran importancia para los pilotos durante el despegue y aterrizaje. Si la velocidad del viento es v_1 cuando la altura es h_1, y v_2 en h_2, entonces, el deslizante vertical promedio, s, se expresa por la fórmula de la pendiente

$$s = \frac{v_2 - v_1}{h_2 - h_1}.$$

Si la velocidad del viento a nivel del terreno es 22 mi/h, y se ha determinado que s es 0.07, calcular la velocidad del viento a 185 pies sobre el piso.

66 ***Acción deslizante vertical en el viento*** En el estudio del deslizante vertical en el viento se usa a veces la fórmula

$$\frac{v_1}{v_2} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^P$$

en la cual P es una variable que depende del terreno y de las construcciones cercanas al nivel del piso. En Montreal, el valor diurno promedio de P, con vientos del norte de más de 29 mi/h, fue 0.13. Si a 20 pies sobre el terreno se mide una velocidad de viento norte de 32 mi/h, calcular, aproximadamente, el deslizante en el viento (véase Ejerc. 65), entre 20 y 200 pies.

c **Ejercicios 67 y 68: Trace las rectas en el mismo plano coordenado y calcule las coordenadas de los puntos de intersección. Identifique el polígono determinado por las rectas.**

67 $2x - y = -1$; $x + 2y = -2$; $3x + y = 11$

68 $10x - 42y = -7.14$; $8.4x + 2y = -3.8$; $0.5x - 2.1y = 2.73$; $16.8x + 4y = 14$

Ejercicios 69 y 70: Los puntos dados se localizaron empleando métodos empíricos. Determine si están en la misma recta, $y = ax + b$ y, en caso afirmativo, calcule los valores de a y b.

69 $A(-1.3, -1.3598)$, $B(-0.55, -1.11905)$, $C(1.2, -0.5573)$, $D(3.25, 0.10075)$

70 $A(-0.22, 1.6968)$, $B(-0.12, 1.6528)$, $C(1.3, 1.028)$, $D(1.45, 0.862)$

3.4 DEFINICIÓN DE FUNCIÓN

La noción de **correspondencia** se presenta con frecuencia en la vida diaria. En los ejemplos siguientes se citan algunos casos.

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

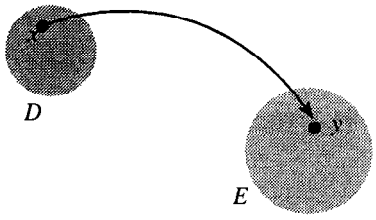
Correspondencia

- A cada libro de una biblioteca corresponde el número de páginas que tiene.
- A cada ser humano corresponde una fecha de nacimiento
- Si se registra la temperatura ambiente durante el día, entonces, a cada momento o instante corresponde una temperatura.

Para cada corespondencia en el ejemplo anterior se necesitan dos conjuntos, D y E. En el primer ejemplo, D representa el conjunto de libros en una biblioteca, y E es el conjunto de enteros positivos. A cada libro, x, en D, corresponde un entero positivo y en E, que es el número de páginas de ese libro.

A veces se representan las correspondencias mediante diagramas del tipo de la Fig. 3.36, en el cual los conjuntos D y E están representados por puntos dentro de regiones en un plano. La flecha curva indica que el elemento y de E corresponde al elemento x de D. Los dos conjuntos pueden tener elementos en común. De hecho, con frecuencia se da el caso que $D = 0$. Es importante hacer notar que *a cada x en D corresponde exactamente una y en E.* Sin embargo, el mismo elemento de E puede corresponder a diversos elementos de D. Por ejemplo, dos libros pueden tener el mismo número de páginas, dos personas pueden tener el mismo aniversario, y la temperatura puede ser igual a distintas horas.

FIGURA 3.36



En la mayor parte de nuestro libro, D y E serán conjuntos de números. Para dar un ejemplo, sean D y E el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, y a cada número real x se le asigna su cuadrado, x^2. Con esto se obtiene una correspondencia de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

Cada uno de los ejemplos de correspondencia es una *función*, que se definire como sigue.

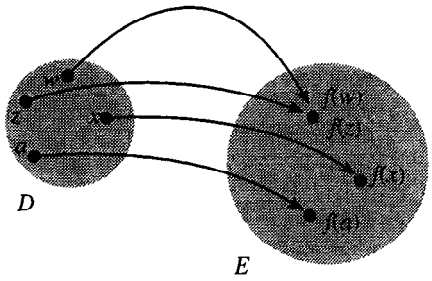
Definición de función

Una **función** f de un conjunto D a un conjunto E, es una correspondencia que asigna, a cada elemento x de D, exactamente un elemento y de E.

El elemento y de E es el **valor** de f en x, y se representa por $f(x)$, y se lee "efe de equis." El conjunto D es el **dominio** de la función. El **contradominio** de f es el subconjunto R de E que consiste en todos los valores posibles, $f(x)$, para x en D.

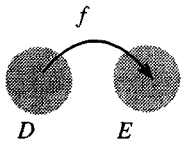
Considérese el diagrama de la Fig. 3.37. Las líneas curvas indican que los elementos $f(w)$, $f(z)$, $f(x)$ y $f(a)$ de E, corresponden a los elementos w, z, x y a de D. *A cada elemento en D se asigna exactamente un valor de la función en E*; sin embargo, distintos elementos de D, como w y z en la Fig. 3.37, pueden tener el mismo valor en E.

FIGURA 3.37



Los símbolos

$$D \xrightarrow{f} E, \quad f: D \to E, \quad \text{y}$$



quieren decir que f es una función de D a E. Al principio, uno puede confundir las notaciones f y $f(x)$. Téngase en cuenta que f se usa para representar la función. No está ni en D ni en E. Sin embargo, $f(x)$ es un elemento del contradominio E, el elemento que asigna la función f al elemento x, el cual está en el dominio D.

Dos funciones f y g de D a E, son **iguales**, lo cual se representa como

$$f = g, \quad \text{siempre y cuando } f(x) = g(x) \text{ para toda } x \text{ en } D.$$

Por ejemplo, si $g(x) = \frac{1}{2}(2x^2 - 6) + 3$, y $f(x) = x^2$ para toda x en $\mathbb{R}$, entonces $g = f$.

EJEMPLO 1 ***Cálculo de valores de una función***

Sea f la función cuyo dominio es $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$ para toda x en $\mathbb{R}$.

(a) Calcular $f(-6)$, $f(\sqrt{3})$, $f(a + b)$ y $f(a) + f(b)$, donde a y b son números reales.

(b) ¿Cuál es el contradominio de f?

SOLUCIÓN

(a) Se calculan los valores de f al sustituir x en la ecuación $f(x) = x^2$:

$$f(-6) = (-6)^2 = 36$$
$$f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 = 3$$
$$f(a + b) = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$f(a) + f(b) = a^2 + b^2$$

(b) Por definición, el contradominio de f consiste en todos los números de la forma $f(x) = x^2$, para x en $\mathbb{R}$. Como el cuadrado de todo número real es positivo, el contradominio está contenido en el conjunto de todos los números reales positivos. Además, todo número real positivo c es un valor de f, ya que $f(\sqrt{c}) = (\sqrt{c})^2 = c$. Por consiguiente, el contradominio de f es el conjunto de todos los números reales no negativos.

Si se define una función como en el Ejemplo 1, no tienen importancia los símbolos que se usan para la función y la variable; es decir, expresiones como $f(x) = x^2$, $f(s) = s^2$, $g(t) = t^2$ y $k(r) = r^2$, definen todas la misma función. Esto se debe a que si a es cualquier número en el dominio, entonces se obtiene el mismo valor a^2 independientemente de qué expresión se emplee.

En el resto de este libro, la frase *f es una función*, o *f es función*, querrá decir que el dominio y el contradominio son conjuntos de números reales. Si una función se define mediante una expresión, como en el Ejemplo 1, y si no se especifica el dominio D, entonces se considera que D es la totalidad de los números reales x tales que $f(x)$ es real. A veces, esto se llama **dominio implícito** de f. Como ejemplo, si $f(x) = \sqrt{x - 2}$, entonces el dominio implícito es el conjunto de los números reales x, tales que $\sqrt{x - 2}$ sea real, es decir, $x - 2 \geq 0$, o bien, $x \geq 2$. Así, el dominio es el intervalo infinito $[2, \infty)$. Si x está en el dominio, se dice que *f está definida en x*, o bien, que *$f(x)$ existe*. Si un conjunto S está contenido en el dominio, f está definida en S. Decir que *f está indefinida en x* significa que x no está en el dominio de f.

EJEMPLO 2 *Cálculo de los valores de una función*

Sea $g(x) = \dfrac{\sqrt{4 + x}}{1 - x}$.

(a) Determinar el dominio de g.
(b) Calcular $g(5)$, $g(-2)$, $g(-a)$ y $-g(a)$.

SOLUCIÓN

(a) La expresión $\sqrt{4 + x}/(1 - x)$ es un número real si y sólo si, el radicando $4 + x$ es no negativo, y el denominador, $1 - x$, no es igual a 0. Así, $g(x)$ existe si y sólo si

$$4 + x \geq 0 \qquad \text{y} \qquad 1 - x \neq 0$$

o, lo que es igual,

$$x \geq -4 \qquad \text{y} \qquad x \neq 1.$$

Se puede expresar el dominio en términos de intervalos, como $[-4, 1) \cup (1, \infty)$.

(b) Para calcular los valores de g, se sustituye x:

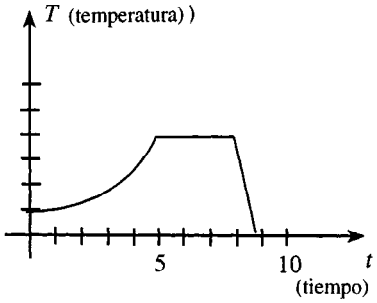
$$g(5) = \frac{\sqrt{4+5}}{1-5} = \frac{\sqrt{9}}{-4} = -\frac{3}{4}$$

$$g(-2) = \frac{\sqrt{4+(-2)}}{1-(-2)} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$g(-a) = \frac{\sqrt{4+(-a)}}{1-(-a)} = \frac{\sqrt{4-a}}{1+a}$$

$$-g(a) = -\frac{\sqrt{4+a}}{1-a} = \frac{\sqrt{4+a}}{a-1}$$

FIGURA 3.38



Con frecuencia se emplean gráficas para representar la variación de cantidades físicas. Por ejemplo, un investigador puede usar la gráfica de la Fig. 3.38 para indicar la temperatura T de determinada solución en distintos momentos t durante un experimento. El esquema indica que la temperatura subió en forma gradual, desde el momento $t = 0$, hasta el momento $t = 5$; no cambió entre $t = 5$ y $t = 8$, y, a continuación, decreció rápidamente de $t = 8$ a $t = 9$.

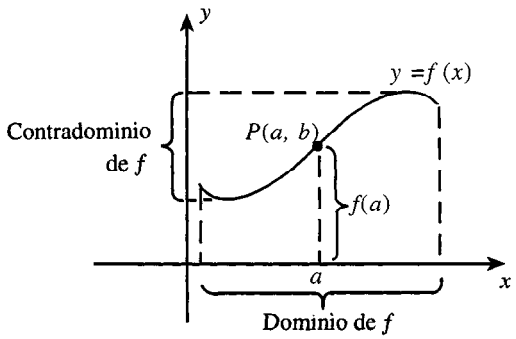
Igualmente, si f es una función, se puede usar una gráfica para indicar el cambio en $f(x)$ al variar x dentro del dominio de f. Específicamente, se tiene la definición siguiente.

Definición de la gráfica de una función

La **gráfica de una función** f es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$ cuando x está en el dominio de f.

A menudo se añade la identificación $y = f(x)$ a una gráfica. Si $P(a, b)$ es un punto de la gráfica, entonces la ordenada b es el valor de la función $f(a)$ como se ve en la Fig. 3.39. Esta figura presenta el dominio de f (el conjunto de valores posibles de x), y el contradominio de f, (los valores correspondientes de y). Aunque se han representado el dominio y el contradominio como intervalos cerrados, pueden ser intervalos infinitos, u otros conjuntos de números reales.

FIGURA 3.39



Como hay exactamente un valor $f(a)$ para cada a en el dominio de f, tan sólo *un* punto de la gráfica de f tiene la abscisa a. Así, *toda línea vertical interseca la gráfica de una función en, cuando mucho, un punto.* Por lo tanto, la gráfica de una función no puede ser una figura como un círculo, en el cual una línea vertical puede cortarlo en más de un punto.

Las abscisas en el origen de la gráfica de una función f son las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$. A estos números se les llama **raíces** o **ceros**, de la función. La ordenada en el origen de la gráfica es $f(0)$, en caso de existir.

EJEMPLO 3 *Gráfica de una función*

Sea $f(x) = \sqrt{x-1}$.

(a) Trazar la gráfica de f.
(b) Determinar el dominio y el contradominio de f.

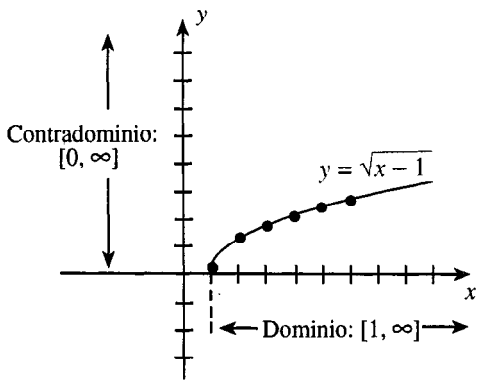
SOLUCIÓN

(a) Por definición, la gráfica de f es la de la ecuación $y = \sqrt{x-1}$. La tabla siguiente presenta las coordenadas de algunos puntos en la gráfica.

x	1	2	3	4	5	6
$y = f(x)$	0	1	$\sqrt{2} \approx 1.4$	$\sqrt{3} \approx 1.7$	2	$\sqrt{5} \approx 2.2$

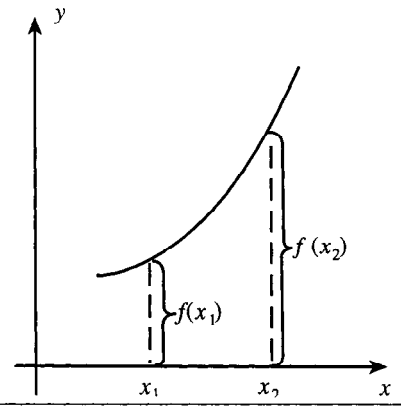
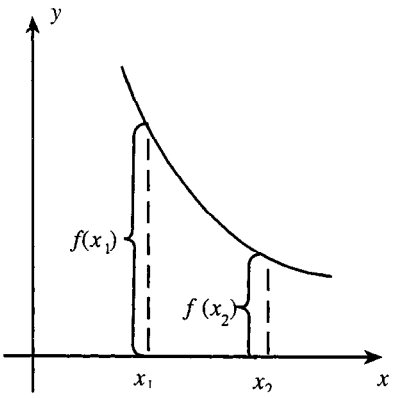
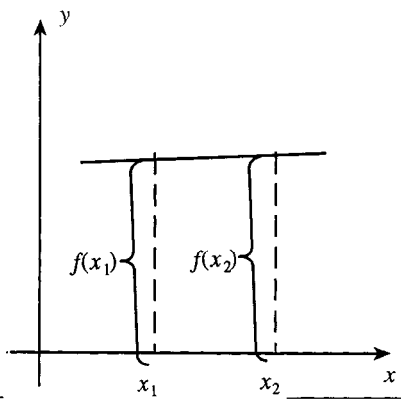
Al ubicar los puntos se obtiene la gráfica que se ve en la Fig. 3.40. Nótese que la abscisa en el origen es 1, y que no hay ordenada en el origen.

FIGURA 3.40



(b) Véase la Fig. 3.40 y obsérvese que el dominio de f está formado por todos los números reales x tales que $x \geq 1$ o, lo que es igual, el intervalo $[1, \infty)$. El contradominio de f es el conjunto de todos los números reales y tales que $y \geq 0$, o el intervalo $[0, \infty)$.

En el Ejemplo 3, al aumentar x, el valor de la función $f(x)$ también se incrementa y se dice que la gráfica de f *asciende* o *crece* (Fig. 3.40). Una función de este tipo se llama *creciente*. Para determinadas funciones, $f(x)$ disminuye al aumentar x. En este caso, la gráfica *desciende* o *decrece*, y f es función *decreciente*. En general, se estudian las funciones que crecen o decrecen en un intervalo I, como se indica en la tabla siguiente, en la cual x_1 y x_2 representan números en I.

Terminología	Definición	Interpretación gráfica
f es **creciente** en un intervalo I	$f(x_1) < f(x_2)$ para toda $x_1 < x_2$	
f es **decreciente** en un intervalo I	$f(x_1) > f(x_2)$ para toda $x_1 < x_2$	
f es **constante** en un intervalo I	$f(x_1) = f(x_2)$ para toda x_1 y x_2	

Si $f(x) = c$ para todo número real x, entonces f es una **función constante.**

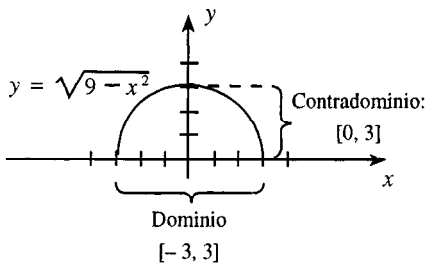
Se usan indistintamente las expresiones *f es creciente*, y *$f(x)$ es creciente*. Lo mismo es válido con los términos *decreciente* y *constante.*

EJEMPLO 4 ***Uso de una gráfica para determinar el dominio, el contradominio y dónde crece o decrece una función***

Sea $f(x) = 9 - x$.

(a) Trazar la gráfica de f.
(b) Determinar el dominio y el contradominio de f.
(c) Determinar los intervalos en los que f sea creciente o decreciente.

FIGURA 3.41



SOLUCIÓN

(a) Por definición, la gráfica de f es la de la ecuación $y = \sqrt{9 - x^2}$. Se sabe, según lo estudiado en la Secc. 3.2 acerca de los círculos, que la gráfica de $x^2 + y^2 = 9$ es un círculo de radio 3 con centro en el origen. Se despeja y de la ecuación $x^2 + y^2 = 9$, y se obtiene $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$. Por lo tanto, la gráfica de f es la *mitad superior* del círculo, como se ve en la Fig. 3.41.*

(b) Viendo la Fig. 3.41, se aprecia que el dominio de f es el intervalo cerrado $[-3, 3]$, y que el contradominio es el intervalo $[0, 3]$.

(c) La gráfica sube al aumentar x de -3 a 0, de manera que f es creciente en el intervalo cerrado $[-3, 0]$. Así, como se ve en la tabla anterior, si $x_1 < x_2$ en $[-3, 0]$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$ (nótese que, *posiblemente*, $x_1 = -3$, o que $x_2 = 0$).

La gráfica baja al aumentar x entre 0 y 3, de modo que f es decreciente en el intervalo cerrado $[0, 3]$. En este caso, la tabla indica que si $x_1 < x_2$ en $[0, 3]$, entonces $f(x_1 > f(x_2)$ (nótese que, *posiblemente*, $x_1 = 0$ o $x_2 = 3$).

Las funciones del tipo siguiente son fundamentales en álgebra.

Definición de función lineal

Una función f es **función lineal** si

$$f(x) = ax + b,$$

donde x es cualquier número real, y a y b son constantes.

La gráfica de f en la definición anterior es la de $y = ax + b$, la cual, según la forma simplificada, es una recta con pendiente a y ordenada en el origen b. Así, *la gráfica de una función lineal es una línea recta.* Como $f(x)$ existe para toda x, el dominio de f es $\mathbb{R}$. Como se ve en el siguiente ejemplo, si $a \neq 0$, entonces el contradominio de f también es $\mathbb{R}$.

EJEMPLO 5 ***Trazo de la gráfica de una función lineal***

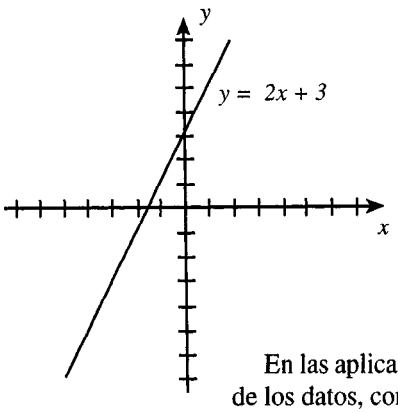
Sea $f(x) = 2x + 3$.

(a) Graficar f.
(b) Determinar el dominio y el contradominio de f.
(c) Establecer si f es creciente o decreciente.

* (N. del R.) En la terminología en español de geometría analítica, la línea que limita un área circular o círculo se llama específicamente *circunferencia*. [F.P.]

POLI

FIGURA 3.42



SOLUCIÓN

(a) Como $f(x)$ tiene la forma $ax + b$, donde $a = 2$ y $b = 3$, f es función lineal. La gráfica de $y = 2x + 3$ es la recta con pendiente 2 y ordenada en el origen 3, que se ve en la Fig. 3.42.
(b) Se observa en la gráfica que x y y pueden ser cualquier número real, de modo que tanto el dominio como el contradominio de f están en $\mathbb{R}$.
(c) Como la pendiente a es positiva, la gráfica de f crece al aumentar x; es decir, $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$. Por lo tanto, f aumenta en su dominio.

En las aplicaciones, a veces, es necesario determinar una función lineal específica partiendo de los datos, como en el ejemplo siguiente.

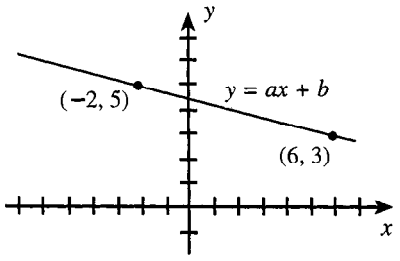
EJEMPLO 6 ***Hallar una función lineal***

Si f es una función lineal tal que $f(-2) = 5$ y $f(6) = 3$, determinar $f(x)$, donde x es cualquier número real.

SOLUCIÓN Por definición de función lineal, $f(x) = ax + b$, donde a y b *son constantes*. Además, los valores dados de la función indican que los puntos $(-2, 5)$ y $(6, 3)$ pertenecen a la gráfica de f, es decir, están en la recta $y = ax + b$, como se ve en la Fig. 3.43. La pendiente a de esta recta es

$$a = \frac{5-3}{-2-6} = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4},$$

FIGURA 3.43



y por consiguiente, $f(x)$ tiene la forma

$$f(x) = -\tfrac{1}{4}x + b.$$

Para calcular el valor de b, podemos recurrir al hecho que $f(6) = 3$, como sigue:

$$f(6) = -\tfrac{1}{4}(6) + b \quad \text{en } f(x) = -\tfrac{1}{4}x + b, \text{ sea } x = 6$$
$$3 = -\tfrac{3}{2} + b \quad f(6) = 3$$
$$b = 3 + \tfrac{3}{2} = \tfrac{9}{2} \quad \text{se despeja } b$$

Así, la función lineal que satisface a $f(-2) = 5$ y a $f(6) = 3$ es

$$f(x) = -\tfrac{1}{4}x + \tfrac{9}{2}.$$

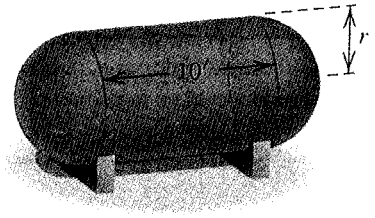
Hay muchas fórmulas que se encuentran en matemáticas y en las ciencias en general, que determinan funciones. Por ejemplo, la fórmula $A = \pi r^2$ del área A de un círculo de radio r, asigna exactamente un valor de A a cada número positivo real r. Esto determina una función f tal que $f(r) = \pi r^2$, y se puede escribir $A = f(r)$. La letra r, que representa un número arbitrario del dominio de f, se llama **variable independiente**. La letra A, que representa un número del contradominio de f, es una **variable dependiente**, ya que su valor depende del número que se asigne a r. Si se tienen dos variables r y A relacionadas de este modo, se dice que A *es una función de* r. En las aplicaciones, a las variables independiente y dependiente se les llama a ve-

ces **variable de entrada** y **variable de salida**, respectivamente. Para citar otro ejemplo, si un automóvil viaja a una velocidad uniforme de 50 mi/h, entonces la distancia d, en millas, recorrida en el tiempo t, en horas, está expresada por $d = 50t$, y por consiguiente, *la distancia d es función del tiempo t.*

EJEMPLO 7 *Expresar el volumen de un depósito como función de su radio*

Se desea fabricar un tanque de almacenamiento de acero para gas propano en forma de cilindro circular horizontal de 10 pies de largo con tapas hemisféricas. Quedará por evaluar el radio r. Expresar el volumen V (en pies^3) del depósito, en función de r (en pies).

FIGURA 3.44



SOLUCIÓN El tanque se ilustra en la Fig. 3.44. Se puede calcular el volumen de la parte cilíndrica del tanque multiplicando el largo, 10, por el área, πr^2, de la base del cilindro. Con esto se obtiene

$$\text{volumen del cilindro} = 10(\pi r^2) = 10\pi r^2.$$

Las dos tapas hemisféricas, juntas, forman una esfera de radio r. Con la fórmula para el volumen de una esfera se tiene

$$\text{volumen de las dos tapas} = \tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

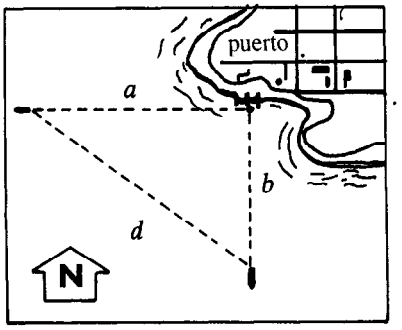
Así, el volumen del depósito es

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3 + 10\pi r^2.$$

Esta fórmula expresa V como función de r. Al factorizar se obtiene

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2(4r + 30) = \tfrac{2}{3}\pi r^2(2r + 15).$$

FIGURA 3.45



EJEMPLO 8 *Expresar una distancia en función del tiempo*

Dos buques salen de puerto al mismo tiempo; uno navega hacia el oeste a una velocidad de 17 mi/h y el otro hacia el sur, a 12 mi/h. Si t es el tiempo, en horas, que transcurre a partir de su salida, exprese la distancia, d, entre los barcos, como función de t.

SOLUCIÓN Para ayudar a imaginar el problema, se traza un esquema y se ubican los buques y el puerto, como en la Fig. 3.45. Según el teorema de Pitágoras,

$$d^2 = a^2 + b^2, \qquad \text{o bien} \qquad d = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Como distancia = (velocidad)(tiempo), y las velocidades son 17 y 12, respectivamente,

$$a = 17t \qquad \text{y} \qquad b = 12t.$$

Sustituyendo en $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ obtenemos

$$d = \sqrt{(17t)^2 + (12t)^2} = \sqrt{289t^2 + 144t^2} = \sqrt{433t^2} \approx (20.8)t.$$

Se pueden usar pares ordenados para aplicar otro método para llegar a las funciones. Primero se observa que una función f, de D a E, determina el siguiente conjunto W de pares ordenados:

$$W = \{(x, f(x)) : x \text{ está en } D\}.$$

Así, W consiste en todos los pares ordenados tales que el primer número x está en D, y el segundo número es el valor de la función $f(x)$. En el Ejemplo 1, donde $f(x) = x^2$, W es el conjunto de todos los pares ordenados de la forma (x, x^2). Es importante notar que, *para toda x, hay exactamente un par ordenado, (x, y), en W, que tiene x en la primera posición.*

Recíprocamente, si se inicia con un conjunto W de pares ordenados, tal que cada x en D aparezca exactamente una vez en la primera posición de un par ordenado, entonces W determina una función. En forma específica, para cada x en D hay exactamente un par, (x, y) en W, y si se hace que y corresponda a x, se obtiene una función cuyo dominio es D. El contradominio está formado por todos los números reales y que aparecen en la segunda posición de los pares ordenados.

De acuerdo con la descripción anterior, se puede emplear en consecuencia el siguiente enunciado, como definición de una función.

Otra definición

Una **función** f, cuyo dominio es D, es un conjunto W de pares ordenados tales que, para cada x en D, hay exactamente un par ordenado (x, y) en W en donde x está en la primera posición.

En términos de la definición anterior, los pares ordenados $(x, \sqrt{x-1})$ determinan la función del Ejemplo 3, expresada por $f(x) = \sqrt{x-1}$. Sin embargo, nótese que si

$$W = \{(x, y): x^2 = y^2\},$$

entonces W *no es* una función, ya que para una x dada, puede haber más de un par en W que tenga a x en la primera posición. Por ejemplo, si $x = 2$, entonces $(2, 2)$ y $(2, -2)$, al mismo tiempo, están en W.

En el siguiente ejemplo se ilustra cómo se pueden estudiar algunos de los conceptos que se presentan en esta sección, con la ayuda de una calculadora que grafique. De aquí en adelante, al hacer asignaciones en la graficadora, con frecuencia se citan variables como Y_1 y Y_2 como *las funciones* Y_1 y Y_2.

EJEMPLO 9 ***Análisis de la gráfica de una función***

Sea $f(x) = x^{2/3} - 3$.

(a) Calcular $f(-2)$

(b) Elaborar la gráfica de f.

(c) Especificar el dominio y el contradominio de f.

(d) Especificar los intervalos en los cuales f es creciente o decreciente.

(e) Estimar las abscisas en el origen de la gráfica, con exactitud de una cifra decimal.

SOLUCIÓN

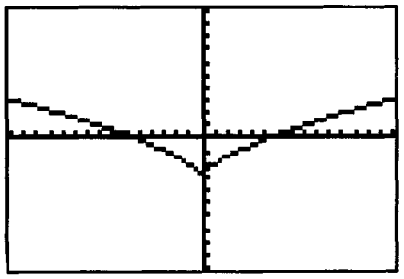
(a) En una calculadora o computadora, la representación de f podría ser

X^(2/3) − 3 o bien (X^(1/3))^2 − 3 o bien (X^2)^(1/3) − 3.

Se asigna o se transfiere una de estas expresiones a la función Y_1. Para calcular el valor de Y_1 en $x = -2$, primero se asigna el valor -2 a un lugar de memoria, que se designa como X. Esto se hace, normalmente, con una operación de almacenar (*"store"*) o de asignar (*"assign"*) en el instrumento de cómputo. A continuación se calcula el valor de Y_1 pidiendo al instrumento que indique el contenido del lugar de la memoria que contenga el valor de Y_1. A este proceso de encontrar un valor de Y_1 se le llama, con frecuencia, "pedir Y_1." Al pedir Y_1 se ve que su valor

aproximado es -1.41 (es decir, $f(-2) \approx -1.41$.) Se debe notar que no todos los equipos de computación procesan exponentes racionales del mismo modo. Si no se obtuvo respuesta para $f(-2)$, cambie su representación de Y_1 antes de seguir.

FIGURA 3.46 [–15, 15] por [–10, 10]



(b) Si se usa el rectángulo visual [–15, 15] por [–10, 10], para graficar Y_1, se tiene una pantalla semejante a la de la Fig. 3.46.

(c) El dominio de f es $\mathbb{R}$, ya que se puede introducir cualquier valor de x. La figura indica que $y \geq -3$ y, por lo tanto llegamos a la conclusión de que el contradominio de f es $[-3, \infty)$.

(d) Se observa en la figura que f es decreciente en $(-\infty, 0]$, y que es creciente en $[0, \infty)$.

(e) Con los medios de trazo y amplificación, se ve que la abscisa positiva al origen en la Fig. 3.46 es, aproximadamente, 5.2. Como f es simétrica con respecto al eje y, la abscisa negativa al origen es, aproximadamente, – 5.2.

EJERCICIOS 3.4

1 Si $f(x) = -x^2 - x - 4$, calcular $f(-2)$, $f(0)$ y $f(4)$.

2 Si $f(x) = -x^3 - x^2 + 3$, calcular $f(-3)$, $f(0)$ y $f(2)$.

3 Si $f(x) = \sqrt{x-4} - 3x$, determinar $f(4)$, $f(8)$ y $f(13)$.

4 Si $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$, encontrar $f(-2)$, $f(0)$ y $f(3)$.

Ejercicios 5–8: Si a y h son números reales, determinar

(a) $f(a)$ **(b)** $f(-a)$ **(c)** $-f(a)$ **(d)** $f(a+h)$

(e) $f(a)+f(h)$ **(f)** $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, si $h \neq 0$

5 $f(x) = 5x - 2$ **6** $f(x) = 3 - 4x$

7 $f(x) = x^2 - x + 3$ **8** $f(x) = 2x^2 + 3x - 7$

Ejercicios 9–12: Si a es número real positivo, determinar

(a) $g\left(\dfrac{1}{a}\right)$ **(b)** $\dfrac{1}{g(a)}$ **(c)** $g(\sqrt{a})$ **(d)** $\sqrt{g(a)}$

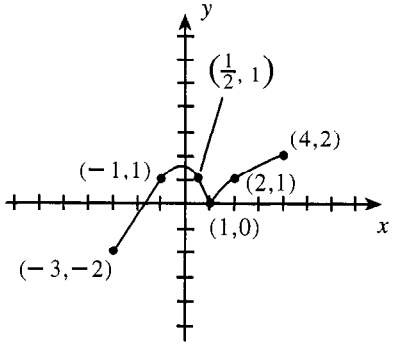
9 $g(x) = 4x^2$ **10** $g(x) = 2x - 5$

11 $g(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ **12** $g(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

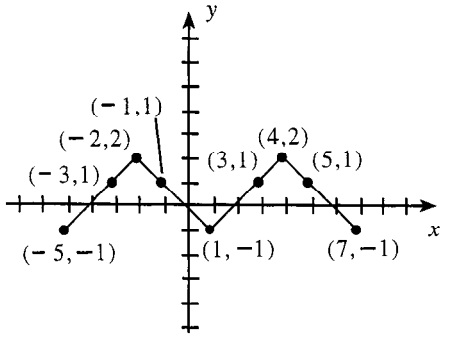
Ejercicios 13 y 14: Para la gráfica de la función f que aparece en la figura, determinar

(a) el dominio **(b) el contradominio** **(c)** $f(1)$
(d) toda x tal que $f(x) = 1$ **(e) toda x tal que $f(x) > 1$**

13



14



Ejercicios 15–26: Determinar el dominio de f.

15 $f(x) = \sqrt{2x + 7}$ **16** $f(x) = \sqrt{8 - 3x}$

17 $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ **18** $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$

19 $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^3 - 4x}$ **20** $f(x) = \dfrac{4x}{6x^2 + 13x - 5}$

21 $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x - 3}}{x^2 - 5x + 4}$ **22** $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x - 3}}{x^2 - 4}$

23 $f(x) = \dfrac{x - 4}{\sqrt{x - 2}}$ **24** $f(x) = \dfrac{1}{(x - 3)\sqrt{x + 3}}$

25 $f(x) = \sqrt{x + 2} + \sqrt{2 - x}$ **26** $f(x) = \sqrt{(x - 2)(x - 6)}$

Ejercicios 27–36: (a) Trace la gráfica de f. (b) Indique el dominio D y el contradominio R de f. (c) Determine los intervalos en los cuales f es creciente, decreciente o constante.

27 $f(x) = 3x - 2$ **28** $f(x) = -2x + 3$

29 $f(x) = 4 - x^2$ **30** $f(x) = x^2 - 1$

31 $f(x) = \sqrt{x + 4}$ **32** $f(x) = \sqrt{4 - x}$

33 $f(x) = -2$ **34** $f(x) = 3$

35 $f(x) = -\sqrt{36 - x^2}$ **36** $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

Ejercicios 37 y 38: Si una función lineal f satisface las condiciones dadas, obtenga $f(x)$.

37 $f(-3) = 1$ y $f(3) = 2$

38 $f(-2) = 7$ y $f(4) = -2$

Ejercicios 39–48: Determine si el conjunto W de pares ordenados es función en el sentido de la otra definición de función, de la página 160.

39 $W = \{(x, y): 2y = x^2 + 5\}$

40 $W = \{(x, y): x = 3y + 2\}$

41 $W = \{(x, y): x^2 + y^2 = 4\}$

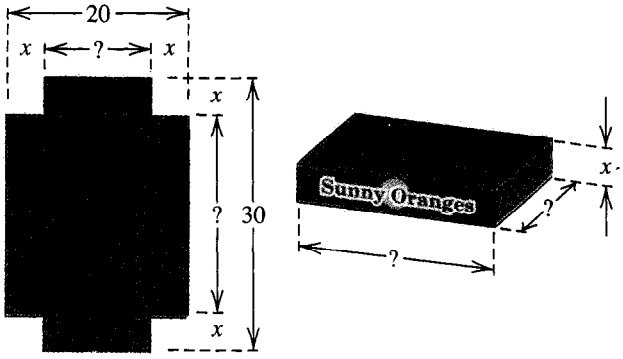
42 $W = \{(x, y): y^2 - x^2 = 1\}$

43 $W = \{(x, y): y = 3\}$ **44** $W = \{(x, y): x = 3\}$

45 $W = \{(x, y): xy = 0\}$ **46** $W = \{(x, y): x + y = 0\}$

47 $W = \{(x, y): |y| = |x|\}$ **48** $W = \{(x, y): y < x\}$

49 ***Hechura de una caja*** Se desea elaborar una caja sin tapa partiendo de una pieza rectangular de cartón, cuyas dimensiones son 20×30 pulg, cortando en las esquinas cuadros idénticos de área x^2, y doblando los lados hacia arriba (véase la figura). Exprese el volumen V, de la caja, como función de x.

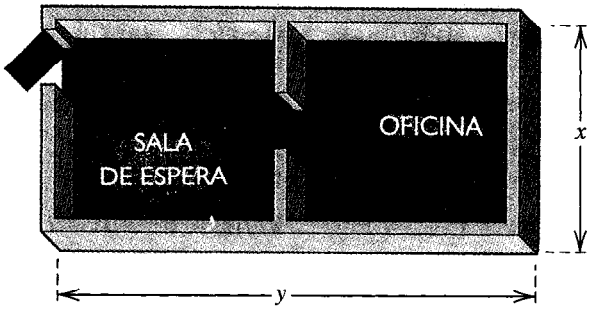


50 ***Construcción de un tanque de almacenamiento*** acuerdo con el Ejemplo 7, se desea construir un tanque de acero para almacenar propano gaseoso, en forma de un cilindro circular horizontal con largo de 10 pies, y tapas hemisféricas. El radio r queda por determinar. Exprese el valor del área superficial S del tanque, en función de r.

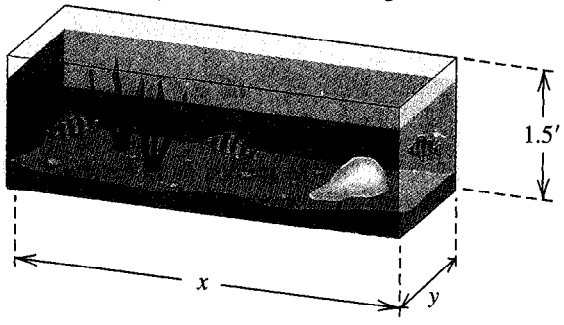
51 ***Dimensiones de una oficina*** Un local pequeño debe tener 500 pies^2 de área de piso. En la figura siguiente se muestra un esquema de ese local para oficina.

(a) Exprese la longitud y de la construcción, como función de la anchura x.

(b) Si los muros cuestan \$100 (dólares) por pie de longitud, exprese el costo C de las paredes como función del ancho x. (Sin considerar la porción de muro sobre las puertas, ni el espesor de los muros).



52 ***Dimensiones de un acuario*** Un acuario de 1.5 pies de altura debe tener un volumen de 6 pies^3. Sea x la longitud de la base, y y la anchura (véase la figura).



(a) Expresar a y en función de x.

(b) Estimar el número total S de pies cuadrados necesarios de vidrio, en función de x.

53 Para niños cuyas edades están entre 6 y 10 años, la altura en pulgadas y, en promedio, es función lineal de la edad en años t. La altura de un niño es 48 pulg a la edad de 6, y de 50.5 pulg a la edad de 7.

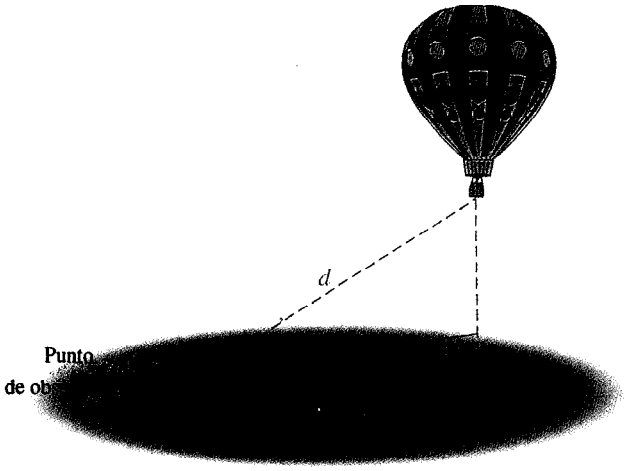
(a) Expresar y en función de t.

(b) Trazar la recta del inciso (a) e interpretar la pendiente.

(c) Predecir la altura del niño cuando cumpla 10 años.

54 ***Contaminación radiactiva*** Se ha estimado que si se introducen 1000 curies de una sustancia radiactiva en un punto de la superficie de mar abierto, se dispersarían, en 40 días, en un área de 40 000 km^2. Suponiendo que el área cubierta por la sustancia radiactiva es función lineal del tiempo, t, y que siempre tiene forma circular, exprese el radio, r, de la zona de contaminación, como función de t.

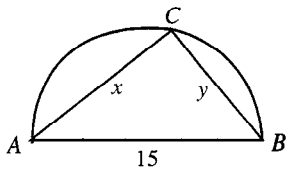
55 ***Distancia a un globo de aire caliente*** Un globo de aire caliente se suelta a la 1:00 P.M., y se eleva verticalmente a una velocidad de 2 m/s. Un punto de observación está ubicado a 100 m del punto de salida del globo (véase la figura). Si t representa el tiempo, en segundos, después de la 1:00 P.M., exprese la distancia, d, entre el globo y el punto de observación, como función de t.



56 El triángulo ABC está inscrito en un semicírculo de 15 unidades de diámetro (véase la figura).

(a) Si x representa la longitud del lado AC, exprese la longitud y del lado BC, como función de x. (*Sugerencia:* El ángulo ACB es recto.)

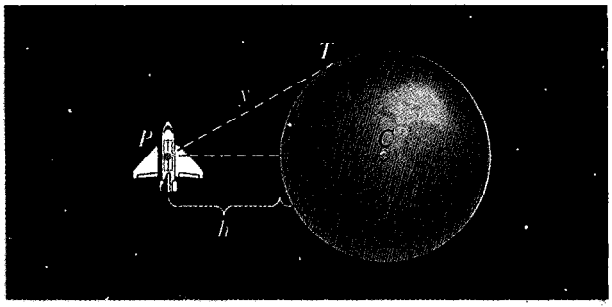
(b) Exprese el área, $\mathscr{A}$, del triángulo ABC como función de x, y defina el dominio de esta función.



57 ***Distancia a la Tierra*** Desde un punto en el espacio P, que está a h unidades de un círculo (el contorno terrestre) de radio r, se traza una tangente a ese círculo (véase la figura). Sea y la distancia del punto P al punto de tangencia T.

(a) Exprese a y como función de h. (*Sugerencia: si C* es el centro del círculo, entonces PT es perpendicular a CT.)

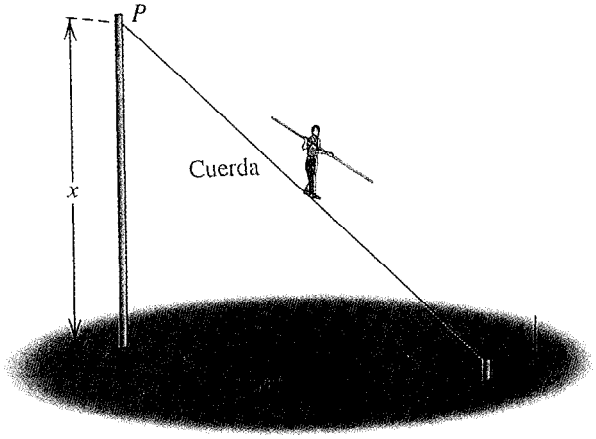
(b) Si r es el radio de la Tierra, y h la altitud de un transbordador espacial, entonces y es la distancia máxima a la Tierra que puede ver un astronauta desde la nave. En particular, si h = 200 mi y r 4000 mi, calcule y, aproximadamente.



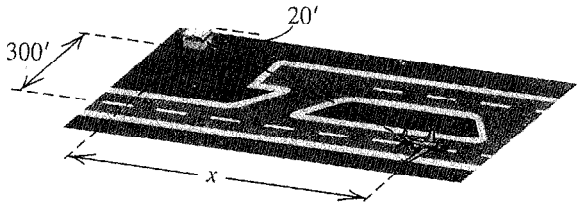
58 ***Longitud de una cuerda tensa*** La figura siguiente muestra un equilibrista en la cuerda tensa. Se clavan 2 postes a 50 pies de distancia, pero el punto de fijación P de la cuerda, está por determinarse.

(a) Exprese la longitud L de la cuerda, como función de la distancia x de P al piso.

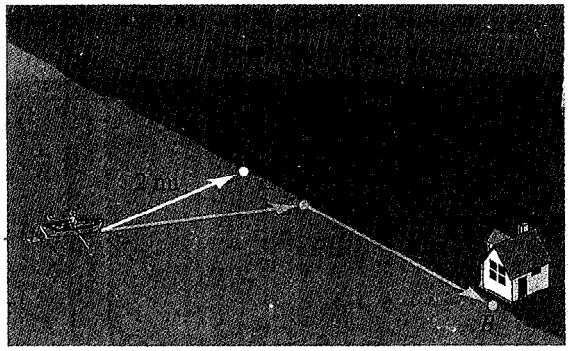
(b) Si el trayecto total debe ser 75 pies, determine la distancia de P al piso.



59 ***Pista de un aeropuerto*** En la figura se ven las posiciones relativas de una pista de aeropuerto y una torre de control de 20 pies de altura. El principio de la pista está a una distancia perpendicular de 300 pies de la base de la torre. Si x indica la distancia que ha recorrido un avión a lo largo de la pista, exprese la distancia d entre el aeroplano y la caseta de control como función de x.



60 ***Hora de llegada*** Una persona en un bote de remos que se encuentra a 2 mi del punto más cercano de la orilla A en la costa recta, desea llegar a una casa ubicada en un punto B, a 6 mi a lo largo de la costa (véase la figura). Desea remar hacia un punto P, *entre* A y B, a x millas de la casa, para después caminar el resto de la distancia. Supóngase que puede remar a la velocidad de 3 mi/h, y caminar a 5 mi/h. Si T es el tiempo total necesario para llegar a la casa, exprese T en función de x.



C **Ejercicios 61–64: (a) Hacer la gráfica de f en el intervalo dado $[a, b]$. (b) Determinar el contradominio de f en $[a, b]$. (c) Determinar los intervalos para los cuales f es creciente o decreciente.**

61 $f(x) = \dfrac{x^{1/3}}{1 + x^4}$; $[-2, 2]$

62 $f(x) = x^4 - 0.4x^3 - 0.8x^2 + 0.2x + 0.1$; $[-1, 1]$

63 $f(x) = x^5 - 3x^2 + 1$; $[-0.7, 1.4]$

64 $f(x) = \dfrac{1 - x^3}{1 + x^4}$; $[-4, 4]$

C **Ejercicios 65 y 66: En los Ejercicios 51 y 52 de la Secc. 2.5, se aplicaron métodos algebraicos para llegar a las soluciones de cada una de las ecuaciones siguientes. En esta ocasión, resuelva la ecuación en forma gráfica, asignando la expresión del lado izquierdo a Y_1 y el número del lado derecho a Y_2, para después determinar las abscisas de todos los puntos de intersección de las dos gráficas.**

65 **(a)** $x^{5/3} = 32$ **(b)** $x^{4/3} = 16$ **(c)** $x^{2/3} = -36$
(d) $x^{3/4} = 125$ **(e)** $x^{3/2} = -27$

66 **(a)** $x^{3/5} = -27$ **(b)** $x^{2/3} = 25$ **(c)** $x^{4/3} = -49$
(d) $x^{3/2} = 27$ **(e)** $x^{3/4} = -8$

3.5 GRÁFICAS DE FUNCIONES

En esta sección se estudian algunos medios auxiliares para trazar gráficas de determinados tipos de funciones. En particular, se dice que una función es **par** si $f(-x) = f(x)$ para toda x en su dominio. En este caso, la ecuación $y = f(x)$ no cambia si se sustituye x por $-x$, y, por consiguiente, según la prueba (1) de simetría de la Secc. 3.2, la gráfica de una función par es simétrica respecto al eje y.

Se dice que una función f es **impar**, si $f(-x) = -f(x)$ para toda x en su dominio. Si se aplica la prueba (3) de simetría de la Secc. 3.2 a la ecuación $y = f(x)$, se observa que la gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen.

Lo anterior se resume en las primeras dos columnas de la tabla siguiente.

Terminología	Definición	Ejemplo	Simetría de la gráfica
f es **función par**	$f(-x) = f(x)$ para toda x en el dominio	$y = f(x) = x^2$	eje y
f es **función impar**	$f(-x) = -f(x)$ para toda x en el dominio	$y = f(x) = x^3$	el origen

EJEMPLO 1 ***Determinar si una función es par o impar***

Establecer si f es par, impar, o ni una cosa u otra.

(a) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5$ **(b)** $f(x) = 2x^5 - 7x^3 + 4x$

(c) $f(x) = x^3 + x^2$

SOLUCIÓN En todos los casos, el dominio de f es $\mathbb{R}$. Para determinar si f es par o impar, se empieza por examinar $f(-x)$, donde x es cualquier número real.

(a)
$$\begin{aligned} f(-x) &= 3(-x)^4 - 2(-x)^2 + 5 && \text{se sustituye } x \text{ por } -x \text{ en } f(x) \\ &= 3x^4 - 2x^2 + 5 && \text{se simplifica} \\ &= f(x) && \text{definición de } f \end{aligned}$$

Como $f(-x) = f(x)$, f es función par.

(b)
$$\begin{aligned} f(-x) &= 2(-x)^5 - 7(-x)^3 + 4(-x) && \text{se sustituye } x \text{ por } -x \text{ en } f(x) \\ &= -2x^5 + 7x^3 - 4x && \text{se simplifica} \\ &= -(2x^5 - 7x^3 + 4x) && \text{se saca } -1 \text{ como factor común} \\ &= -f(x) && \text{definición de } f \end{aligned}$$

Como $f(-x) = -f(x)$, f es función impar.

(c)
$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 + (-x)^2 && \text{se sustituye } x \text{ por } -x \text{ en } f(x) \\ &= -x^3 + x^2 && \text{se simplifica} \end{aligned}$$

Como $f(-x) \neq f(x)$, y $f(-x) \neq -f(x)$ (nótese que $-f(x) = -x^3 - x^2$), la función f ni es par ni impar.

En el ejemplo que sigue, se estudia la **función valor absoluto** f, definida por $f(x) = |x|$.

EJEMPLO 2 ***Trazo de la gráfica de la función valor absoluto***

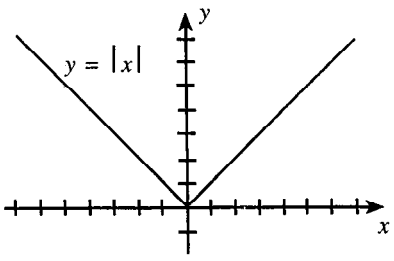
Sea $f(x) = |x|$.

(a) Determinar si f es par o impar.

(b) Graficar f.

(c) Determinar los intervalos en los cuales f es creciente o decreciente.

FIGURA 3.47



SOLUCIÓN

(a) El dominio de f es $\mathbb{R}$, porque el valor absoluto de x existe para todo número real x. Si x está en $\mathbb{R}$, entonces

$$f(-x) = |-x| = |x| = f(x).$$

Así, f es función par, ya que $f(-x) = f(x)$.

(b) Como f es par, su gráfica es simétrica con respecto al eje y. Si $x \geq 0$, entonces $|x| = x$ y, por tanto, la parte del primer cuadrante de la gráfica coincide con la recta $y = x$. Al bosquejar esta mitad de línea y aplicar la simetría, se obtiene la Fig. 3.47.

(c) Viendo la gráfica, apreciamos que f es decreciente en $(-\infty, 0]$, y es creciente en $[0, \infty)$.

Si se conoce la gráfica de $y = f(x)$, es fácil de bosquejar las gráficas de

$$y = f(x) + c \qquad \text{y} \qquad y = f(x) - c$$

para todo numero real positivo c. Como en la tabla siguiente, para $y = f(x) + c$, se suma c a la ordenada de cada punto de la gráfica de $y = f(x)$. Con esto *se desplaza* la gráfica de f *hacia arriba* una distancia c. Para $y = f(x) - c$, donde $c > 0$, se resta de cada ordenada y con ello se desplaza la gráfica de f una distancia c *hacia abajo*. A los anteriores se les llama **desplazamientos verticales** de las gráficas.

Desplazamiento vertical de la gráfica de $y = f(x)$

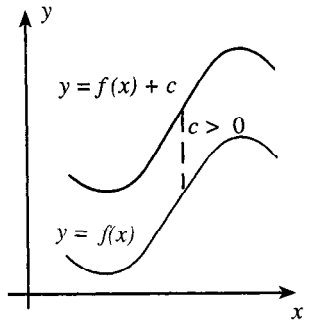
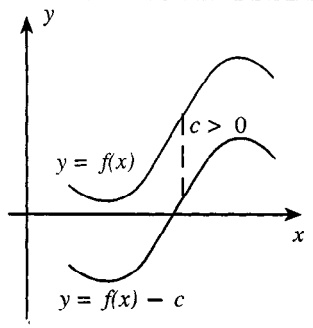
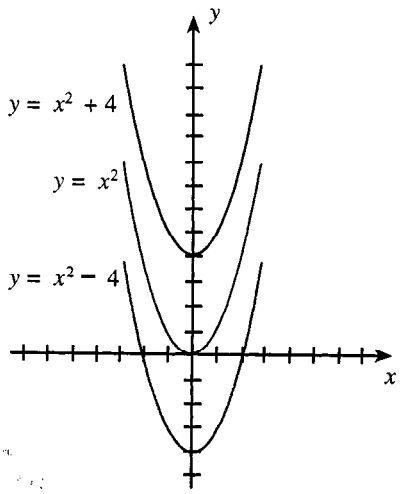
Ecuación	Efecto sobre la gráfica	Interpretación gráfica
$y = f(x) + c$, donde $c > 0$	La gráfica de f se desplaza verticalmente hacia arriba una distancia c.	
$y = f(x) - c$, donde $c > 0$	La gráfica de f se desplaza verticalmente hacia abajo una distancia c.	

FIGURA 3.48



EJEMPLO 3 ***Desplazamiento vertical de una gráfica***

Trazar la gráfica de f:

(a) $f(x) = x^2$ **(b)** $f(x) = x^2 + 4$ **(c)** $f(x) = x^2 - 4$

SOLUCIÓN Se trazarán todas las gráficas en el mismo plano coordenado.

(a) Como $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$,
la función f es par, y por consiguiente, su gráfica es simétrica con respecto al eje y. Algunos de los puntos de esta gráfica de $y = x^2$ son (0, 0), (1, 1), (2, 4) y (3, 9). Al trazar una curva uniforme que pase por esos puntos, y reflejándola luego en el eje y, se obtiene el esquema de la Fig. 3.48. La gráfica es una parábola con vértice en el origen, cóncava hacia arriba.
(b) Para el trazo de la gráfica de $y = x^2 + 4$, se suma 4 a la ordenada de cada punto de la gráfica de $y = x^2$. Esto es, se desplaza la gráfica del inciso

(a) 4 unidades hacia arriba, como se ve en la figura.

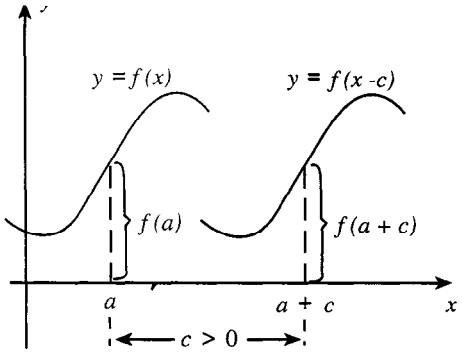
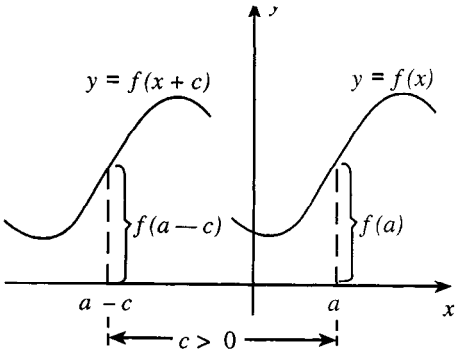
(c) Para trazar la gráfica de $y = x^2 - 4$, se resta 4 a las ordenadas de $y = x^2$, esto es, se desplaza la gráfica del inciso (a) 4 unidades hacia abajo.

También puede haber **desplazamientos horizontales.** En forma específica, si $c > 0$, considérense las gráficas de $y = f(x)$ y $y = f(x - c)$, ubicadas en el mismo plano de coordenadas, según se ve en la tabla siguiente. Como

$$f(a) = f([a + c] - c),$$

resulta que el punto con abscisa a, en la gráfica de $y = f(x)$, tiene la misma ordenada que el punto cuya abscisa es $a + c$ en la gráfica de $y = f(x - c)$. Esto significa que se puede obtener la representación de $y = f(x - c)$ desplazando la de $y = f(x)$ *hacia la derecha* una distancia c. Igualmente, se puede obtener la gráfica de $y = f(x + c)$ desplazando *hacia la izquierda* la gráfica de f una distancia c como se ve en la tabla.

Desplazamiento horizontal de la gráfica de $y = f(x)$

Ecuación	Efecto sobre la gráfica	Interpretación gráfica
$y = f(x - c)$, donde $c > 0$	La gráfica de f se desplaza horizontalmente hacia la derecha una distancia c.	
$y = f(x + c)$, donde $c > 0$	La gráfica de f se desplaza horizontalmente hacia la izquierda una distancia c.	

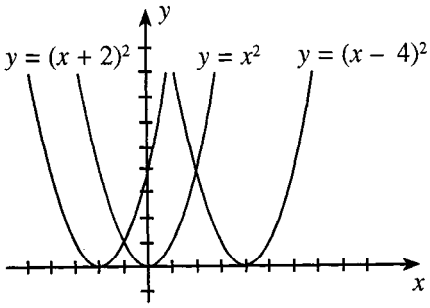
A los desplazamientos (horizontal y vertical) también se les llama *traslaciones* o *corrimientos.*

EJEMPLO 4 ***Desplazamiento horizontal de una gráfica***

Trazar la gráfica de f:

(a) $f(x) = (x - 4)^2$ **(b)** $f(x) = (x + 2)^2$

FIGURA 3.49



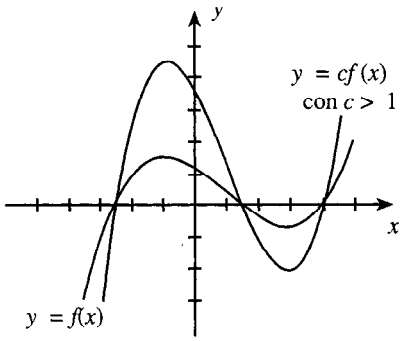
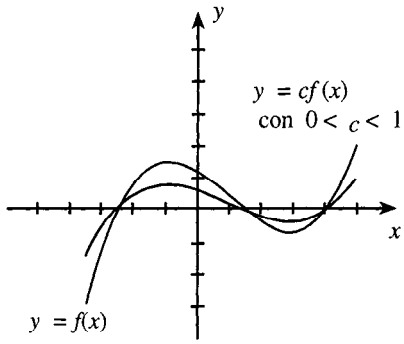
SOLUCIÓN La gráfica de $y = x^2$ aparece en la Fig. 3.49.

(a) Al desplazar la gráfica de $y = x^2$, 4 unidades hacia la derecha, se tiene la de $y = (x - 4)^2$, que se ve en la figura.

(b) Al trasladar la gráfica de $y = x^2$, 2 unidades hacia la izquierda, se obtiene la de $y = (x + 2)^2$, que también se ve en la figura.

Para obtener la gráfica de $y = cf(x)$, para algún número real c, se puede *multiplicar* por c las ordenadas de puntos de la gráfica de $y = f(x)$. Por ejemplo, si $y = 2f(x)$, se duplican las ordenadas, o si $y = \frac{1}{2}f(x)$, se multiplica cada ordenada por $\frac{1}{2}$. A este procedimiento se le llama **ampliar** (o expandir) **verticalmente** la gráfica de f, si $c > 1$, o bien **reducir** (o comprimir **verticalmente** la gráfica de f (si $0 < c < 1$). En la tabla siguiente se resume lo anterior

Ampliación o compresión vertical de la gráfica de $y = f(x)$

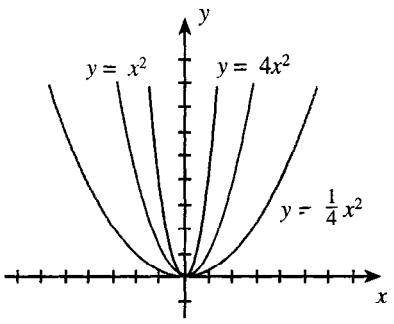
Ecuación	Efecto sobre la gráfica	Interpretación gráfica
$y = cf(x)$, donde $c > 1$	La gráfica de f se amplía verticalmente en un factor c.	
$y = cf(x)$, donde $0 < c < 1$	La gráfica de f se reduce verticalmente en un factor $1/c$.	

EJEMPLO 5 ***Reducir o ampliar verticalmente una gráfica***

Graficar la ecuación:

(a) $y = 4x^2$ **(b)** $y = \frac{1}{4}x^2$

FIGURA 3.50

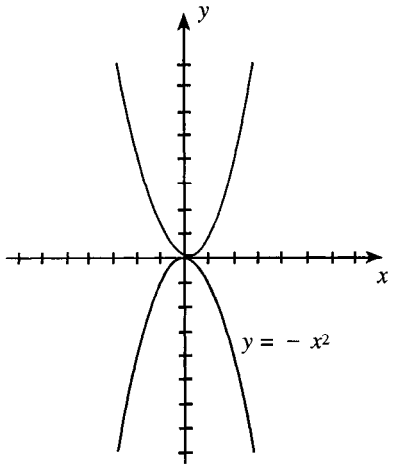


SOLUCIÓN

(a) Para trazar la gráfica de $y = 4x^2$, se toma la de $y = x^2$ en la Fig. 3.50, y se multiplica por 4 la ordenada de cada punto. Con esto se amplía verticalmente la gráfica de $y = x^2$ en un factor de 4, y se obtiene una parábola más angosta y más aguda en su vértice, como se ve en la figura.

(b) La gráfica de $y = \frac{1}{4}x^2$ se puede trazar si se multiplica por $\frac{1}{4}$ cada una de las ordenadas de los puntos de la gráfica de $y = x^2$. Con esto, la de $y = x^2$ se comprime verticalmente en un factor de $1/\frac{1}{4} = 4$, y se obtiene una parábola más ancha y menos aguda en el vértice, como se ve en la Fig. 3.50.

FIGURA 3.51



Podemos obtener la gráfica de $y = -f(x)$ multiplicando por -1 la ordenada de cada punto de la gráfica de $y = f(x)$. Así, cada punto (a, b) de la gráfica de $y = f(x)$ que está arriba del eje x determina un punto $(a, -b)$ en la gráfica de $y = -f(x)$, que está bajo dicho eje. Igualmente, si (c, d) queda abajo del eje x, es decir es, $d < 0$, entonces $(c, -d)$ queda arriba del eje x. La gráfica de $y = -f(x)$ es una **reflexión** de la de $y = f(x)$ en el eje x o con respecto a este eje.

EJEMPLO 6 ***Reflexión de una gráfica en el eje x***

Trazar la gráfica de $y = -x^2$.

SOLUCIÓN Se puede obtener localizando puntos; sin embargo, como ya estamos familiarizados con la gráfica de $y = x^2$, la trazamos como en la Fig. 3.51, y a continuación se multiplican por -1 las ordenadas de sus puntos. Este procedimiento da como resultado la reflexión en el eje x, como se ve en la figura.

A veces es útil comparar las gráficas de $y = f(x)$ y $y = f(cx)$, donde $c \neq 0$. En este caso, los valores de la función $f(x)$ para

$$a \leq x \leq b$$

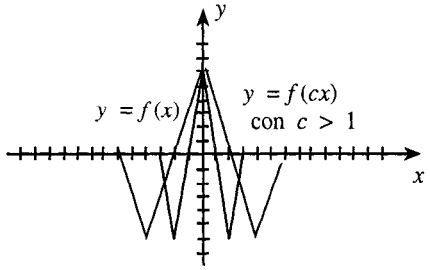
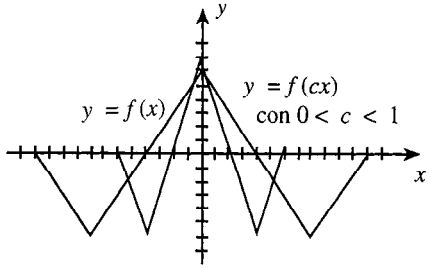
son los mismos que los de la función $f(cx)$ para

$$a \leq cx \leq b \qquad \text{o, lo que es lo mismo,} \qquad \frac{a}{c} \leq x \leq \frac{b}{c}.$$

Esto quiere decir que la gráfica de f está **reducida horizontalmente** (si $c > 1$) o **ampliada horizontalmente** (si $0 < c < 1$), como se indica en la tabla de la página siguiente.

Si $c < 0$, entonces la gráfica de $y = f(cx)$ se puede obtener reflejando la de $y = f(|c|\, x)$ en el eje y. Por ejemplo, para trazar la gráfica de $y = f(-2x)$, se refleja la gráfica de $y = f(2x)$ con respecto al eje y.

Ampliación o reducción horizontal de la gráfica de $y = f(x)$

Ecuación	Efecto sobre la gráfica	Interpretación gráfica
$y = f(cx)$, donde $c > 1$	La gráfica de f está comprimida horizontalmente en un factor c	
$y = f(cx)$, donde $0 < c < 1$	La gráfica de f está expandida horizontalmente en un factor $1/c$.	

EJEMPLO 7 ***Comprimir o expandir horizontalmente una gráfica***

Si $f(x) = x^3 - 4x^2$, trazar las gráficas de $y = f(x)$, $y = f(2x)$ y $y = f(\frac{1}{2}x)$.

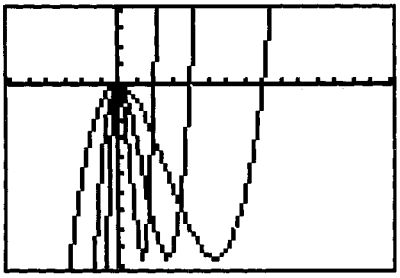
SOLUCIÓN Se tiene lo siguiente:

$$y = f(x) = x^3 - 4x^2 = x^2(x - 4)$$

$$y = f(2x) = (2x)^3 - 4(2x)^2 = 8x^3 - 16x^2 = 8x^2(x - 2)$$

$$y = f(\tfrac{1}{2}x) = (\tfrac{1}{2}x)^3 - 4(\tfrac{1}{2}x)^2 = \tfrac{1}{8}x^3 - x^2 = \tfrac{1}{8}x^2(x - 8)$$

FIGURA 3.52 [– 6, 15] por [–10, 4]



Nótese que las abscisas en el origen de la gráfica de $y = f(2x)$ son 0 y 2, las cuales también son $\frac{1}{2}$ de las abscisas de 0 y 4 para $y = f(x)$. Esto indica una compresión horizontal en un factor de 2.

Las abscisas en el origen de la gráfica de $y = f(\frac{1}{2}x)$ son 0 y 8, y son 2 veces las abscisas en el origen de $y = f(x)$. Esto indica una ampliación horizontal en un factor de $1/\frac{1}{2} = 2$.

En la Fig. 3.52 se ven las gráficas obtenidas con una calculadora con graficación provista de cuadro visual de [– 6, 15] por [–10, 4].

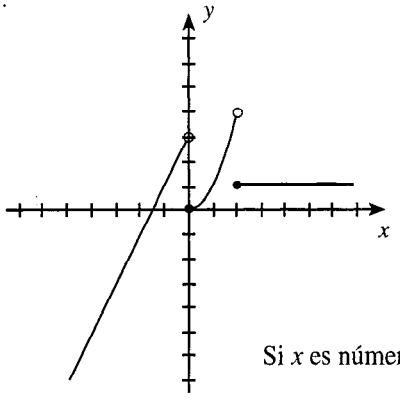
Hay funciones que se representan mediante más de una expresión, como en los ejemplos siguientes. Se las llama **funciones definidas parte por parte** (en inglés *piecewise*).

EJEMPLO 8 ***Trazo de la gráfica de una función definida parte por parte***

Trazar la gráfica de la función f si

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \le x < 2 \\ 1 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

FIGURA 3.53



SOLUCIÓN Si $x < 0$, entonces $f(x) = 2x + 3$, y la gráfica de f coincide con la recta $y = 2x + 3$. Con esto se obtiene la parte de la gráfica que está a la izquierda del eje y, que se ve en la Fig. 3.53. El círculo pequeño indica que el punto (0, 3) *no está* en la gráfica.

Si $0 \leq x < 2$, se usa x^2 para calcular valores de f y, por consiguiente, esta parte de la gráfica de f coincide con la parábola $y = x^2$, como se ve en la figura. Nótese que el punto (2, 4) no pertenece a la gráfica.

Finalmente, si $x \geq 2$, los valores de f siempre son 1. Así, la gráfica de f para $x \geq 2$ es la media recta horizontal que se ve en la Fig. 3.53.

Si x es número real, se define el símbolo $[\![x]\!]$ como sigue:

$$[\![x]\!] = n, \text{ siendo } n \text{ el entero mayor tal que } n \leq x$$

Si se identifica a $\mathbb{R}$ con los puntos de una recta numérica, entonces n es el primer entero a la *izquierda* de x, o *igual* a x.

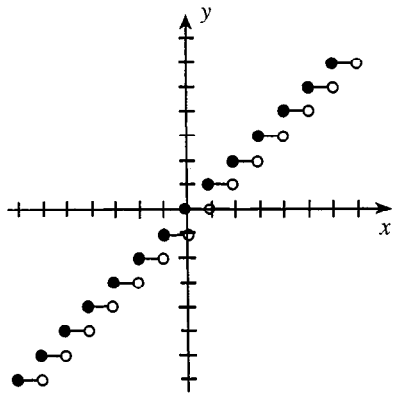
EJEMPLO ILUSTRATIVO

El símbolo $[\![x]\!]$

- $[\![0.5]\!] = 0$
- $[\![1.8]\!] = 1$
- $[\![\sqrt{5}]\!] = 2$
- $[\![3]\!] = 3$
- $[\![-3]\!] = -3$
- $[\![-2.7]\!] = -3$
- $[\![-\sqrt{3}]\!] = -2$
- $[\![-0.5]\!] = -1$

La **función mayor entero** f se define mediante $f(x) = [\![x]\!]$.

FIGURA 3.54



EJEMPLO 9 ***Trazo de la gráfica de la función mayor entero***

Graficar la función citada.

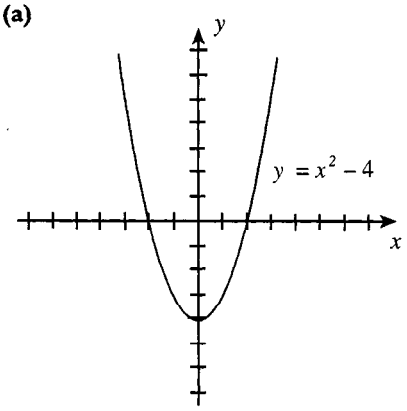
SOLUCIÓN A continuación se da una lista de las coordenadas de algunos puntos de la gráfica.

Valores de x	$f(x) = [\![x]\!]$
⋮	⋮
$-2 \leq x < -1$	-2
$-1 \leq x < 0$	-1
$0 \leq x < 1$	0
$1 \leq x < 2$	1
$2 \leq x < 3$	2

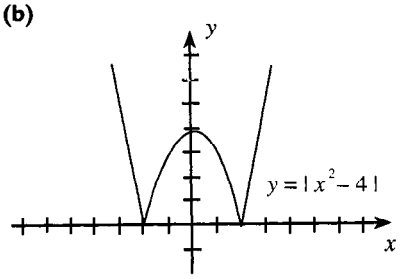
Siempre que x está entre enteros sucesivos, la parte correspondiente de la gráfica es una recta horizontal. Parte de la gráfica aparece en la Fig. 3.54. Esta gráfica continúa indefinidamente hacia la derecha y hacia la izquierda.

FIGURA 3.55

(a)



(b)



En el siguiente ejemplo intervienen valores absolutos.

EJEMPLO 10 ***Gráfica de una ecuación que contiene un valor absoluto***

Trazar la gráfica de $y = |x^2 - 4|$.

SOLUCIÓN En la Fig. 3.48 graficamos $y = x^2 - 4$, se vuelve a presentar esta gráfica en la Fig. 3.55(a). Notaremos lo siguiente:

(1) Si $x \leq -2$, o bien $x \geq 2$, entonces $x^2 - 4 \geq 0$ y, por lo tanto, $|x^2 - 4| = x^2 - 4$.

(2) Si $-2 < x < 2$, entonces $x^2 - 4 < 0$ y, por lo tanto, $|x^2 - 4| = -(x^2 - 4)$.

Se deduce de (1) que las gráficas de $y = |x^2 - 4|$ y $y = x^2 - 4$ coinciden cuando $|x| \geq 2$. De (2) se ve que si $|x| < 2$, entonces la gráfica de $y = |x^2 - 4|$ es la reflexión de la gráfica de $y = x^2 - 4$ en el eje x. Con esto se obtiene la gráfica de la Fig. 3.55(b).

En el Cap. 2 se aplican métodos algebraicos para resolver desigualdades en las que intervienen valores absolutos de polinomios de grado 1, como

$$|2x - 5| < 7 \qquad \text{y} \qquad |5x + 2| \geq 3.$$

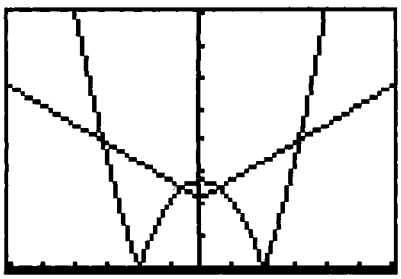
Se pueden investigar desigualdades mucho más complicadas con un dispositivo graficador, como veremos en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 11 ***Resolver en forma gráfica una desigualdad de valor absoluto***

Estimar las soluciones de

$$|0.14x^2 - 13.72| > |0.58x| + 11.$$

FIGURA 3.56 [–30, 30] por [0, 40]



SOLUCIÓN Para resolver la desigualdad, hacemos las asignaciones

$$Y_1 = \text{ABS}(0.14x^2 - 13.72) \qquad \text{y} \qquad Y_2 = \text{ABS}(0.58x) + 11$$

y se estiman los valores de x para los cuales la gráfica de Y_1 está *arriba* de la gráfica de Y_2. Después de algunos tanteos, se selecciona el cuadro visual de [–30, 30] por [0, 40], y se obtienen gráficas semejantes a las de la Fig. 3.56, en la cual cada intervalo representa 5 unidades. Como hay simetría con respecto al eje y, basta determinar las abscisas de los puntos de intersección de las gráficas para $x > 0$. Con los medios de trazo y amplificación, se obtiene $x \approx 2.80$ y $x \approx 15.52$. En la Fig. 3.56 se observa que la solución aproximada es

$$(-\infty, -15.52) \cup (-2.80, 2.80) \cup (15.52, \infty).$$

EJERCICIOS 3.5

Ejercicios 1–10: Determine si f es par, impar, o de ninguno de los dos tipos.

1 $f(x) = 5x^3 + 2x$

2 $f(x) = |x| - 3$

3 $f(x) = 3x^4 + 2x^2 - 5$

4 $f(x) = 7x^5 - 4x^3$

5 $f(x) = 8x^3 - 3x^2$

6 $f(x) = 12$

7 $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

8 $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$

9 $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}$

10 $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{x}$

Ejercicios 11–24: Trace, en el mismo plano coordenado, las gráficas de f para los valores dados de c. Aplique la simetría, el desplazamiento, la ampliación, la reducción o la reflexión.

11 $f(x) = |x| + c$; $c = -3, 1, 3$

12 $f(x) = |x - c|$; $c = -3, 1, 3$

13 $f(x) = -x^2 + c$; $c = -4, 2, 4$

14 $f(x) = 2x^2 - c$; $c = -4, 2, 4$

15 $f(x) = 2\sqrt{x} + c$; $c = -3, 0, 2$

16 $f(x) = \sqrt{9 - x^2} + c$; $c = -3, 0, 2$

17 $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x - c}$; $c = -2, 0, 3$

18 $f(x) = -\frac{1}{2}(x - c)^2$; $c = -2, 0, 3$

19 $f(x) = c\sqrt{4 - x^2}$; $c = -2, 1, 3$

20 $f(x) = (x + c)^3$; $c = -2, 1, 2$

21 $f(x) = cx^3$; $c = -\frac{1}{3}, 1, 2$

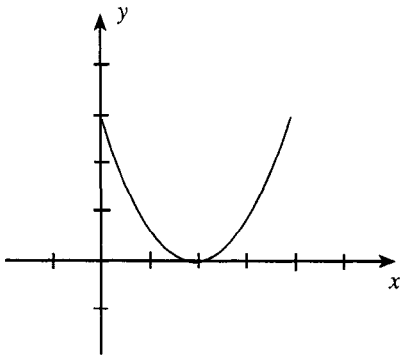
22 $f(x) = (cx)^3 + 1$; $c = -1, 1, 4$

23 $f(x) = \sqrt{cx} - 1$; $c = -1, \frac{1}{9}, 4$

24 $f(x) = -\sqrt{16 - (cx)^2}$; $c = 1, \frac{1}{2}, 4$

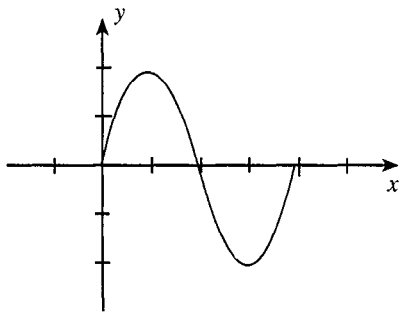
Ejercicios 25–26: En la figura se muestra la gráfica de una función, f, cuyo dominio es [0, 4]. Graficar la ecuación dada.

25



(a) $y = f(x + 3)$ (b) $y = f(x - 3)$
(c) $y = f(x) + 3$ (d) $y = f(x) - 3$
(e) $y = -3f(x)$ (f) $y = -\frac{1}{3}f(x)$
(g) $y = f(-\frac{1}{2}x)$ (h) $y = f(2x)$
(i) $y = -f(x + 2) - 3$ (j) $y = f(x - 2) + 3$

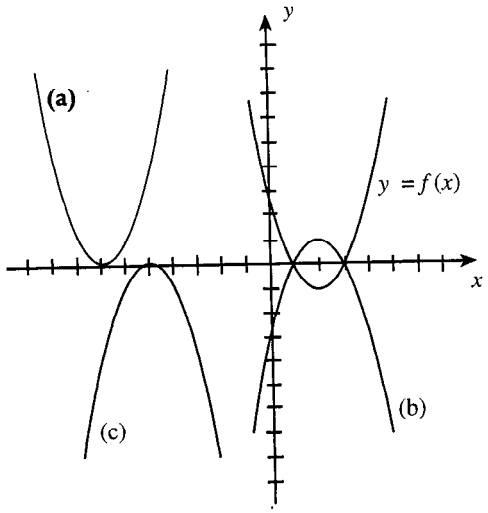
26



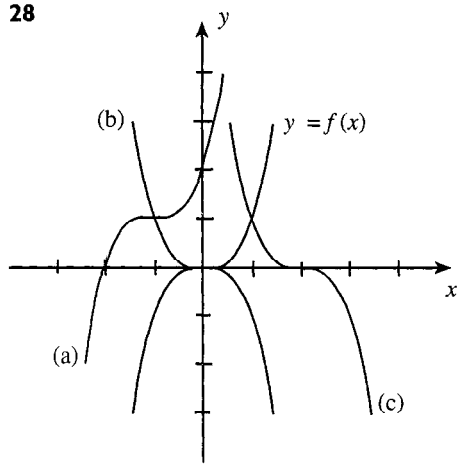
(a) $y = f(x - 2)$ (b) $y = f(x + 2)$
(c) $y = f(x) - 2$ (d) $y = f(x) + 2$
(e) $y = -2f(x)$ (f) $y = -\frac{1}{2}f(x)$
(g) $y = f(-2x)$ (h) $y = f(\frac{1}{2}x)$
(i) $y = -f(x + 4) - 2$ (j) $y = f(x - 4) + 2$

Ejercicios 27–30: Se da la gráfica de una función f junto con gráficas de otras tres funciones, (a), (b) y (c). Con las propiedades de simetría, desplazamiento y reflexión, determine las ecuaciones para las gráficas (a), (b) y (c) en términos de f.

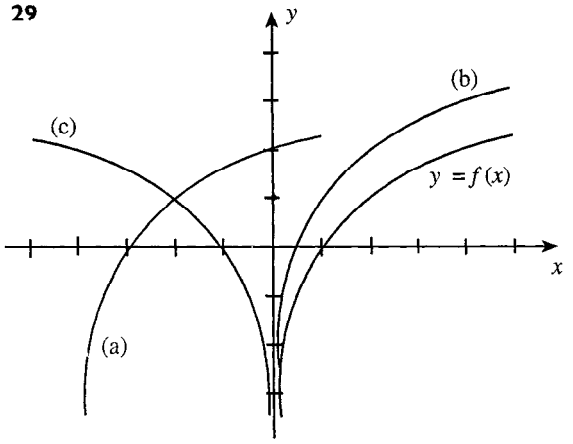
27



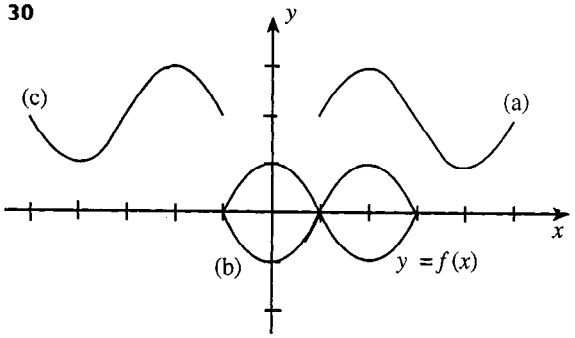
28



29



30



Ejercicios 31–36: Trace la gráfica de *f*.

31 $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \le -1 \\ -2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

32 $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \text{ es entero} \\ -2 & \text{si } x \text{ no es entero} \end{cases}$

33 $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -2 \\ -x + 1 & \text{si } |x| \le 2 \\ -3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

34 $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \le x < 1 \\ -2 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

35 $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \le -1 \\ x^3 & \text{si } |x| < 1 \\ -x + 3 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

36 $f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x \le -2 \\ -x^2 & \text{si } -2 < x < 1 \\ -x + 4 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

Ejercicios 37 y 38: El símbolo $[\![x]\!]$ representa los valores de la función mayor entero. Trace una gráfica de *f*.

37 **(a)** $f(x) = [\![x - 3]\!]$ **(b)** $f(x) = [\![x]\!] - 3$
(c) $f(x) = 2[\![x]\!]$ **(d)** $f(x) = [\![2x]\!]$
(e) $f(x) = [\![-x]\!]$

38 **(a)** $f(x) = [\![x + 2]\!]$ **(b)** $f(x) = [\![x]\!] + 2$
(c) $f(x) = \frac{1}{2}[\![x]\!]$ **(d)** $f(x) = [\![\frac{1}{2}x]\!]$
(e) $f(x) = -[\![-x]\!]$

Ejercicios 39 y 40: Explique por qué la gráfica de la ecuación no es la de una función.

39 $x = y^2$ **40** $x = -|y|$

41 Si f es función impar y g es función par, ¿fg es par, impar, o ni una cosa ni otra?

42 Hay una función con dominio $\mathbb{R}$ que es par e impar a la vez. Defina esa función.

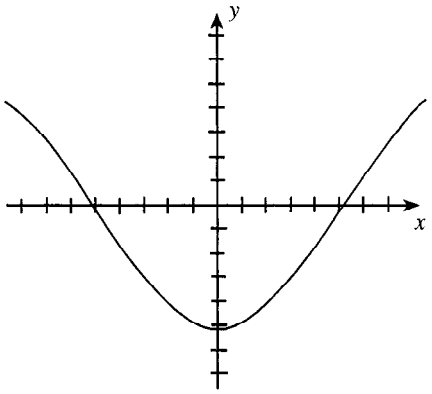
Ejercicios 43–46: Trace la gráfica de la ecuación.

43 $y = |9 - x^2|$ **44** $y = |x^3 - 1|$

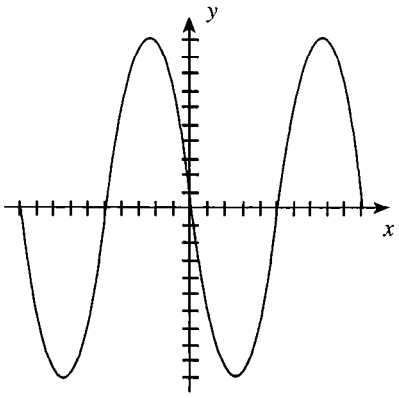
45 $y = |\sqrt{x} - 1|$ **46** $y = ||x| - 1|$

Ejercicios 47 y 48: Se tiene la gráfica de $y = f(x)$ que se ve en la figura. Elabore la gráfica de $y = |f(x)|$.

47



48



49 *Tasas de impuesto* Cierto país grava los primeros \$20 000(dólares) de ingreso de una persona con una tasa de 15%, y todos los ingresos adicionales a \$20 000 se gravan al 20%. Deduzca una función T definida parte por parte que especifique el impuesto total sobre un ingreso de x dólares.

50 *Tarifas telefónicas* Una compañía telefónica cobra 25¢ por una llamada de larga distancia que no sea mayor de 1 minuto; por llamadas más largas cobra 15¢ por cada minuto adicional. Deduzca una función C, definida parte por parte, que especifique el costo total de una llamada de larga distancia de x minutos.

51 *Tarifas de regalía* Un libro, encuadernado en rústica, se vende a \$12. Al autor se le pagan regalías de 10% por los primeros 10 000 ejemplares que se vendan; 12.5% por los siguientes 5 000, y 15% por todo ejemplar adicional. Determine una función R, definida parte por parte, que especifique las regalías totales si se venden x ejemplares.

52 *Tarifas eléctricas* Una empresa eléctrica cobra \$0.0577 (dólares) por kilowatt/hora (kWh) a sus clientes por los primeros 1 000 kWh usados; \$0.0532 por kWh en los siguientes 4 000 kWh; y \$0.0511 por todo kWh adicional a 5 000. Determine una función C, definida por intervalos para el consumo facturado de x kWh.

C **Ejercicios 53 – 56: Determine las soluciones de cada desigualdad.**

53 $|1.3x + 2.8| < 1.2x + 5$

54 $|0.3x| - 2 > 2.2 - 0.63x^2$

55 $|1.2x^2 - 10.8| > 1.36x + 4.08$

56 $|\sqrt{16 - x^2} - 3| < 0.12x^2 - 0.3$

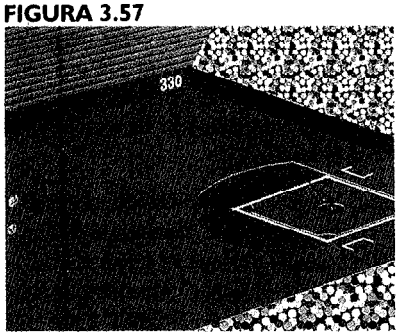
3.6 FUNCIONES CUADRÁTICAS

Si $a \neq 0$, la gráfica de $y = ax^2$ es una parábola con su vértice en el origen (0, 0), que abre hacia arriba si $a > 0$, o hacia abajo si $a < 0$ (véanse, por ejemplo, las Figs. 50 y 51). En esta sección se demuestra que la gráfica de una ecuación de la forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

se puede obtener mediante desplazamientos vertical, horizontal, o por ambos, de la gráfica de $y = ax^2$ y, por consiguiente, también es una parábola. Una aplicación importante de esas ecuaciones es representar la trayectoria de un objeto cerca de la superficie de la Tierra, cuando la única fuerza que actúa sobre él es la atracción gravitacional. Para dar un ejemplo, si un jardinero de un equipo de béisbol lanza una pelota al diamante, como se ve en la Fig. 3.57, y si

FIGURA 3.57



la resistencia del aire y otras fuerzas externas son mínimas, entonces la trayectoria de la pelota es una parábola. Si se definen ejes adecuados de coordenadas, entonces la trayectoria coincide con la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$, para ciertas a, b y c. A la función que determina esa ecuación se le llama *función cuadrática.*

Definición de una función cuadrática

Una función f es **función cuadrática** si

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

siendo a, b y c números reales, y $a \neq 0$

Si $b = c = 0$ en la definición anterior, entonces $f(x) = ax^2$; la gráfica es una parábola con vértice en el origen. Si $b = 0$ y $c \neq 0$, entonces

$$f(x) = ax^2 + c,$$

y, según la descripción de traslaciones verticales en la Secc. 3.5, la gráfica es una parábola con vértice en el punto $(0, c)$ del eje y. El ejemplo que sigue muestra otras características.

FIGURA 3.58

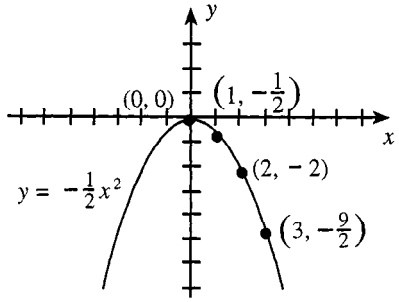
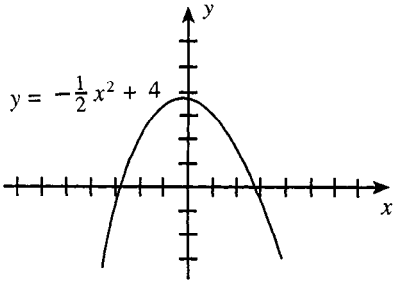


FIGURA 3.59



EJEMPLO 1 ***Gráfica de una función cuadrática***

Trazar la gráfica de f para

(a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ **(b)** $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$

SOLUCIÓN

(a) Ya que f es par, la gráfica de f (es decir, de $y = -\frac{1}{2}x^2$) es simétrica con respecto al eje y. Tiene forma semejante, pero es más ancha que la parábola $y = -x^2$, que se muestra en la Fig. 3.51 de la Secc. 3.5. Algunos de los puntos de esta gráfica son $(0, 0)$, $(1, -\frac{1}{2})$, $(2, -2)$ y $(3, -\frac{9}{2})$. Se aplica la simetría y se traza la gráfica, obteniendo lo que muestra la Fig. 3.58.

(b) Para determinar la gráfica de $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4$, se desplaza la gráfica de $y = -\frac{1}{2}x^2$ hacia arriba una distancia 4, y se obtiene lo que muestra la Fig. 3.59.

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, y se tiene que $b \neq 0$, entonces, completando el cuadrado, se puede cambiar la forma a

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

para determinados números reales, h y k. Esta técnica se aplica en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 ***Expresar una función cuadrática en la forma*** $f(x) = a(x - h)^2 + k$

Si $f(x) = 3x^2 + 24x + 50$, expresar $f(x)$ en la forma $a(x - h)^2 + k$.

SOLUCIÓN Antes de completar el cuadrado *es esencial sacar al coeficiente de* x^2 *como factor común de los dos primeros términos de* $f(x)$, como sigue:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 + 24x + 50 && \text{función dada} \\ &= 3(x^2 + 8x + \quad) + 50 && \text{se saca 3 como factor de } 3x^2 + 24x \end{aligned}$$

Ahora se completa el cuadrado de la expresión $x^2 + 8x$ del paréntesis, sumando el cuadrado de la mitad del coeficiente de x, es decir es, $\left(\frac{8}{2}\right)^2$, o sea, 16. Sin embargo, si se suma 16 a la expresión entre paréntesis, entonces, debido al factor 3, en realidad se está sumando 48 a $f(x)$. Por lo tanto, se debe compensar restando 48:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(x^2 + 8x + \quad) + 50 && \text{función dada} \\ &= 3(x^2 + 8x + 16) + (50 - 48) && \text{se completa el cuadrado para } x^2 + 8x \\ &= 3(x + 4)^2 + 2 && \text{ecuación equivalente} \end{aligned}$$

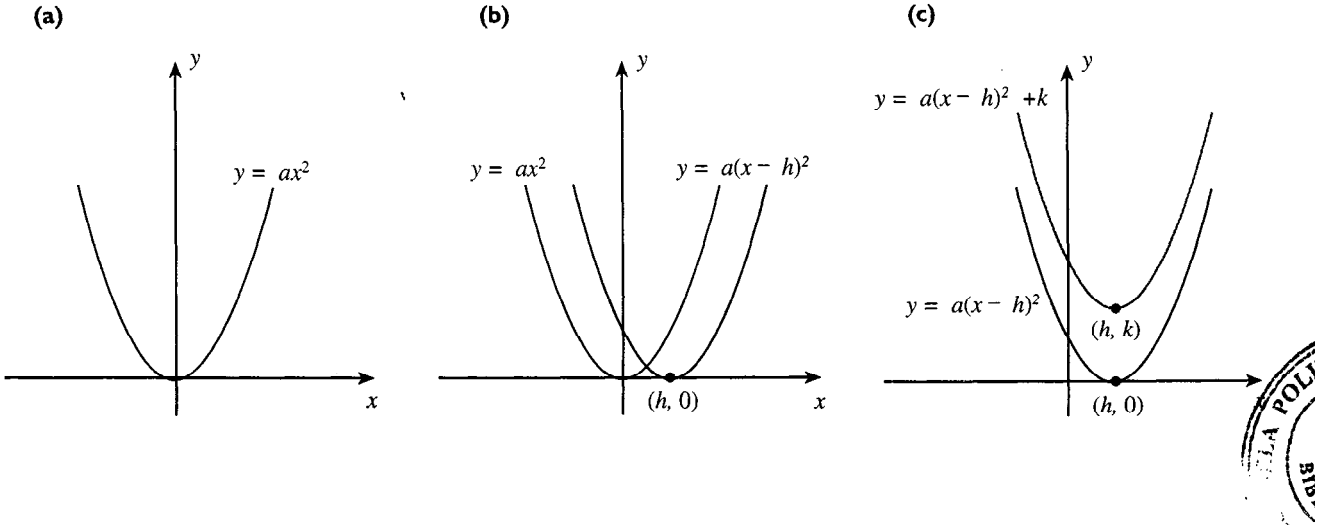
Esta última expresión tiene la forma $a(x - h)^2 + k$, con $a = 3$, $h = -4$ y $k = 2$.

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, entonces, al completar el cuadrado como en el Ejemplo 2, se ve que la gráfica de f es la misma que la de una ecuación de la forma

$$y = a(x - h)^2 + k.$$

Se puede obtener la gráfica de esta ecuación a partir de la de $y = ax^2$, que se ve en la Fig. 3.60(a), mediante una traslación horizontal y una vertical, como sigue. Primero, como en la Fig 60(b), se obtiene la gráfica de $y = a(x - h)^2$ desplazando la gráfica de $y = ax^2$ ya sea hacia la derecha o hacia la izquierda, dependiendo del signo de h (la figura muestra el caso en el que $h > 0$). A continuación, como en la Fig. 3.60(c), se traslada la gráfica de (b), verticalmente, a una distancia $|k|$ (la figura muestra el caso en el cual $k > 0$). Se deduce que *la gráfica de una función cuadrática es una parábola con eje vertical.*

FIGURA 3.60



El esquema de la Fig. 3.60(c) muestra una gráfica posible de la ecuación $y = ax^2 + bx + c$. Si $a > 0$, el punto (h, k) es el más bajo de la parábola, y la función f tiene un **valor mínimo**, $f(h) = k$. Si $a < 0$, la parábola se abre hacia abajo y el punto (h, k) es el punto más alto de ella. En este caso, la función f tiene un **valor máximo**, $f(h) = k$.

Se ha llegado al siguiente resultado.

Ecuación normal de una parábola con un eje vertical

La gráfica de la ecuación

$$y = a(x - h)^2 + k$$

cuando $a \neq 0$ es una parábola con vértice $V(h, k)$ y eje vertical. La parábola es cóncava hacia arriba si $a > 0$, o hacia abajo si $a < 0$.

Por comodidad, a veces se dice *la parábola* $y = ax^2 + bx + c$ cuando se habla de la gráfica de esta ecuación.

EJEMPLO 3 *Determinar la ecuación normal de una parábola*

Expresar $y = 2x^2 - 6x + 4$ en forma de ecuación normal de una parábola con eje vertical. Determinar la posición del vértice y trazar la gráfica.

FIGURA 3.61

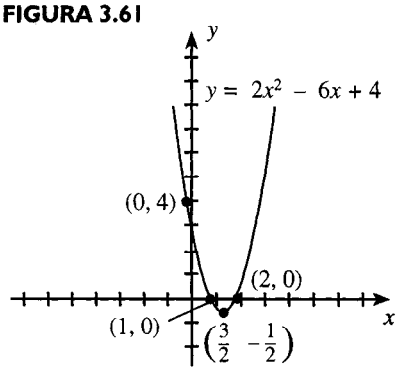
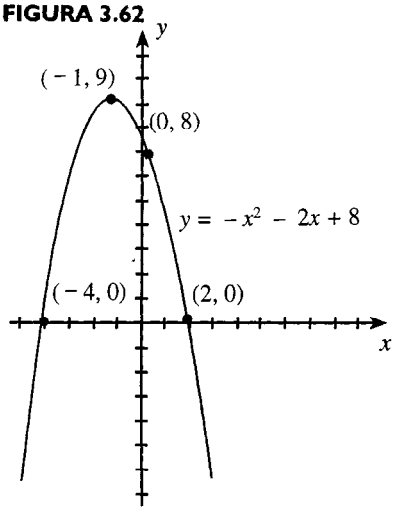


FIGURA 3.62



SOLUCIÓN

$y = 2x^2 - 6x + 4$	ecuación dada
$= 2(x^2 - 3x + \quad) + 4$	se saca 2 como factor de $2x^2 - 6x$
$= 2(x^2 - 3x + \frac{9}{4}) + (4 - \frac{9}{2})$	se completa el cuadrado en $x^2 - 3x$
$= 2(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{2}$	ecuación equivalente

La última ecuación tiene la forma de la ecuación normal de una parábola, con $a = 2, h = \frac{3}{2}$ y $k = -\frac{1}{2}$. Por consiguiente, el vértice, $V(h, k)$, de la parábola es $V(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$. Como $a = 2 > 0$, la parábola abre hacia arriba.

Para calcular la ordenada en el origen de la gráfica de $y = 2x^2 - 6x + 4$, se hace que $x = 0$, y se obtiene $y = 4$. Para el cálculo de las abscisas en el origen, o intersecciones con el eje x, se hace $y = 0$ y se resuelve la ecuación $2x^2 - 6x + 4 = 0$, o bien, la ecuación $2(x - 1)(x - 2) = 0$, y se tiene $x = 1$ y $x = 2$. Cuando se localiza el vértice, y con las intersecciones con los ejes, se obtienen los puntos suficientes para trazar un esquema razonablemente exacto (véase Fig. 3.61).

EJEMPLO 4 *Determinación de la ecuación normal de una parábola*

Expresar $y = -x^2 - 2x + 8$ en forma de ecuación normal de una parábola con eje vertical. Determinar la posición del vértice y trazar la gráfica.

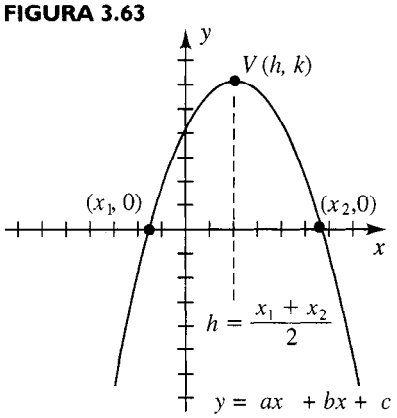
SOLUCIÓN

$y = -x^2 - 2x + 8$	ecuación dada
$= -(x^2 + 2x + \quad) + 8$	se saca -1 como factor común de $-x^2 - 2x$
$= -(x^2 + 2x + 1) + (8 + 1)$	se completa el cuadrado en $x^2 + 2x$
$= -(x + 1)^2 + 9$	ecuación equivalente

Esta es la ecuación normal de una parábola con $h = -1$, $k = 9$ y, por consiguiente, el vértice se encuentra en $(-1, 9)$. Ya que $a = -1 < 0$, la parábola abre hacia abajo.

La ordenada en el origen de la gráfica de $y = -x^2 - 2x + 8$ es el término constante, 8. Para determinar las abscisas en el origen, se resuelve la ecuación $-x^2 - 2x + 8 = 0$, o lo que es lo mismo, $x^2 + 2x - 8 = 0$. Al factorizar se obtiene $(x + 4)(x - 2) = 0$ y, por consiguiente, las abscisas en el origen son $x = -4$ y $x = 2$. Con esta información se traza el esquema de la Fig. 3.62.

FIGURA 3.63



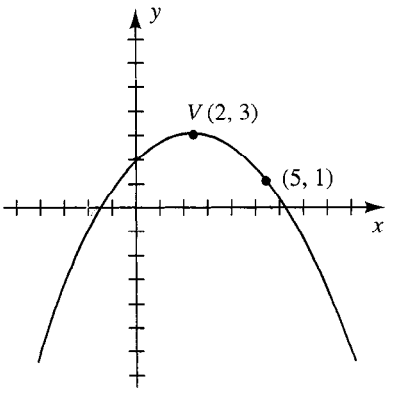
Si una parábola, $y = ax^2 + bx + c$ tiene abscisas en el origen x_1 y x_2, como se ve en la Fig. 3.63 para $a < 0$, entonces el eje de la parábola es la recta vertical $x = (x_1 + x_2)/2$, que pasa por el punto medio de $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$. Por consiguiente, la abscisa h del vértice (h, k) es $h = (x_1 + x_2)/2$. Algunos casos especiales aparecen en las Figs. 3.61 y 3.62.

En el ejemplo a continuación se encuentra la ecuación de una parábola a partir de ciertos datos.

EJEMPLO 5 ***Determinar la ecuación de una parábola con un vértice dado***

Hallar la ecuación de la parábola que tiene el vértice $V(2, 3)$ y cuyo eje es vertical. La parábola pasa por el punto (5, 1).

FIGURA 3.64



SOLUCIÓN La Fig. 3.64 muestra el vértice V, el punto (5, 1) y una posición posible de la parábola. Se aplica la ecuación normal

$$y = a(x - h)^2 + k$$

con $h = 2$ y $k = 3$. Con esto se obtiene

$$y = a(x - 2)^2 + 3.$$

Para calcular a, se aplica el hecho de que (5, 1) pertenece a la parábola y, por consiguiente, es una solución de esta ecuación. Así,

$$1 = a(5 - 2)^2 + 3, \quad \text{o sea,} \quad a = -\tfrac{2}{9}.$$

Por lo tanto, la ecuación normal de la parábola es

$$y = -\tfrac{2}{9}(x - 2)^2 + 3.$$

El teorema que sigue es una fórmula sencilla para localizar el vértice de una parábola.

Teorema para ubicar el vértice de una parábola

El vértice de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ tiene la abscisa

$$-\frac{b}{2a}.$$

DEMOSTRACIÓN Se inicia expresando $y = ax^2 + bx + c$ en la forma

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \quad\right) + c.$$

A continuación se completa el cuadrado sumando $\left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right)^2$ a la expresión entre paréntesis:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

Nótese que si $b^2/(4a^2)$ se suma *al interior* del paréntesis, entonces, debido al factor a que se halla *fuera* de él, en realidad se habrá sumado $b^2/(4a)$ a y. Entonces, debemos compensarlo restanto $b^2/(4a)$. La última ecuación se puede escribir en la siguiente forma:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right).$$

Es la ecuación de una parábola que tiene su vértice en (h, k) donde $h = -b/(2a)$ y $k = c - b^2/(4a)$. ■

No es necesario recordar la fórmula de la ordenada del vértice de la parábola en el resultado anterior. Una vez que la abscisa se haya calculado, se puede determinar la ordenada sustituyendo $-b/(2a)$en lugar de x en la ecuación de la parábola.

EJEMPLO 6 ***Localización del vértice de una parábola***

Determinar las coordenadas del vértice de la parábola $y = 2x^2 - 6x + 4$.

SOLUCIÓN Esta parábola se estudió en el Ejemplo 3, y se encontró el vértice completando el cuadrado. Ahora se emplea la fórmula del vértice, haciendo $a = 2$ y $b = -6$, y se obtiene la abscisa

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2(2)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

A continuación se determina la ordenada sustituyendo a x por $\frac{3}{2}$ en la ecuación dada:

$$y = 2(\tfrac{3}{2})^2 - 6(\tfrac{3}{2}) + 4 = -\tfrac{1}{2}$$

Así, el vértice es $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ (véase Fig. 3.61).

Como la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$, cuando a $\neq 0$ es una parábola, se puede emplear la fórmula del vértice para ayudar a localizar el valor máximo o mínimo de una función cuadrática. Específicamente, como la abscisa del vértice V es $-b/(2a)$, la ordenada de V es el valor de $f(-b/(2a))$. Además, como la parábola es cóncava hacia abajo si $a < 0$, y hacia arriba si $a > 0$, este valor es el máximo o mínimo, respectivamente, de f. Se resumen estos hechos como sigue.

Teorema del valor máximo o mínimo de una función cuadrática

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 0$, entonces $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ |

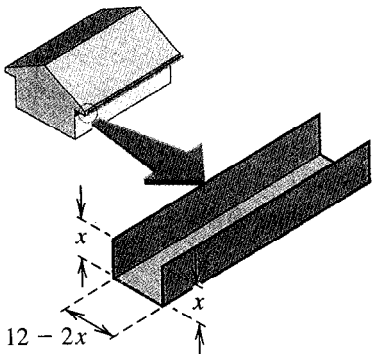
(1) el valor máximo de f si $a < 0$
(2) el valor mínimo de f si $a > 0$

En el ejemplo que sigue se aplica este teorema.

EJEMPLO 7 *Calcular el valor máximo de una función cuadrática*

Se desea hacer un canalón con una lámina larga, rectangular, metálica, de 12 pulg de ancho. Se doblan dos orillas hacia arriba para que queden perpendiculares al fondo. ¿Cuántas pulgadas deben quedar hacia arriba para que el canalón tenga capacidad máxima?

FIGURA 3.65



SOLUCIÓN En la Fig. 3.65 se ve el canalón. Si x representa el número de pulgadas verticales, en cada lado, el ancho de la base del canalón es $12 - 2x$ pulg. La capacidad será mayor cuando el área de la sección transversal del rectángulo cuyos lados son x y $12 - 2x$, tenga su valor máximo. Si $f(x)$ representa esta área, se obtiene que

$$\begin{aligned} f(x) &= x(12 - 2x) \\ &= 12x - 2x^2 \\ &= -2x^2 + 12x, \end{aligned}$$

que posee la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a = -2$, $b = 12$ y $c = 0$. Como f es función cuadrática y $a = -2 < 0$, de acuerdo con el teorema anterior, el valor máximo de f se obtiene en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2(-2)} = 3.$$

Por lo tanto, se deben doblar hacia arriba 3 pulg de cada lado para alcanzar la capacidad máxima.

Otra posibilidad para la solución es que la gráfica de la función $f(x) = x(12 - 2x)$ tiene abscisas en el origen $x = 0$ y $x = 6$. Por lo tanto, el promedio de ellas,

$$x = \frac{0 + 6}{2} = 3,$$

es la abscisa del vértice de la parábola, y el valor que produce la capacidad máxima.

En el Cap. 2 se resolvieron ecuaciones y desigualdades cuadráticas en forma algebraica. En el ejemplo siguiente se indica cómo se pueden resolver con ayuda de una calculadora con graficación (graficadora).

EJEMPLO 8 *Análisis del vuelo de un proyectil*

Un proyectil se dispara verticalmente hacia arriba, desde una altura de 600 pies sobre el piso. Su altura en pies $h(t)$ a los t segundos, está expresada por

$$h(t) = -16t^2 + 803t + 600.$$

(continúa)

(a) Determinar un cuadro visual razonable que abarque todas las características notables de la gráfica de h.
(b) Con una graficadora, estimar en qué momento la altura es de 5 000 pies.
(c) Determinar cuándo el proyectil está a más de 5000 pies sobre el suelo.
(d) ¿Cuánto tiempo estará el proyectil en el aire?

SOLUCIÓN

(a) La gráfica de h en función de t es una parábola cóncava hacia abajo. Para estimar Ymáx (nótese que se emplea x y y indistintamente en lugar de t y h), se aproxima el valor máximo de h. Si

$$t = -\frac{b}{2a} = -\frac{803}{2(-16)} \approx 25.1,$$

se ve que la altura máxima es, aproximadamente $h(25) = 10\,675$.

El proyectil se eleva durante aproximadamente los primeros 25 segundos y, como su altura cuando $t = 0$ es 600 pies, y resulta pequeña en comparación con 10 675, sólo se tarda un poco más que otros 25 segundos para llegar al piso. Como h y t son positivos, un cuadro visual razonable es

$$[0, 60] \quad \text{por} \quad [0, 11{,}000].$$

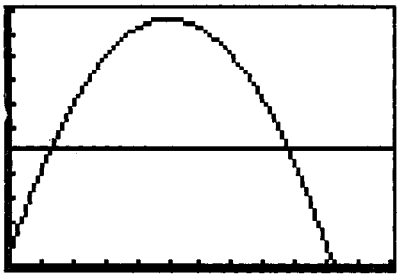
(b) Se desea estimar dónde interseca la gráfica de h a la línea horizontal $h(t) = 5\,000$, y por ello se hacen las siguientes asignaciones:

$$Y_1 = -16x^2 + 803x + 600$$

y

$$Y_2 = 5000$$

FIGURA 3.66 [0, 60] por [0, 11 000]



y con ellas se obtiene en la pantalla una figura semejante a la de la Fig. 3.66. Es importante recordar que la gráfica de Y_1 sólo muestra la altura cuando el tiempo es t, y *no es* la trayectoria del proyectil, que es vertical. Con los medios de trazo y ampliación, se observa que el valor mínimo de t para el cual $h(t) = 5\,000$ es, aproximadamente, 6.3 s.

Como el vértice queda en el eje de la parábola, el otro instante en el cual $h(t)$ es 5 000 es, aproximadamente, 25.1 − 6.3, o sea, 18.8 s *después* de $t = 25.1$; es decir, cuando $t \approx 25.1 + 18.8 = 43.9$ s.

(c) El proyectil se encuentra a más de 5 000 pies sobre el piso cuando la gráfica de la parábola, en la Fig. 3.66, está sobre la recta horizontal, es decir, cuando

$$6.3 < t < 43.9.$$

(d) El proyectil estará en el aire hasta que $h(t) = 0$. Esto corresponde a la intersección con el eje x en la Fig. 3.66. Con los medios de trazo y ampliación, se llega a $t \approx 50.9$ s.(Nótese que, como la ordenada en el origen no es cero, no es correcto duplicar sólo el valor de t en el vértice para calcular el tiempo total de vuelo; sin embargo, esto *sí se podría* aceptar en problemas en los cuales $h(0) = 0$.)

En la Secc. 4.6 se analizan las parábolas con mayor detalle.

EJERCICIOS 3.6

Ejercicios 1 – 4: Determine la ecuación normal de cualquier parábola cuyo vértice sea *V*.

1 $V(-3, 1)$ **2** $V(4, -2)$

3 $V(0, -3)$ **4** $V(-2, 0)$

Ejercicios 5 – 12: Exprese $f(x)$ en la forma $a(x-h)^2 + k$.

5 $f(x) = -x^2 - 4x - 8$ **6** $f(x) = x^2 - 6x + 11$

7 $f(x) = 2x^2 - 12x + 22$ **8** $f(x) = 5x^2 + 20x + 17$

9 $f(x) = -3x^2 - 6x - 5$

10 $f(x) = -4x^2 + 16x - 13$

11 $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 9x - 34$

12 $f(x) = \frac{2}{5}x^2 - \frac{12}{5}x + \frac{23}{5}$

Ejercicios 13 – 22: (a) Calcule el valor máximo o mínimo de $f(x)$. (b) Emplee la fórmula cuadrática para calcular los ceros de f. (c) Trace la gráfica de f.

13 $f(x) = x^2 - 4x$ $f(x) = -x^2 - 6x$

15 $f(x) = -12x^2 + 11x + 15$

16 $f(x) = 6x^2 + 7x - 24$

17 $f(x) = 9x^2 + 24x + 16$ $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$

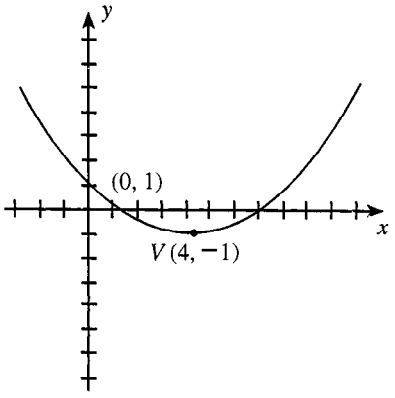
19 $f(x) = x^2 + 4x + 9$ $f(x) = -3x^2 - 6x - 6$

21 $f(x) = -2x^2 + 20x - 43$

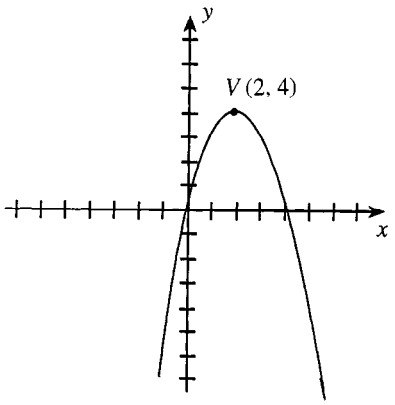
22 $f(x) = 2x^2 - 4x - 11$

Ejercicios 23 – 26: Encuentre la ecuación normal de la parábola que aparece en cada figura.

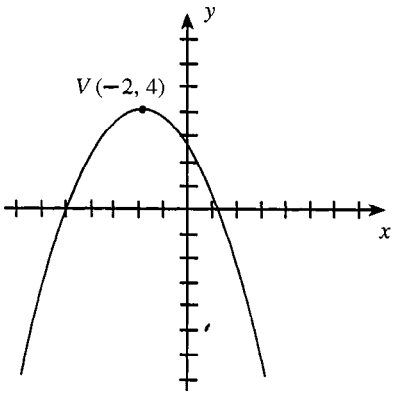
23



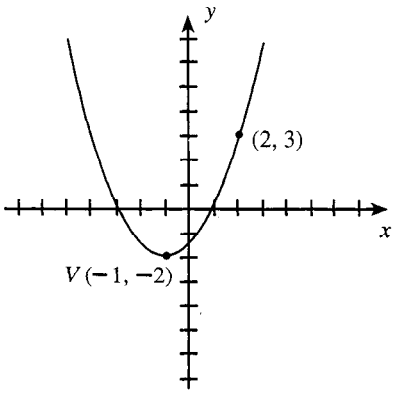
24



25



26



Ejercicios 27–32: Determine la ecuación normal de una parábola con eje vertical, que satisfaga las condiciones dadas.

27 Vértice $(0, -2)$, que pase por $(3, 25)$

28 Vértice $(0, 5)$, que pasa por $(2, -3)$

29 Vértice (3, 5), abscisa en el origen 0

30 Vértice (4, – 7), abscisa en el origen – 4

31 Abscisas en el origen – 3 y 5, ordenada del punto máximo 4

32 Abscisas en el origen 8 y 0, ordenada mínima – 48

Ejercicios 33 y 34: El ozono se encuentra en todos los niveles de la atmósfera terrestre. La concentración de este gas varía tanto con la estación como con la latitud. En Edmonton, Canadá, se determinó experimentalmente la concentración $D(h)$ del ozono (en 10^{-3} cm/km) para altitudes h entre 20 km y 35 km. Para cada $D(h)$ y cada estación, aproximar la altitud a la cual la concentración del ozono es máxima.

33 $D(h) = -0.058h^2 + 2.867h - 24.239$ (otoño)

34 $D(h) = -0.078h^2 + 3.81h - 32.433$ (primavera).

35 ***Crecimiento de los niños*** La tasa de crecimiento y, de un niño, en libras por mes, se relaciona con su peso actual x, en libras, mediante la fórmula $y = cx(21 - x)$, en la cual c es una constante positiva, y $0 < x < 21$. ¿A qué peso se tiene la tasa máxima de crecimiento?

36 ***Rendimiento de gasolina*** El número de millas M que puede viajar cierto automóvil con un galón de gasolina, a una velocidad de v millas por hora, es

$$M = -\frac{1}{30}v^2 + \frac{5}{2}v \text{ para } 0 < v < 70.$$

(a) Calcule la velocidad más económica para un viaje.
(b) Obtenga el valor máximo de M.

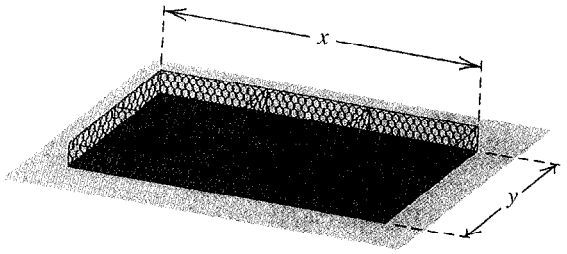
37 ***Altura de un proyectil*** Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba desde la azotea de un edificio, con velocidad inicial de 144 pies/s. Su distancia $s(t)$ en pies sobre el piso a los t segundos está dada por $s(t) = -16t^2 + 144t + 100$.
(a) Calcule su altura máxima sobre el piso.
(b) Obtenga la altura del edificio.

38 ***Movimiento de un proyectil*** Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de v_0 pies/s, y su distancia al piso $s(t)$ en pies a los t segundos, es $s(t) = -16t^2 + v_0t$.
(a) Si el objeto llega al piso pasados 12 s, determine su velocidad inicial v_0.
(b) Calcule su altura máxima sobre el piso.

39 Calcule dos números reales positivos cuya suma sea 40 y cuyo producto sea máximo.

40 Calcule dos números reales cuya diferencia sea 40 y cuyo producto sea mínimo.

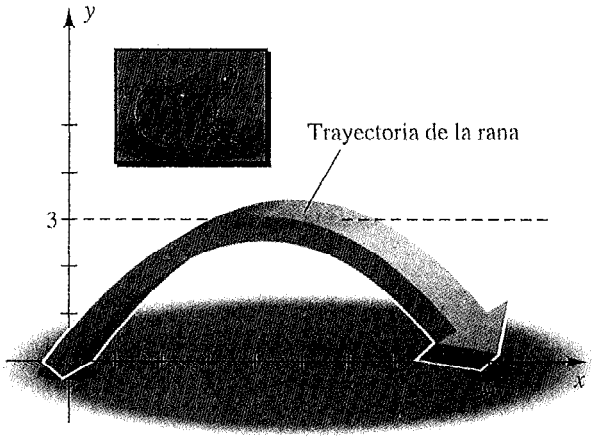
41 ***Construcción de jaulas*** Se van a usar mil pies de tela de alambre para construir seis jaulas para animales, como se ve en la figura.



(a) Exprese el ancho y como función de la longitud, x.
(b) Exprese el área total encerrada A de las jaulas, como función de x.
(c) Calcule las dimensiones que hagan máxima el área encerrada.

42 ***Cercado de un campo*** Un granjero desea cercar un campo rectangular para luego dividirlo en tres terrenos rectangulares, colocando dos cercas paralelas a uno de los lados. Si sólo cuenta con 1 000 yardas de cerca, ¿qué dimensiones harán que el área del rectángulo sea máxima?

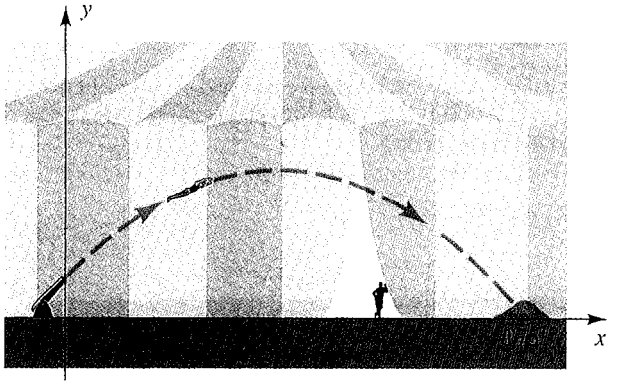
43 ***Animales saltarines*** Las trayectorias de los animales saltadores son, normalmente, parabólicas. La figura muestra un salto de rana en un plano de coordenadas. La longitud del salto es 9 pies, y la altura máxima sobre el piso es 3 pies. Encuentre una ecuación normal para la trayectoria de la rana.



44 ***El proyectil humano*** En la década de los años cuarenta, Emmanuel Zacchini actuaba en el número de la bala humana, en el circo *Ringling Brothers and Barnum & Bailey*. La boca del cañón se hallaba a 15 pies sobre el piso, y la distancia horizontal total recorrida era 175 pies. Cuando el cañón se apunta en un ángulo de 45°, la ecuación del tiro parabólico (véase la figura) tiene la forma $y = ax^2 + x + c$.

(a) Con la información anterior, deduzca una ecuación de la trayectoria.

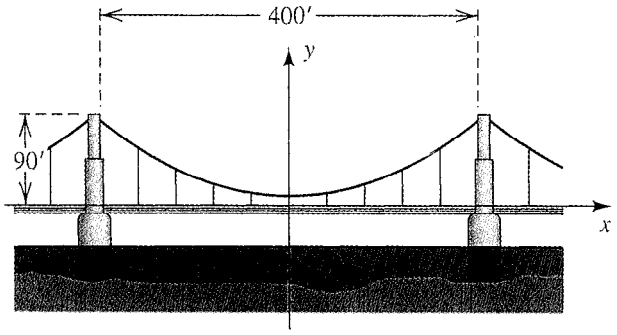
(b) Calcule la altura máxima alcanzada por la bala humana.



45 ***Forma de un puente colgante*** El peso de una parte de un puente colgante está uniformemente distribuido entre torres gemelas, las cuales están separadas 400 pies, y se elevan a 90 pies sobre la carretera horizontal (véase la figura). Un cable tendido entre las puntas de las torres tiene la forma de una parábola, y su punto central está a 10 pies sobre la carretera. Suponga que se definen los ejes coordenados como se muestra en la figura.

(a) Halle la ecuación de la parábola.

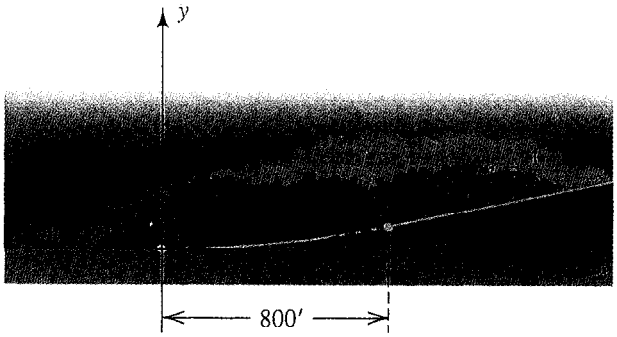
(b) Se usan nueve cables con separación uniforme para sostener al puente (véase la figura). Calcule la longitud total de los cables.



46 ***Diseño de una carretera*** Los ingenieros de tránsito diseñan un tramo de carretera para unir un tramo horizontal con uno que tiene un declive de 20% (es decir, su pendiente es $\frac{1}{5}$), como se ve en la figura. La transición uniforme se debe efectuar en una distancia horizontal de 800 pies, y este tramo, entre los puntos A y B, debe tener forma parabólica. Dado que la ecuación del tramo parabólico tiene la forma $y = ax^2 + bx + c$, se puede demostrar que la pendiente de la tangente en el punto $P(x, y)$ en la parábola está expresada por $m = 2ax + b$.

(a) Determine una ecuación de la parábola para la cual la pendiente de la tangente sea 0 en A, y $\frac{1}{5}$ en B.

(b) Encuentre las coordenadas de B.



47 ***Dintel parabólico*** El dintel de una puerta tiene la forma de un arco parabólico, y se eleva a 9 pies de altura en el centro; tiene 6 pies de ancho en la base. Si se debe hacer pasar una caja rectangular de 8 pies de altura a través del dintel, ¿cuál es el ancho máximo que puede tener la caja?

48 ***Rectángulo de alambre*** Un tramo de alambre con longitud de 24 pulg se dobla en forma de un rectángulo, cuyo ancho sea x y su largo y.

(a) Exprese y como función de x.

(b) Exprese el área A del rectángulo como función de x.

(c) Demuestre que el área A es máxima si la figura es un cuadrado.

49 ***Descuento al mayoreo*** Una empresa vende al menudeo calzado para carreras a un precio de \$40 (dólares) el par, si se piden menos de 50 pares. Si un comerciante pide 50 o más, hasta 600, el precio por par se reduce a una tasa de 4¢ multiplicados por el número pedido. ¿Qué tamaño de pedido dará un ingreso máximo para la empresa?

50 ***Descuento por grupo*** Una agencia de viajes ofrece recorridos a grupos a un precio de \$60 por persona para los primeros 30 participantes. Para grupos mayores, hasta de 90, cada persona obtiene un descuento de \$0.50 por cada participante después de 30. Por ejemplo, si participan 31 viajeros, el costo por persona es \$59.50. Calcule el tamaño del grupo que produzca el ingreso máximo a la agencia.

51 ***Tarifa de TV por cable*** Una empresa de televisión por cable da servicio, actualmente, a 5 000 hogares, y cobra \$20 al mes. Un estudio de mercado indica que cada disminución de \$1 en la tarifa mensual dará como resultado 500 clientes nuevos. Sea $R(x)$ el ingreso total, en dólares, cuando la tarifa mensual sea x dólares.

(a) Determine la función R de ingreso.

(b) Grafique R y calcule el valor de x que dé como resultado el ingreso mensual máximo.

52 ***Rentas de apartamentos*** Una empresa de bienes raíces posee 180 apartamentos, los cuales están ocupados cuando la renta es \$300 por mes. La empresa estima que por cada \$10 de aumento en la renta, se desocuparán 5 apartamentos. ¿Qué renta debe cobrar para tener la entrada mensual máxima?

Ejercicios 53 y 54: Grafique $y = x^3 - x^{1/3}$ y f en el mismo plano de coordenadas, y estime los puntos de intersección.

53 $f(x) = x^2 - x - \frac{1}{4}$

54 $f(x) = -x^2 + 0.5x + 0.4$

55 Grafique, en el mismo plano coordenado, $y = ax^2 + x + 1$ para $a = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2$, y 4, y explique cómo afecta a la gráfica el valor de a.

56 Grafique, en el mismo plano coordenado, $y = x^2 + bx + 1$ para $b = 0, \pm 1, \pm 2$ y ± 3, y explique cómo afecta a la gráfica el valor de b.

3.7 OPERACIONES CON FUNCIONES

Con frecuencia se definen las funciones mediane sumas, restas, productos y cocientes de diversas expresiones. Por ejemplo, si

$$h(x) = x^2 + \sqrt{5x + 1},$$

se puede considerar que $h(x)$ es una suma de valores de las funciones f y g, expresadas por

$$f(x) = x^2 \qquad \text{y} \qquad g(x) = \sqrt{5x + 1}.$$

h se llama *suma* de f y g, y se representa mediante $f + g$. Así,

$$h(x) = (f + g)(x) = x^2 + \sqrt{5x + 1}.$$

En general, si f y g son funciones *cualesquiera*, se emplea la terminología y notación que se ve en la siguiente tabla.

Terminología	Valor de la función
suma $f + g$	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
diferencia $f - g$	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
producto fg	$(fg)(x) = f(x)g(x)$
cociente $\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Los dominios de $f + g$, $f - g$ y fg son la intersección I de los dominios de f y g; es decir, los números que son *comunes* a ambos dominios. El dominio de f/g es el subconjunto de I formado de todas las x en I tales que $g(x) \neq 0$.

EJEMPLO 1 ***Cálculo de los valores de función de $f + g$, $f - g$, fg y f/g***

Si $f(x) = 3x - 2$, y $g(x) = x^3$, calcular $(f + g)(2)$, $(f - g)(2)$, $(fg)(2)$, y $(f/g)(2)$.

SOLUCIÓN Como $f(2) = 3(2) - 2 = 4$, y $g(2) = 2^3 = 8$, se tiene que

$$(f + g)(2) = f(2) + g(2) = 4 + 8 = 12$$
$$(f - g)(2) = f(2) - g(2) = 4 - 8 = -4$$
$$(fg)(2) = f(2)g(2) = (4)(8) = 32$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

EJEMPLO 2 ***Cálculo de*** $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(fg)(x)$, ***y*** $(f/g)(x)$

Si $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ y $g(x) = 3x + 1$, calcular $(f + g)(x)$, $(f - g)(x)$, $(fg)(x)$ y $(f/g)(x)$, y definir los dominios de las funciones respectivas.

SOLUCIÓN El dominio de f es el intervalo cerrado $[-2, 2]$, y el dominio de g es $\mathbb{R}$. La intersección de estos dominios es $[-2, 2]$, que es el de $f + g$, $f - g$ y fg. Para el dominio de f/g se excluye cada número x en $[-2, 2]$ tal que $g(x) = 3x + 1 = 0$; es decir, $x = -\frac{1}{3}$.

Por lo tanto, se tiene lo siguiente:

$$(f + g)(x) = \sqrt{4 - x^2} + (3x + 1), \qquad -2 \le x \le 2$$
$$(f - g)(x) = \sqrt{4 - x^2} - (3x + 1), \qquad -2 \le x \le 2$$
$$(fg)(x) = \sqrt{4 - x^2}(3x + 1), \qquad -2 \le x \le 2$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{3x + 1}, \qquad -2 \le x \le 2 \text{ y } x \ne -\frac{1}{3}$$

Se dice que una función f es **función polinomial**, si $f(x)$ es un polinomio; es decir, si

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

en la cual los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales y los exponentes son enteros no negativos. Se puede considerar que una función polinomial es una suma de funciones cuyos valores tienen la forma cx^k, donde c es un número real y k un entero no negativo. Nótese que las funciones cuadráticas que se estudiaron en la sección anterior son funciones polinomiales.

Una **función algebraica** es aquélla que se puede expresar en términos de sumas, restas, productos, cocientes o raíces, de carácter finito, de funciones polinomiales.

EJEMPLO ILUSTRATIVO
Función algebraica

❑ $f(x) = 5x^4 - 2\sqrt[3]{x} + \dfrac{x(x^2 + 5)}{\sqrt{x^3 + \sqrt{x}}}$

Las funciones que no son algebraicas se llaman **trascendentes**. Las funciones exponenciales y logarítmicas que se estudian el en Cap. 5 son ejemplos de funciones trascendentes.

ESCUELA POLI BIBL

En el resto de esta sección se explica cómo se pueden usar dos funciones f y g para obtener las *funciones compuestas* $f \circ g$ y $g \circ f$ (léase "f círculo g" y "g círculo f", respectivamente). Las funciones de este tipo son muy importantes en Cálculo. La función $f \circ g$ se define como sigue.

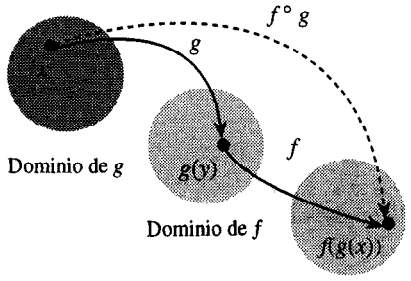
Definición de función compuesta

La **función compuesta** $f \circ g$, de dos funciones, f y g se define mediante

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todas las x en el dominio de g, tales que $g(x)$ esté en el dominio de f.

FIGURA 3.67



La Fig. 3.67 es un esquema que muestra las relaciones entre f, g y $f \circ g$. Nótese que para x en el dominio de g, *primero se determina* $g(x)$ (la cual debe estar en el dominio de f) y *después se determina* $f(g(x))$.

Para la función compuesta $g \circ f$, se invierte este orden, calculando primero $f(x)$ y después $g(f(x))$. El dominio de $g \circ f$ es el conjunto de todas las x en el dominio de f tales que $f(x)$ esté en el dominio de g.

Como la notación $g(x)$ se lee "g de x", a veces se dice que g es *una función de* x. Para la función compuesta $f \circ g$, la notación $f(g(x))$ se lee "f de g de x," y se considera que f es función de $g(x)$. En este sentido, *una función compuesta es una función de función*, o, con más propiedad, una función de los valores de otra función.

EJEMPLO 3 *Determinación de funciones compuestas*

Sean $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 3x + 5$.

(a) Encontrar $(f \circ g)(x)$ y el dominio de $f \circ g$.

(b) Determinar $(g \circ f)(x)$ y el dominio de $g \circ f$.

(c) Calcular $f(g(2))$ de dos maneras: primero empleando las funciones f y g por separado, y segundo, con la función compuesta $f \circ g$.

SOLUCIÓN

(a)
$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) && \text{definición de } f \circ g\\ &= f(3x + 5) && \text{definición de } g\\ &= (3x + 5)^2 - 1 && \text{definición de } f\\ &= 9x^2 + 30x + 24 && \text{se simplifica}\end{aligned}$$

El dominio tanto de f como de g es $\mathbb{R}$. Como para cada x en $\mathbb{R}$ (el dominio de g), el valor de la función $g(x)$ está en $\mathbb{R}$ (el dominio de f), el dominio de $f \circ g$ también es $\mathbb{R}$.

(b)
$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) && \text{definición de } g \circ f\\ &= g(x^2 - 1) && \text{definición de } f\\ &= 3(x^2 - 1) + 5 && \text{definición de } g\\ &= 3x^2 + 2 && \text{se simplifica}\end{aligned}$$

Como para cada x en $\mathbb{R}$ (el dominio de f) el valor de la función $f(x)$ está en $\mathbb{R}$ (el dominio de g) el dominio de $g \circ f$ es $\mathbb{R}$.

(c) Para calcular $f(g(2))$, con $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 3x + 5$ por separado, se procede como sigue:

$$g(2) = 3(2) + 5 = 11$$

$$f(g(2)) = f(11) = 11^2 - 1 = 120$$

Para calcular $f(g(2))$ mediante $f \circ g$, nos referimos a la parte (a), donde encontramos que

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 9x^2 + 30x + 24.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f(g(2)) &= 9(2)^2 + 30(2) + 24 \\ &= 36 + 60 + 24 = 120. \end{aligned}$$

De acuerdo con el Ejemplo 3, $f(g(x))$ y $g(f(x))$ no siempre son iguales; es decir, $f \circ g \neq g \circ f$. Si dos funciones, f y g, tienen ambas el dominio $\mathbb{R}$, entonces el dominio de $f \circ g$ y de $g \circ f$ *también es* $\mathbb{R}$. Esto se vio en el Ejemplo 3. El que sigue muestra que el dominio de una función compuesta puede ser distinto de los de las dos funciones dadas.

EJEMPLO 4 ***Determinación de funciones compuestas***

Sean $f(x) = x^2 - 16$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

(a) Determinar $(f \circ g)(x)$ y el dominio de $f \circ g$.
(b) Determinar $(g \circ f)(x)$ y el dominio de $g \circ f$.

SOLUCIÓN Se observa primero que el dominio de f es $\mathbb{R}$, y que el de g es el conjunto de los números reales no negativos; es decir, el intervalo $[0, \infty)$. Se procede como sigue:

(a)

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$	definición de $f \circ g$
$= f(\sqrt{x})$	definición de g
$= (\sqrt{x})^2 - 16$	definición de f
$= x - 16$	se simplifica

Si sólo se tiene en cuenta la expresión final $x - 16$ se podría haber creído que el dominio de $f \circ g$ es $\mathbb{R}$, ya que $x - 16$ está definida para todo número real, x. Sin embargo, no es así. Por definición, el dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todas las x en $[0, \infty)$ (el dominio de g) tal que $g(x)$ está en $\mathbb{R}$ (el dominio de f). Como $g(x) = \sqrt{x}$ está en $\mathbb{R}$ para toda x en $[0, \infty)$, por lo tanto, el dominio de $f \circ g$ es $[0, \infty)$.

(b)

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$	definición de $g \circ f$
$= g(x^2 - 16)$	definición de f
$= \sqrt{x^2 - 16}$	definición de g

Por definición, el dominio de $g \circ f$ es el conjunto de todas las x en $\mathbb{R}$ (el dominio de f) tales que $f(x) = x^2 - 16$ esté en $[0, \infty)$ (el dominio de g). El enunciado "$x^2 - 16$ está en $[0, \infty)$" equivale a cualquiera de las siguientes desigualdades:

$$x^2 - 16 \geq 0, \qquad x^2 \geq 16, \qquad |x| \geq 4.$$

Así, el dominio de $g \circ f$ es la unión $(-\infty, -4) \cup [4, \infty)$. Nótese que este dominio es diferente de los dominios de f o de g.

El ejemplo que sigue muestra cómo, a veces, se pueden obtener valores especiales de funciones compuestas mediante tablas.

EJEMPLO 5 ***Determinación de valores de funciones compuestas mediante tablas***

En las siguientes tablas aparecen varios valores de dos funciones, f y g:

x	1	2	3	4
$f(x)$	3	4	2	1

x	1	2	3	4
$g(x)$	4	1	3	2

Calcule $(f \circ g)(2)$, $(g \circ f)(2)$, $(f \circ f)(2)$ y $(g \circ g)(2)$.

SOLUCIÓN Con la definición de función compuesta y consultando las tablas anteriores, se obtiene

$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(1) = 3$$
$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(4) = 2$$
$$(f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(4) = 1$$
$$(g \circ g)(2) = g(g(2)) = g(1) = 4.$$

En algunos problemas de aplicación es necesario expresar una cantidad y como función del tiempo t. En el ejemplo siguiente se muestra que, con frecuencia, es más fácil introducir una tercera variable x, expresarla en función de t (es decir, $x = g(t)$), expresar y en función de x (es decir, $y = f(x)$), y, por último, formar la función compuesta definida por $y = f(x) = f(g(t))$.

EJEMPLO 6 ***Uso de una función compuesta para calcular el volumen de un globo***

Un meteorólogo infla un globo esférico con helio gaseoso. Si el radio del globo cambia a razón de 1.5 cm/s, expresar el volumen V del globo como función del tiempo t, en segundos.

SOLUCIÓN Sea x el radio del globo. Si se supone que el radio inicial es 0, entonces, al cabo de t segundos,

$$x = 1.5t. \quad \text{radio del globo a los } t \text{ segundos}$$

Como ilustración, después de 1 s, el radio es 1.5 cm; a los 2 s, es 3.0 cm; a los 3 s, es 4.5 cm, y así sucesivamente.

A continuación se escribe

$$V = \tfrac{4}{3}\pi x^3. \quad \text{volumen de una esfera de radio } x$$

Esto da como resultado una función compuesta en la cual V es función de x, y x es función de t. Al sustituir se tiene

$$V = \tfrac{4}{3}\pi x^3 = \tfrac{4}{3}\pi(1.5t)^3 = \tfrac{4}{3}\pi(\tfrac{3}{2}t)^3 = \tfrac{4}{3}\pi(\tfrac{27}{8}t^3).$$

Simplificando, se obtiene la siguiente fórmula de V como función de t:

$$V = \tfrac{9}{2}\pi t^3$$

Si f y g son funciones tales que

$$y = f(u) \qquad \text{y} \qquad u = g(x),$$

entonces, sustituyendo a u en $y = f(u)$ se obtiene

$$y = f(g(x)).$$

Para algunos problemas de Cálculo, *se invierte* este procedimiento; es decir, dada $y = h(x)$ para una función h, se determina una *forma de función compuesta* $y = f(u)$ y $u = g(x)$, tal que $h(x) = f(g(x))$.

EJEMPLO 7 ***Determinación de una forma de función compuesta***

Expresar $y = (2x + 5)^8$ como una forma de función compuesta.

SOLUCIÓN Supóngase que, para un número real x, se deseara evaluar $(2x + 5)^8$ con una calculadora. Primero se calcularía $2x + 5$ y después se elevaría el resultado a la octava potencia. Esto sugiere que

$$u = 2x + 5 \quad \text{y que} \quad y = u^8,$$

que es la forma de función compuesta para $y = (2x + 5)^8$.

El método que se aplica en el ejemplo anterior se puede extender a otras funciones. En general, supóngase que se da $y = h(x)$. Para seleccionar la expresión *interior* $u = g(x)$ en forma de función compuesta, se debe considerar lo siguiente: si se fuera a usar una calculadora, ¿qué parte de la expresión $h(x)$ se evaluaría primero? Esto conduce, con frecuencia a la selección correcta de $u = g(x)$. Después de seleccionar a u, nos referimos a $h(x)$ para determinar $y = f(u)$. El ejemplo que sigue es de varios problemas característicos.

EJEMPLO ILUSTRATIVO

Formas de función compuesta

Valor de la función	Elección de $u = g(x)$	Elección de $y = f(u)$
❑ $y = (x^3 - 5x + 1)^4$	$u = x^3 - 5x + 1$	$y = u^4$
❑ $y = \sqrt{x^2 - 4}$	$u = x^2 - 4$	$y = \sqrt{u}$
❑ $y = \dfrac{2}{3x + 7}$	$u = 3x + 7$	$y = \dfrac{2}{u}$

Nunca es única la forma de función compuesta. Por ejemplo, véase la primera expresión del ejemplo anterior:

$$y = (x^3 - 5x + 1)^4$$

Si n es cualquier entero no cero, se podría escoger

$$u = (x^3 - 5x + 1)^n \qquad \text{y} \qquad y = u^{4/n}.$$

Así, hay un número *ilimitado* de formas de función compuesta. En general, la meta es seleccionar una forma tal que la expresión para y sea sencilla, como se hizo en el ejemplo.

El ejemplo que sigue muestra cómo sirve una graficadora para determinar el dominio de una función compuesta. Se usan las mismas funciones que se aplicaron en el Ejem. 4.

EJEMPLO 8 ***Análisis gráfico de una función compuesta***

Sean $f(x) = x^2 - 16$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

(a) Calcular $f(g(3))$.
(b) Graficar $y = f \circ g)(x)$, y úselo para determinar el dominio de $f \circ g$.

SOLUCIÓN

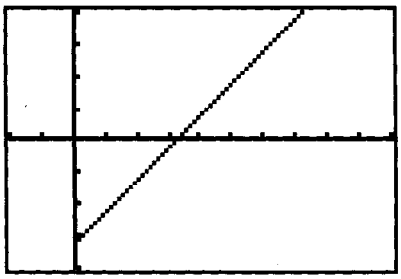
(a) Se empieza por hacer las asignaciones

$$Y_1 = \sqrt{x} \qquad \text{y} \qquad Y_2 = (Y_1)^2 - 16.$$

Nótese que se ha sustituido x por Y_1 en $f(x)$, y asignado esta expresión a Y_2, de modo muy semejante a como se sustituyó x por $g(x)$ en el Ejem. 4.

A continuación se guarda el valor 3 en el lugar de la memoria para x, y luego se pide el valor de Y_2. Se ve que este valor, en 3, es –13; esto es, $f(g(3)) = -13$.

FIGURA 3.68 [–10, 50] por [–20, 20]



(b) Para determinar un cuadro visual para la gráfica de $f \circ g$, se observa primero que $f(x) \geq -16$ para toda x y, por lo tanto, se escoge Ymín *menor* que –16; digamos, Ymín = –20. Si se desea que el cuadro tenga una dimensión vertical de 40, se debe seleccionar Ymáx = 20.

Si la pantalla tiene proporción 1:1 (horizontal:vertical), entonces, una selección razonable de [Xmín, Xmáx] sería [–10, 30], una dimensión horizontal de 40. Si la pantalla tiene una proporción 3:2, se escoge [Xmín, Xmáx] igual a [–10, 50], una dimensión horizontal de 60.

Al seleccionar Y_2 y presentar a continuación la gráfica de Y_2 usando el cuadro visual [–10, 50] por [–20, 20], se obtiene una gráfica semejante a la de la Fig. 3.68. Se observa que es una semirrecta con extremo en (0, –16). Así, el dominio de Y_2 es toda $x \geq 0$.

EJERCICIOS 3.7

Ejercicios 1 y 2. Determine

(a) $(f + g)(3)$ **(b)** $(f - g)(3)$
(c) $(fg)(3)$ **(d)** $(f/g)(3)$

1 $f(x) = x + 3, \quad g(x) = x^2$

2 $f(x) = -x^2, \quad g(x) = 2x - 1$

Ejercicios 3 – 8: Determine

(a) $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(fg)(x)$ y $(f/g)(x)$
(b) el dominio de $f+g$, $f-g$, y de fg
(c) el dominio de f/g

3 $f(x) = x^2 + 2, \quad g(x) = 2x^2 - 1$

4 $f(x) = x^2 + x, \quad g(x) = x^2 - 3$

5 $f(x) = \sqrt{x+5}, \quad g(x) = \sqrt{x+5}$

6 $f(x) = \sqrt{3-2x}, \quad g(x) = \sqrt{x+4}$

7 $f(x) = \dfrac{2x}{x-4}, \quad g(x) = \dfrac{x}{x+5}$

8 $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$, $g(x) = \dfrac{3x}{x+4}$

Ejercicios 9 y 10. Obtenga o resuelva

(a) $(f \circ g)(x)$ **(b)** $(g \circ f)(x)$

(c) $(f \circ f)(x)$ **(d)** $(g \circ g)(x)$

9 $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = -x^2$

10 $f(x) = 3x^2$, $g(x) = x - 1$

Ejercicios 11 – 20: Evalúe

(a) $(f \circ g)(x)$ **(b)** $(g \circ f)(x)$

(c) $f(g(-2))$ **(d)** $g(f(3))$

11 $f(x) = 2x - 5$, $g(x) = 3x + 7$

12 $f(x) = 5x + 2$, $g(x) = 6x - 1$

13 $f(x) = 3x^2 + 4$, $g(x) = 5x$

14 $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = 4x^2$

15 $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$, $g(x) = 2x - 1$

16 $f(x) = 5x - 7$, $g(x) = 3x^2 - x + 2$

17 $f(x) = 4x$, $g(x) = 2x^3 - 5x$

18 $f(x) = x^3 + 2x^2$, $g(x) = 3x$

19 $f(x) = |x|$, $g(x) = -7$

20 $f(x) = 5$, $g(x) = x^2$

Ejercicios 21–34: Hallar (a) $(f \circ g)(x)$ **y el dominio de** $f \circ g$**, y (b)** $(g \circ f)(x)$ **y el dominio de** $g \circ f$**.**

21 $f(x) = x^2 - 3x$, $g(x) = \sqrt{x+2}$

22 $f(x) = \sqrt{x-15}$, $g(x) = x^2 + 2x$

23 $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = \sqrt{3x}$

24 $f(x) = -x^2 + 1$, $g(x) = \sqrt{x}$

25 $f(x) = \sqrt{x-2}$, $g(x) = \sqrt{x+5}$

26 $f(x) = \sqrt{3-x}$, $g(x) = \sqrt{x+2}$

27 $f(x) = \sqrt{3-x}$, $g(x) = \sqrt{x^2-16}$

28 $f(x) = x^3 + 5$, $g(x) = \sqrt[3]{x-5}$

29 $f(x) = \dfrac{3x+5}{2}$, $g(x) = \dfrac{2x-5}{3}$

30 $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $g(x) = x - 1$

31 $f(x) = x^2$, $g(x) = \dfrac{1}{x^3}$

32 $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$, $g(x) = \dfrac{3}{x}$

33 $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$, $g(x) = \dfrac{x-3}{x-4}$

34 $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$, $g(x) = \dfrac{x-5}{x+4}$

Ejercicios 35 y 36: Resuelva la ecuación $(f \circ g)(x) = 0$**.**

35 $f(x) = x^2 - 2$, $g(x) = x + 3$

36 $f(x) = x^2 - x - 2$, $g(x) = 2x - 1$

37 En las tablas siguientes aparecen varios valores de dos funciones f y g:

x	5	6	7	8
$f(x)$	8	7	6	5

x	5	6	7	8
$g(x)$	7	8	6	5

Determine

(a) $(f \circ g)(6)$ **(b)** $(g \circ f)(6)$

(c) $(f \circ f)(6)$ **(d)** $(g \circ g)(6)$

38 En las tablas siguientes aparecen algunos valores de dos funciones T y S:

t	0	1	2	3
$T(t)$	2	3	1	0

x	0	1	2	3
$S(x)$	1	0	3	2

Determine

(a) $(T \circ S)(1)$ **(b)** $(S \circ T)(1)$

(c) $(T \circ T)(1)$ **(d)** $(S \circ S)(1)$

39 Si $D(t) = \sqrt{400 + t^2}$ y $R(x) = 20x$, determine $(D \circ R)(x)$.

40 Si $S(r) = 4\pi r^2$ y $D(t) = 2t + 5$, estime $(S \circ D)(t)$.

41 ***Propagación de un incendio*** Ha comenzado un incendio en un campo abierto seco, y se propaga en forma de círculo. Si el radio de este círculo aumenta a una velocidad de 6 pies/min, exprese el área total incendiada A en función del tiempo en minutos t.

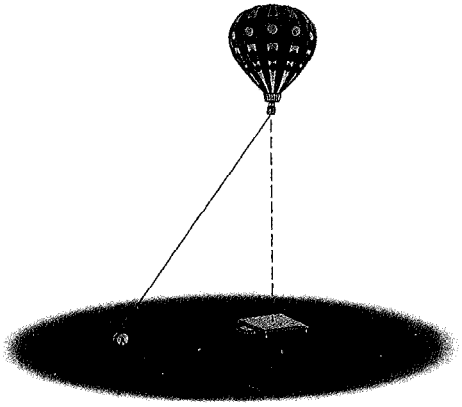
42 ***Dimensiones de un globo*** Se infla un globo esférico a razón de $\frac{9}{2}\pi$ pies^3 por minuto. Exprese su radio r como

función del tiempo t en minutos, suponiendo que $r = 0$ cuando $t = 0$.

43 ***Dimensiones de una pila de arena*** El volumen de una pila cónica de arena aumenta a razón de 243π pies^3/min; la altura del cono siempre es igual al radio r de la base. Exprese r en función del tiempo t (en minutos), suponiendo que $r = 0$ cuando $t = 0$.

44 ***Diámetro de un cubo*** El diámetro d de un cubo, es la distancia entre dos vértices opuestos. Exprese d como función del lado x del cubo. (Sugerencia: Primero exprese la diagonal y de una cara, como función de x.)

45 ***Altura de un globo*** Un globo de aire caliente se eleva verticalmente desde el piso, a medida que se suelta una cuerda fija a la canastilla del globo a una velocidad de 5 pies/s (véase la figura). La polea que suelta la cuerda está a 20 pies de una plataforma, donde abordan el globo los pasajeros. Exprese la altura h del globo en función del tiempo t.



46 ***Equilibrista en cuerda tensa*** Véase el Ejercicio 58 de la Secc. 3.4. Iniciando en el punto más bajo, el equilibrista asciende por la cuerda a una velocidad constante de 2 pies/s. Si la cuerda está fija a 30 pies de altura del poste, exprese la altura h del equilibrista sobre el piso como función del tiempo t. (Sugerencia: Sea d la distancia total recorrida a lo largo de la cuerda. Exprese primero d como función de t y, después h como función de d.)

47 ***Despegue de un avión*** Vea el Ejercicio 59 de la Secc. 3.4. Cuando el aeroplano ha recorrido 500 pies de la pista, alcanza una velocidad de 150 pies/s, o sea, unas 102 mi/h, la cual sostendrá hasta el despegue. Exprese la distancia d del avión a la torre de control, como función del tiempo t en segundos (Sugerencia: En la figura, exprese primero x en función de t.)

48 ***Corrosión de un cable*** Un cable de 100 pies de largo y 4 pulg de diámetro se sumerge en agua de mar. Debido a la corrosión, el área superficial del cable disminuye con una rapidez de 750 pulg^2 por año. Exprese el diámetro, d, del cable como función del tiempo t en años. No tenga en cuenta la corrosión en los extremos del cable.

Ejercicios 49–56: Determine una forma de función compuesta para y.

49 $y = (x^2 + 3x)^{1/3}$

50 $y = \sqrt[4]{x^4 - 16}$

51 $y = \dfrac{1}{(x-3)^4}$

52 $y = 4 + \sqrt{x^2 + 1}$

53 $y = (x^4 - 2x^2 + 5)^5$

54 $y = \dfrac{1}{(x^2 + 3x - 5)^3}$

55 $y = \dfrac{\sqrt{x+4} - 2}{\sqrt{x+4} + 2}$

56 $y = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}$

57 Si $f(x) = \sqrt{x} - 1$ y $g(x) = x^3 + 1$, evalúe, aproximadamente, $(f \circ g)(0.0001)$. Para evitar calcular un valor cero para $(f \circ g)(0.0001)$, maneje la fórmula de $f \circ g$ como

$$\frac{x^3}{\sqrt{x^3 + 1} + 1}.$$

58 Si $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + x + 2}$ y $g(x) = (\sqrt{3x} - x3)^{3/2}$, calcule, en forma aproximada,

$$\frac{(f+g)(1.12) - (f/g)(1.12)}{[(f \circ f)(5.2)]^2}.$$

3.8 FUNCIONES INVERSAS

Una función f puede tener el mismo valor para distintos números de su dominio. Por ejemplo, si $f(x) = x^2$, entonces $f(2) = 4$ y $f(-2) = 4$ pero $2 \neq -2$. Para definir *la inversa de una función*, es esencial que números diferentes en el dominio produzcan *siempre* valores distintos de f. A esas funciones se les llama *funciones biunívocas.*

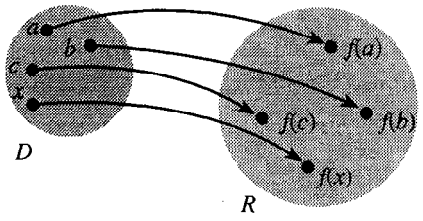
Definición de función biunívoca

Una función f, con dominio D y contradominio R es función biunívoca si se satisface alguna de las condiciones equivalentes que siguen:

(1) Siempre que $a \neq b$ en D, entonces $f(a) \neq f(b)$ en R.

(2) Siempre que $f(a) = f(b)$ en R, entonces $a = b$ en D.

FIGURA 3.69



Con el diagrama de flechas de la Fig. 3.69 se ilustra una función biunívoca. Nótese que cada valor de función en el contradominio R corresponde a *exactamente un* elemento en el dominio D. La función que se ve en la Fig. 3.37 de la Secc. 3.4 no es biunívoca, ya que $f(w) = f(z)$, pero $w \neq z$.

EJEMPLO 1 ***Determinar si una función es biunívoca o no***

(a) Si $f(x) = 3x + 2$, pruebe que f es biunívoca.
(b) Si $g(x) = x^4 + 2x^2$, demuestre que g no es biunívoca.

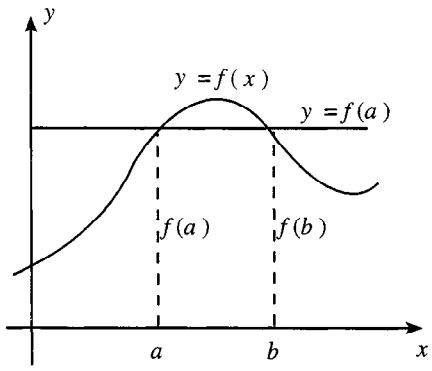
SOLUCIÓN

(a) Se usa la condición (2) de la definición anterior. Así, supóngase que $f(a) = f(b)$ para ciertos números a y b en el dominio de f. Con ello se obtiene

$$\begin{aligned} 3a + 2 &= 3b + 2 && \text{definición de } f(x) \\ 3a &= 3b && \text{se resta 2} \\ a &= b && \text{se divide entre 3} \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es biunívoca.

FIGURA 3.70



(b) Para demostrar que una función *sí es* biunívoca se requiere una demostración *general*, como en el inciso (a). Para demostrar que g *no es* biunívoca, sólo se necesita determinar dos números reales distintos en el dominio, que produzcan el mismo valor de la función. Por ejemplo, $-1 \neq 1$, pero $g(-1) = g(1)$. De hecho, como g es función par, $f(-a) = f(a)$ para todo número real a.

Si se conoce la gráfica de una función f, es fácil determinar si f es biunívoca. Por ejemplo, la función cuya gráfica aparece en la Fig. 3.70 no es biunívoca, ya que $a \neq b$, pero $f(a) = f(b)$. Nótese que la recta horizontal, $y = f(a)$ (o $y = f(b)$), interseca a la gráfica en más de un punto. Por lo general, se emplea la siguiente prueba gráfica para determinar si una función es biunívoca o no.

Prueba de la recta horizontal

> Una función f es biunívoca si y sólo si toda recta horizontal interseca la gráfica de f cuando mucho en un punto.

Como toda función creciente o decreciente pasa la prueba de la recta horizontal, se llega al siguiente resultado.

Teorema: Las funciones crecientes o decrecientes son biunívocas

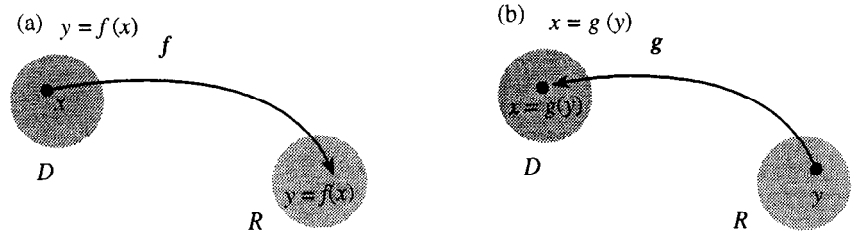
> **(1)** Una función que es creciente en su dominio es biunívoca.
> **(2)** Una función que es decreciente en su dominio es biunívoca.

Sea f una función biunívoca con dominio D y contradominio R. Así, para cada número y en R, hay *exactamente un* número x en D, tal que $y = f(x)$, como se ve en la flecha de la Fig. 3.71(a). Por consiguiente, se puede definir una función g de R a D, mediante la regla siguiente:

$$x = g(y)$$

Como en la Fig. 3.71(b), *g invierte la correspondencia especificada por f*. A g se le llama *función inversa* de f, como se aprecia en la siguiente definición.

FIGURA 3.71
(a) $y = f(x)$ **(b)** $x = g(y)$



Definición de función inversa

Sea f una función biunívoca con dominio D y contradominio R. Una función g, con dominio R y contradominio D, es la **función inversa** de f, siempre y cuando se cumpla la siguiente condición para toda x en D y toda y en R:

$$y = f(x) \quad \text{si y sólo si} \quad x = g(y).$$

Recuerde que para que esté definida la inversa de una función f, *es absolutamente esencial que f sea biunívoca*. El siguiente teorema, enunciado sin demostración, es útil para verificar que una función g es la inversa de f.

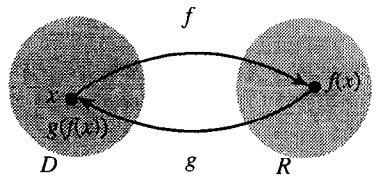
Teorema para funciones inversas

> Sea f una función biunívoca con dominio D y contradominio R. Si g es función con dominio R y contradominio D, entonces g es la función inversa de f si y sólo si se cumplen las dos condiciones siguientes:
> **(1)** $g(f(x)) = x$ para toda x en D.
> **(2)** $f(g(y)) = y$ para toda y en R.

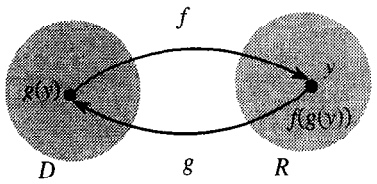
En la Fig. 3.72(a) y (b), respectivamente, se muestran las condiciones (1) y (2) del teorema anterior, y en ellas la flecha superior indica que f es una función de D a R, y la flecha inferior indica que g es una función de R a D.

Nótese que en la Fig. 3.72(a) primero se aplica f al número x en D, para obtener el valor de la función $f(x)$ en R y, después, se aplica g a $f(x)$, para obtener el número $g(f(x))$ en D. La con-

FIGURA 3.72
(a) Primero f, después g



(b) Primero g, después f



dición (1) del teorema dice que $g(f(x)) = x$ para toda x; esto es, g *invierte* la correspondencia expresada por f.

En la Fig. 3.72(b), se aplica el orden opuesto para las funciones. Primero se aplica g al número y en R, para obtener el valor de la función $g(y)$ en D, y después se aplica f a $g(y)$, para encontrar el número $f(g(y))$ en R. La condición (2) del teorema dice que $f(g(y)) = y$ para toda y; es decir, f *invierte* la correspondencia dada por g.

Si una función f tiene una función inversa g, con frecuencia se representa a g mediante f^{-1}. El -1 que se usa en esta notación no se debe confundir con un exponente; esto es $f^{-1}(y)$ *no quiere decir* $1/[f(y)]$. El recíproco $1/[f(y)]$ se puede representar con $[f(y)]^{-1}$. Es importante recordar los siguientes puntos acerca del dominio y el contradominio de f y f^{-1}

Dominio y contradominio de f y f^{-1}

dominio de f^{-1} = contradominio de f
contradominio de f^{-1} = dominio de f

Cuando se estudian las funciones, con frecuencia decimos que x representa un número arbitrario en el dominio. Así, para la función inversa f^{-1} se puede desear tener a $f^{-1}(x)$, *donde x está en el dominio R de f^{-1}*. En este caso, las dos condiciones en el teorema sobre funciones inversas se escriben como sigue:

(1) $f^{-1}(f(x)) = x$ para toda x en el dominio de f
(2) $f(f^{-1}(x)) = x$ para toda x en el dominio de f^{-1}

La Fig. 3.72 da una pista para determinar la inversa de una función biunívoca en algunos casos: Si es posible, *se despeja x de la ecuación $y = f(x)$ en términos de y*, para obtener una ecuación de la forma $x = g(y)$. Si son válidas las dos condiciones, $g(f(x)) = x$ y $f(g(x)) = x$ para toda x en los dominios de f y g, respectivamente, entonces g es la función inversa necesaria, f^{-1}. Las siguientes reglas resumen este procedimiento. En la regla 2, antes de determinar f^{-1}, se escribe $x = f^{-1}(y)$ en lugar de $x = g(y)$.

Lineamientos para determinar f^{-1} en casos sencillos

1 Comprobar que f es función biunívoca en su dominio.
2 Despejar x de la ecuación $y = f(x)$ en términos de y, para obtener una ecuación de la forma $x = f^{-1}(y)$.
3 Comprobar las dos condiciones siguientes:
  a $f^{-1}(f(x)) = x$ para toda x en el dominio de f
  b $f(f^{-1}(x)) = x$ para toda x en el dominio de f^{-1}

Los resultados satisfactorios de este método dependen de la naturaleza de la ecuación $y = f(x)$, ya que se debe poder despejar x en términos de y. Por esta razón, aparece la frase *en casos sencillos*, en el encabezado de las reglas. Se siguen las reglas dadas en los tres ejemplos siguientes.

ESCUELA POL

EJEMPLO 2 ***Determinación de la inversa de una función***

Sea $f(x) = 3x - 5$. Determinar la función inversa de f.

SOLUCIÓN

Regla 1 La gráfica de la función lineal f es una recta de pendiente 3 y, por consiguiente, f es creciente en $\mathbb{R}$. Entonces, f es biunívoca, y existe la función inversa, f^{-1}. Además, como el dominio y el contradominio de f es $\mathbb{R}$, lo mismo es válido para f^{-1}.

Regla 2 Despejar x de la ecuación $y = f(x)$:

$$y = 3x - 5 \quad \text{sea } y = f(x)$$
$$x = \frac{y + 5}{3} \quad \text{se despeja } x \text{ en términos de } y$$

Ahora, se hace que $x = f^{-1}(y)$, es decir,

$$f^{-1}(y) = \frac{y + 5}{3}.$$

Como no importa el símbolo que se use para la variable, también se puede escribir

$$f^{-1}(x) = \frac{x + 5}{3},$$

donde x está en el dominio de f^{-1}.

Regla 3 Como el dominio y el contradominio tanto de f como de f^{-1} es $\mathbb{R}$, se deben comprobar las condiciones (a) y (b) para todo número real x. Se procede como sigue:

(a)
$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(3x - 5) \quad \text{definición de } f$$
$$= \frac{(3x - 5) + 5}{3} \quad \text{definición de } f^{-1}$$
$$= x \quad \text{se simplifica}$$

(b)
$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x + 5}{3}\right) \quad \text{definición de } f^{-1}$$
$$= 3\left(\frac{x + 5}{3}\right) - 5 \quad \text{definición de } f$$
$$= x \quad \text{se simplifica}$$

Estas comprobaciones demuestran que la función inversa de f es

$$f^{-1}(x) = \frac{x + 5}{3}.$$

EJEMPLO 3 ***Determinación de la inversa de una función***

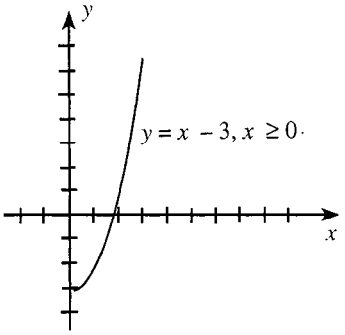
Sea $f(x) = x^2 - 3$ para $x \geq 0$. Determinar la función inversa de f.

SOLUCIÓN

Regla 1 La gráfica de f aparece en la Fig. 3.73. El dominio de f es $[0, \infty)$ y el contradominio de f es $[-3, \infty)$. Como f es creciente, es biunívoca y, por lo tanto, tiene una función inversa f^{-1}, cuyo dominio es $[-3, \infty)$, y su contradominio es $[0, \infty)$.

(continúa)

FIGURA 3.73



Regla 2 Se tiene la ecuación

$$y = x^2 - 3$$

y se despeja x,

$$x = \pm\sqrt{y+3}.$$

Como x es no negativa, se desecha $x = -\sqrt{y+3}$, y se hace

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y+3} \quad \text{o, lo que es lo mismo,} \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x+3}.$$

(Nótese que si la función f hubiera tenido el dominio $x \leq 0$, se habría escogido la función $f^{-1}(x) = -\sqrt{x+3}$.)

Regla 3 Se comprueban las condiciones (a) y (b) para x en los dominios de f y f^{-1}, respectivamente.

(a) $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2 - 3) = \sqrt{(x^2 - 3) + 3} = \sqrt{x^2} = x$ para $x \geq 0$

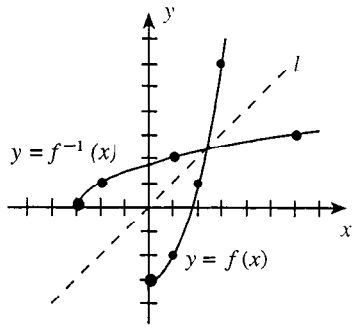
(b) $f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt{x+3})$

$= (\sqrt{x+3})^2 - 3 = (x+3) - 3 = x$ para $x \geq -3$

Así, la función inversa es

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x+3} \text{ para } x \geq -3.$$

FIGURA 3.74



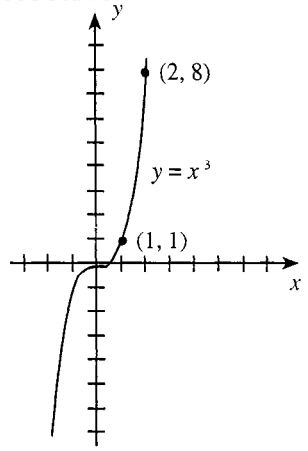
Hay una relación interesante entre la gráfica de una función f y la de su función inversa, f^{-1}. Primero se observa que $b = f(a)$ equivale a $a = f^{-1}(b)$. Estas ecuaciones significan que *el punto* (a, b) *está en la gráfica de* f *si, y sólo si, el punto* (b, a) *está en la gráfica de* f^{-1}.

Para ilustrar lo anterior, en el Ejemplo 3 se ve que las funciones f y f^{-1} expresadas por

$$f(x) = x^2 - 3 \qquad \text{y} \qquad f^{-1}(x) = \sqrt{x+3}$$

son funciones inversas entre sí, siempre y cuando x esté restringida en forma correcta. Algunos puntos de la gráfica de f son $(0, -3)$, $(1, -2)$, $(2, 1)$ y $(3, 6)$. Los puntos correspondientes en la gráfica de f^{-1} son $(-3, 0)$, $(-2, 1)$, $(1, 2)$ y $(6, 3)$. Las gráficas de f y f^{-1} aparecen en el mismo plano de coordenadas en la Fig. 3.74. Si se dobla la página a lo largo de la recta $y = x$ que biseca los cuadrantes I y III (como se indica por la línea discontinua de la figura), entonces coincidirán las gráficas de f y f^{-1}. Las dos gráficas son *reflexiones* entre sí respecto a la recta $y = x$, o bien, son *simétricas* con respecto a esa recta. Esto es característico de la gráfica de toda función f que tenga función inversa f^{-1} (véase Ejercicio 34).

FIGURA 3.75

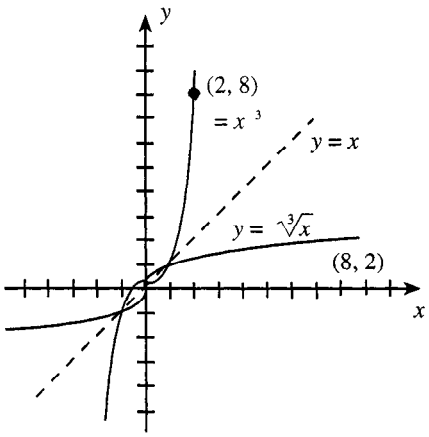


EJEMPLO 4 *Relación entre las gráficas de f y f⁻¹*

Sea $f(x) = x^3$. Determinar la función inversa f^{-1} de f, y trazar las gráficas de f y f^{-1} en el mismo plano de coordenadas.

SOLUCIÓN En la Fig. 3.75 se presenta la gráfica de f. Nótese que f es una función impar y, por consiguiente, la gráfica es simétrica con respecto al origen.

FIGURA 3.76



Regla 1 Como f es creciente en su dominio $\mathbb{R}$, es biunívoca, y en consecuencia tiene una función inversa f^{-1}.

Regla 2 Se tiene la ecuación

$$y = x^3$$

y se despeja x sacando raíz cúbica de cada lado, con lo que se tiene

$$x = y^{1/3} = \sqrt[3]{y}.$$

Ahora se hace que

$$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y} \quad \text{o, lo que es lo mismo,} \quad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}.$$

Regla 3 Se comprueban las condiciones (a) y (b):

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x \quad \text{para toda } x \text{ en } \mathbb{R}$$

$$f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt[3]{x}) = (\sqrt[3]{x})^3 = x \quad \text{para toda } x \text{ en } \mathbb{R}$$

La gráfica de f^{-1} (es decir, la gráfica de la ecuación $y = \sqrt[3]{x}$) se puede obtener reflejando la gráfica de la Fig. 3.75 en la línea $y = x$, como se ve en la Fig. 3.76. Tres puntos de la gráfica de f^{-1} son (0, 0), (1, 1) y (8, 2).

En el ejemplo siguiente se indica la utilidad de algunos de los conceptos que se presentaron en esta sección para determinar el esquema de una gráfica con ayuda de una graficadora.

EJEMPLO 5 ***Trazo de la gráfica de la inversa de una función***

(a) Graficar $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

(b) Explicar por qué f es biunívoca, y hacer el esquema de f^{-1}.

FIGURA 3.77 [–15, 15] por [–10, 10]

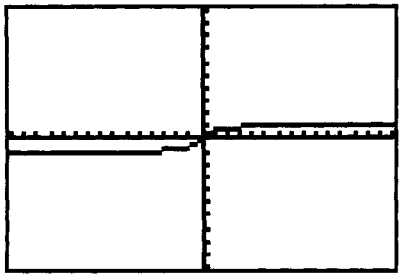
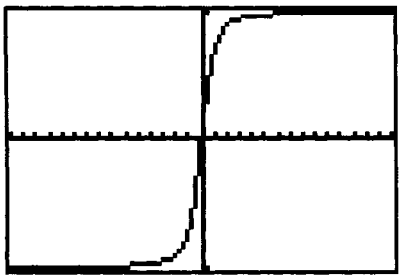


FIGURA 3.78 [–15, 15] por [–1, 1]



SOLUCIÓN

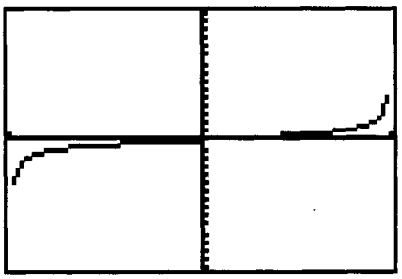
(a) Se asigna $x/\sqrt{x^2+1}$ a Y_1 y se usa un cuadro visual normal para obtener una presentación semejante a la Fig. 3.77. La gráfica está cerca de 1 si x es grande y positiva, y cercana a –1 si x es grande y negativa. Para mejorar la presentación, se cambia el rectángulo de visión a [–15, 15] por [–1, 1], para obtener en la pantalla una figura semejante a la Fig. 3.78.

(b) Según la prueba de la línea horizontal, f parece biunívoca, con dominio $\mathbb{R}$ y contradominio (–1, 1). (Estos conceptos se pueden demostrar algebraicamente; sin embargo no se demostrarán aquí). Por consiguiente, f tiene una función inversa f^{-1} cuyo dominio es (–1, 1) y contradominio es $\mathbb{R}$.

Para determinar f^{-1}, despejamos x de la ecuación $y = f(x)$, en términos de y, como sigue:

$y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$	ecuación dada
$y\sqrt{x^2+1} = x$	se multiplica por $\sqrt{x^2+1}$
$y^2(x^2+1) = x^2$	se elevan ambos miembros al cuadrado
$y^2x^2 + y^2 = x^2$	se multiplica
$(y^2-1)x^2 = -y^2$	se agrupan los términos en x^2

FIGURA 3.79 [–1, 1] por [–15, 15]



$$x^2 = \frac{y^2}{1-y^2}$$ se divide entre $1-y^2$ y se cambian los signos

$$x = \pm\sqrt{\frac{y^2}{1-y^2}} = \pm\frac{\sqrt{y^2}}{\sqrt{1-y^2}}$$ se saca raíz cuadrada

$$x = \pm\frac{|y|}{\sqrt{1-y^2}} = \pm\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$ $\sqrt{y^2} = |y|$

En la Fig. 3.78 se ve que tanto *x como y son siempre positivas o negativas* y, por lo tanto, la última ecuación se puede simplificar a

$$x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Por lo tanto,

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \quad \text{o, lo que es lo mismo} \quad f^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Con el cuadro visual [–1, 1] por [–15, 15] se obtiene una figura semejante a la de la Fig. 3.79.

EJERCICIOS 3.8

Ejercicios 1–12: Determine si la función *f* es biunívoca.

1 $f(x) = 3x - 7$

2 $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

3 $f(x) = x^2 - 9$

4 $f(x) = x^2 + 4$

5 $f(x) = \sqrt{x}$

6 $f(x) = \sqrt[3]{x}$

7 $f(x) = |x|$

8 $f(x) = 3$

9 $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

10 $f(x) = 2x^3 - 4$

11 $f(x) = \dfrac{1}{x}$

12 $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Ejercicios 13–16: Con el teorema sobre funciones inversas, demuestre que *f* y *g* son funciones inversas entre sí, y grafíquelas en el mismo plano coordenado.

13 $f(x) = 3x - 2$; $g(x) = \dfrac{x+2}{3}$

14 $f(x) = x^2 + 5, x \le 0$; $g(x) = -\sqrt{x-5}, x \ge 5$

15 $f(x) = -x^2 + 3, x \ge 0$; $g(x) = \sqrt{3-x}, x \le 3$

16 $f(x) = x^3 - 4$; $g(x) = \sqrt[3]{x+4}$

Ejercicios 17–32: Determine la función inversa de *f*.

17 $f(x) = 3x + 5$

18 $f(x) = 7 - 2x$

19 $f(x) = \dfrac{1}{3x-2}$

20 $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$

21 $f(x) = \dfrac{3x+2}{2x-5}$

22 $f(x) = \dfrac{4x}{x-2}$

23 $f(x) = 2 - 3x^2, x \le 0$

24 $f(x) = 5x^2 + 2, x \ge 0$

25 $f(x) = 2x^3 - 5$

26 $f(x) = -x^3 + 2$

27 $f(x) = \sqrt{3-x}$

28 $f(x) = \sqrt{4-x^2}, 0 \le x \le 2$

29 $f(x) = \sqrt[3]{x} + 1$

30 $f(x) = (x^3 + 1)^5$

31 $f(x) = x$

32 $f(x) = -x$

33 **(a)** Demuestre que la función definida por $f(x) = ax + b$ (que es función lineal) para $a \neq 0$ tiene una función inversa, y determine $f^{-1}(x)$.

(b) ¿Tiene inversa una función constante? Explique su respuesta.

34 Demuestre que la gráfica de f^{-1} es la reflexión de la gráfica de f en la línea $y = x$, o con respecto a ella, comprobando las siguientes condiciones:

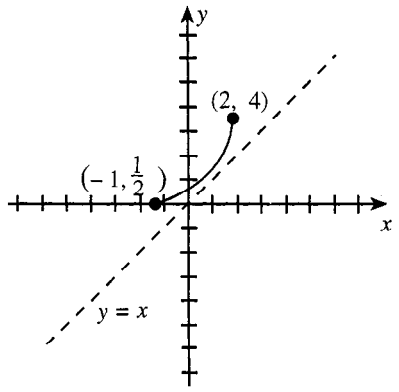
(1) Si $P(a,b)$ está en la gráfica de f, entonces $Q(b,a)$ está en la gráfica de f^{-1}.

(2) El punto medio del segmento de recta PQ está en la línea $y = x$.

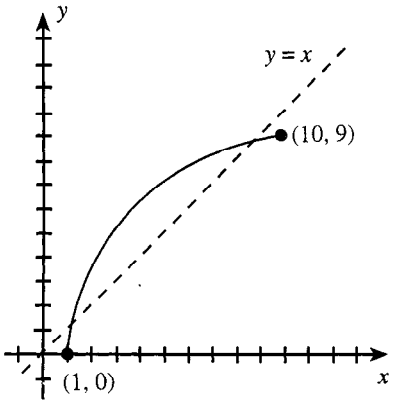
(3) La línea PQ es perpendicular a la línea $y = x$.

Ejercicios 35 – 38: Se muestra la gráfica de una función f biunívoca. (a) Emplee la propiedad de reflexión para graficar f^{-1}. (b) Determine el dominio D y el contradominio R de la función f. (c) Determine el dominio D_1 y el contradominio R_1 de la función inversa f^{-1}.

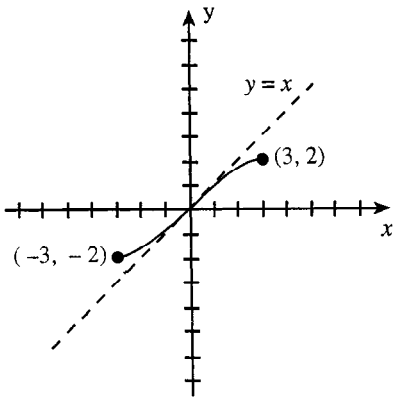
35



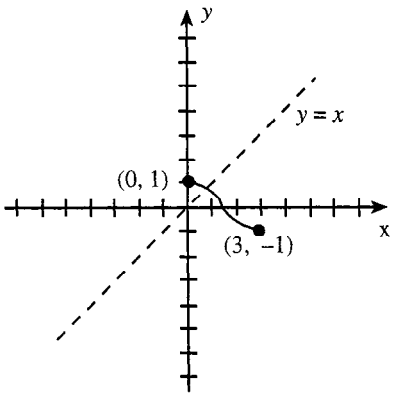
36



37



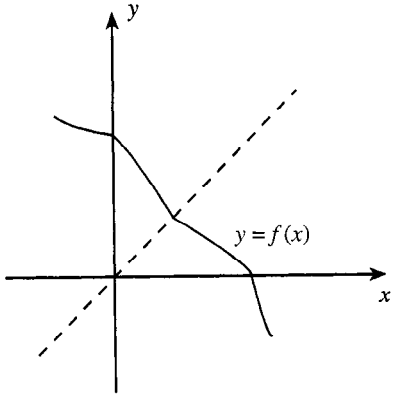
38



39 Compruebe que $f(x) = f^{-1}(x)$ si

(a) $f(x) = -x + b$ **(b)** $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx - a}$ para $c \neq 0$

(c) $f(x)$ tiene la siguiente gráfica:



C **40** Sea n cualquier entero positivo. Determine la función inversa de f si

(a) $f(x) = x^n$ para $x \geq 0$

(b) $f(x) = x^{m/n}$ para $x \geq 0$, donde m cualquier entero positivo.

Ejercicios 41 y 42: Mediante la gráfica de f, determine si f es biunívoca.

41 $f(x) = 0.4x^5 - 0.4x^4 + 1.2x^3 - 1.2x^2 + 0.8x - 0.8$

42 $f(x) = \dfrac{x - 8}{x^{2/3} + 4}$

Ejercicios 43 y 44: Grafique f en el intervalo mencionado. (a) Estime el mayor intervalo, $[a, b]$ con $a < 0 < b$ en el cual f es biunívoca. (b) Si g es la función cuyo dominio es $[a, b]$ tal que $g(x) = f(x)$ para $a \le x \le b$, estime el dominio y el contradominio de g^{-1}.

43 $f(x) = 2.1x^3 - 2.98x^2 - 2.11x + 3; \quad [-1, 2]$

44 $f(x) = 0.05x^4 - 0.24x^3 - 0.15x^2 + 1.18x + 0.24; \quad [-2, 2]$

45 ***Densidad de la capa de ozono*** La concentración D de la capa de ozono, es 10^{-3}cm / km, para altitudes x entre 3 km y 15 km durante el invierno en Edmonton, Canadá, según determinaciones experimentales, es

$$D = 0.0833x^2 - 0.4996x + 3.5491.$$

Exprese x como función de D.

3.9 VARIACIÓN

En algunas investigaciones científicas, se usa el término *variación*, o *proporción*, para expresar relaciones entre las cantidades variables. En la tabla siguiente, k es un número real distinto de cero, que se llama **constante de variación**, o **constante de proporcionalidad.**

Terminología	Fórmula general	Ejemplo
y **varía directamente** con respecto a x, o bien, y es **directamente proporcional** a x	$y = kx$	$C = 2\pi r$, donde C es la circunferencia de un círculo, r es el radio, y $k = 2\pi$
y **varía inversamente** respecto a x, o bien, y es **inversamente proporcional** a x	$y = \dfrac{k}{x}$	$I = \dfrac{110}{R}$, donde I es la corriente en un circuito eléctrico, R es la resistencia, y $k = 110$ es la tensión

La variable x en la tabla también puede representar una potencia. Por ejemplo, la fórmula $A = \pi r^2$ dice que el área A de un círculo varía directamente respecto al *cuadrado* del radio r, donde π es la constante de variación. Igualmente, la fórmula $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ dice que el volumen V de una esfera, es directamente proporcional al *cubo* del radio. En este caso, la constante de proporcionalidad es $\frac{4}{3}\pi$.

EJEMPLO 1 *Variables directamente proporcionales*

Supóngase que una variable q es directamente proporcional a una variable z.

(a) Si $q = 12$ cuando $z = 5$, calcule la constante de proporcionalidad.

(b) Determinar el valor de q cuando $z = 7$.

SOLUCIÓN Como q es directamente proporcional a z,

$$q = kz,$$

donde k es una constante de proporcionalidad.

(a) Sustituyendo $q = 12$ y $z = 5$ se tiene

$$12 = k \cdot 5, \text{ o sea, } k = \tfrac{12}{5}.$$

(b) Ya que $k = \frac{12}{5}$, la fórmula $q = kz$ tiene la forma específica

$$q = \tfrac{12}{5}z.$$

Así, cuando $z = 7$,

$$q = \tfrac{12}{5} \cdot 7 = \tfrac{84}{5} = 16.8.$$

Se pueden usar las siguientes reglas para resolver problemas aplicados en los que intervenga la variación o proporción.

Reglas para resolver problemas de variación

1. Escribir una fórmula *general* donde intervengan las variables y una constante de proporcionalidad k.
2. Estimar el valor de k en la regla 1 empleando los datos iniciales que aparecen en el enunciado del problema.
3. Sustituir el valor de k que se encontró en la regla 2, en la fórmula de la regla 1 para obtener una fórmula *específica* en donde intervengan las variables.
4. Con los nuevos datos, resolver el problema.

Se aplican estas reglas para resolver el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 *Presión y volumen, cantidades inversamente proporcionales*

Si la temperatura permanece constante, la presión de un gas confinado es inversamente proporcional a su volumen. La presión de determinado gas en un recipiente esférico de 9 pulg de radio, es 20 lb/pulg^2. Si el radio del recipiente aumenta a 12 pulg calcule, aproximadamente, la nueva presión del gas.

SOLUCIÓN

Regla 1 Sea P la presión, en lb/pulg^2, y V el volumen, en pulg^3, entonces, como P es inversamente proporcional a V,

$$P = \frac{k}{V}$$

donde k es la constante de proporcionalidad.

Regla 2 Se calcula la constante de proporcionalidad, k, de la regla 1. Como el volumen V de una esfera de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, el volumen de la esfera inicial es $V = \frac{4}{3}\pi(9)^3 = 972\pi$ pulg^3. Esto lleva a lo siguiente:

$$20 = \frac{k}{972\pi} \qquad P = 20 \text{ cuando } V = 972\pi$$

$$k = 20(972\pi) = 19{,}440\pi \qquad \text{se despeja } k$$

Regla 3 Se sustituye $k = 19\,440\pi$ en $P = k/V$; se ve que la presión que corresponde a cualquier volumen V es

$$P = \frac{19{,}440\pi}{V}.$$

Regla 4 Si el radio nuevo es 12 pulg, entonces

$$V = \tfrac{4}{3}\pi(12)^3 = 2304\pi \text{ pulg.}^3.$$

Al sustituir este número en lugar de V en la fórmula que se obtuvo en la regla 3, se tiene

$$P = \frac{19{,}440\pi}{2304\pi} = \frac{135}{16} = 8.4375.$$

Así, la presión disminuye a unas 8.4 lb/pulg^2 cuando el radio aumenta a 12 pulg.

Hay otros tipos de variación. Si x, y y z son variables, y $y = kxz$ para determinado número real k, se dice que *y varía directamente respecto al producto de x y z*, o que **y varía en conjunto con x y z**. Si $y = k(x/z)$, entonces *y varía directamente con respecto a x, e inversamente respecto a z*. Como ejemplo final, si una variable w varía directamente respecto al producto de x y el cubo de y, e inversamente respecto al cuadrado de z, entonces

$$w = k\frac{xy^3}{z^2},$$

donde k es una constante de proporcionalidad.

EJEMPLO 3 ***Combinación de varios tipos de variación***

Una variable, w, varía directamente respecto al producto de u y v, e inversamente respecto al cuadrado de s.

(a) Si $w = 20$ cuando $u = 3$, $v = 5$ y $s = 2$, calcular la constante de variación.

(b) Calcular el valor de w cuando $u = 7$, $v = 4$ y $s = 3$.

SOLUCIÓN Una fórmula general de w es

$$w = k\frac{uv}{s^2},$$

donde k es la constante de proporcionalidad.

(a) Sustituyendo $w = 20$, $u = 3$, $v = 5$ y $s = 2$, se obtiene

$$20 = k\frac{3 \cdot 5}{2^2}, \qquad \text{o bien} \qquad k = \frac{80}{15} = \frac{16}{3}.$$

(b) Como $k = \frac{16}{3}$, la fórmula específica de w es

$$w = \frac{16}{3}\frac{uv}{s^2}.$$

Así, cuando $u = 7$, $v = 4$ y $s = 3$,

$$w = \frac{16}{3}\frac{7 \cdot 4}{3^2} = \frac{448}{27} \approx 16.6.$$

En el siguiente ejemplo se aplican las reglas enunciadas en esta sección.

EJEMPLO 4 ***Cálculo de la capacidad de carga de una viga de sección rectangular***

El peso que puede soportar con seguridad una viga con sección transversal rectangular varía directamente respecto al producto del ancho y el cuadrado de la altura de la sección transversal, e inversamente con respecto a la longitud de la viga. Si una viga tiene dimensiones de 8 pies por 2 pulg por 4 pulg, soporta con seguridad una carga de 500 lb, ¿qué peso puede cargar con seguridad una de 10 pies por 2 pulg por 8 pulg?

SOLUCIÓN

Regla 1 Si se representa con w, d, l y W al ancho, altura, longitud y carga, respectivamente, entonces una fórmula general de W es

$$W = k\frac{wd^2}{l},$$

en la cual k es la constante de proporcionalidad.

Regla 2 Para calcular el valor de k de la regla 1, se ve por los datos, que

$$500 = k\frac{2(4^2)}{8}, \qquad \text{o bien} \qquad k = 125.$$

Regla 3 Sustituyendo $k = 125$ en la fórmula de la regla 1, se obtiene la fórmula específica

$$W = 125\frac{wd^2}{l}.$$

Regla 4 Para contestar la pregunta, se sustituye $w = 2$, $d = 8$ y $l = 10$ en la fórmula que se encontró en la regla 3, y se llega a

$$W = 125 \cdot \frac{2 \cdot 8^2}{10} = 1600 \text{ lb}.$$

EJERCICIOS 3.9

Ejercicios 1–12: Exprese el enunciado en lenguaje común como una fórmula en donde intervengan las variables dadas y una constante de proporcionalidad k y, a continuación, estime el valor de k según las condiciones dadas.

1 u es directamente proporcional a v. Si $v = 30$, entonces $u = 12$.

2 s varía directamente con respecto a t. Si $t = 10$, entonces $s = 18$.

3 r varía en forma directa y s en forma inversa con respecto a t. Si $s = -2$ y $t = 4$, entonces $r = 7$.

4 w varía en forma directa con respecto a z, e inversamente con respecto a la raíz cuadrada de u. Si $z = 2$ y $u = 9$, entonces $w = 6$.

5 y es directamente proporcional al cuadrado de x e inversamente proporcional al cubo de z. Si $x = 5$ y $z = 3$, entonces $y = 25$.

6 q es inversamente proporcional a la suma de x y y. Si $x = 0.5$ y $y = 0.7$, entonces $q = 1.4$.

7 z es directamente proporcional al producto del cuadrado de x y al cubo de y. Si $x = 7$ y $y = -2$, entonces $z = 16$.

8 r es directamente proporcional al producto de s por v, e inversamente proporcional al cubo de p. Si $s = 2$, $v = 3$ y $p = 5$, entonces $r = 40$.

9 y es directamente proporcional a x e inversamente proporcional al cuadrado de z. Si $x = 4$, $z = 3$, entonces $y = 16$.

10 y es directamente proporcional a x e inversamente proporcional a la suma de r y s. Si $x = 3$, $r = 5$ y $s = 7$, entonces $y = 2$.

11 y es directamente proporcional a la raíz cuadrada de x e inversamente proporcional al cubo de z. Si $x = 9$ y $z = 2$, entonces $y = 5$.

12 y es directamente proporcional al cuadrado de x e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de z. Si $x = 5$ y $z = 16$, entonces $y = 10$.

13 ***Presión de un líquido*** La presión P que actúa en un punto en el seno de un líquido es directamente proporcional a la distancia d del punto a la superficie del líquido.

(a) Exprese P como función de d con una fórmula en la que intervenga una constante de proporcionalidad k.

(b) En un tanque de aceite, la presión es 118 lb/pie^3 a una profundidad de 2 pies. Calcule el valor de k en la parte (a).

(c) Calcule la presión a una profundidad de 5 pies, en el tanque de aceite del inciso (b).

14 ***Ley de Hooke*** La ley de Hooke establece que la fuerza F necesaria para estirar x unidades un resorte con respecto a su longitud natural, es directamente proporcional a x.

(a) Exprese F como función de x por medio de una fórmula en la que intervenga una constante de proporcionalidad k.

(b) Un peso de 4 lb hace que se estire cierto resorte, desde su longitud natural de 10 pulg hasta una de 10.3 pulg. Calcule el valor de k en el inciso (b).

(c) ¿Qué peso estirará al resorte del inciso (b) hasta una longitud de 11.5 pulg?

15 ***Resistencia eléctrica*** La resistencia eléctrica R de un conductor, varía en forma directa con respecto a su longitud, l, e inversamente con respecto al cuadrado de su diámetro d.

(a) Exprese R en términos de l, d y una constante de proporcionalidad, k.

(b) Un conductor eléctrico de 100 pies de longitud, con 0.01 pulg de diámetro, tiene una resistencia de 25 Ω (ohms). Calcule el valor de k del inciso (a).

(c) Calcule la resistencia de un conductor del mismo material, que tiene un diámetro de 0.015 pulg y cuya longitud es 50 pies.

16 ***Intensidad de iluminación*** La intensidad de iluminación I de una fuente luminosa varía inversamente respecto al cuadrado de la distancia d de la fuente.

(a) Exprese I en términos de d y de una constante de proporcionalidad k.

(b) Un faro localizador tiene una intensidad de 1 000 000 bujías a una distancia de 50 pies. Calcule el valor de k en la parte (a).

(c) Calcule, aproximadamente, la intensidad del faro en (b) a una distancia de 1 mi.

17 ***Periodo de un péndulo*** El periodo P de un péndulo simple, es decir, el tiempo necesario para una oscilación completa, es directamente proporcional a la raíz cuadrada de su longitud l.

(a) Exprese P en términos de l y de una constante de proporcionalidad k.

(b) Un péndulo de 2 pies de longitud tiene un periodo de 1.5 s. Calcule el valor de k en el inciso (a).

(c) Calcule el periodo de un péndulo de 6 pies de longitud.

18 ***Dimensiones de una extremidad humana*** A veces se emplea, en fisiología, un cilindro circular como representación sencilla de una extremidad humana.

(a) Exprese el volumen V de un cilindro en términos de su longitud L y del cuadrado de su circunferencia C.

(b) La fórmula obtenida en el inciso (a) se puede emplear para calcular, aproximadamente, el volumen de una extremidad a partir de mediciones de longitud y circunferencia. Suponga que la circunferencia promedio de un antebrazo humano es 22 cm, y la longitud promedio es 27 cm. Calcule el volumen del antebrazo, con aproximación al cm^3.

19 ***Periodo de un planeta*** La tercera ley de Kepler establece que el período T de un planeta, que es el tiempo necesario para describir una revolución completa alrededor del Sol, es directamente proporcional a la potencia $\frac{3}{2}$ de su distancia media d al Sol.

(a) Exprese T como función de d con una fórmula en la que intervenga una constante de proporcionalidad k.

(b) En el caso de la Tierra, $T = 365$ días, y $d = 93$ millones de millas. Calcule el valor de k en el inciso (a).

(c) Estime el periodo de Venus, si su distancia promedio al Sol es 67 millones de millas.

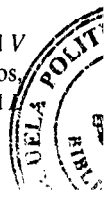
20 ***Alcance de un proyectil*** De acuerdo con la física, se sabe que el alcance R de un proyectil es directamente proporcional al cuadrado de su velocidad v.

(a) Exprese R como función de v mediante una fórmula en la que intervenga una constante de proporcionalidad k.

(b) Un acróbata en motocicleta ha dado un salto de 150 pies. Si la velocidad de salida de la rampa era 70 mi/h, calcule el valor de k en el inciso (a).

(c) Si el acróbata puede alcanzar una velocidad de despegue de 80 mi/h, y mantener el equilibrio adecuado, estime la longitud probable de su salto.

21 ***Marcas de derrapes de un automóvil*** La velocidad V a la cual viaja un automóvil antes de aplicar los frenos, se puede estimar, a veces, de acuerdo con la longitud



de las marcas de "frenado" de los neumáticos. Suponga que V es directamene proporcional a la raíz cuadrada de L.

(a) Exprese V como función de L, mediante una fórmula en la que intervenga una constante de proporcionalidad k.

(b) Para cierto automóvil, en pavimento seco, $L = 50$ pies cuando $V = 35$ mi/h. Calcule el valor de k en el inciso (a).

(c) Estime la velocidad inicial del automóvil del inciso (b), si las huellas de frenado tienen una longitud de 150 pies.

22 ***Ley de Coulomb*** La ley de Coulomb, en electricidad, dice que la fuerza de atracción F entre dos partículas con cargas opuestas, varía en forma directa con respecto al producto de las magnitudes Q_1 y Q_2 de las cargas, e inversamente con respecto al cuadrado de la distancia d entre ellas.

(a) Deduzca una fórmula para F en términos de Q_1, Q_2, d y una constante de proporcionalidad k.

(b) ¿Qué efecto se consigue reduciendo a una cuarta parte la distancia entre las partículas?

23 ***Peso corporal límite*** Se define este peso W como el máximo más allá del cual aumenta apreciablemente el peligro de muerte. Para hombres de edad mediana, W es directamente proporcional al cubo de la estatura h.

(a) Exprese W como función de h mediante una fórmula en la que intervenga una constante de proporcionalidad k.

(b) Para un hombre de 6 pies de altura, W es, aproximadamente, 200 lb. Calcule el valor de k en el inciso (a).

(c) Estime, con precisión de 1 lb, el peso corporal límite de un individuo cuya estatura es de 5 pies 6 pulg.

24 ***La ley del gas ideal*** Esta ley establece que el volumen V que ocupa un gas, es directamente proporcional al producto del número n de moles del gas por la temperatura T en kelvins (K), e inversamente proporcional a la presión P en atmósferas.

(a) Exprese a V en términos de n, T, P, y de una constante de proporcionalidad k.

(b) ¿Qué efecto se consigue en el volumen si se duplica el número de moles, y se reducen a la mitad tanto la temperatura como la presión?

25 ***Ley de Poiseuille*** Esta ley indica que el flujo volumétrico F de sangre, en L/min, que pasa por alguna de las arterias principales, es directamente proporcional al producto de la cuarta potencia del radio r y de la presión de la sangre P.

(a) Exprese F en términos de P, r y de una constante de proporcionalidad k.

(b) Durante el ejercicio violento, a veces se triplican los flujos sanguíneos normales. Si el radio de una arteria principal aumenta 10%. ¿Contra cuál nueva presión debe trabajar el corazón?

26 ***Población de truchas*** Suponga que se pescan 200 truchas, se les pone una marca y se sueltan entre la población general de un lago. Sea T el número de peces marcados que se vuelven a capturar, cuando, tiempo después, se captura una muestra de n truchas. La validez del método de marcar y recapturar para estimar la población total de truchas en el lago, se basa en la hipótesis que T es directamente proporcional a n. Si se recuperan 10 truchas marcadas en una muestra de 300 truchas pescadas, estime la población total de truchas en el lago.

27 ***Desintegración radiactiva del radón gaseoso*** Cuando se desintegra el uranio para finalizar siendo plomo, un paso del proceso es la desintegración radiactiva del radio para producir radón, que es un gas. El radón entra desde el suelo, atraviesa los cimientos de las casas y penetra a ellas, lo que representa un peligro para la salud si se inhala. En el caso más sencillo de detección de radón, se toma una muestra de aire de volumen V. Después de haberse establecido el equilibrio, la desintegración radiactiva D del radón, se lleva a cabo con una eficiencia E, durante el tiempo t. La concentración de radón C presente en la muestra de aire, varía en forma directa con respecto al producto de D y E, e inversamente respecto al producto de V y t. Para determinada concentración C y tiempo t, calcule el cambio en la cantidad de desintegración radiactiva D, si se duplica V y E se reduce en 20%.

28 ***Concentración de radón*** En el Ejercicio 27, calcule el cambio en la concentración C de radón, si D aumenta un 30%, t se incrementa 60%, V disminuye 10% y E permanece constante.

Ejercicios 29 – 32: Examine la expresión del conjunto de puntos dados de la forma (x, y). Calcule la constante de variación, y una fórmula que exprese cómo varía y con respecto a x.

29 y/x; {(0.6, 0.72), (1.2, 1.44), (4.2, 5.04), (7.1, 8.52), (9.3, 11.16)}

30 xy; {(0.2, −26.5), (0.4, −13.25), (0.8, −6.625), (1.6, −3.3125), (3.2, −1.65625)}

31 x^2y; {(0.16, −394.53125), (0.8, −15.78125), (1.6, −3.9453125), (3.2, −0.986328125)}

32 y/x^3; {(0.11, 0.00355377), (0.56, 0.46889472), (1.2, 4.61376), (2.4, 36.91008)}

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 3

1 Represente el conjunto de todos los puntos, (x, y), en un plano de coordenadas, tales que $y/x < 0$.

2 Demuestre que el triángulo cuyos vértices son $A(3, 1)$, $B(-5, -3)$ y $C(4, -1)$, es rectángulo, y calcule su área.

3 Dados $P(-5, 9)$ y $Q(-8, -7)$, calcule

(a) la distancia $d(P, Q)$
(b) las coordenadas del punto medio del segmento PQ
(c) las coordenadas de un punto R, tal que Q sea el punto medio de PR.

4 Determine todos los puntos del eje y que estén a una distancia de 13 de $P(12,6)$.

5 ¿Para qué valores de a la distancia entre $P(a, 1)$ y $Q(-2, a)$ es menor que 3?

6 Determine una ecuación del círculo cuyo centro es $C(7, -4)$ y pasa por $P(-3, 3)$.

7 Deduzca una ecuación del círculo tal que los extremos del diámetro estén en $A(8, 10)$ y $B(-2, -14)$.

8 Deduzca una ecuación del lado izquierdo del círculo $(x + 2)^2 + y^2 = 9$.

9 Calcule la pendiente de la recta que pasa por $C(11, -5)$ y $D(-8, 6)$.

10 Demuestre que $A(-3, 1)$, $B(1, -1)$, $C(4, 1)$ y $D(3, 5)$ son los vértices de un trapecio.

11 Deduzca una ecuación de la recta que pasa por $A(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$ que es

(a) paralela a la recta $6x + 2y + 5 = 0$
(b) perpendicular a la recta $6x + 2y + 5 = 0$

12 Exprese la ecuación $8x + 3y - 24 = 0$ en su forma simplificada o pendiente y ordenada en el origen.

13 Encuentre una ecuación del círculo cuyo centro está en $C(-5, -1)$, que sea tangente a la recta $x = 4$.

14 Deduzca una ecuación de la recta que tenga abscisa en el origen -3, y que pase por el centro del círculo $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 26 = 0$.

15 Deduzca la forma general de la ecuación de una recta que pasa por $P(4, -3)$ cuya pendiente sea 5.

16 Dados $A(-1, 2)$ y $B(3, -4)$, determine la forma general de una ecuación de la mediatriz del segmento AB.

Ejercicios 17 y 18: Determine el centro y el radio del círculo de la ecuación dada.

17 $x^2 + y^2 - 12y + 31 = 0$

18 $4x^2 + 4y^2 + 24x - 16y + 39 = 0$

19 Si $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x + 3}}$, calcule

(a) $f(1)$ **(b)** $f(-1)$ **(c)** $f(0)$ **(d)** $f(-x)$
(e) $-f(x)$ **(f)** $f(x^2)$ **(g)** $[f(x)]^2$

20 Determine el dominio y el contradominio de f si

(a) $f(x) = \sqrt{3x - 4}$ **(b)** $f(x) = \dfrac{1}{(x + 3)^2}$

Ejercicios 21 y 22: Calcule $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$, cuando $h \neq 0$.

21 $f(x) = -x^2 + x + 5$ **22** $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$

23 Determine una función lineal f tal que $f(1) = 2$, y $f(3) = 7$.

24 Determine si f es par, impar, o ni una cosa ni otra.

(a) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 4x}$ **(b)** $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$
(c) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 + 3x^2 + 5}$

Ejercicios 25 – 38: Grafique la ecuación, e identifique la ordenada en el origen y la abscisa en el origen.

25 $x + 5 = 0$ **26** $2y - 7 = 0$
27 $2y + 5x - 8 = 0$ **28** $x = 3y + 4$
29 $9y + 2x^2 = 0$ **30** $3x - 7y^2 = 0$
31 $y = \sqrt{1 - x}$ **32** $y = (x - 1)^3$
33 $y^2 = 16 - x^2$
34 $x^2 + y^2 + 4x - 16y + 64 = 0$
35 $x^2 + y^2 - 8x = 0$ **36** $x = -\sqrt{9 - y^2}$
37 $y = (x - 3)^2 - 2$ **38** $y = -x^2 - 2x + 3$

Ejercicios 39 - 48: (a) Trace la gráfica de f. (b) Determine el dominio D, y el contradominio R de f. (c) Obtenga los intervalos en los cuales f es creciente, decreciente o constante.

39 $f(x) = \dfrac{1 - 3x}{2}$ **40** $f(x) = 1000$

41 $f(x) = |x + 3|$ **42** $f(x) = -\sqrt{10 - x^2}$

43 $f(x) = 1 - \sqrt{x+1}$ **44** $f(x) = \sqrt{2-x}$

45 $f(x) = 9 - x^2$ **46** $f(x) = x^2 + 6x + 16$

47 $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ 3x & \text{si } 0 \le x < 2 \\ 6 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$ **48** $f(x) = 1 + 2[\![x]\!]$

49 Haga un esquema de las gráficas de las siguientes ecuaciones, empleando desplazamiento o traslación, ampliación o reflexión.

(a) $y = \sqrt{x}$ **(b)** $y = \sqrt{x+4}$ **(c)** $y = \sqrt{x} + 4$

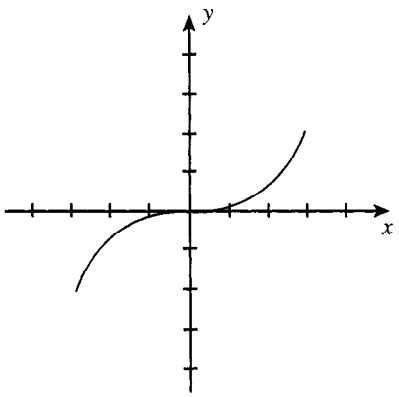
(d) $y = 4\sqrt{x}$ **(e)** $y = \frac{1}{4}\sqrt{x}$ **(f)** $y = -\sqrt{x}$

50 En la figura se muestra la gráfica de una función f cuyo dominio $[-3, 3]$ se puede ver. Grafique la ecuación dada.

(a) $y = f(x - 2)$ **(b)** $y = f(x) - 2$

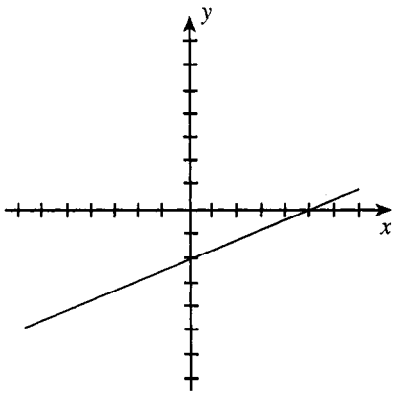
(c) $y = f(-x)$ **(d)** $y = f(2x)$

(e) $y = f(\frac{1}{2}x)$ **(f)** $y = f^{-1}(x)$

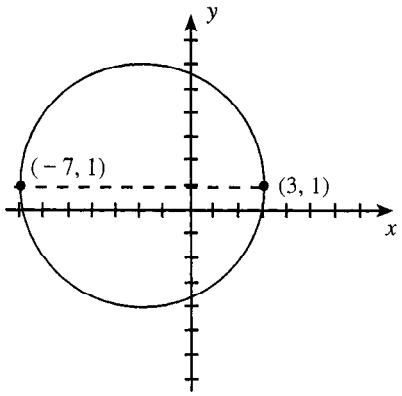


Ejercicios 51–54: Determine una ecuación de la gráfica que aparece en la figura.

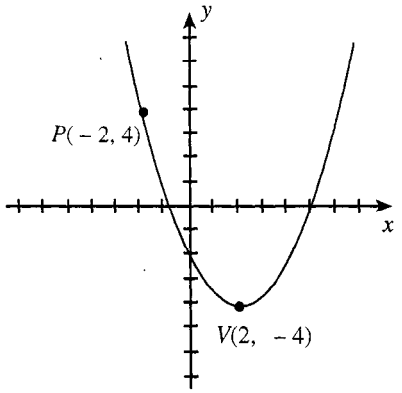
51



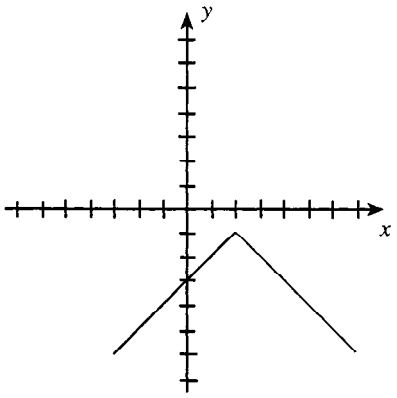
52



53



54



Ejercicios 55 – 56: Calcule el valor máximo o mínimo de $f(x)$.

55 $f(x) = 5x^2 + 30x + 49$

56 $f(x) = -3x^2 + 30x - 82$

57 Exprese la función $f(x) = -2x^2 + 12x - 14$ en la forma $a(x-h)^2 + k$.

58 Deduzca la ecuación normal de una parábola cuyo eje sea vertical, que tenga su vértice en $V(3, -2)$, y que pase por $(5, 4)$.

59 Si $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, y $g(x) = \sqrt{x}$, determine el dominio de

(a) fg **(b)** f/g

60 Si $f(x) = 8x - 1$, y $g(x) = \sqrt{x - 2}$, determine

(a) $(f \circ g)(2)$ **(b)** $(g \circ f)(2)$

Ejercicios 61 y 62: Determine (a) $(f \circ g)(x)$ y (b) $(g \circ f)(x)$.

61 $f(x) = 2x^2 - 5x + 1, \quad g(x) = 3x + 2$

62 $f(x) = \sqrt{3x + 2}, \quad g(x) = 1/x^2$

Ejercicios 63 y 64: Determine (a) $(f \circ g)(x)$ y el dominio de $f \circ g$, y (b) $(g \circ f)(x)$ y el dominio de $g \circ f$.

63 $f(x) = \sqrt{25 - x^2}, \quad g(x) = \sqrt{x - 3}$

64 $f(x) = \dfrac{x}{3x + 2}, \quad g(x) = \dfrac{2}{x}$

65 Halle una forma de función compuesta para $y = \sqrt[3]{x^2 - 5x}$.

66 ¿Es $f(x) = 2x^3 - 5$ función biunívoca?

Ejercicios 67 y 68: (a) Determine $f^{-1}(x)$. (b) Trace las gráficas de f y f^{-1} en el mismo plano coordenado.

67 $f(x) = 10 - 15x$ **68** $f(x) = 9 - 2x^2, \; x \leq 0$

69 Suponga que y es directamente proporcional a la raíz cúbica de x, e inversamente proporcional al cuadrado de z. Calcule la constante de proporcionalidad si $y = 6$ cuando $x = 8$ y $z = 3$.

70 ***Lanzamiento del disco*** Con base en las marcas olímpicas, la distancia ganadora en el lanzamiento del disco es, aproximadamente, $d = 175 + 1.75t$, donde d está en pies y $t = 0$ corresponde al año 1948.

(a) Prediga la distancia ganadora en los Juegos Olímpicos de Verano de 1996, en Atlanta, Estados Unidos.

(b) Calcule, aproximadamente, el año en el cual la distancia será 270 pies.

71 ***Valuación de una casa*** Hace 6 años, una casa se compró en \$89 000 (dólares). Este año fue valuada en \$125 000. Suponga que el valor V de la casa después de su compra es función lineal del tiempo t expresado en años.

(a) Exprese V en términos de t.

(b) ¿A los cuántos años después de la fecha de compra, el valor de la casa fue \$103 000?

72 ***Escalas de temperatura*** El punto de congelación de agua es 0 °C, o 32 °F; y el punto de ebullición es 100 °C, o 212 °F.

(a) Exprese la temperatura Fahrenheit F como función lineal de la temperatura Celsius C.

(b) ¿Qué aumento de temperatura, en °F, corresponde a un aumento de temperatura de 1 °C?

73 ***Rendimiento de gasolina*** Suponga que el costo de conducir un automóvil es función lineal del número de millas x recorridas, y que la gasolina cuesta \$1.25 (dólares) por galón. En la actualidad, cierto automóvil da 20 mi/gal, y con una afinación, el rendimiento mejora en 10%. El costo de la afinación es \$50.

(a) Exprese el costo C_1, en términos de x, de conducir el automóvil sin afinación.

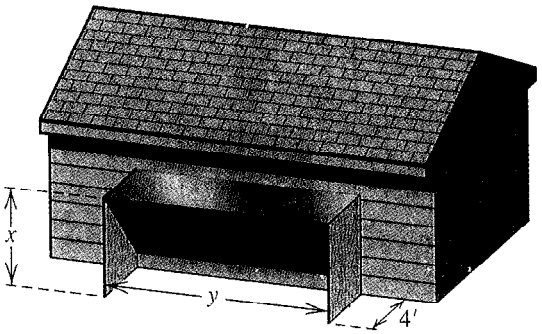
(b) Exprese el costo C_2 en términos de x, de conducir con el motor afinado.

(c) ¿Cuántas millas debe recorrer el automóvil después de una afinación para recuperar el costo de la misma?

74 ***Construcción de un cobertizo*** Se desea adosar a una estructura existente un cobertizo rectangular abierto formado por dos paredes verticales de 4 pies de ancho, y un techo plano, como se ve en la figura siguiente. El techo plano es de lámina de estaño y cuesta \$5 (dólares) por pie cuadrado, y los dos lados son de madera contrachapada, que cuesta \$2 por pie cuadrado.

(a) Si se dispone de \$400 para la construcción, exprese la longitud y como función de la altura x.

(b) Exprese el volumen V bajo el cobertizo, en función de x.



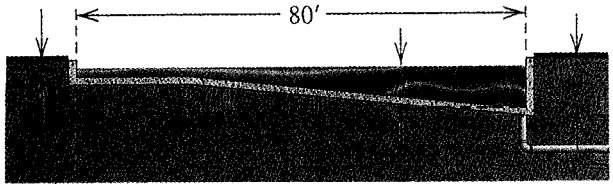
75 ***Construcción de un recipiente cilíndrico*** Una empresa desea fabricar un recipiente en forma de cilindro circular recto, abierto en la tapa, que tenga capacidad de 24π pulg^3. Si el costo del material del fondo es 30¢ por pulg^2, y el del lado cilíndrico es 10¢ por pulg^2, exprese el costo total C del material en función del radio r de la base.

76 ***Llenado de una alberca*** En la figura siguiente se ve un corte longitudinal de una piscina, cuyas dimensiones son 80 pies por 40 pies. Esta alberca se llena con agua, a un flujo de 10 pies^3 por minuto.

(a) Exprese el volumen V del agua en la alberca, en función del tiempo de llenado t.

(b) Exprese V como función de la profundidad h referida al extremo hondo, para $0 \le h \le 6$ y, después, para $6 < h \le 9$.

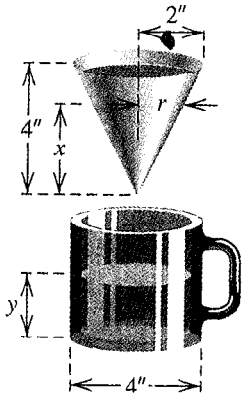
(c) Exprese h como función de t para $0 \le h \le 6$, y a continuación para $6 < h \le 9$.



77 ***Filtrado de agua*** Suponga que se vierten 5 pulg^3 de agua en un filtro cónico, del cual comienza a gotear a una taza, como se ve en la figura siguiente. Sean x la altura del agua en el filtro, y y la altura del agua en la taza.

(a) Exprese el radio r que se define en la figura en función de x. (*Sugerencia*: Use triángulos semejantes.)

(b) Exprese la altura y del agua en la taza como función de x. (*Sugerencia:* ¿Cuál es la suma de los dos volúmenes que se muestran en la figura?)

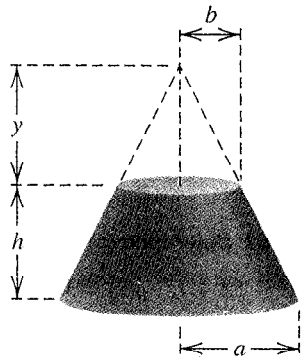


78 ***Cono truncado*** La forma de la primera cápsula espacial del programa Apolo fue un cono truncado circular recto; es un sólido que se obtiene cortando un cono mediante un plano paralelo a su base. Para el cono truncado que se ve en la figura, ya se han calculado los radios a y b.

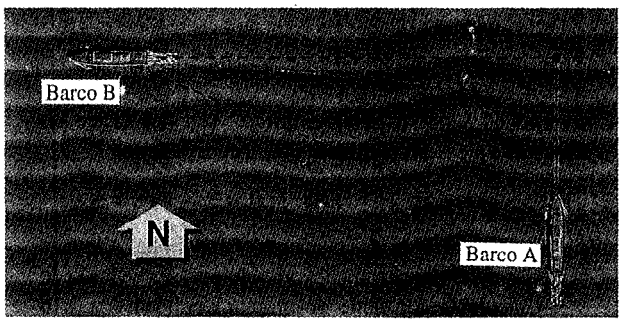
(a) Mediante triángulos semejantes, exprese y en función de h.

(b) Deduzca la fórmula del volumen del cono truncado, en función de h.

(c) Si $a = 6$ pies y $b = 3$ pies, ¿para qué valor de h el volumen de la cápsula es 600 pies^3?



79 ***Distancia entre buques*** A la 1:00 P. M., el barco A está a 30 mi al sur del barco B, y navega hacia el norte, a una velocidad de 15 mi/h. Si el barco B navega hacia el oeste a una velocidad de 10 mi/h, calcule la hora a la cual es mínima la distancia d entre los barcos, (véase la figura).



80 ***Dimensiones de una pista de carreras*** El interior de una pista de carreras de media milla es un rectángulo con semicírculos en dos extremos opuestos. Calcule las dimensiones que hagan máxima el área del rectángulo.

81 ***Saltos verticales*** Cuando determinado jugador de básquetbol salta directo hacia arriba tratando de encestar, la altura $f(t)$ de los pies del jugador al piso, en pies, a los t segundos, es $f(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 16t$, donde g es la constante gravitacional.

(a) Si $g = 32$, calcule el tiempo que pasa el jugador en el aire, en segundos.

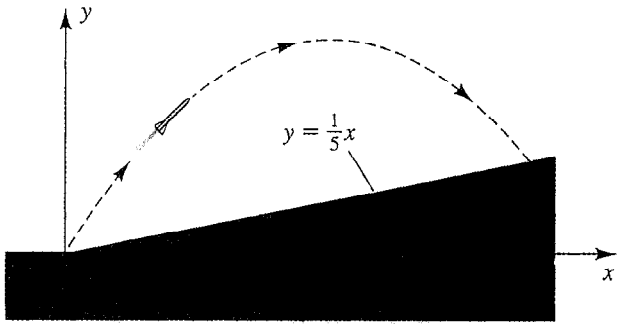
(b) Calcule la altura alcanzada por el jugador, es decir, la distancia máxima entre sus pies y el piso.

(c) En la Luna, $g = \frac{32}{6}$. Vuelva a resolver los incisos (a) y (b) para cuando el jugador esté en la Luna.

82 ***Trayectoria de un cohete*** Se dispara un cohete hacia arriba de una colina, siguiendo una trayectoria expresada por $y = -0.016x^2 + 1.6x$. La pendiente del terreno es $\frac{1}{5}$, como se ve en la figura.

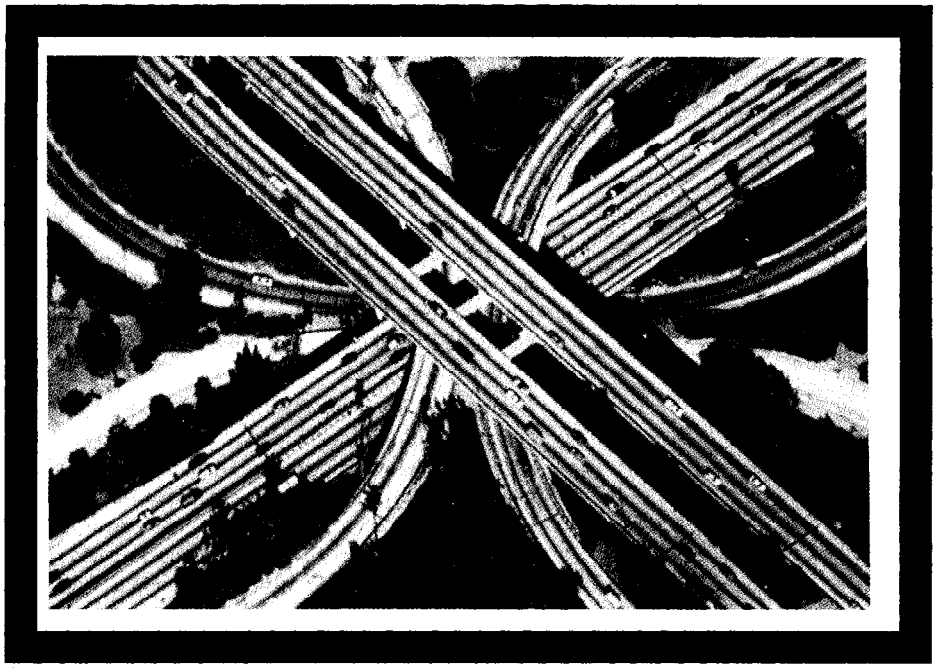
(a) ¿Dónde aterriza el cohete?

(b) Calcule la altura máxima que alcanza el cohete *sobre el terreno.*



83 ***Llamadas telefónicas*** En determinado lugar, el número promedio de llamadas telefónicas diarias entre dos ciudades cualesquiera es directamente proporcional al producto de su número de habitantes, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas. Las ciudades A y B están a 25 millas de distancia, y su número de habitantes respectivo es de 10 000 y 5 000. Los registros telefónicos muestran que se hace un promedio de 2 000 llamadas diarias entre ellas. Estime el número promedio de llamadas diarias entre la ciudad A y otra, de 15 000 habitantes, a 100 millas de A.

84 ***Potencia de un molino de viento*** La potencia P que genera un rotor de viento, es directamente proporcional al producto del cuadrado del área A, barrida por las aspas, por la tercera potencia de la velocidad del viento v. Suponga que el diámetro del área circular barrida por las aspas es 10 pies, y que $P = 3\,000$ W (watts) cuando $v = 20$ mi/h. Calcule la potencia generada cuando la velocidad del viento sea de 30 mi/h.



Muchas figuras geométricas que se ven en la vida cotidiana pueden representarse por gráficas de funciones polinomiales y racionales.

4.1	**GRÁFICAS DE FUNCIONES POLINOMIALES DE GRADO MAYOR QUE 2**
4.2	**PROPIEDADES DE LA DIVISIÓN**
4.3	**CEROS DE POLINOMIOS**
4.4	**CEROS COMPLEJOS Y RACIONALES DE POLINOMIOS**
4.5	**FUNCIONES RACIONALES**

CAPÍTULO 4

FUNCIONES POLINOMIALES Y RACIONALES

■ *Las funciones polinomiales son las básicas en matemáticas, porque sólo se definen en términos de suma, resta y multiplicación. Con frecuencia, en las aplicaciones es necesario trazar sus gráficas y calcular, o aproximar, sus raíces. En la primera parte de este capítulo se analizarán resultados útiles para obtener esta información. A continuación se dirige la atención a cocientes de funciones polinomiales, es decir, a funciones racionales.* ■

4.1 GRÁFICAS DE FUNCIONES POLINOMIALES DE GRADO MAYOR QUE 2

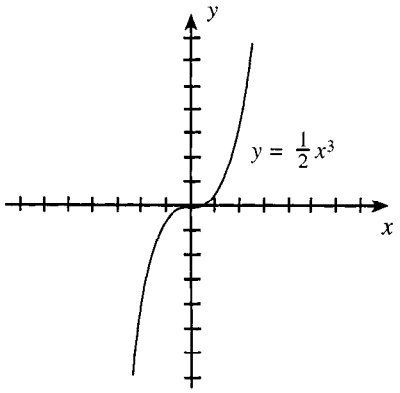
Si f es una función polinomial con coeficientes reales, de grado n, entonces

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

donde $a_n \neq 0$. En el Cap. 3 se estudiaron los casos especiales que aparecen en la tabla siguiente.

Grado de f	Forma de $f(x)$	Gráfica de f
0	$f(x) = a_0$	Línea horizontal con ordenada al origen a_0
1	$f(x) = a_1 x + a_0$	Recta de pendiente a_1 y ordenada al origen a_0
2	$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	Parábola con eje vertical

FIGURA 4.1



En esta sección se estudiarán gráficas de funciones polinomiales de grado mayor que 2.

Si f tiene grado n *y todos los coeficientes, excepto* a_n *son cero,* entonces

$$f(x) = ax^n \text{ para alguna } a = a_n \neq 0.$$

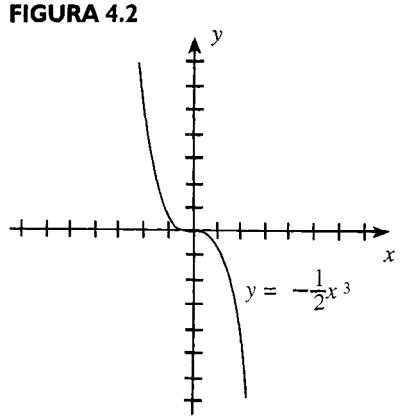
En este caso, si $n = 1$, la gráfica de f es una línea que pasa por el origen. Si $n = 2$, la gráfica es una parábola con vértice en el origen. En el siguiente ejemplo se dan dos casos con $n = 3$.

EJEMPLO 1 ***Trazo de gráficas de*** $y = ax^3$

Trazar la gráfica de f para

(a) $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ **(b)** $f(x) = -\frac{1}{2}x^3$

FIGURA 4.2



SOLUCIÓN

(a) La tabla siguiente presenta una lista de varios puntos de la gráfica de $y = \frac{1}{2}x^3$.

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
y	0	$\frac{1}{16} \approx 0.06$	$\frac{1}{2}$	$\frac{27}{16} \approx 1.7$	4	$\frac{125}{16} \approx 7.8$

Como f es función impar, la gráfica de f es simétrica con respecto al origen y, por lo tanto, puntos como $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{16})$ y $(-1, -\frac{1}{2})$ también están en la gráfica. Ésta se presenta en la Fig. 4.1.

(b) Si $y = -\frac{1}{2}x^3$, se puede obtener la gráfica a partir de la que se trazó en el inciso (a), al multiplicar todas las ordenadas por -1, es decir, reflejando la gráfica del inciso (a) en el eje x. Con ello llegamos a la representación de la Fig. 4.2

Si $f(x) = ax^n$ y n es entero positivo *impar*, entonces f es función impar y su gráfica es simétrica con respecto al origen, como se ve en las Figs. 4.1 y 4.2. Para $a > 0$, la gráfica es semejante en la forma a la de la Fig. 4.1; sin embargo, al aumentar n o a, la gráfica sube más rápidamente cuando $x > 1$. Para $a < 0$, se refleja la gráfica en el eje x, como en la Fig. 4.2.

Si $f(x) = ax^n$ y n es un entero positivo *par*, entonces f es función par y su gráfica es simétrica respecto al eje y, como se ve en la Fig. 4.3, para el caso $a = 1$. Nótese que, a medida que aumenta el exponente, la gráfica se aplana más en el origen. También aumenta con más rapidez para $x > 1$. Si $a < 0$, la gráfica está abajo del eje x.

FIGURA 4.3

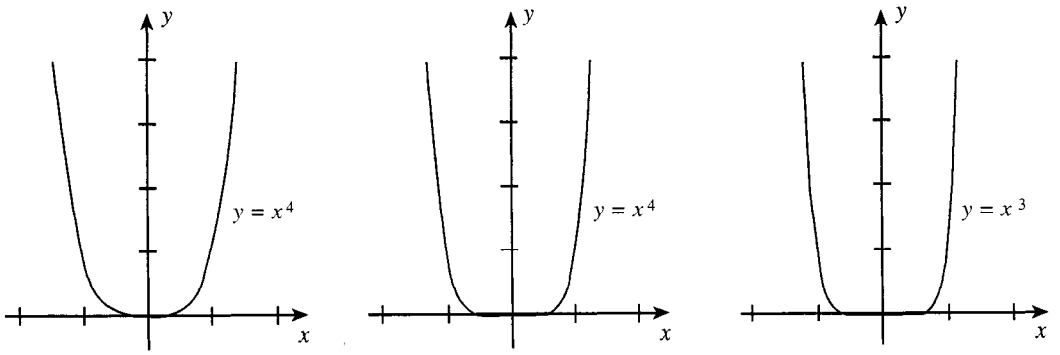
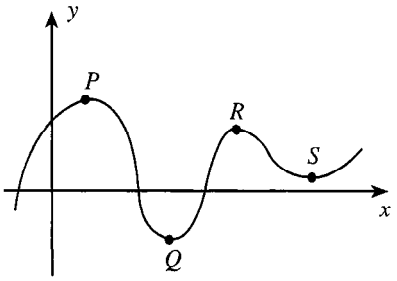


FIGURA 4.4



Para hacer un análisis completo de las gráficas de funciones polinomiales de grado mayor que 2, se necesitan métodos que se utilizan en Cálculo. Al aumentar el grado, por lo general, se complican esas gráficas. Sin embargo, siempre tienen aspecto uniforme, con varios puntos de máximo y de mínimo, como P, Q, R y S en la Fig. 4.4. A esos puntos se les llama **puntos de cambio** de la gráfica. Cada valor funcional, u ordenada, que corresponde a un punto de máximo o de mínimo, se llama **valor extremo**, o **extremo**, de la función f. En un extremo, f cambia, de una función creciente a una decreciente, o viceversa.

El teorema del valor intermedio especifica otra propiedad importante de las funciones polinomiales. Se omite su demostración, ya que se necesitan matemáticas superiores.

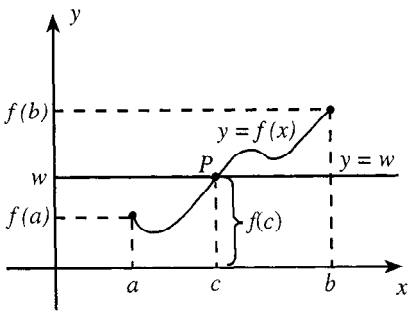
Teorema del valor intermedio para funciones polinomiales

> Si f es función polinomial y $f(a) \neq f(b)$ para $a < b$, entonces f asume todo valor entre $f(a)$ y $f(b)$ en el intervalo $[a, b]$.

El teorema del valor intermedio establece que si w es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, hay por lo menos un número c entre a y b, tal que $f(c) = w$. Si se considera que la gráfica de f se extiende en forma continua desde el punto $(a, f(a))$ hasta el punto $(b, f(b))$, como se ve en la Fig. 4.5, entonces, para cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, la recta horizontal $y = w$ corta a la gráfica cuando menos en un punto P. La abscisa c de P es un número tal que $f(c) = w$.

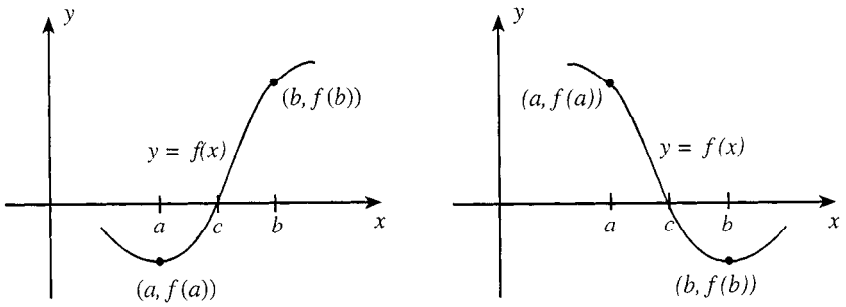
ESCUELA POLIT... BIBLI...

FIGURA 4.5



Una consecuencia del teorema del valor intermedio es que si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, hay cuando menos un número c entre a y b, tal que $f(c) = 0$; es decir, *f tiene un cero en c*. Así, si el punto $(a, f(a))$ está abajo del eje x y el punto $(b, f(b))$ está arriba del eje x, o viceversa, la gráfica cruza el eje x cuando menos una vez entre $x = a$ y $x = b$, como se ve en la Fig. 4.6.

FIGURA 4.6



EJEMPLO 2 ***Uso del teorema del valor intermedio***

Demostrar que $f(x) = x^5 + 2x^4 - 6x^3 + 2x - 3$ tiene un cero entre 1 y 2.

SOLUCIÓN Al sustituir 1 y 2 en lugar de x, se obtienen los siguientes valores de la función:

$$f(1) = 1 + 2 - 6 + 2 - 3 = -4$$

$$f(2) = 32 + 32 - 48 + 4 - 3 = 17$$

Como $f(1)$ y $f(2)$ tienen signos opuestos, se observa que $f(c) = 0$, cuando menos para un número real c entre 1 y 2.

En el Ejemplo 2 se muestra un método para localizar ceros reales de polinomios. Mediante *aproximaciones sucesivas*, se calcula el valor aproximado de cada cero, con cualquier nivel de precisión, ubicándolo dentro de intervalos cada vez más pequeños.

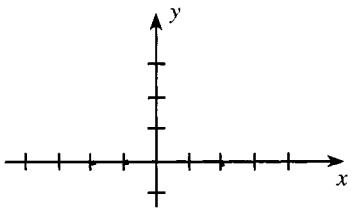
Si c y d son ceros reales *sucesivos* de $f(x)$; es decir, si no hay otros ceros entre c y d, entonces *$f(x)$ no cambia de signo en el intervalo* (c, d). Así, si se escoge cualquier número k de modo que $c < k < d$, y si $f(k)$ es positiva, entonces $f(x)$ es positiva en (c, d). Igualmente, si $f(k)$ es negativa, entonces $f(x)$ es negativa en (c, d). A $f(k)$ lo llamaremos **valor de prueba** de $f(x)$ en el intervalo (c, d). También es posible usar los valores de prueba en intervalos infinitos de la forma $(-\infty, a)$, o (a, ∞), siempre que $f(x)$ no tenga ceros en esos intervalos. El uso de valores de prueba en la graficación es semejante a la técnica que se usó para las desigualdades, en la Secc. 2.7.

EJEMPLO 3 ***Trazo de la gráfica de una función polinomial de grado 3***

Sea $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$. Calcular todos los valores de x tales que $f(x) > 0$ y todas las x tales que $f(x) < 0$ y, a continuación, hacer un esquema de la gráfica de f.

SOLUCIÓN La gráfica de f está arriba del eje x para valores de x tales que $f(x) > 0$, y está abajo del eje x para toda x tal que $f(x) < 0$. Se puede factorizar a $f(x)$ como sigue:

FIGURA 4.7



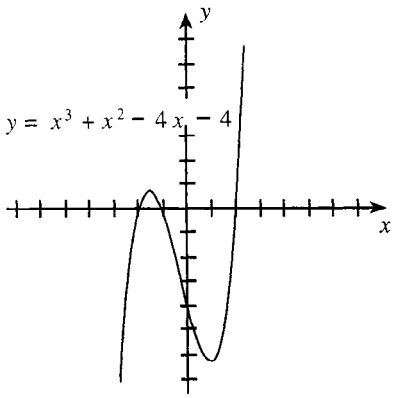
$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^3 + x^2 - 4x - 4 && \text{función dada}\\
&= (x^3 + x^2) - (4x + 4) && \text{se agrupan términos}\\
&= x^2(x + 1) - 4(x + 1) && \text{se factoriza } x^3 + x \text{ y } 4x + 4\\
&= (x^2 - 4)(x + 1) && \text{se saca } (x + 1) \text{ como factor común}\\
&= (x + 2)(x - 2)(x + 1) && \text{se descompone } x^2 - 4 \text{ en factores}
\end{aligned}
$$

En la última ecuación se observa que los ceros de $f(x)$, las abscisas de la gráfica, son $-2, -1$ y 2. Los puntos correspondientes de la gráfica (véase Fig. 4.7) dividen al eje x en cuatro partes, así que se examinarán los intervalos abiertos

$$(-\infty, -2), \quad (-2, -1), \quad (-1, 2), \quad (2, \infty).$$

Como se hizo con las desigualdades, en la Secc. 2.7, se puede determinar el signo de $f(x)$ en cada uno de esos intervalos mediante una tabla de signos, como sigue:

FIGURA 4.8



Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, \infty)$
Signo de $x + 2$	−	+	+	+
Signo de $x + 1$	−	−	+	+
Signo de $x - 2$	−	−	−	+
Signo de $f(x)$	−	+	−	+
Posición de la gráfica	Abajo del eje x	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x

Con la información de esta tabla de signos se hace el esquema de la Fig. 4.8. Para localizar los puntos de cambio de la gráfica es necesario usar una computadora, o métodos de Cálculo.

La gráfica de toda función polinomial de grado 3 tiene un aspecto semejante al de la Fig. 4.8, o, si el coeficiente de x^3 es negativo, es una versión invertida de esa figura. Sin embargo, a veces la gráfica puede tener sólo una abscisa, o la forma puede ser alargada, como las de las Figs. 4.1 y 4.2.

EJEMPLO 4 ***Trazo de la gráfica de una función polinomial de grado 4***

Sea $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$. Determinar todos los valores de x para los cuales $f(x) > 0$ y aquéllos para los que $f(x) < 0$; a continuación trazar la gráfica de f.

SOLUCIÓN Se siguen los mismos pasos efectuados para resolver el Ejem. 3. Así, se comienza con la factorización de $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 4x^3 + 3x^2 && \text{función dada} \\ &= x^2(x^2 - 4x + 3) && \text{se saca } x^2 \text{ como factor común} \\ &= x^2(x - 1)(x - 3) && \text{se factoriza} \end{aligned}$$

FIGURA 4.9

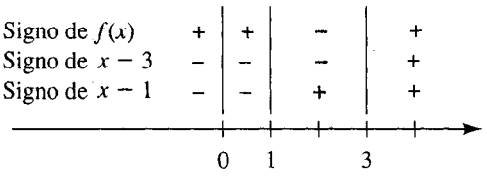
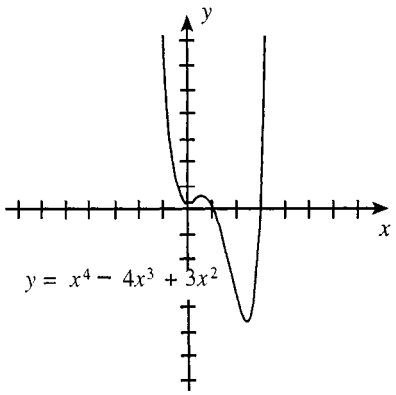


FIGURA 4.10



A continuación se construye el diagrama de signos, de la Fig. 4.9, en el cual las líneas verticales representan los ceros 0, 1 y 3 de los factores. Como el factor x^2 siempre es positivo si $x \neq 0$, no efecta el signo del producto y, por lo tanto, se puede omitir del diagrama.

En cuanto al signo de $f(x)$ en el diagrama, se observa que

$$f(x) > 0 \text{ en } (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (3, \infty) \text{ y } f(x) < 0 \text{ en } (1, 3).$$

A partir de lo anterior se obtiene la Fig. 4.10.

En el ejemplo siguiente se usará una graficadora para estimar coordenadas de puntos importantes en una gráfica.

EJEMPLO 5 ***Estimación de máximos y mínimos en una gráfica***

(a) Estimar los ceros reales de $f(x) = x^3 - 4.6x^2 + 5.72x - 0.656$ con precisión de tres cifras decimales.

(b) Obtener las coordenadas de los máximos y mínimos de la gráfica para $0.5 \leq x \leq 2.5$.

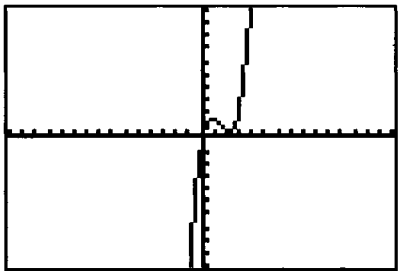
SOLUCIÓN

(a) Se asigna $f(x)$ a Y_1 y se utiliza un cuadro visual de un cierto tamaño, para obtener una pantalla semejante a la de la Fig. 4.11(a). Como todas las raíces reales parecen estar entre 0 y 3, se vuelve a trazar la gráfica, esta vez con el rectángulo visual [−1, 3] por [−1, 3]. Con ello se obtiene una presentación semejante a la de la Fig. 4.11(b), la cual indica que sólo hay una abscisa en el origen y, por lo tanto, una raíz real. Con los medios de trazo y ampliación se estima que el cero es 0.127.

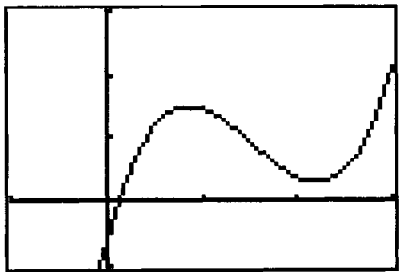
(b) En la Fig. 4.11(b) se observa, que si $0.5 \leq x \leq 2.5$, entonces $0 < y < 2$. Esto sugiere usar un rectángulo visual [0.5, 2.5] por [0, 2]. De nuevo, con los medios de trazo y ampliación, se estima que el punto máximo es (0.866, 1.497), y el mínimo, (2.200, 0.312).

FIGURA 4.11

(a) [−15, 15] por [−10, 10]



(b) [−1, 3] por [−1, 3]



En el siguiente ejemplo se usa un medio de graficación para resolver una desigualdad en la resolución de un polinomio de grado 3.

EJEMPLO 6 ***Resolución gráfica de una desigualdad***

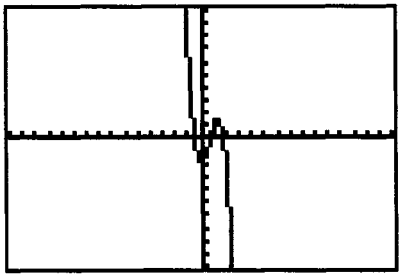
Estimar las soluciones de la desigualdad

$$6x^2 - 3x^3 < 2.$$

SOLUCIÓN Se resta 2 en ambos lados, para llegar a la desigualdad equivalente

$$6x^2 - 3x^3 - 2 < 0.$$

FIGURA 4.12 [−15, 15] por [−10, 10]



Se asigna $6x^2 - 3x^3 - 2$ a Y_1 y se utiliza un cuadro visual normal para obtener una pantalla semejante a la de la Fig. 4.12. Se observa que hay 3 abscisas en el origen. Si se denotan mediante x_1, x_2 y x_3, entonces las soluciones de la desigualdad son

$$(x_1, x_2) \cup (x_3, \infty),$$

ya que son los intervalos en los cuales Y_1 es menor que 0. Con los dispositivos de trazo y ampliación para cada abscisa en el origen, se tiene que

$$x_1 \approx -0.515, \quad x_2 \approx 0.722, \quad x_3 \approx 1.793.$$

EJERCICIOS 4.1

Ejercicios 1–4: Trace la gráfica de f para el valor indicado de c o a.

1 $f(x) = 2x^3 + c$

(a) $c = 3$ **(b)** $c = -3$

2 $f(x) = -2x^3 + c$

(a) $c = -2$ **(b)** $c = 2$

3 $f(x) = ax^3 + 2$

(a) $a = 2$ **(b)** $a = -\frac{1}{3}$

4 $f(x) = ax^3 - 3$

(a) $a = -2$ **(b)** $a = \frac{1}{4}$

Ejercicios 5–10: Use el teorema del valor intermedio para demostrar que f tiene un cero entre a y b.

5 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 2$; $a = 3$, $b = 4$

6 $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3$; $a = -3$, $b = -2$

7 $f(x) = -x^4 + 3x^3 - 2x + 1$; $a = 2$, $b = 3$

8 $f(x) = 2x^4 + 3x - 2$; $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{4}$

9 $f(x) = x^5 + x^3 + x^2 + x + 1$; $a = -\frac{1}{2}$, $b = -1$

10 $f(x) = x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 9x - 6$; $a = 3$, $b = 4$

Ejercicios 11–26: Determine todos los valores de x tales que $f(x) > 0$ y toda x para la cual $f(x) < 0$; a continuación trace la gráfica de f.

11 $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 2$

12 $f(x) = -\frac{1}{9}x^3 - 3$

13 $f(x) = -\frac{1}{16}x^4 + 1$

14 $f(x) = x^5 + 1$

15 $f(x) = x^4 - 4x^2$

16 $f(x) = 9x - x^3$

17 $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 10x$

18 $f(x) = x^4 + 3x^3 - 4x^2$

19 $f(x) = \frac{1}{6}(x + 2)(x - 3)(x - 4)$

20 $f(x) = -\frac{1}{8}(x + 4)(x - 2)(x - 6)$

21 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

22 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 27$

23 $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8$

24 $f(x) = -x^4 + 12x^2 - 27$

25 $f(x) = x^2(x + 2)(x - 1)^2(x - 2)$

26 $f(x) = x^3(x + 1)^2(x - 2)(x - 4)$

27 Sea $f(x)$ un polinomio en el que sea 0 el coeficiente de toda potencia impar de x. Demuestre que f es función par.

28 Sea $f(x)$ un polinomio donde el coeficiente de toda potencia par de x sea 0. Demuestre que f es función impar.

29 Si $f(x) = 3x^3 - kx^2 + x - 5k$, determine un número k tal que la gráfica de f contenga al punto $(-1, 4)$.

30 Si un cero de $f(x) = x^3 - 2x^2 - 16x + 16k$ es 2, determine otros dos ceros.

31 ***Polinomio de Legendre*** El polinomio de Legendre de tercer grado $P(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ se presenta en la solución de problemas de transferencia de calor en física e ingeniería. Determine todos los valores de x tales que $P(x) > 0$ y todas las x tales que $P(x) < 0$; trace la gráfica de P.

32 ***Polinomio de Chebyshev*** El polinomio de Chebyshev de cuarto grado, $f(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$, aparece en estudios de estadística. Determine todos los valores de x tales que $f(x) > 0$. (*Sugerencia:* Sea $z = x^2$, y use la fórmula cuadrática.)

33 ***Hechura de una caja*** A partir de una pieza rectangular de cartón, cuyas dimensiones son 20 pulg × 30 pulg, se construirá una caja sin tapa recortando cuatro cuadrados idénticos de x^2 de superficie, en cada esquina, y doblando los lados hacia arriba (véase el Ejercicio 49 de la Secc. 3.4).

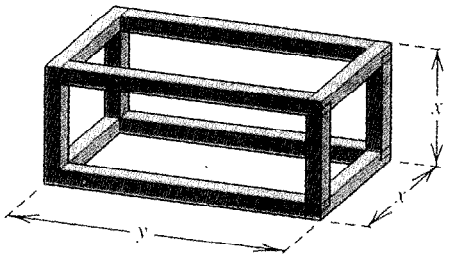
(a) Demuestre que el volumen de la caja está expresado con la función $V(x) = x(20 - 2x)(30 - 2x)$.

(b) Determine todos los valores positivos de x tales que $V(x) > 0$, y trace la gráfica de V, para $x > 0$.

34 ***Hechura de un embalaje*** Se construirá un embalaje con 24 pies de madera de 2 pulg × 2 pulg (véase la figura).

(a) Si el embalaje debe tener extremos cuadrados de x pies de lado, exprese su volumen exterior, V, como función de x. No tenga en cuenta el espesor de la madera.

(b) Trace la gráfica de V para $x > 0$.



35 ***Cálculo de temperaturas*** Un meteorólogo determina que la temperatura ambiente, T, en °F, en cierto periodo de 24 horas en invierno, estuvo representada por $T = \frac{1}{20}t(t - 12)(t - 24)$ para $0 \le t \le 24$, donde t es el tiempo en horas; $t = 0$ corresponde a las 6 A.M.

(a) ¿Cuándo fue $T > 0$ y cuándo $T < 0$?

(b) Trace la gráfica de T.

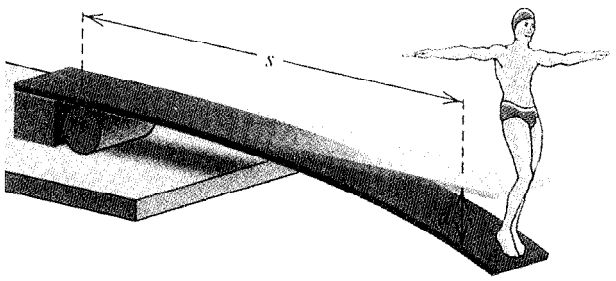
(c) Demuestre que la temperatura era 32° °F entre las 12 del día y la 1 P.M. (*Sugerencia:* Utilice el teorema del valor intermedio.)

36 ***Deflexión de un trampolín*** Un clavadista está en el extremo de un trampolín, listo para un clavado. La deflexión de la tabla, en el lugar a s pies del extremo fijo es $d = cs^2(3L - s)$, para $0 \le s \le L$, donde L es la longitud

de la tabla y c es una constante positiva que depende del peso del clavadista y de las propiedades físicas de la tabla (véase la figura). Suponga que la tabla tiene 10 pies de longitud.

(a) Si la deflexión en el extremo de la tabla es 1 pie, calcule c.

(b) Demuestre que la deflexión es $\frac{1}{2}$ pie en algún lugar entre $s = 6.5$ y $s = 6.6$.



37 ***Población de venados*** Un rebaño de 10 venados se introduce en una isla pequeña. Al principio, el rebaño aumenta con rapidez, pero finalmente, el alimento disminuye y la población también. Suponga que el número, $N(t)$, de venados, a los t años, es $N(t) = -t^4 + 21t^2 + 100$, donde $t > 0$.

(a) Determine los valores de t para los cuales $N(t) > 0$ y trace la gráfica de N.

(b) ¿Se extinguirá esa población animal? En caso afirmativo, ¿cuándo?

38 ***Población de venados*** En el Ejercicio 37 se puede demostrar, mediante Cálculo, que la tasa R, en venados por año, con la cual cambia la población cuando el tiempo es t, es $R = -4t^3 + 42t$.

(a) ¿Cuándo cesa el crecimiento de la población?

(b) Determine los valores positivos de t para los cuales $R > 0$.

C **Ejercicios 39 – 42: Grafique f y estime sus ceros.**

39 $f(x) = x^3 + 0.2x^2 - 2.6x + 1.1$

40 $f(x) = -x^4 + 0.1x^3 + 4x^2 - 0.5x - 3$

41 $f(x) = x^3 - 3x + 1$

42 $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3x + 1$

C **Ejercicios 43 – 46: Grafique f y determine todos los valores de x tales que $f(x) > k$.**

43 $f(x) = x^3 + 5x - 2;$ $k = 1$

44 $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 8x + 5;$ $k = 3$

45 $f(x) = x^5 - 2x^2 + 2;$ $k = -2$

46 $f(x) = x^4 - 2x^3 + 10x - 26;$ $k = -1$

C **Ejercicios 47 y 48: Grafique f y g en el mismo plano de coordenadas, y estime los puntos de intersección.**

47 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1.5x + 2.8;$
$g(x) = -x^3 - 1.7x^2 + 2x + 2.5$

48 $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4;$
$g(x) = x^4 - 3x^3 - 0.25x^2 + 3.75x$

4.2 PROPIEDADES DE LA DIVISIÓN

En esta sección los polinomios en x se denotarán mediante $f(x)$, $g(x)$, etcétera. Si $g(x)$ es factor de $f(x)$, entonces $f(x)$ es **divisible** entre $g(x)$. Por ejemplo, $x^4 - 16$ se puede dividir entre $x^2 - 4$, $x^2 + 4$, $x + 2$ y $x - 2$.

El polinomio $x^4 - 16$ no es divisible entre $x^2 + 3x + 1$; sin embargo, se puede utilizar el proceso llamado **división larga** para determinar un *cociente* y un *residuo*, como en el ejemplo siguiente, en el cual se han introducido términos con coeficientes cero.

EJEMPLO ILUSTRATIVO
División larga de polinomios

❑

$$
\begin{array}{rl}
 & \overbrace{x^2 - 3x + 8}^{\text{cociente}} \\
x^2 + 3x + 1 \;\big|\; x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 16 & \\
\underline{x^4 + 3x^3 + x^2} & x^2(x^2 + 3x + 1) \\
-3x^3 - x^2 & \text{se resta} \\
\underline{-3x^3 - 9x^2 - 3x} & -3x(x^2 + 3x + 1) \\
8x^2 + 3x - 16 & \text{se resta} \\
\underline{8x^2 + 24x + 8} & -8(x^2 + 3x + 1) \\
\underbrace{-21x - 24}_{\text{residuo}} & \text{se resta}
\end{array}
$$

El proceso de división larga termina cuando se llega a un polinomio (el residuo) que puede ser 0, o de menor grado que el divisor. El resultado de la división larga del ejemplo anterior se puede escribir en la siguiente forma:

$$\frac{x^4 - 16}{x^2 + 3x + 1} = (x^2 - 3x + 8) + \left(\frac{-21x - 24}{x^2 + 3x + 1}\right).$$

Al multiplicar ambos miembros de esta ecuación por $x^2 + 3x + 1$, se obtiene

$$x^4 - 16 = (x^2 + 3x + 1)(x^2 - 3x + 8) + (-21x - 24).$$

Este es un ejemplo del siguiente teorema, que se enuncia sin demostración.

Algoritmo de la división para polinomios

Si $f(x)$ y $p(x)$ son polinomios, y si $p(x) \neq 0$, entonces existen los polinomios únicos $q(x)$ y $r(x)$ tales que

$$f(x) = p(x)q(x) + r(x),$$

donde $r(x) = 0$, o bien, $r(x)$ es de un grado menor que el de $p(x)$. El polinomio $q(x)$ es el **cociente** y $r(x)$ es el **residuo** de la división de $f(x)$ entre $p(x)$.

Un caso especial de mucha utilidad del algoritmo de la división se presenta si $f(x)$ se divide entre $x - c$, donde c es un número real. Si $x - c$ es factor de $f(x)$, entonces

$$f(x) = (x - c)q(x)$$

para algún cociente $q(x)$; es decir, el residuo $r(x)$ es 0. Si $x - c$ no es factor de $f(x)$, entonces el grado del residuo, $r(x)$, es menor que el grado de $x - c$ y, por lo tanto, $r(x)$ debe tener grado 0. Esto quiere decir que el residuo es un número distinto de cero. En consecuencia, para toda $x - c$, se tiene que

$$f(x) = (x - c)q(x) + d,$$

en la cual el residuo d es número real, posiblemente $d = 0$. Si en vez de x se utiliza c, se llega a

$$\begin{aligned} f(c) &= (c - c)q(c) + d \\ &= 0 \cdot q(c) + d \\ &= d. \end{aligned}$$

Con ello queda demostrado el teorema siguiente:

Teorema del residuo

> Si se divide un polinomio, $f(x)$, entre $x - c$, entonces el residuo es $f(c)$.

EJEMPLO 1 ***Aplicación del teorema del residuo***

Si $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 5$, calcular $f(2)$ con el teorema del residuo.

SOLUCIÓN Según el teorema del residuo, $f(2)$ es el residuo cuando $f(x)$ se divide entre $x - 2$. Por medio de la división larga,

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - x - 1 \\ \hline x - 2 & x^3 - 3x^2 + x + 5 \\ & \underline{x^3 - 2x^2} \qquad\qquad x^2(x-2) \\ & \quad -x^2 + x \qquad \text{se resta} \\ & \quad \underline{-x^2 + 2x} \qquad -x(x-2) \\ & \qquad -x + 5 \qquad \text{se resta} \\ & \qquad \underline{-x + 2} \qquad (-1)(x-2) \\ & \qquad\quad 3 \qquad \text{se resta} \end{array}$$

Por tanto, $f(2) = 3$. Se comprueba este hecho por sustitución directa:

$$f(2) = 2^3 - 3(2)^2 + 2 + 5 = 3.$$

Se aplica el teorema del residuo para demostrar el siguiente resultado importante.

Teorema del factor

> Un polinomio $f(x)$ tiene un factor $x - c$ si y sólo si $f(c) = 0$.

DEMOSTRACIÓN Según el teorema del residuo,

$$f(x) = (x - c)q(x) + f(c)$$

para algún cociente $q(x)$.

Si $f(c) = 0$, entonces $f(x) = (x - c)q(x)$; es decir, $x - c$ es factor de $f(x)$. Recíprocamente, si $x - c$ es factor de $f(x)$, entonces el residuo de dividir $f(x)$ entre $x - c$ debe ser 0 y, por consiguiente, de acuerdo con el teorema del residuo, $f(c) = 0$. ■

El teorema del factor es de utilidad para calcular factores de polinomios, como se ve en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 ***Uso del teorema del factor***

Demostrar que $x - 2$ es factor de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2$.

SOLUCIÓN Como $f(2) = 8 - 16 + 6 + 2 = 0$, entonces, de acuerdo con el teorema del factor, $x - 2$ es factor de $f(x)$. Otro método de resolverlo sería dividir $f(x)$ entre $x - 2$ y demostrar que el residuo es 0. El cociente de la división sería otro factor de $f(x)$.

EJEMPLO 3 ***Determinación de un polinomio dadas sus raíces***

Deducir un polinomio $f(x)$ de grado 3, que tenga los ceros 2, –1 y 3.

SOLUCIÓN De acuerdo con el teorema del factor, $f(x)$ tiene los factores $x-2$, $x+1$ y $x-3$. Así,

$$f(x) = a(x - 2)(x + 1)(x - 3),$$

en la cual se puede asignar a a cualquier valor distinto de cero. Si $a = 1$, y se hace la multiplicación, se obtiene

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6.$$

Para aplicar el teorema del residuo es necesario dividir un polinomio $f(x)$ entre $x - c$. Se puede usar el método de la **división sintética** para simplificar el trabajo. Las siguientes reglas o guías indican cómo proceder. El método se puede justificar mediante una comparación cuidadosa, y larga, con el método de la división larga.

Reglas para la división sintética de $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ entre $x - c$

---

1 Comenzar con la siguiente presentación, poniendo ceros en lugar de cualquier coeficiente faltante en el polinomio dado.

$$\begin{array}{c|cccccc} c & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ \hline & & & & & & \\ \hline & a_n & & & & & \end{array}$$

2 Multiplicar a_n por c y colocar el producto ca_n abajo de a_{n-1}, como indica la flecha en la presentación siguiente. Esta flecha, y otras, sólo tienen por objeto aclarar estas guías y no aparecerán en divisiones sintéticas *específicas*. A continuación, determinar la suma $b_1 = a_{n-1} + ca_n$ y colocarla abajo de la línea, como se indica.

$$\begin{array}{c|cccccc} c & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ & & \nearrow ca_n & \nearrow cb_1 & \nearrow cb_2 & \cdots \nearrow cb_{n-2} & \nearrow cb_{n-1} \\ \hline & a_n & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} \quad r \end{array}$$

(continúa)

3 Multiplicar b_1 por c y colocar el producto cb_1 abajo de a_{n-2}, como indica la segunda flecha. Al continuar el procedimiento, se determina la suma $b_2 = a_{n-2} + cb_1$ y se coloca abajo de la línea, como se indica.

4 Continuar con este proceso, como lo indican las flechas, hasta obtener la suma final, $r = a_0 + cb_{n-1}$. Los números

$$a_n, \quad b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_{n-2}, \quad b_{n-1}$$

son los coeficientes del cociente $q(x)$; es decir,

$$q(x) = a_n x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \cdots + b_{n-2}x + b_{n-1},$$

y r es el residuo.

Los ejemplos siguientes muestran la división sintética en algunos casos especiales.

EJEMPLO 4 ***Uso de la división sintética para determinar un cociente y un residuo***

Con la división sintética determinar el cociente y el residuo de dividir el polinomio $2x^4 + 5x^3 - 2x - 8$ entre $x + 3$.

SOLUCIÓN Como el divisor es $x + 3$, la c de la expresión $x - c$ es -3. Por lo tanto, la división sintética tiene la forma siguiente:

$$\begin{array}{r|cccc|c} -3 & 2 & 5 & 0 & -2 & -8 \\ & & -6 & 3 & -9 & 33 \\ \hline & 2 & -1 & 3 & -11 & 25 \end{array}$$

coeficientes del cociente — residuo

Como ya se indicó, los primeros cuatro números del tercer renglón son los coeficientes del cociente $q(x)$, y el último número es el residuo r. Así,

$$q(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 11 \quad \text{y} \quad r = 25.$$

Se puede usar la división sintética para calcular valores de funciones polinomiales, como se ve en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 5 ***Uso de la división sintética para calcular valores de un polinomio***

Si $f(x) = 3x^5 - 38x^3 + 5x^2 - 1$, calcular $f(4)$ por medio de la división sintética.

SOLUCIÓN De acuerdo con el teorema del residuo, $f(4)$ es el residuo cuando se divide $f(x)$ entre $x - 4$. Al hacer la división sintética, se obtiene

(continúa)

UELA POLI

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 4 & 3 & 0 & -38 & 5 & 0 & -1 \\ & & 12 & 48 & 40 & 180 & 720 \\ \hline & 3 & 12 & 10 & 45 & 180 & 719 \end{array}$$

coeficientes del cociente; residuo

En consecuencia, $f(4) = 719$.

Se puede utilizar la división sintética para ayudar a calcular los ceros de polinomios. De acuerdo con el método que se presentó en el ejemplo anterior $f(c) = 0$ si y sólo si, el residuo de la división sintética entre $x - c$ es 0.

EJEMPLO 6 ***Uso de la división sintética para calcular ceros de un polinomio***

Demostrar que -11 es un cero del polinomio

$$f(x) = x^3 + 8x^2 - 29x + 44.$$

SOLUCIÓN Dividiendo sintéticamente entre $x - (-11) = x + 11$, se obtiene

$$\begin{array}{r|rrrr} -11 & 1 & 8 & -29 & 44 \\ & & -11 & 33 & -44 \\ \hline & 1 & -3 & 4 & 0 \end{array}$$

coeficientes del cociente; residuo

Por lo tanto, $f(-11) = 0$.

El Ejemplo 6 muestra que -11 es una solución de la ecuación $x^3 + 8x^2 - 29x + 44 = 0$. En la Secc. 4.4 se usa la división sintética para determinar soluciones racionales de ecuaciones.

Si $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 11$ y si k es un número específico, entonces $f(k)$ es igual a $k^3 - 5k^2 + 7k - 11$. Si se usa la división sintética para determinar $f(k)$, se obtiene una forma que se puede usar para calcular de manera sencilla valores de f con una calculadora. La siguiente división sintética de f entre $(x - k)$ da como resultado esa forma de $f(k)$ como residuo.

$$\begin{array}{r|llll} k & 1 & -5 & 7 & -11 \\ & & k & (k-5)k & ((k-5)k+7)k \\ \hline & 1 & k-5 & (k-5)k+7 & ((k-5)k+7)k-11 \end{array}$$

residuo

El residuo indica que $f(x) = ((x - 5)x + 7)x - 11$, a lo cual se llama **método de Horner**, o **forma anidada**, de expresar un polinomio. El ejemplo siguiente muestra el uso de esta forma, cuando $f(k)$ se evalúa con una calculadora.

EJEMPLO 7 ***Determinación de la forma anidada de un polinomio***

Sea $f(x) = 3x^4 + 11x^3 - 5x^2 + 7x - 4$.

(a) Expresar $f(x)$ según el método de Horner.

(b) Usar la forma anidada para evaluar $f(-3.712)$.

SOLUCIÓN

(a) Se podría obtener la forma anidada usando la división sintética, como en el ejemplo anterior, pero es más fácil sacar a x, sucesivamente, como factor común de los términos no constantes del polinomio, como sigue:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^4 + 11x^3 - 5x^2 + 7x - 4 && \text{polinomio dado} \\ &= (3x^3 + 11x^2 - 5x + 7)x - 4 && \text{se saca } x \text{ como factor común de los primeros 4 términos} \\ &= ((3x^2 + 11x - 5)x + 7)x - 4 && \text{se saca } x \text{ como factor común de los primeros 3 términos} \\ &= (((3x + 11)x - 5)x + 7)x - 4 && \text{se saca } x \text{ como factor común de los primeros 2 términos} \end{aligned}$$

(b) Para evaluar $f(-3.712)$ con una calculadora, primero se almacena -3.712 en un sitio de memoria. (Se supone que existe en la calculadora una tecla de recuperación de memoria, como por ejemplo, [RCL] o [MR]). A continuación se usa la siguiente sucesión de teclas:

3 [×] [RCL] [+] 11 [=]
[×] [RCL] [−] 5 [=]
[×] [RCL] [+] 7 [=]
[×] [RCL] [−] 4 [=]

para obtener el valor -91.923, redondeado a tres cifras decimales. Se hace la aclaración de que éste no es el método a emplear si se dispone de un programa común de computadora o una calculadora para gráficas. En tal caso, lo mejor es introducir $f(x)$, ya sea sustituyendo el valor de x, o almacenándolo y, a continuación, sólo pedir el valor de la función.

El ejemplo siguiente presenta casos especiales de la forma anidada, para polinomios en los cuales algunos de sus coeficientes son cero.

EJEMPLO ILUSTRATIVO

Forma anidada de polinomios

- $5x^4 - 3x^2 + 4x + 1 = (((5x)x - 3)x + 4)x + 1$
- $x^5 - x^2 = ((x(x(x)) - 1)x)x$
- $-3x^4 + 2x^2 - 7x = (((-3x)x + 2)x - 7)x$

EJERCICIOS 4.2

Ejercicios 1–8: Determine el cociente y el residuo si se divide $f(x)$ entre $p(x)$.

1 $f(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2 + 7x - 12$; $p(x) = x^2 - 3$

2 $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - x^2 - x - 6$; $p(x) = x^2 + 1$

3 $f(x) = 3x^3 + 2x - 4$; $p(x) = 2x^2 + 1$

4 $f(x) = 3x^3 - 5x^2 - 4x - 8$; $p(x) = 2x^2 + x$

5 $f(x) = 7x + 2$; $p(x) = 2x^2 - x - 4$

6 $f(x) = -5x^2 + 3$; $p(x) = x^3 - 3x + 9$

7 $f(x) = 9x + 4$; $p(x) = 2x - 5$

8 $f(x) = 7x^2 + 3x - 10$; $p(x) = x^2 - x + 10$

Ejercicios 9–12: Con el teorema del residuo calcule $f(c)$.

9 $f(x) = 3x^3 - x^2 + 5x - 4$; $c = 2$

10 $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3x - 1$; $c = 3$

11 $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4x - 8$; $c = -3$

12 $f(x) = x^4 + 3x^2 - 12$; $c = -2$

Ejercicios 13 – 16: Use el teorema del factor, para demostrar que $x - c$ es factor de $f(x)$.

13 $f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 12$; $c = -3$

14 $f(x) = x^3 + x^2 - 11x + 10$; $c = 2$

15 $f(x) = x^{12} - 4096$; $c = -2$

16 $f(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 5x + 6$; $c = 2$

Ejercicios 17 – 20: Obtener un polinomio $f(x)$ con coeficiente inicial igual a 1 y que tiene el grado y los ceros que se indican.

17 grado 3; ceros –2, 0, 5

18 grado 3; ceros ± 2, 3

19 grado 4; ceros –2, ± 1, 4

20 grado 4; ceros –3, 0, 1, 5

Ejercicios 21–28: Use la división sintética para determinar el coeficiente y el residuo, al dividir el primer polinomio entre el segundo.

21 $2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$; $x - 2$

22 $3x^3 - 4x^2 - x + 8$; $x + 4$

23 $x^3 - 8x - 5$; $x + 3$

24 $5x^3 - 6x^2 + 15$; $x - 4$

25 $3x^5 + 6x^2 + 7$; $x + 2$

26 $-2x^4 + 10x - 3$; $x - 3$

27 $4x^4 - 5x^2 + 1$; $x - \frac{1}{2}$

28 $9x^3 - 6x^2 + 3x - 4$; $x - \frac{1}{3}$

Ejercicios 29 – 34: Con división sintética, calcule $f(c)$.

29 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 4$; $c = 3$

30 $f(x) = -x^3 + 4x^2 + x$; $c = -2$

31 $f(x) = 0.3x^3 + 0.04x - 0.034$; $c = -0.2$

32 $f(x) = 8x^5 - 3x^2 + 7$; $c = \frac{1}{2}$

33 $f(x) = x^2 + 3x - 5$; $c = 2 + \sqrt{3}$

34 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 8$; $c = 1 + \sqrt{2}$

Ejercicios 35 – 38: Use la división sintética para demostrar que c es un cero de $f(x)$.

35 $f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 2x^2 - 10x + 4$; $c = -2$

36 $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 8x - 3$; $c = 3$

37 $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 8x - 3$; $c = \frac{1}{2}$

38 $f(x) = 27x^4 - 9x^3 + 3x^2 + 6x + 1$; $c = -\frac{1}{3}$

Ejercicios 39 y 40: Determine todos los valores de k tales que $f(x)$ sea divisible entre el polinomio lineal dado.

39 $f(x) = kx^3 + x^2 + k^2x + 3k^2 + 11$; $x + 2$

40 $f(x) = k^2x^3 - 4kx + 3$; $x - 1$

Ejercicios 41 y 42: Demuestre que $x - c$ no es factor de $f(x)$ para algún número real, c.

41 $f(x) = 3x^4 + x^2 + 5$ **42** $f(x) = -x^4 - 3x^2 - 2$

43 Determine el residuo si el polinomio

$$3x^{100} + 5x^{85} - 4x^{38} + 2x^{17} - 6$$

se divide entre $x + 1$.

Ejercicios 44 – 46: Con el teorema del factor compruebe la proposición.

44 $x - y$ es factor de $x^n - y^n$ para todo entero positivo n.

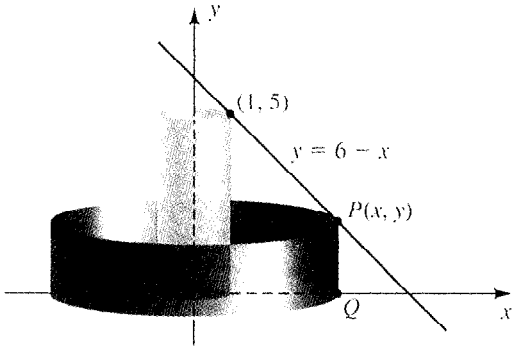
45 $x + y$ es factor de $x^n - y^n$ para todo entero positivo par n.

46 $x + y$ es factor de $x^n + y^n$ para todo entero positivo impar, n.

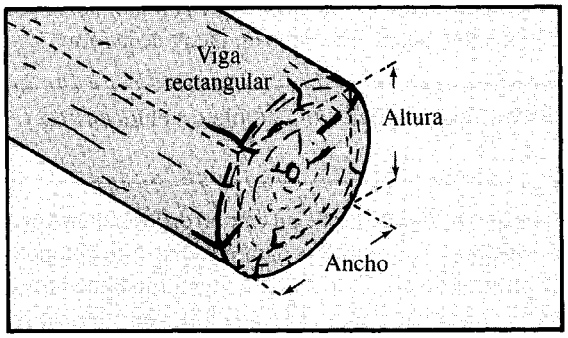
47 Sea $P(x, y)$ un punto del primer cuadrante en $y = 6 - x$. Considere el segmento de recta vertical PQ que aparece en la figura.

(a) Si se gira PQ respecto al eje y, calcule el volumen V del cilindro resultante.

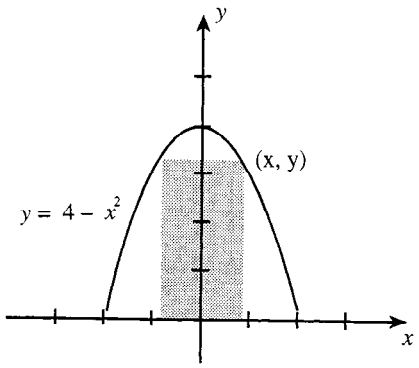
(b) ¿Para qué punto, $P(x, y)$, con $x \neq 1$, el volumen, V, de la parte (a) es igual al volumen del cilindro de radio 1 y altura 5, que se indica en la figura?



48 ***Resistencia de una viga*** La resistencia de una viga rectangular es directamente proporcional al producto del ancho por el cuadrado de la altura de la sección transversal (véase la figura). De un tronco cilíndrico de 1 pie de radio se ha cortado una viga de 1.5 pies de ancho. Calcule el ancho de una segunda viga rectangular de igual resistencia que podría haberse cortado del mismo tronco.



49 ***Arco parabólico*** Un arco tiene la forma de la parábola $y = 4 - x^2$. Bajo el arco se ajusta un rectángulo, seleccionando un punto (x, y) de la parábola (véase la figura).



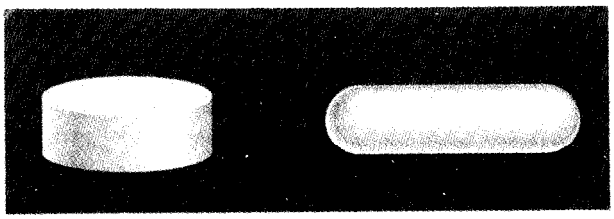
(a) Exprese el área, A, del rectángulo, en términos de x.

(b) Si $x = 1$, el rectángulo tiene base 2 y altura 3. Calcule la base de un segundo rectángulo que tenga la misma área.

50 ***Dimensiones de una cápsula*** Una tableta de aspirina tiene forma de cilindro circular recto, cuya altura es $\frac{1}{3}$ de centímetro y su radio es $\frac{1}{2}$ centímetro. El fabricante desea producir también la aspirina en forma de cápsula. La cápsula debe tener $\frac{3}{2}$ cm de longitud y la forma de un cilindro circular recto de tapas hemisféricas en ambos extremos (véase la figura).

(a) Si r representa el radio de un hemisferio, deduzca una fórmula para el volumen de la cápsula.

(b) Calcule el radio de la cápsula para que su volumen sea igual al de la tableta.



Ejercicios 51 y 52: Exprese $f(x)$ en forma anidada, y use tal forma para evaluar $f(a)$ sin calculadora.

51 $f(x) = 4x^4 - 5x^2 + 7x - 3; \quad a = -2$

52 $f(x) = 3x^4 + 5x^3 - 6x + 11; \quad a = 2$

Ejercicios 53 y 54: Exprese $f(x)$ en forma anidada, y emplee esa forma para aproximar $f(a)$.

53 $f(x) = 2x^5 + 3x^4 - 6x^3 - 4x^2 + x - 9; \quad a = 0.0325$

54 $f(x) = -3.43x^6 + 8.39x^4 - 5.75x^3 + 8.6x^2 - x + 12.1; \quad a = 0.1274$

Ejercicios 55 y 56: Calcule en forma aproximada el residuo, si se divide el polinomio entre $x - 0.21$.

55 $x^8 - 7.9x^5 - 0.8x^4 + x^3 + 1.2x - 9.81$

56 $3.33x^6 - 2.5x^5 + 6.9x^3 - 4.1x^2 + 1.22x - 6.78$

c **Ejercicios 57 y 58: Use la gráfica de f para calcular en forma aproximada todos los valores de k tales que $f(x)$ sea divisible entre el polinomio lineal dado.**

57 $f(x) = x^3 + k^3x^2 + 2kx - 2k^4; \qquad x - 1.6$

58 $f(x) = k^5x^3 - 2.1x^2 + k^3x - 1.2k^2; \quad x + 0.4$

4.3 CEROS DE POLINOMIOS

Los **ceros** (o **raíces**) **de un polinomio** $f(x)$ son las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$.* Cada cero real es una abscisa en el origen de la gráfica de f. En los campos de aplicación se usan, por lo general, calculadoras y computadoras para determinar o aproximar los ceros. Sin embargo, antes de usar una calculadora, vale la pena saber qué tipo de ceros se deben esperar. Algunas preguntas que uno se podría hacer son:

1. ¿Cuántos ceros de $f(x)$ son reales?
2. ¿Cuántos ceros reales de $f(x)$ son positivos? ¿Cuántos negativos?
3. ¿Cuántos ceros reales de $f(x)$ son racionales? ¿Cuántos irracionales?
4. Los valores de los ceros de $f(x)$, ¿son grandes o pequeños?

En esta sección y la que sigue se estudiarán resultados que ayudan a contestar algunas de estas preguntas. Esos resultados forman la base de la *teoría de las ecuaciones*.

El teorema del factor y el del residuo se pueden generalizar al sistema de números complejos. Así, un número complejo $c = a + bi$ es un cero de un polinomio, $f(x)$, si y sólo si $x - c$ es factor de $f(x)$. A excepción de casos especiales, es muy difícil determinar los ceros de los polinomios. Por ejemplo, no hay ceros obvios de $f(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x - 10$. Aunque no hay una fórmula que pueda servir para calcular los ceros, el teorema siguiente establece que *cuando menos* hay un cero c y, por consiguiente, debido al teorema del factor, $f(x)$ tiene un factor de la forma $x - c$.

Teorema fundamental del álgebra

> Si un polinomio, $f(x)$, es de grado positivo y tiene coeficientes complejos, entonces $f(x)$ tiene al menos un cero complejo.

La demostración normal de este teorema requiere resultados de un campo de las matemáticas superiores llamado *funciones de variable compleja*. Un requisito para estudiar este campo es tener conocimientos firmes de Cálculo. La primera demostración del teorema fundamental del álgebra la elaboró el matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777–1855), considerado por muchos el mejor matemático de todos los tiempos.

Como caso especial del teorema fundamental, si todos los coeficientes de $f(x)$ son reales, entonces $f(x)$ tiene al menos un cero complejo. Si $a + bi$ es un cero complejo, podrá suceder que $b = 0$, en cuyo caso el número a es un cero real.

El teorema fundamental del álgebra permite, al menos en teoría, expresar todo polinomio $f(x)$ de grado positivo, como producto de polinomios de grado 1, como en el siguiente teorema:

Teorema de factorización completa para polinomios

> Si $f(x)$ es un polinomio de grado $n > 0$, entonces existen n números complejos, $c_1, c_2, \ldots, c_n$, tales que
>
> $$f(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_n),$$
>
> donde a es el coeficiente principal de $f(x)$. Cada número, c_k, es un cero de $f(x)$.

* (N. del R.) El término **raíz** es más apropiado y evita la incongruencia de hablar de "ceros positivos", etc. [F.P.]

DEMOSTRACIÓN Si $f(x)$ es de grado $n > 0$, entonces, según el teorema fundamental del álgebra, $f(x)$ tiene un cero complejo c_1. Por consiguiente, según el teorema del factor, $f(x)$ tiene un factor $x - c_1$; es decir,

$$f(x) = (x - c_1)f_1(x),$$

en la cual $f_1(x)$ es un polinomio de grado $n - 1$. Si $n - 1 > 0$, entonces, con el mismo argumento, $f_1(x)$ tiene un cero complejo c_2 y, por consiguiente, un factor $x - c_2$. De modo que

$$f_1(x) = (x - c_2)f_2(x),$$

en la cual $f_2(x)$ es un polinomio de grado $n - 2$. Por lo tanto,

$$f(x) = (x - c_1)(x - c_2)f_2(x).$$

Continuando con este proceso, después de n etapas, se llega a un polinomio, $f_n(x)$, de grado 0. Así, $f_n(x) = a$ para un número a distinto de cero, y se puede escribir

$$f(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n),$$

donde cada número complejo, c_k, es un cero de $f(x)$. El coeficiente inicial del polinomio del lado derecho de la última ecuación es a, y por tanto, se denomina *coeficiente inicial* de $f(x)$. ■

A continuación se puede demostrar lo siguiente.

Teorema del número máximo de ceros de un polinomio

> Un polinomio de grado $n > 0$ tiene, cuando mucho, n ceros complejos diferentes.

DEMOSTRACIÓN Se presenta una demostración indirecta; es decir, se supone que $f(x)$ tiene *más* que n ceros complejos distintos, y se demuestra que esta hipótesis lleva a una contradicción. Selecciónense $n + 1$ de los ceros, y desígnese con $c_1, c_2, \ldots, c_n$ y c. Se pueden emplear las c_k para obtener la factorización indicada en el enunciado del teorema de factorización completa. Sustituyendo x por c y sabiendo que $f(c) = 0$, se obtiene

$$0 = a(c - c_1)(c - c_2) \cdots (c - c_n).$$

Sin embargo, cada factor del segundo miembro es distinto de cero, porque $c \neq ck$ para toda k. Como el producto de números distintos de cero no puede ser igual a cero, se llega a una contradicción. ■

EJEMPLO 1 ***Obtención de un polinomio dadas sus raíces***

Deducir un polinomio, $f(x)$, en forma factorizada, que tenga grado 3, ceros 2, −1 y 3, y que satisfaga $f(1) = 5$.

SOLUCIÓN De acuerdo con el teorema del factor, $f(x)$ tiene los factores $x - 2$, $x + 1$ y $x - 3$. No existen más factores de grado 1, ya que según el teorema del factor, otro factor lineal, $x - c$, produciría un cuarto cero de $f(x)$, contradiciendo al teorema anterior. Por consiguiente, $f(x)$ tiene la forma

$$f(x) = a(x - 2)(x + 1)(x - 3)$$

para algún número a. Como $f(1) = 5$, entonces

$$5 = a(1 - 2)(1 + 1)(1 - 3) \quad \text{sea } x = 1 \text{ en } f(x)$$

$$5 = 4a \quad \text{se simplifica}$$

$$a = \tfrac{5}{4} \quad \text{se despeja } a$$

En consecuencia,

$$f(x) = \tfrac{5}{4}(x - 2)(x + 1)(x - 3).$$

Si se multiplican los factores, se obtiene el polinomio

$$f(x) = \tfrac{5}{4}x^3 - 5x^2 + \tfrac{5}{4}x + \tfrac{15}{2}.$$

Los números, $c_1, c_2, \ldots, c_n$, en el teorema de factorización completa, no necesariamente han de ser distintos. Por ejemplo, $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$ tiene como factorización

$$f(x) = (x + 3)(x - 1)(x - 1).$$

Si se repite m veces un factor $x - c$ en la factorización, entonces c es **cero de multiplicidad *m*** de $f(x)$, o **raíz de multiplicidad *m*** de la ecuación $f(x) = 0$. En el ejemplo anterior, 1 es cero de multiplicidad 2, y -3, de multiplicidad 1.

Si c es un cero real de $f(x)$ de multiplicidad m, entonces $f(x)$ tiene el factor $(x - c)^m$, y la gráfica de f, una abscisa c en el origen. La forma general de la gráfica en $(c, 0)$ depende de si m es entero impar o par. Si m es impar, entonces $(x - c)^m$ cambia de signo al aumentar x hasta c y, por consiguiente, la gráfica de f cruza el eje x en $(c, 0)$, como se ve en el primer renglón de la tabla siguiente. Las figuras de esta tabla no indican la gráfica completa de f, sino sólo su forma general cerca de $(c, 0)$. Si m es par, entonces $(x - c)^m$ no cambia de signo en c, y la gráfica de f cerca de $(c, 0)$ tiene la apariencia de una de las dos figuras del segundo renglón.

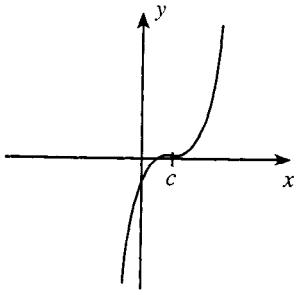
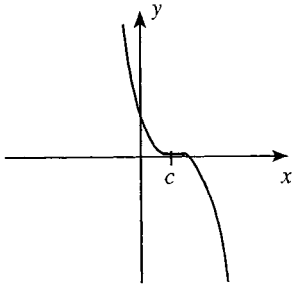
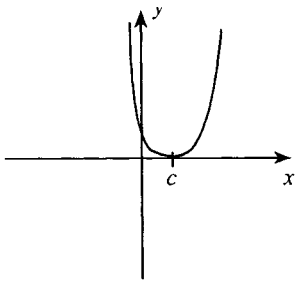
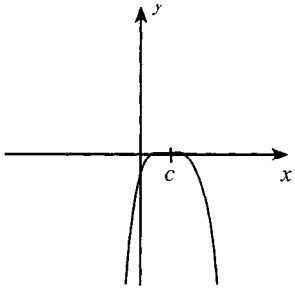
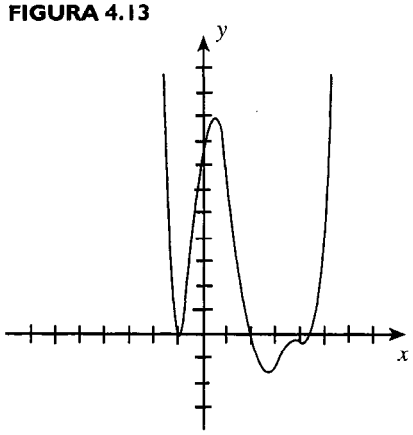
Factor de $f(x)$	**Forma general de la gráfica de f cerca de $(c, 0)$**	
$(x - c)^m$, con m impar y $m \neq 1$		
$(x - c)^m$, con m par		

FIGURA 4.13



EJEMPLO 2 ***Determinación de multiplicidades de ceros***

Determinar los ceros del polinomio $f(x) = \frac{1}{16}(x-2)(x-4)^3(x+1)^2$, y mencionar la multiplicidad de cada uno; luego trazar la gráfica de f.

SOLUCIÓN Se observa, en la forma factorizada, que $f(x)$ tiene tres ceros distintos, 2, 4 y –1. El cero 2 tiene multiplicidad 1, el cero 4 multiplicidad 3, y el cero –1, multiplicidad 2. Nótese que $f(x)$ tiene grado 6.

Las abscisas en el origen de la gráfica de f son los ceros reales –1, 2 y 4. Como la multiplicidad de –1 es entero par, la gráfica corta, pero no cruza, el eje x en (–1, 0). Como las multiplicidades de 2 y 4 son impares, la gráfica cruza al eje x en (2, 0) y (4, 0). La ordenada en el origen es $f(0) = 8$. En la Fig. 4.13 aparece esta gráfica.

Si $f(x) = a(x-c_1)(x-c_2)\cdots(x-c_n)$ es un polinomio de grado n, entonces los n números complejos $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son ceros de $f(x)$. Contando una raíz de multiplicidad m como m ceros, se ve que $f(x)$ tiene cuando menos n ceros (no necesariamente todos distintos). Combinando esto con el hecho de que $f(x)$ tiene cuando más n ceros, se llega al siguiente resultado:

Teorema del número exacto de ceros de un polinomio

> Si $f(x)$ es un polinomio de grado $n > 0$, y si un cero de multiplicidad m se cuenta m veces, entonces $f(x)$ tiene exactamente n ceros.

EJEMPLO 3 ***Determinación de los ceros de un polinomio***

Expresar $f(x) = x^5 - 4x^4 + 13x^3$ como producto de factores lineales, y determinar los cinco ceros de $f(x)$.

SOLUCIÓN Se comienza por tomar a x^3 como factor común:

$$f(x) = x^3(x^2 - 4x + 13)$$

De acuerdo con la fórmula del discriminante, los ceros del polinomio $x^2 - 4x + 13$ son

$$\frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(13)}}{2(1)} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i.$$

Por lo tanto, de acuerdo con el teorema del factor, $x^2 - 4x + 13$ tiene como factores $x - (2 + 3i)$ y $x - (2 - 3i)$, y con ello se obtiene la factorización

$$f(x) = x \cdot x \cdot x \cdot (x - 2 - 3i)(x - 2 + 3i).$$

Como $x - 0$ está tres veces como factor, el número 0 es una raíz de multiplicidad 3 y los cinco ceros de $f(x)$ son 0, 0, 0, $2 + 3i$ y $2 - 3i$.

A continuación se indica cómo usar la *regla de Descartes de los signos* para obtener información acerca de los ceros de un polinomio $f(x)$ con coeficientes reales. En el enunciado de la regla se supone que los términos de $f(x)$ están dispuestos en orden decreciente de potencias de x, y que se omiten los términos con coeficiente cero. También se supone que el **término cons-**

tante, es decir, el término que no tiene x, es distinto de 0. Se dice que hay una **variación de signo** en $f(x)$ si dos coeficientes consecutivos tienen signos opuestos. Como ilustración, el polinomio $f(x)$ del ejemplo siguiente tiene tres variaciones de signo, como lo indican las llaves: una variación de $2x^5$ a $-7x^4$, una segunda de $-7x^4$ a $3x^2$, y una tercera de $6x$ a -5.

EJEMPLO ILUSTRATIVO

Variaciones de signo en $f(x) = 2x^5 - 7x^4 + 3x^2 + 6x - 5$

$$\square\ f(x) = 2x^5 \overbrace{-}^{+\text{ a }-} 7x^4 \overbrace{+}^{-\text{ a }+} 3x^2 \overbrace{+}^{\text{sin variación}} 6x \overbrace{-}^{+\text{ a }-} 5$$

También, la regla de Descartes se refiere a las variaciones de signo en $f(-x)$. Empleando el ejemplo anterior, se observa que

$$\begin{aligned} f(-x) &= 2(-x)^5 - 7(-x)^4 + 3(-x)^2 + 6(-x) - 5 \\ &= -2x^5 - 7x^4 + 3x^2 - 6x - 5. \end{aligned}$$

Por consiguiente, como se ve en el siguiente ejemplo, hay dos variaciones de signo en $f(-x)$, una de $-7x^4$ a $3x^2$, y una segunda de $3x^2$ a $-6x$.

EJEMPLO ILUSTRATIVO

Variaciones de signo en $f(-x)$, si $f(x) = 2x^5 - 7x^4 + 3x^2 + 6x - 5$

$$\square\ f(-x) = -2x^5 \overbrace{-}^{\text{sin variación}} 7x^4 \overbrace{+}^{-\text{ a }+} 3x^2 \overbrace{-}^{+\text{ a }-} 6x \overbrace{-}^{\text{sin variación}} 5$$

La regla de Descartes se puede enunciar como sigue:

Regla de Descartes para los signos

Sea $f(x)$ un polinomio con coeficientes reales y un término constante distinto de cero

(1) El número de ceros positivos reales de $f(x)$ es igual al número de variaciones de signo de $f(x)$, o bien, es menor que ese número, en un entero par.

(2) El número de ceros reales negativos de $f(x)$ es igual al número de variaciones de signo de $f(-x)$, o bien, es menor que ese número, en un entero par.

No se demostrará la regla de Descartes.

EJEMPLO 4 ***Uso de la regla de Descartes de los signos***

Analizar el número de soluciones reales posibles, positivas y negativas, y soluciones complejas no reales de la ecuación

$$2x^5 - 7x^4 + 3x^2 + 6x - 5 = 0.$$

(continúa)

SOLUCIÓN El polinomio, $f(x)$, del lado izquierdo de la ecuación, es el mismo que se vio en los dos ejemplos anteriores. Como hay tres variaciones de signo en $f(x)$, la ecuación puede tener tres soluciones reales positivas, o una solución real positiva.

Como $f(-x) = -2x^5 - 7x^4 + 3x^2 - 6x - 5$ tiene dos variaciones de signo, la ecuación dada tiene dos soluciones negativas, o ninguna solución negativa. Las soluciones que no son números reales son números complejos de la forma $a + bi$, para los números reales a y b, siendo $b \neq 0$. En la tabla siguiente se presenta un resumen de las diversas posibilidades que puede haber para las soluciones de esa ecuación.

Número total de soluciones	5	5	5	5
Número de soluciones reales positivas	1	1	3	3
Número de soluciones reales negativas	0	2	0	2
Número de soluciones complejas, o no reales	4	2	2	0

La regla de Descartes establece que el término constante del polinomio $f(x)$ es distinto de 0. Si el término constante es 0, como en la ecuación

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x = 0,$$

se saca como factor común la potencia mínima de x y se obtiene

$$x(x^3 - 3x^2 + 2x - 5) = 0.$$

Así, una solución es $x = 0$; se aplica la regla de Descartes al polinomio $x^3 - 3x^2 + 2x - 5$ para determinar la naturaleza de las tres soluciones restantes.

EJEMPLO 5 ***Uso de la regla de Descartes de los signos***

Analizar la naturaleza de las raíces de la ecuación $3x^5 + 4x^3 + 2x - 5 = 0$.

SOLUCIÓN El polinomio, $f(x)$, del primer miembro de la ecuación tiene un cambio de signo, de $2x$ a -5 y, por consiguiente, según la parte (1) de la regla de Descartes, la ecuación tiene exactamente una raíz real positiva. Ya que

$$\begin{aligned} f(-x) &= 3(-x)^5 + 4(-x)^3 + 2(-x) - 5 \\ &= -3x^5 - 4x^3 - 2x - 5, \end{aligned}$$

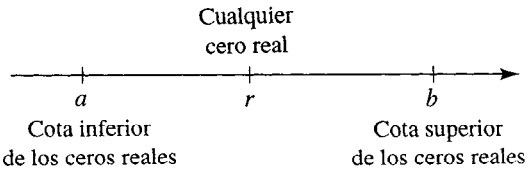
$f(-x)$ no tiene variación de signo y, según la parte (2) de la regla de Descartes, no hay raíz real negativa. Así, la ecuación tiene una raíz real y cuatro raíces no reales, es decir, complejas.

Al aplicar la regla de Descartes, contamos las raíces de multiplicidad k como k raíces. Por ejemplo, si $x^2 - 2x + 1 = 0$, el polinomio tiene dos variaciones de signo y, por consiguiente, la ecuación tiene dos raíces reales positivas, o bien no tiene ninguna. La forma factorizada de la ecuación es $(x - 1)^2 = 0$ y, por lo tanto, 1 es una raíz de multiplicidad 2.

ELA POLI

Esta sección termina con un análisis de las *cotas* para los ceros, o raíces reales de un polinomio, $f(x)$, con coeficientes reales. Por definición, un número real b es una **cota superior** de las raíces, si no hay raíz alguna mayor que b. Un número real, a, es **cota inferior** de las raíces, si no hay raíz menor que a. Así, si r es cualquier cero real de $f(x)$, entonces $a \leq r \leq b$; es decir, r está en el intervalo cerrado $[a, b]$, como se ve en la Fig. 4.14. Nótese que las cotas superior e inferior no son únicas, ya que cualquier número mayor que b es límite superior, y cualquier número menor que a es cota inferior.

FIGURA 4.14



Se usa la división sintética para determinar las cotas superior e inferior de los ceros de $f(x)$. Recuérdese que si se divide sintéticamente $f(x)$ entre $x - c$, el tercer renglón del proceso de la división contiene a los coeficientes del cociente, $q(x)$, junto con el residuo, $f(c)$. El teorema siguiente indica cómo se puede usar este tercer renglón para determinar las cotas superior e inferior de las soluciones reales.

Cotas de los ceros reales de polinomios

Supóngase que $f(x)$ es un polinomio con coeficientes reales y con un coeficiente inicial positivo, y que $f(x)$ se divide sintéticamente entre $x - c$.

(1) Si $c > 0$ y si todos los números del tercer renglón del proceso de división son positivos o cero, entonces c es cota superior de las raíces reales de $f(x)$.

(2) Si $c < 0$ y si los números del tercer renglón del proceso de división son positivos y negativos alternadamente, tomando en cuenta un 0 en el tercer renglón ya sea como positivo o negativo, entonces c es cota inferior de las raíces reales de $f(x)$.

Después de resolver el siguiente ejemplo se dará una demostración general de este resultado.

EJEMPLO 6 *Determinación de cotas de las soluciones de una ecuación*

Determinar las cotas superior e inferior de las soluciones reales de la ecuación $2x^3 + 5x^2 - 8x - 7 = 0$.

SOLUCIÓN Se divide sintéticamente el polinomio $2x^3 + 5x^2 - 8x - 7$ entre $x - 1$ y entre $x - 2$:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & 5 & -8 & -7 \\ & & 2 & 7 & -1 \\ \hline & 2 & 7 & -1 & -8 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & 5 & -8 & -7 \\ & & 4 & 18 & 20 \\ \hline & 2 & 9 & 10 & 13 \end{array}$$

El tercer renglón de la división sintética entre $x - 1$ contiene números negativos y, por lo tanto, no se aplica la parte (1) del resultado acerca de cotas de ceros reales. Sin embargo, como son positivos todos los números del tercer renglón de la división sintética entre $x - 2$, de acuerdo con

la parte (1), 2 es cota superior de las soluciones reales de la ecuación. Este hecho también es evidente si se expresa la división entre $x - 2$ en forma de algoritmo de división

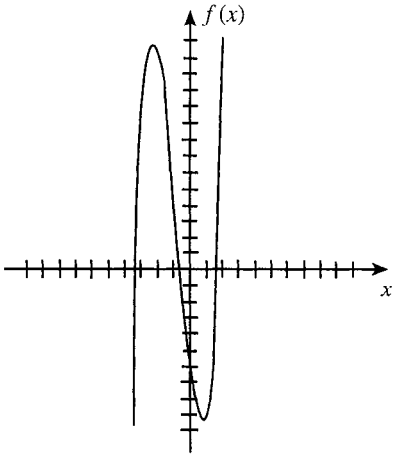
$$2x^3 + 5x^2 - 8x - 7 = (x - 2)(2x^2 + 9x + 10) + 13,$$

porque si $x > 2$, entonces el segundo miembro de la ecuación es positivo, y por consiguiente, no es cero. En consecuencia, $2x^3 + 5x^2 - 8x - 7$ no es cero si $x > 2$.

Luego se determina la cota inferior. Después de algunos intentos de ensayo y error con $x - (-1)$, $x - (-2)$ y $x - (-3)$, se observa que la división sintética entre $x - (-4)$ da como resultado

-4	2	5	-8	-7
		-8	12	-16
	2	-3	4	-23

FIGURA 4.15



$f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 8x - 7$

Como los números del tercer renglón son positivos y negativos alternadamente de acuerdo con la parte (2) del teorema anterior, -4 es una cota inferior de las soluciones reales. Esto se puede demostrar también expresando la división entre $x + 4$ en la forma

$$2x^3 + 5x^2 - 8x - 7 = (x + 4)(2x^2 - 3x + 4) - 23,$$

porque si $x < -4$, entonces el lado derecho de esta ecuación es negativo y, por consiguiente, no es cero. Entonces, $2x^3 + 5x^2 - 8x - 7$ no es cero si $x < -4$.

Ya que las cotas inferior y superior de las soluciones reales son -4 y 2, respectivamente, se ve que todas las soluciones reales están en el intervalo cerrado $[-4, 2]$.

En la Fig. 4.15 se ve un esquema de la gráfica de $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 8x - 7$. Esa gráfica muestra que los tres ceros de f están en los intervalos $[-4, -3]$, $[-1, 0]$ y $[1, 2]$, respectivamente.

EJERCICIOS 4.3

Ejercicios 1–6: Determine un polinomio, $f(x)$, de grado 3 que tenga los ceros indicados y satisfaga la condición dada.

1 $-1, 2, 3;$ $f(-2) = 80$

2 $-5, 2, 4;$ $f(3) = -24$

3 $-4, 3, 0;$ $f(2) = -36$

4 $-3, -2, 0;$ $f(-4) = 16$

5 $-2i, 2i, 3;$ $f(1) = 20$

6 $-3i, 3i, 4;$ $f(-1) = 50$

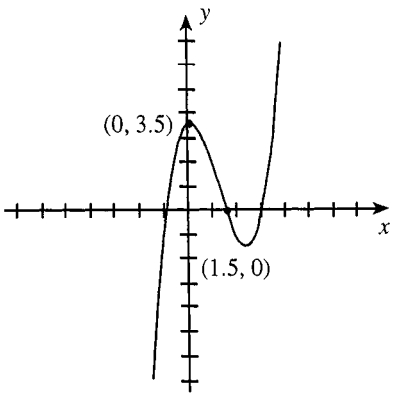
7 Encuentre un polinomio $f(x)$ de grado 4 cuyo coeficiente general sea 1, de modo que -4 y 3 sean ceros de multiplicidad 2, y trace la gráfica de f.

8 Determine un polinomio $f(x)$ de grado 4, cuyo coeficiente general sea 1, tal que -5 y 2 sean ceros de multiplicidad 2, y trace la gráfica de f.

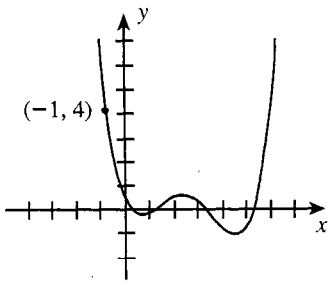
9 Halle un polinomio $f(x)$ de grado 6, tal que 0 y 3 sean ceros, ambos de multiplicidad 3, y $f(2) = -24$. Trace la gráfica de f.

10 Determine un polinomio $f(x)$ de grado 7 en el que -2 y 2 sean ambos ceros de multilicidad 2, 0 sea una raíz de multiplicidad 3, y $f(-1) = 27$. Trace la gráfica de f.

11 Encuentre la función polinomial de tercer grado cuya gráfica aparece en la figura.

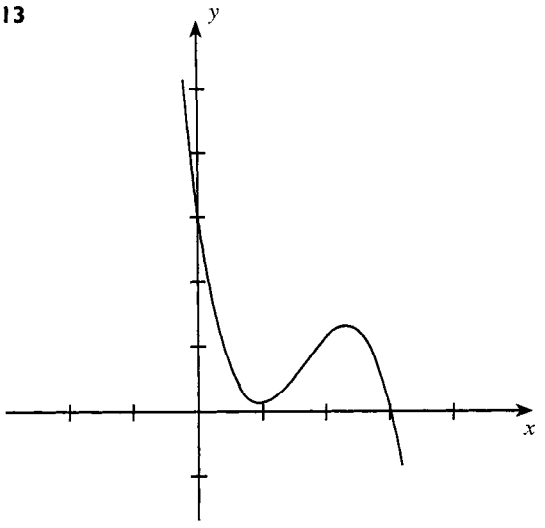


12 Obtenga la función polinomial de cuarto grado cuya gráfica se ve en la figura.

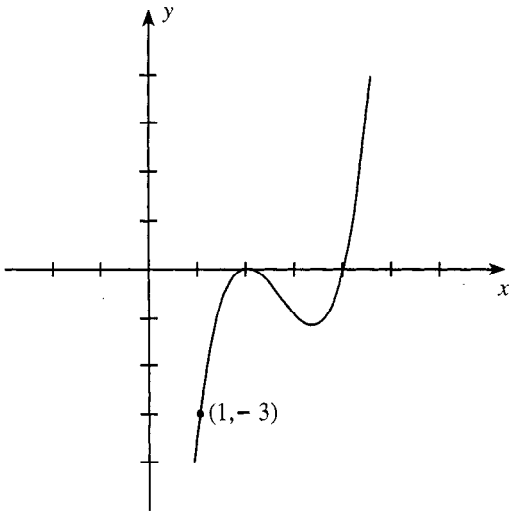


Ejercicios 13 y 14: Determine la función polinomial de grado 3 cuya gráfica aparece en la figura.

13



14



Ejercicios 15 – 22: Calcule los ceros de $f(x)$ y diga la multiplicidad de cada uno.

15 $f(x) = x^2(3x + 2)(2x - 5)^3$

16 $f(x) = x(x + 1)^4(3x - 7)^2$

17 $f(x) = 4x^5 + 12x^4 + 9x^3$

18 $f(x) = (4x^2 - 5)^2$

19 $f(x) = (x^2 + x - 12)^3(x^2 - 9)^2$

20 $f(x) = (6x^2 + 7x - 5)^4(4x^2 - 1)^2$

21 $f(x) = x^4 + 7x^2 - 144$

22 $f(x) = x^4 + 21x^2 - 100$

Ejercicios 23 – 26: Demuestre que el número es un cero de $f(x)$ de la multiplicidad dada y exprese $f(x)$ en forma de producto de factores lineales.

23 $f(x) = x^4 + 7x^3 + 13x^2 - 3x - 18$;
−3 (multiplicidad 2)

24 $f(x) = x^4 - 9x^3 + 22x^2 - 32$;
4 (multiplicidad 2)

25 $f(x) = x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 5x^2 + 4x - 1$;
1 (multiplicidad 5)

26 $f(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3$;
−1 (multiplicidad 4)

Ejercicios 27 – 34: Use la regla de Descartes de los signos para determinar el número de soluciones posibles positivas, negativas y complejas no reales, de la ecuación.

27 $4x^3 - 6x^2 + x - 3 = 0$ **28** $5x^3 - 6x - 4 = 0$

29 $4x^3 + 2x^2 + 1 = 0$ **30** $3x^3 - 4x^2 + 3x + 7 = 0$

31 $3x^4 + 2x^3 - 4x + 2 = 0$

32 $2x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 4 = 0$

33 $x^5 + 4x^4 + 3x^3 - 4x + 2 = 0$

34 $2x^6 + 5x^5 + 2x^2 - 3x + 4 = 0$

Ejercicios 35 – 40: Determine los enteros mínimo y máximo que sean cotas superior e inferior, respectivamente, de las soluciones reales de la ecuación.

35 $x^3 - 4x^2 - 5x + 7 = 0$

36 $2x^3 - 5x^2 + 4x - 8 = 0$

37 $x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = 0$

38 $2x^4 - 9x^3 - 8x - 10 = 0$

39 $2x^5 - 13x^3 + 2x - 5 = 0$

40 $3x^5 + 2x^4 - x^3 - 8x^2 - 7 = 0$

41 ***Uso de datos limitados*** Un investigador tiene datos limitados acerca de la temperatura T (en °C), durante un periodo de 24 horas. Si t representa al tiempo en horas y $t = 0$ corresponde a la medianoche, deduzca el polinomio de cuarto grado que se ajuste a la información de la siguiente tabla.

t (horas)	0	5	12	19	24
T (°C)	0	0	10	0	0

42 ***Polinomio de interpolación de Lagrange*** Un polinomio $f(x)$ de grado 3, cuyos ceros están en c_1, c_2 y c_3, para el cual $f(c) = 1$ cuando $c_2 < c < c_3$ es un *polinomio de interpolación de Lagrange*. Deduzca una fórmula explícita para $f(x)$ en términos de c_1, c_2, c_3 y c.

c **Ejercicios 43 y 44: Grafique f para cada valor de n en el mismo plano de coordenadas, y describa cómo afecta la multiplicidad de un cero a la gráfica de f.**

43 $f(x) = (x - 0.5)^n(x^2 + 1)$; $n = 1, 2, 3, 4$

44 $f(x) = (x - 1)^n(x + 1)^n$; $n = 1, 2, 3, 4$

c **Ejercicios 45 y 46: Grafique f, estime todos los ceros reales y determine la multiplicidad de cada cero.**

45 $f(x) = x^3 + 1.3x^2 - 1.2x - 1.584$

46 $f(x) = x^5 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{8}x^3 - \frac{9}{32}x^2 + \frac{405}{256}x + \frac{675}{1024}$

c **Ejercicios 47 y 48: ¿Hay algún polinomio del grado indicado, n, cuya gráfica contenga los puntos citados?**

47 $n = 3$;
(1.1, −49.815), (2, 0), (3.5, 25.245), (5.2, 0), (6.4, −29.304), (10.1, 0)

48 $n = 4$;
(1.25, 0), (2, 0), (2.5, 56.25), (3, 128.625), (6.5, 0), (9, −307.75), (10, 0)

c **49** ***Efecto de invernadero*** Debido a que se queman combustibles fósiles, aumenta la concentración de dióxido de carbono en la atmósfera. Las investigaciones indican que esto ocasionará un *efecto de invernadero*, que cambiará la temperatura media de la superficie de la Tierra. Suponiendo un gran aumento de uso de carbón, la cantidad futura, $A(t)$, de la concentración de dióxido de carbono atmosférico, en partes por millón, se puede aproximar mediante

$$A(t) = -\tfrac{1}{2400}t^3 + \tfrac{1}{20}t^2 + \tfrac{7}{6}t + 340,$$

donde t está en años y $t = 0$ corresponde a 1980; $0 \le t \le 60$. Con una gráfica de A, estime el año en el cual será 400 la concentración de dióxido de carbono.

c **50** ***Efecto de invernadero*** El aumento promedio en la temperatura superficial del Planeta debida al efecto de invernadero se puede aproximar mediante

$$T(t) = \frac{21}{5{,}000{,}000}t^3 - \frac{127}{1{,}000{,}000}t^2 + \frac{1293}{50{,}000}t,$$

en la cual $0 \le t \le 60$ y $t = 0$ corresponde a 1980. Con la gráfica de T estime el año en el cual la temperatura media habrá aumentado 1 °C.

4.4 CEROS COMPLEJOS Y RACIONALES DE POLINOMIOS

En el Ejemplo 3 de la sección anterior se muestra un factor importante acerca de polinomios con coeficientes reales: los dos ceros (o raíces) complejos, $2 + 3i$ y $2 - 3i$ de $x^5 - 4x^4 + 13x^3$ son conjugados entre sí. La relación no es accidental, ya que se cumple el siguiente resultado general.

Teorema sobre pares conjugados de ceros de un polinomio

> Si un polinomio $f(x)$ de grado $n > 1$, tiene coeficientes reales, y si $z = a + bi$ donde $b \neq 0$ es un cero complejo de $f(x)$, entonces el conjugado $\bar{z} = a - bi$ también es cero de $f(x)$.

DEMOSTRACIÓN Sea el polinomio

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

en el cual cada coeficiente, a_k, es número real, y $a_n \neq 0$. Si $f(z) = 0$, entonces

$$a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0.$$

Si dos números complejos son iguales, también lo son sus conjugados. Por lo tanto, el conjugado del primer miembro de la última ecuación es igual al conjugado del segundo miembro; es decir,

$$\overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} = \bar{0} = 0.$$

El hecho que $\bar{0} = 0$ es consecuencia de $\bar{0} = \overline{0 + 0i} = 0 - 0i = 0$.

Si z y w son números complejos cualesquiera, se puede demostrar que $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$. En forma más general, el conjugado de *cualquier* suma de números complejos es la suma de los conjugados. En consecuencia,

$$\overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1}z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} = 0.$$

También se puede demostrar que $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$, que $\overline{z^n} = \bar{z}^n$ para todo entero positivo n, y que $\bar{z} = z$ si y sólo si z es real. Así, para toda k,

$$\overline{a_k z^k} = \overline{a_k} \cdot \overline{z^k} = \overline{a_k} \cdot \bar{z}^k = a_k \bar{z}^k,$$

y, por consiguiente,

$$a_n \bar{z}^n + a_{n-1}\bar{z}^{n-1} + \cdots + a_1 \bar{z} + a_0 = 0.$$

La última ecuación establece que $f(\bar{z}) = 0$, con lo cual se termina la demostración. ■

EJEMPLO 1 ***Obtención de un polinomio dados sus ceros***

Determinar un polinomio $f(x)$ de grado 4, que tenga coeficientes reales y cuyos ceros sean $2 + i$ y $-3i$.

SOLUCIÓN Según el teorema sobre pares conjugados de ceros, $f(x)$ también debe tener los ceros $2 - i$ y $3i$. Aplicando el teorema del factor, se observa que $f(x)$ tiene los siguientes factores:

$$x - (2 + i), \quad x - (2 - i), \quad x - (-3i), \quad x - (3i)$$

Multiplicando estos cuatro factores, se obtiene

$$\begin{aligned} f(x) &= [x - (2 + i)][x - (2 - i)](x + 3i)(x - 3i) \\ &= (x^2 - 4x + 5)(x^2 + 9) \\ &= x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 36x + 45. \end{aligned}$$

Si un polinomio con coeficientes reales se factoriza según el teorema de factorización completa (véase pág. 232) algunos de los factores $x - c_k$ pueden contener un número complejo c_k. Sin embargo, siempre es posible obtener una factorización en polinomios con coeficientes reales, como se establece en el siguiente teorema.

Teorema de la expresión de un polinomio como producto de factores lineales y cuadráticos

> Todo polinomio con coeficientes reales y grado n positivo, se puede expresar como un producto de polinomios lineales y cuadráticos, con coeficientes reales, tales que los factores cuadráticos son irreducibles en $\mathbb{R}$.

DEMOSTRACIÓN Como $f(x)$ tiene exactamente n ceros complejos, $c_1, c_2, \ldots c_n$, se puede escribir

$$f(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n),$$

donde a es el coeficiente general de $f(x)$. Por supuesto, algunos de los ceros o raíces pueden ser reales. En esos casos, se obtienen los factores lineales citados en el enunciado del teorema.

Si un cero c_k no es real, entonces, según el teorema del par conjugado de ceros, el conjugado $\overline{c_k}$ también es un cero de $f(x)$, y por consiguiente debe ser uno de los números $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Esto significa que tanto $x - c_k$, como $x - \overline{c_k}$, aparecen en la factorización de $f(x)$. Si se multiplican esos factores, se tiene

$$(x - c_k)(x - \overline{c_k}) = x^2 - (c_k + \overline{c_k})x + c_k\overline{c_k},$$

que tiene coeficientes *reales*, ya que $c_k + \overline{c_k}$ y $c_k\,\overline{c_k}$ son números reales (véase pág. 84). De modo que, si c_k es cero complejo, entonces el producto $(x - c_k)(x - \overline{c_k})$ es un polinomio cuadrático que es irreducible en $\mathbb{R}$. Con esto termina la demostración. ■

EJEMPLO 2 ***Expresión de un polinomio en forma de producto de factores lineales y cuadráticos***

Exprese $x^5 - 4x^3 + x^2 - 4$ como producto de

(a) polinomios lineales y cuadráticos, con coeficientes reales que sean irreducibles en $\mathbb{R}$

(b) polinomios lineales

SOLUCIÓN

(a)

$$\begin{aligned} & x^5 - 4x^3 + x^2 - 4 \\ &= (x^5 - 4x^3) + (x^2 - 4) && \text{se agrupan los términos} \\ &= x^3(x^2 - 4) + (x^2 - 4) && \text{se saca } x^3 \text{ como factor común} \\ &= (x^3 + 1)(x^2 - 4) && \text{se saca } x^2 - 4 \text{ como factor común} \\ &= (x + 1)(x^2 - x + 1)(x + 2)(x - 2) && \text{factorización en forma de diferencia de cubos y diferencia de cuadrados} \end{aligned}$$

Mediante la fórmula cuadrática, se ve que el polinomio $x^2 - x + 1$ tiene los ceros complejos

$$\frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

y, por lo tanto, es irreducible en $\mathbb{R}$. De este modo, la factorización deseada es

$$(x + 1)(x^2 - x + 1)(x + 2)(x - 2).$$

(b) Como el polinomio $x^2 - x + 1$ de la parte (a) tiene los ceros $\frac{1}{2} \pm (\sqrt{3}/2)i$, según el teorema del factor se deduce que el polinomio tiene los factores

$$x - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \quad \text{y} \quad x - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

Sustituyendo la factorización del inciso (a), se obtiene la siguiente factorización completa, en polinomios lineales:

$$(x + 1)\left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(x + 2)(x - 2)$$

Antes se hizo notar que, por lo general, es muy difícil determinar los ceros de un polinomio de grado alto. Sin embargo, si todos los coeficientes son números racionales, hay un método para determinar, si existen, los ceros *racionales*. El método es consecuencia del siguiente resultado.

Teorema sobre ceros racionales de un polinomio

Si el polinomio

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

tiene coeficientes *enteros* y si c/d es un cero racional de $f(x)$ tal que c y d no tienen factor primo común, entonces

(1) el numerador c del cero, es un factor del término constante a_0

(2) el denominador d del cero, es un factor del coeficiente inicial, a_n

DEMOSTRACIÓN Supóngase que $c > 0$. La demostración para $c < 0$ es similar. Se demostrará que c es factor de a_0. El caso cuando $c = 1$ es trivial, ya que 1 es factor de *cualquier* número. Por lo tanto, sea $c \neq 1$. En este caso, $c/d \neq 1$, porque si $c/d = 1$, obtenemos $c = d$, y como c y d no tienen factor primo en común, esto significa que $c = d = 1$, lo cual es una contradicción. Por consiguiente, a continuación se tiene que $c \neq 1$ y $c \neq d$.

Ya que $f(c/d) = 0$,

$$a_n \frac{c^n}{d^n} + a_{n-1}\frac{c^{n-1}}{d^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{c}{d} + a_0 = 0.$$

Se multiplica por d^n, y después se suma $-a_0 d^n$ a ambos lados:

$$a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1}d + \cdots + a_1 c d^{n-1} = -a_0 d^n$$
$$c(a_n c^{n-1} + a_{n-1}c^{n-2}d + \cdots + a_1 d^{n-1}) = -a_0 d^n$$

La última ecuación indica que c es factor del entero $a_0 d^n$. Como c y d no tienen factor común, c es un factor de a_0. Se puede utilizar un argumento semejante para demostrar que d es un factor de a_n. ∎

En los siguientes ejemplos se muestra cómo usar el teorema sobre ceros racionales para determinar soluciones racionales de ecuaciones con coeficientes enteros.

EJEMPLO 3 ***Polinomio sin ceros racionales***

Demostrar que $f(x) = x^3 - 4x^2 - 2$ no tiene ceros racionales.

SOLUCIÓN Si $f(x)$ tiene un cero racional c/d tal que c y d no tengan factor primo común, entonces, según el teorema de raíces racionales, c es factor del término constante -2 y, por consiguiente debe ser 2 o -2, lo cual se escribe como ± 2. El denominador d es un factor del coeficiente principal 1 y, por tanto, es ± 1. Así, las únicas posibilidades para c/d son

$$\frac{\pm 1}{\pm 1} \quad \text{y} \quad \frac{\pm 2}{\pm 1} \quad \text{o, lo que es lo mismo,} \quad \pm 1 \quad \text{y} \quad \pm 2.$$

Sustituyendo x por cada uno de esos números, se tiene

$$f(1) = -5, \quad f(-1) = 1, \quad f(2) = -2, \quad \text{y} \quad f(-2) = -2.$$

Como $f(\pm 1) \neq 0$ y $f(\pm 2) \neq 0$, lo que se deduce es que $f(x)$ no tiene ceros racionales.

En la solución del ejemplo que sigue se supone que no se cuenta con una graficadora. En el Ejemplo 5 se vuelve a resolver el problema para demostrar las ventajas de tener esa graficadora.

EJEMPLO 4 ***Determinación de las soluciones racionales de una ecuación***

Determinar todas las soluciones racionales de

$$3x^4 + 14x^3 + 14x^2 - 8x - 8 = 0.$$

SOLUCIÓN El problema equivale a determinar los ceros racionales del polinomio del primer miembro de la ecuación. Si c/d es cero racional, y c y d no tienen factor común, entonces c es factor del término constante -8, y d es factor del coeficiente inicial 3. En la tabla siguiente se presentan las selecciones posibles

Selecciones para el numerador, c	$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$
Selecciones para el denominador, d	$\pm 1, \pm 3$
Selecciones para c/d	$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm$

Es posible reducir el número de opciones determinando las cotas superior e inferior de las soluciones reales; sin embargo, no se hará así. Es necesario determinar cuál de las opciones de c/d, si las hay, son ceros. Se observa, por sustitución, que ni 1 ni -1 es solución. Si se divide sintéticamente entre $x + 2$, se llega a

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 3 & 14 & 14 & -8 & -8 \\ & & -6 & -16 & 4 & 8 \\ \hline & 3 & 8 & -2 & -4 & 0 \end{array}$$

Este resultado indica que –2 es una raíz. Además, la división sintética da los coeficientes del cociente en la división del polinomio entre $x + 2$. Por consiguiente, se tiene la siguiente factorización del polinomio dado:

$$(x + 2)(3x^3 + 8x^2 - 2x - 4)$$

Las soluciones restantes de la ecuación deben ser ceros del segundo factor, de modo que se usa ese polinomio para comprobar las soluciones. Nótese que $\pm\frac{8}{3}$ ya no son candidatos, porque los numeradores deben ser factores de 4. De nuevo, procediendo por prueba y error, se llega finalmente a la división sintética entre $x + \frac{2}{3}$, que da el siguiente resultado:

$$\begin{array}{r|cccc} -\frac{2}{3} & 3 & 8 & -2 & -4 \\ & & -2 & -4 & 4 \\ \hline & 3 & 6 & -6 & 0 \end{array}$$

Por consiguiente, $-\frac{2}{3}$ también es un cero o raíz.

Usando los coeficientes del cociente, se sabe que los ceros restantes son soluciones de la ecuación $3x^2 + 6x - 6 = 0$. Dividiendo ambos miembros entre 3 se llega a la ecuación equivalente $x^2 + 2x - 2 = 0$. Según la fórmula cuadrática, las soluciones de esta ecuación son

$$\frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}.$$

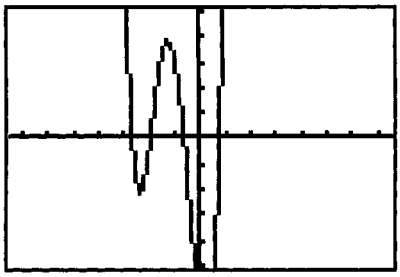
Por consiguiente, el polinomio problema tiene dos raíces racionales, -2 y $-\frac{2}{3}$, y dos irracionales, $-1 + \sqrt{3} \approx 0.732$, y $-1 - \sqrt{3} \approx -2.732$.

EJEMPLO 5 ***Determinación de las soluciones racionales de una ecuación***

Determinar todas las soluciones de la ecuación

$$3x^4 + 14x^3 + 14x^2 - 8x - 8 = 0.$$

FIGURA 4.16 [–7.5, 7.5] por [–5, 5]



SOLUCIÓN Se asigna el polinomio indicado a Y_1 y se elige el cuadro visual [–7.5, 7.5] por [–5, 5]; se obtiene un esquema semejante a la Fig. 4.16. La gráfica indica que –2 es solución y que hay una solución en cada uno de los intervalos (–3, –2), (–1, 0) y (0, 1). Viendo las opciones de un cero racional, *c/d*, en el ejemplo anterior, se llega a que las únicas posibilidades son $-\frac{8}{3}$ en (–3, –2), $-\frac{2}{3}$ o $-\frac{1}{3}$ en (–1, 0), $\frac{1}{3}$ o $\frac{2}{3}$ en (0 ,1). Así, consultando la gráfica, se ha reducido el número de opciones de 16, como en el Ejemplo 4, a 5.

Si se amplía la gráfica de Y_1, se ve que las elecciones más razonables de ceros son $-\frac{8}{3}$, $-\frac{2}{3}$, y $\frac{2}{3}$. Como en el Ejemplo 4, se puede usar la división sintética para determinar que las únicas soluciones racionales son –2 y $-\frac{2}{3}$.

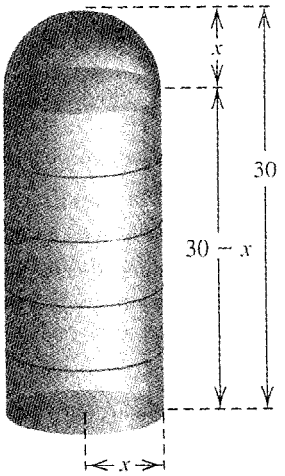
El teorema sobre ceros racionales se puede aplicar a ecuaciones con coeficientes racionales. Tan sólo se multiplican ambos miembros de la ecuación por el MCD de todos los coeficientes

para obtener una ecuación con coeficientes enteros y, a continuación, se procede como en el Ejemplo 4.

EJEMPLO 6 ***Determinación del radio de un silo***

Un silo tiene la forma de un cilindro circular recto, con tapa hemisférica. Si la altura total de la estructura es 30 pies, calcular el radio del cilindro que haga que el volumen total sea 1008π pies^3.

FIGURA 4.17



SOLUCIÓN Sea x el radio del cilindro. En la Fig. 4.17 aparece un esquema del silo, con las cotas adecuadas. Como el volumen del cilindro es $\pi x^2(30 - x)$, y el de la semiesfera es $\frac{2}{3}\pi x^3$, se tiene que resolver lo siguiente:

$$\pi x^2(30 - x) + \tfrac{2}{3}\pi x^3 = 1008\pi \quad \text{el volumen total es 1008}$$

$$3x^2(30 - x) + 2x^3 = 3024 \quad \text{se multiplica por } \frac{3}{\pi}$$

$$90x^2 - x^3 = 3024 \quad \text{se simplifica}$$

$$x^3 - 90x^2 + 3024 = 0 \quad \text{ecuación equivalente}$$

Como el coeficiente inicial del polinomio del lado izquierdo de la última ecuación es 1, cualquier raíz racional tiene la forma $c/1 = c$, donde c es un factor de 3024. Si se factoriza 3024 en sus primos, se tiene que $3024 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 7$. En consecuencia, algunos de los factores positivos de 3024 son

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 6, \quad 8, \quad 9, \quad 12, \quad \ldots$$

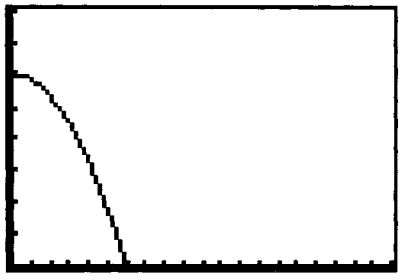
Para ayudar a decidir cuál de esos números probar primero, se hace una estimación aproximada del radio, suponiendo que el silo tiene forma de un cilindro circular recto con 30 pies de altura. En ese caso, el volumen sería $\pi r^2 h = 30\pi r^2$. Como ese volumen debe acercarse a 1008π se ve que

$$30r^2 = 1008, \quad \text{o sea,} \quad r^2 = 1008/30 \approx 33.6.$$

Esto sugiere usar 6 en la primera división sintética, como sigue:

6	1	−90	0	3024
		6	−504	−3024
	1	−84	−504	0

FIGURA 4.18 [0, 20] por [0, 4000]



Así, 6 es una solución de la ecuación $x^3 - 90x^2 + 3024 = 0$.

Las dos soluciones restantes de la ecuación se pueden determinar al resolver $x^2 - 84x - 504 = 0$, que se obtiene del cociente de la división sintética. Esos ceros o raíces son, aproximadamente, −5.62 y 89.62; ninguno de ellos satisface las condiciones del problema. Por consiguiente, el radio deseado es 6 pies.

Con una calculadora para gráficas con rectángulo visual [0, 20] por [0, 4000], se obtiene la gráfica $f(x) = x^3 - 90x^2 + 3024$, como se ve en la Fig. 4.18, que muestra la raíz $x = 6$. Una gráfica extendida o alargada también mostraría los otros dos ceros.

ESCUELA POLIT

EJERCICIOS 4.4

Ejercicios 1–10: Un polinomio, $f(x)$, con coeficientes reales y coeficiente inicial 1, tiene el (los) cero(s) y el grado indicados. Expresar $f(x)$ en forma de producto de polinomios lineales y cuadráticos con coeficientes reales que sean irreducibles en $\mathbb{R}$.

1 $3 + 2i$; grado 2

2 $-4 + 3i$; grado 2

3 $2, -2 - 5i$; grado 3

4 $-3, 1 - 7i$; grado 3

5 $-1, 0, 3 + i$; grado 4

6 $0, 2, -2 - i$; grado 4

7 $4 + 3i, -2 + i$; grado 4

8 $3 + 5i, -1 - i$; grado 4

9 $0, -2i, 1 - i$; grado 5

10 $0, 3i, 4 + i$; grado 5

Ejercicios 11–14: Demuestre que la ecuación no tiene ninguna raíz racional.

11 $x^3 + 3x^2 - 4x + 6 = 0$

12 $3x^3 - 4x^2 + 7x + 5 = 0$

13 $x^5 - 3x^3 + 4x^2 + x - 2 = 0$

14 $2x^5 + 3x^3 + 7 = 0$

Ejercicios 15–24: Determine las soluciones de la ecuación.

15 $x^3 - x^2 - 10x - 8 = 0$

16 $x^3 + x^2 - 14x - 24 = 0$

17 $2x^3 - 3x^2 - 17x + 30 = 0$

18 $12x^3 + 8x^2 - 3x - 2 = 0$

19 $x^4 + 3x^3 - 30x^2 - 6x + 56 = 0$

20 $3x^5 - 10x^4 - 6x^3 + 24x^2 + 11x - 6 = 0$

21 $6x^5 + 19x^4 + x^3 - 6x^2 = 0$

22 $6x^4 + 5x^3 - 17x^2 - 6x = 0$

23 $8x^3 + 18x^2 + 45x + 27 = 0$

24 $3x^3 - x^2 + 11x - 20 = 0$

25 ¿Existe un polinomio de grado 3 con coeficientes reales que tenga ceros o raíces $1, -1$ e i? Justifique la respuesta.

26 El polinomio $f(x) = x^3 - ix^2 + 2ix + 2$ tiene al número complejo i como cero; sin embargo, el conjugado de i, $-i$, no es cero. ¿Por qué este resultado no contradice el teorema de pares conjugados de ceros de un polinomio?

27 Si n es entero positivo impar, demuestre que un polinomio de grado n con coeficientes reales tiene cuando menos un cero real.

28 Si un polinomio de la forma

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0,$$

donde cada a_k es un entero, tiene una raíz racional r, demuestre que r es entero y es factor de a_0.

29 ***Hechura de una caja*** A partir de un rectángulo de cartón, cuyas dimensiones son 20 pulg × 30 pulg, se construirá una caja sin tapa, quitando cuadrados de área x^2 en cada esquina, y doblando las cejas que resultan. (Véase Ejercicio 33, Secc. 4.1.)

(a) Demuestre que hay dos cajas que tienen un volumen de 1 000 pulg^3.

(b) ¿Cuál de ellas tiene la menor superficie?

30 ***Construcción de un embalaje*** Un embalaje se construirá con 24 pies de madera de 2 pulg × 2 pulg. Suponiendo que el embalaje debe tener extremos cuadrados, de x pies de largo, calcule el o los valores de x que den como resultado un volumen de 4 pies^3. (Véase Ejercicio 34 de la Secc. 4.1.)

31 Un triángulo rectángulo tiene 30 pies^2 de área y su hipotenusa es 1 pie más larga que uno de sus catetos.

(a) Si x indica la longitud de este cateto, demuestre que $2x^3 + x^2 - 3600 = 0$.

(b) Demuestre que hay una raíz positiva en la ecuación de la parte (a) y que es menor que 13.

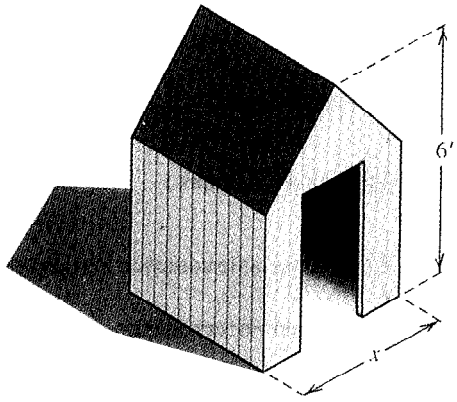
(c) Calcule las longitudes de los lados del triángulo.

32 ***Construcción de un depósito*** Se construirá un depósito para gas propano, con forma de un cilindro circular recto horizontal de 10 pies de altura y extremos hemisféricos. Calcular el radio x que dé como resultado un volumen de 27π pies^3. (Véase el Ejem. 7 de la Secc. 3.4.)

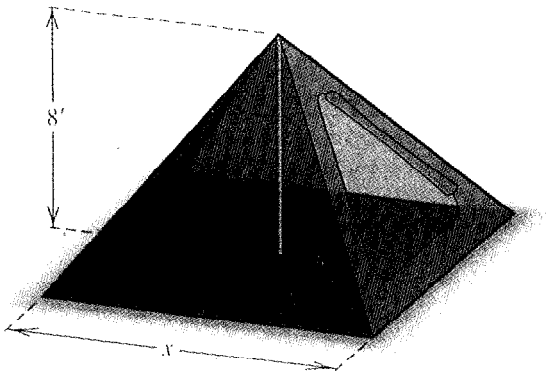
33 ***Construcción de un cobertizo para almacén*** Se construirá un cobertizo en forma de cubo, con un prisma triangular como techo (véase la figura). Queda por determinar la longitud x de uno de los lados del cubo.

(a) Si la altura total de la estructura es 6 pies, demuestre que su volumen V está dado por $V = x^3 + \frac{1}{2}x^2(6 - x)$.

(b) Calcule una x tal que el volumen total sea 80 pies^3



34 ***Diseño de una tienda*** Se hará una tienda de campaña en forma de pirámide cuadrangular. Un puntal de 8 pies será el soporte central, como se ve en la figura. Calcule la longitud x de un lado de la base, para que la tela total necesaria para los lados y el piso sea 384 pies^2.



C **Ejercicios 35 y 36: Mediante una gráfica determine el número de soluciones no reales de la ecuación.**

35 $x^5 + 1.1x^4 - 3.21x^3 - 2.835x^2 + 2.7x + 0.62 = -1$

36 $x^4 - 0.4x^3 - 2.6x^2 + 1.1x + 3.5 = 2$

C **Ejercicios 37 y 38: Por medio de la división sintética calcule todas las soluciones de la ecuación.**

37 $x^4 + 1.4x^3 + 0.44x^2 - 0.56x - 0.96 = 0$

38 $x^5 + 1.1x^4 - 2.62x^3 - 4.72x^2 - 0.2x + 5.44 = 0$

C **39** ***Densidad de la atmósfera*** La densidad, $D(h)$ (en kg/m^3), de la atmósfera terrestre a una altura de h metros se puede calcular, aproximadamente, con

$$D(h) = 1.2 - ah + bh^2 - ch^3,$$

en la cual $a = 1.096 \times 10^{-4}$, $b = 3.42 \times 10^{-9}$, $c = 3.6 \times 10^{-14}$ y $0 \le h \le 30\,000$. Use la gráfica de D para aproximar la altura h, a la que la densidad es 0.4.

C **40** ***Densidad de la Tierra*** La densidad de la Tierra $D(h)$ (en g/cm^3) a h metros de profundidad, se puede aproximar mediante

$$D(h) = 2.84 + ah + bh^2 - ch^3,$$

donde, $a = 1.4 \times 10^{-3}$, $b = 2.49 \times 10^{-6}$, $c = 2.19 \times 10^{-9}$ y $0 \le h \le 1000$. Con la gráfica de D, aproxime la profundidad h a la cual la densidad del terreno es 3.7.

4.5 FUNCIONES RACIONALES

Una función f es **función racional** si

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)},$$

en la cual $g(x)$ y $h(x)$ son polinomios. El dominio de f consiste en todos los números reales *excepto* los ceros del denominador $h(x)$.

EJEMPLO ILUSTRATIVO

Funciones racionales y sus dominios

- ❑ $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$; *dominio:* toda x excepto $x = 2$
- ❑ $f(x) = \dfrac{3x}{x^2-9}$; *dominio:* toda x excepto $x = \pm 3$
- ❑ $f(x) = \dfrac{x^3-8}{x^2+4}$; *dominio:* todos los números reales x

Cuando se trace la gráfica de una función racional f es importante contestar las dos preguntas siguientes:

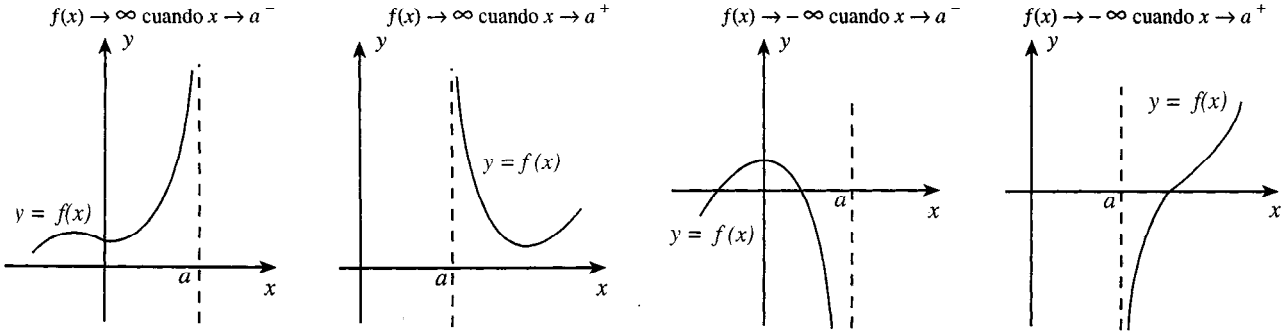
Pregunta 1 ¿Qué se puede decir de los valores de la función $f(x)$ cuando x se acerca, pero no es igual, a un cero del denominador?

Pregunta 2 ¿Qué se puede decir de los valores de la función $f(x)$, cuando x es grande y positiva, o cuando x es grande y negativa?

Como se verá, si a es un cero del denominador, se presenta con frecuencia uno de los siguientes casos, que se ven en la Fig. 4.19; en ella se ha usado la notación de la siguiente tabla.

Notación	Terminología
$x \to a^-$	x tiende a a por la izquierda (por medio de valores *menores* que a).
$x \to a^+$	x tiende a a por la derecha (a través de valores *mayores* que a).
$f(x) \to \infty$	$f(x)$ aumenta sin límite (se puede hacer positiva tan grande como se quiera).
$f(x) \to -\infty$	$f(x)$ disminuye sin límite (se puede hacer negativa tan grande como se quiera).

FIGURA 4.19



Los símbolos ∞ (**infinito**) y $-\infty$ (**menos infinito**) no representan números reales; sólo especifican ciertos tipos de comportamiento de funciones y variables.

La línea de puntos $x = a$ en la Fig. 4.19 se llama *asíntota vertical*, como en la siguiente definición.

Definición de la asíntota vertical

La recta $x = a$ es **asíntota vertical** de la gráfica de una función f si

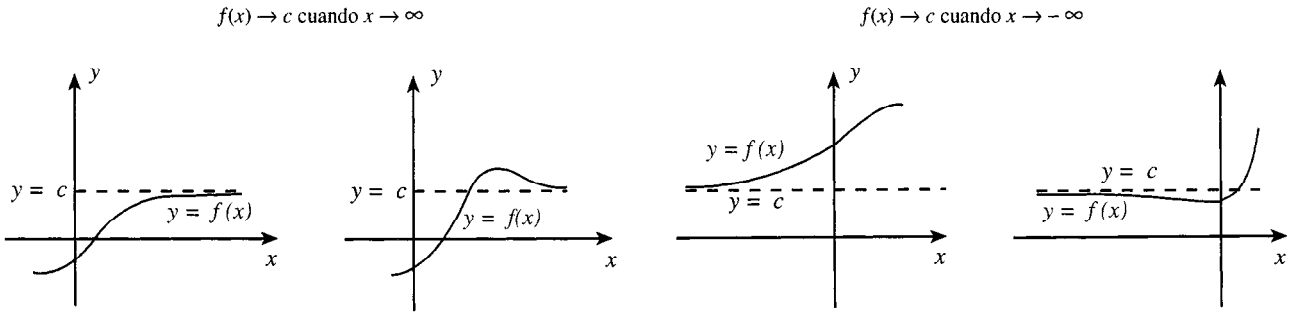
$$f(x) \to \infty \quad \text{o bien} \quad f(x) \to -\infty$$

cuando x tiende a a, por la izquierda o por la derecha.

Así, la respuesta a la Pregunta 1 es que si a es un cero del denominador, o una función racional f, entonces la gráfica de f *puede* tener una asíntota vertical $x = a$. Hay funciones racionales para las cuales éste *no* es el caso (véase el Ejemplo 7). Si tanto el numerador como el denominador no tienen factor común, entonces f *debe* tener una asíntota vertical $x = a$.

Considérese ahora la Pregunta 2. Para x *grande y positiva*, o *grande y negativa*, la gráfica de una función racional se puede parecer a una de las de la Fig. 4.20,

FIGURA 4.20



en la cual la notación

$$f(x) \to c \text{ cuando } x \to \infty$$

se lee "$f(x)$ *tiende a c cuando x crece sin límite*" y la notación

$$f(x) \to c \text{ cuando} \to x - \infty$$

se lee "$f(x)$ *tiende a c cuando x decrece sin límite.*"

A una recta discontinua, como las de la Fig. 4.20, se le llama *asíntota horizontal*, según la definición siguiente:

Definición de asíntota horizontal

La recta $y = c$ es asíntota horizontal de la gráfica de una función f si

$$f(x) \to c \text{ cuando } x \to \infty \text{ o cuando } x \to -\infty$$

Así, la respuesta a la Pregunta 2 es que $f(x)$ *puede* estar muy cerca de cierto número c cuando x es un número positivo grande, o negativo grande; es decir, la gráfica de f puede tener una asíntota horizontal $y = c$. Hay funciones racionales para las cuales éste *no* es el caso (véase los Ejemplo 2(c) y 5).

Nótese que como en el segundo y cuarto croquis de la Fig. 4.20, la gráfica de f puede cruzar una asíntota horizontal.

En el ejemplo que sigue se determinan las asíntotas de la gráfica de una función racional simple.

EJEMPLO 1 *Trazo de la gráfica de una función racional*

Trazar la gráfica de f si

$$f(x) = \frac{1}{x - 2}.$$

(continúa)

SOLUCIÓN Se considera primero la Pregunta 1, al principio de esta sección. El denominador, $x - 2$, es cero en $x = 2$. Si x se acerca a 2, y $x > 2$, entonces $f(x)$ es grande y positiva, como se ve en la siguiente tabla:

x	2.1	2.01	2.001	2.0001	2.00001
$\frac{1}{x-2}$	10	100	1000	10,000	100,000

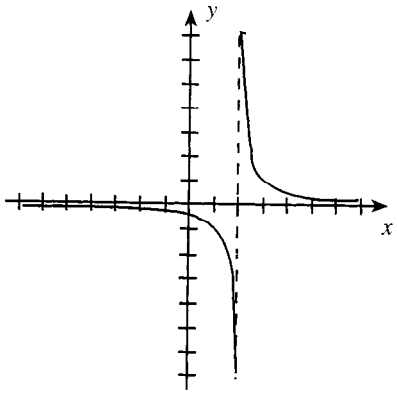
Puesto que se puede hacer que $1/(x - 2)$ sea tan grande como se desee con valores de x menores y mayores que 2, se ve que

$$f(x) \to \infty \text{ cuando } x \to 2^+.$$

Si $f(x)$ tiende a 2 y $x < 2$, entonces $f(x)$ es grande y negativa; por ejemplo, $f(1.9999) = -10\,000$ y $f(1.99999) = -100\,000$. Entonces,

$$f(x) \to -\infty \text{ cuando } x \to 2^-.$$

FIGURA 4.21



La recta $x = 2$ es asíntota vertical de la gráfica de f, como se ve en la Fig. 4.21.

A continuación se considera la Pregunta 2. La tabla siguiente contiene algunos valores aproximados de $f(x)$, cuando x es grande y positiva.

x	100	1000	10 000	100 000	1 000 000
$\frac{1}{x-2}$ **(aprox.)**	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001

Se describe este comportamiento de $f(x)$ con lo siguiente:

$$f(x) \to 0 \text{ cuando } x \to \infty.$$

Igualmente, $f(x)$ tiende a 0 cuando x es grande y negativa; por ejemplo, $f(-100\,000) = -0.00001$. Por tanto,

$$f(x) \to 0 \text{ cuando } x \to -\infty.$$

La recta $y = 0$, que es el eje x, es una asíntota horizontal en este caso, como se ve en la Fig. 4.21.

Al graficar los puntos $(1, -1)$ y $(3, 1)$ se obtiene un esquema aproximado de la curva.

El teorema que sigue es útil para determinar la asíntota horizontal de la gráfica de una función racional.

Teorema sobre asíntotas horizontales

Sea $f(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$ en la cual $a_n \neq 0$ y $b_k \neq 0$.

(1) Si $n < k$, entonces el eje x (la recta $y = 0$) es asíntota horizontal de la gráfica de f.

(2) Si $n = k$, entonces la recta $y = a_n/b_k$ (la relación de los coeficientes iniciales) es una asíntota horizontal para la gráfica de f.

(3) Si $n > k$, la gráfica de f no tiene asíntota horizontal. En lugar de ello, $f(x) \to \infty$, o bien, $f(x) \to -\infty$, cuando $x \to \infty$ o cuando $x \to -\infty$.

Las demostraciones de cada parte de este teorema se pueden copiar de las soluciones del siguiente ejemplo. Acerca de la parte (3), si $q(x)$ es el cociente que se obtiene dividiendo el numerador entre el denominador, entonces $f(x) \to \infty$ si $q(x) \to \infty$, o $f(x) \to -\infty$ si $q(x) \to -\infty$.

EJEMPLO 2 *Determinación de asíntotas horizontales*

Determinar la asíntota horizontal, si existe, de la gráfica de f.

(a) $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x^2 - x - 6}$ **(b)** $f(x) = \dfrac{5x^2 + 1}{3x^2 - 4}$ **(c)** $f(x) = \dfrac{2x^4 - 3x^2 + 5}{x^2 + 1}$

SOLUCIÓN

(a) El grado del numerador $3x - 1$ es menor que el del denominador $x^2 - x - 6$, de modo que, según la parte (1) del teorema sobre asíntotas horizontales, el eje x es asíntota horizontal. Para comprobarlo en forma directa, se divide entre x^2 numerador y denominador del cociente, ya que 2 es la potencia más grande de x en el denominador. Se obtiene

$$f(x) = \frac{\dfrac{3x - 1}{x^2}}{\dfrac{x^2 - x - 6}{x^2}} = \frac{\dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^2}}{1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{6}{x^2}} \qquad \text{para } x \neq 0.$$

Si x es grande positiva o grande negativa, entonces $3/x$, $1/x^2$, $1/x$, y $6/x^2$ tienden a 0, por consiguiente,

$$f(x) \approx \frac{0 - 0}{1 - 0 - 0} = \frac{0}{1} = 0.$$

Así,

$$f(x) \to 0 \text{ cuando } x \to \infty \text{ o cuando } x \to -\infty.$$

Como $f(x)$ es la ordenada de un punto en la gráfica, la última afirmación significa que la recta $y = 0$, es decir, el eje x, es una asíntota horizontal.

(b) Si $f(x) = (5x^2 + 1)/(3x^2 - 4)$, entonces numerador y denominador tienen el mismo grado y los coeficientes principales son 5 y 3, respectivamente. Por tanto, según la parte (2) del teorema sobre asíntotas horizontales, la recta $y = \frac{5}{3}$ es asíntota horizontal. También se puede demostrar que $y = \frac{5}{3}$ es asíntota horizontal si se dividen numerador y denominador de $f(x)$ entre x^2, con lo cual se obtiene

(continúa)

$$f(x) = \frac{\frac{5x^2+1}{x^2}}{\frac{3x^2-4}{x^2}} = \frac{5+\frac{1}{x^2}}{3-\frac{4}{x^2}} \qquad \text{para } x \neq 0.$$

Ya que $1/x^2 \to 0$ y $4/x^2 \to 0$ cuando $x \to \infty$, o cuando $x \to -\infty$ vemos que

$$f(x) \to \frac{5+0}{3-0} = \frac{5}{3} \quad \text{cuando } x \to \infty \text{ o cuando } x \to -\infty.$$

(c) El grado del numerador, $2x^4 - 3x^2 + 5$ es mayor que el grado del denominador, $x^2 + 1$, de modo que, según la parte (3) del teorema sobre asíntotas horizontales, la gráfica no tiene asíntota horizontal. Si se usa la división larga, se llega a

$$f(x) = 2x^2 - 5 + \frac{10}{x^2+1}.$$

Cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$ el cociente $2x^2 - 5$ aumenta sin límite y $10/(x^2 + 1) \to 0$. Por consiguiente, $f(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$ o cuando $x \to -\infty$.

A continuación se dan unas indicaciones para trazar la gráfica de una función racional. Su aplicación se verá en los Ejemplos 3 y 4.

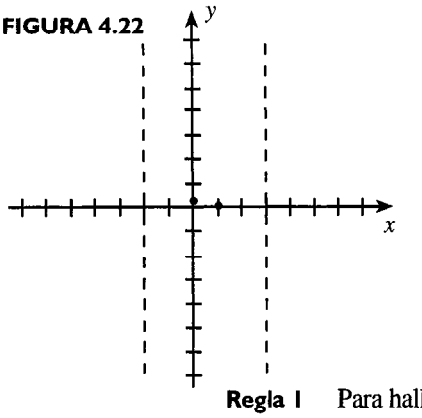
Indicaciones para trazar la gráfica de una función racional

Supóngase que $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, donde $g(x)$ y $h(x)$ son polinomios sin factor común.

1. Calcular las abscisas en el origen, es decir, los ceros o raíces reales del numerador $g(x)$, y graficar los puntos correspondientes en el eje x.
2. Calcular los ceros reales del denominador, $h(x)$. Para cada cero real a, trace la asíntota vertical $x = a$, con línea de puntos.
3. Determinar la ordenada en el origen, $f(0)$, si existe, y ubicar el punto $(0, f(0))$ en el eje y.
4. Aplicar el teorema sobre las asíntotas horizontales. Si hay asíntota horizontal $y = c$, trazarla con línea de puntos.
5. Si hay una asíntota horizontal $y = c$, determinar si interseca a la gráfica. Las abscisas de los puntos de intersección son las soluciones de la ecuación $f(x) = c$. Graficar esos puntos, en caso que existan.
6. Efectuar el trazo de la gráfica de f en cada una de las regiones del plano xy determinada por las asíntotas verticales de la indicación 2. Si es necesario, usar el signo de los valores de la función específica para saber si la gráfica está arriba o abajo del eje x o de la asíntota horizontal. Con la indicación 5 decida si la gráfica tiende a la asíntota horizontal por arriba o por abajo.

En los ejemplos que siguen, el objetivo principal será determinar la forma general de la gráfica, poniendo especial atención a cómo tiende a las asíntotas. Sólo se grafican algunos puntos, como los que corresponden a las abscisas en el origen y a la ordenada en el origen, o a la intersección de la gráfica con una asíntota horizontal.

FIGURA 4.22



EJEMPLO 3 ***Trazo de la gráfica de una función racional***

Trazar la gráfica de f:

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2 - x - 6}.$$

SOLUCIÓN Es útil expresar tanto numerador como denominador en forma factorizada. Por lo tanto, se empieza por escribir

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2 - x - 6} = \frac{x-1}{(x+2)(x-3)}.$$

y, a continuación, se aplican las indicaciones.

Regla 1 Para hallar las abscisas en el origen se calculan los ceros del numerador. Con $x - 1 = 0$ se obtiene $x = 1$, y se ubica el punto $(1, 0)$ en el eje x, como se observa en la Fig. 4.22.

Regla 2 El denominador tiene los ceros o raíces -2 y 3. Por consiguiente, las rectas $x = -2$ y $x = 3$ son asíntotas verticales; se representan con líneas discontinuas, como en la Fig. 4.22.

Regla 3 La ordenada en el origen es $f(0) = \frac{1}{6}$, y se grafica el punto $(0, \frac{1}{6})$ en la Fig. 4.22.

Regla 4 El grado del numerador de $f(x)$ es menor que el grado del denominador, de modo que, según la parte (1) del teorema sobre asíntotas horizontales, el eje x es asíntota horizontal.

Regla 5 Los puntos donde la gráfica interseca la asíntota horizontal, el eje x, que se encontraron en la regla 4, corresponden a las abscisas en el origen. Ya se graficó el punto $(1, 0)$ en la regla 1.

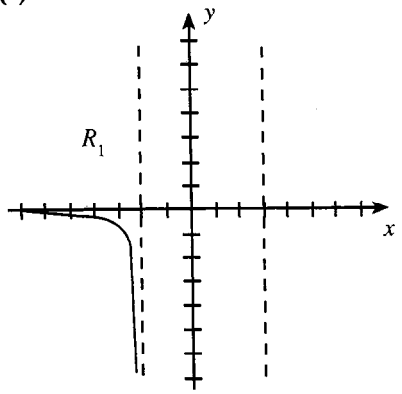
Regla 6 Las asíntotas verticales de la Fig. 4.22 dividen al plano xy en tres regiones:

R_1: la región a la izquierda de $x = -2$

R_2: la región entre $x = -2$ y $x = 3$

R_3: la región a la derecha de $x = 3$

FIGURA 4.23
(a)



Para R_1, se tiene que $x < -2$. Hay sólo dos posibilidades para la forma de la gráfica de f en R_1: cuando $x \to -\infty$, la gráfica se acerca al eje x por arriba o por abajo. Para determinar cuál es la elección correcta, examinaremos el *signo* de un valor representativo de la función en R_1. Se escoge $x = -10$, y se usa la forma factorizada de $f(x)$ para determinar el signo de $f(-10)$. Este proceso es semejante al empleado en la Secc. 2.7:

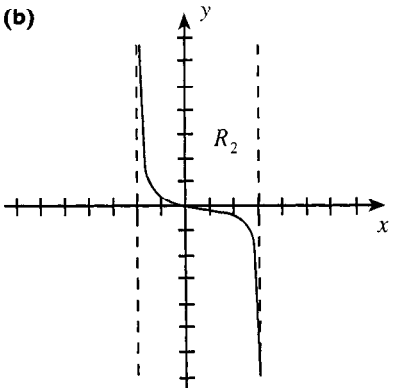
$$f(-10) = \frac{(-)}{(-)(-)} = -$$

El valor negativo de $f(-10)$ indica que la gráfica tiende a la asíntota horizontal, $y = 0$, por *abajo*, cuando $x \to -\infty$. Es más, cuando $x \to -2^-$, la gráfica se prolonga *hacia abajo*, es decir, $f(x) \to -\infty$. En la Fig. 4.23(a) se muestra un esquema de f en R_1.

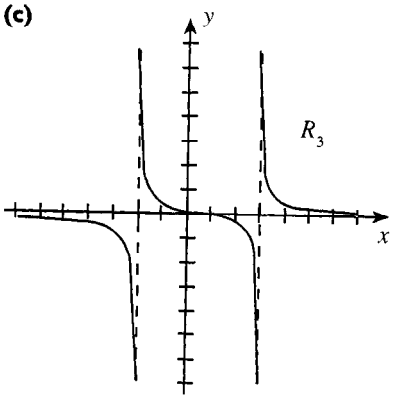
En R_2 se tiene $-2 < x < 3$, y la gráfica cruza al eje x en $x = 1$. Como por ejemplo, $f(0)$ es positiva, se concluye que la gráfica queda *sobre* el eje x si $-2 < x < 1$. Así, cuando $x \to -2^+$, la gráfica se prolonga *hacia arriba*, es decir, $f(x) \to \infty$. Como $f(2)$ es negativa, la gráfica queda *abajo* del eje x si $1 < x < 3$. Por consiguiente, cuando $x \to 3^-$, la gráfica se prolonga *hacia abajo*; es decir, $f(x) \to -\infty$. En la Fig. 4.23(b) se muestra un esquema de f en R_2.

FIGURA 4.23

(b)



(c)



Por último, en R_3, $x > 3$, y la gráfica no cruza al eje x. Ya que, por ejemplo, $f(10)$ es positiva, la gráfica queda *arriba* del eje x. En consecuencia, $f(x) \to \infty$ cuando $x - 3^-$, y la gráfica tiende a la asíntota horizontal $y = 0$ por *arriba*, cuando $x \to \infty$. En la Fig. 4.23(c) se ve la gráfica de f.

EJEMPLO 4 ***Trazo de la gráfica de una función racional***

Trazar la gráfica de f.

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x - 2}.$$

SOLUCIÓN Factorizando el denominador se obtiene

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x - 2} = \frac{x^2}{(x + 1)(x - 2)}.$$

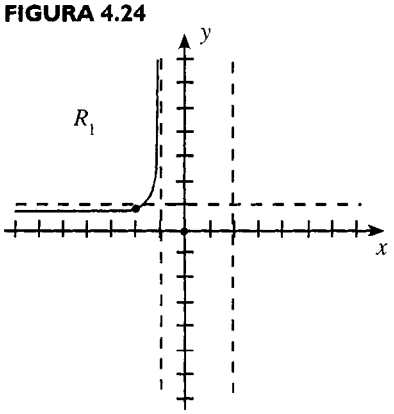
De nuevo se siguen las reglas.

Regla 1 Para determinar las abscisas en el origen se calculan los ceros del numerador. Haciendo $x^2 = 0$ se obtiene $x = 0$, y se grafica el punto (0, 0) como se ve en la Fig. 4.24.

Regla 2 El denominador tiene las raíces -1 y 2. Por consiguiente, las rectas $x = -1$ y $x = 2$ son asíntotas verticales, y se grafican con trazo discontinuo, como en la Fig. 4.24.

Regla 3 La ordenada al origen es $f(0) = 0$. Con esto se obtiene el mismo punto (0, 0) que encontramos en la regla 1.

FIGURA 4.24



Regla 4 El numerador y el denominador de $f(x)$ tienen el mismo grado, y ambos coeficientes iniciales son 1. Por lo tanto, según la parte (2) del teorema sobre asíntotas horizontales, la recta $y = \frac{1}{1} = 1$ es asíntota horizontal. Se traza con línea punteada, como en la Fig. 4.24.

Regla 5 Las abscisas de los puntos donde la gráfica interseca la asíntota horizontal $y = 1$ son soluciones de la ecuación $f(x) = 1$. Se resuelve esta ecuación como sigue:

$$\frac{x^2}{x^2 - x - 2} = 1 \qquad \text{sea } f(x) = 1$$

$$x^2 = x^2 - x - 2 \qquad \text{se multiplica por } x^2 - x - 2$$

$$x = -2 \qquad \text{se resta } x^2 \text{ y se suma } x$$

La ordenada del punto de intersección es $f(-2) = 1$, y se ubica el punto $(-2,1)$ en la asíntota horizontal, en la Fig. 4.24.

Regla 6 Las asíntotas verticales de la Fig. 4.24 dividen al plano xy en tres regiones:

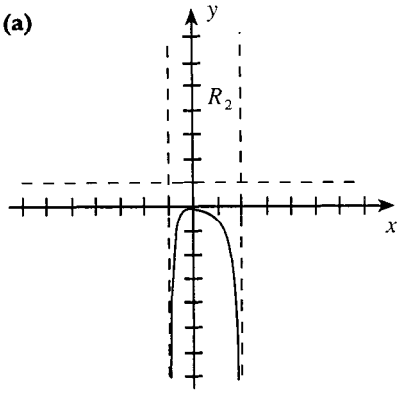
R_1: la región a la izquierda de $x = -1$

R_2: la región entre $x = -1$ y $x = 2$

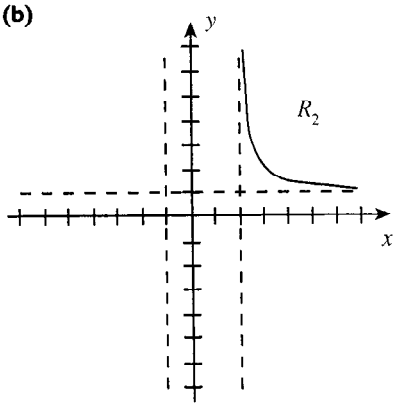
R_3: la región a la derecha de $x = 2$

FIGURA 4.25

(a)



(b)



(c)

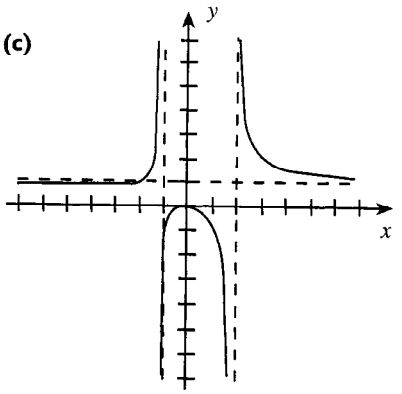
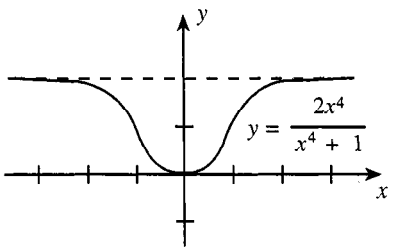


FIGURA 4.26



Para R_1, considérese primero la parte de la gráfica que corresponde a $-2 < x < -1$. A partir del punto $(-2,1)$ en la asíntota horizontal, la gráfica se debe prolongar *hacia arriba* cuando $x \to -1^-$ (no puede prolongarse hacia abajo ya que no hay abscisa en el origen entre $x = -2$ y $x = -1$). Cuando $x \to -\infty$, habrá un punto de mínimo en la gráfica entre $y = 0$ y $y = 1$ y, entonces, la gráfica tenderá a la asíntota horizontal $y = 1$ por *abajo*. Es difícil ver dónde está el punto de mínimo en la Fig. 4.24, porque los valores de la función están muy cercanos entre sí. Mediante Cálculo se puede demostrar que el punto de mínimo es $(-4, \frac{8}{9})$.

En R_2, se tiene que $-1 < x < 2$, y la gráfica interseca al eje x en $x = 0$. Como la función no cruza la asíntota horizontal en esta región, ya se sabe que la gráfica se prolonga *hacia abajo* cuando $x \to -1^+$, y cuando $x \to 2^-$, como se ve en la Fig. 4.25(a).

En R_3, la gráfica tiende a la asíntota horizontal $y = 1$, tanto por arriba como por abajo, cuando $x \to \infty$. Además, la gráfica debe prolongarse *hacia arriba* cuando $x \to 2^+$, porque no hay abscisas en el origen en R_3. Esto significa que, cuando $x \to \infty$, la gráfica tiende a la asíntota horizontal por *arriba*, como en la Fig. 4.25(b).

La Fig. 4.25(c) es la gráfica de f.

EJEMPLO 5 ***Trazo de la gráfica de una función racional***

Trazar la gráfica de f.

$$f(x) = \frac{2x^4}{x^4 + 1}.$$

SOLUCIÓN En esta solución no se indica formalmente cada regla o guía. Nótese que, como $f(-x) = f(x)$, la función es par y, por consiguiente, la gráfica es simétrica con respecto al eje y.

La gráfica interseca al eje x en $(0,0)$. Como el denominador de $f(x)$ no tiene cero real, la gráfica no tiene asíntota vertical.

El numerador y el denominador de $f(x)$ tienen el mismo grado. Como los coeficientes iniciales son 2 y 1, respectivamente, se ve, de la parte (2) del teorema sobre asíntotas horizontales, que la recta $y = \frac{2}{1} = 2$ es asíntota horizontal. Esta recta se representa con puntos, en la Fig. 4.26. La gráfica no cruza la asíntota horizontal $y = 2$, porque la ecuación $f(x) = 2$ no tiene solución real.

Al ubicar los puntos $(1, 1)$ y $(2, \frac{32}{17})$, aplicando la simetría, se llega al croquis de la Fig. 4.26.

Una **asíntota oblicua** de una gráfica es una recta $y = ax + b$, con $a \neq 0$, tal que la gráfica tiende a esa recta cuando $x \to -\infty$, o cuando $x \to \infty$. Si la gráfica es una recta, se considera que es su propia asíntota. Si la función racional $f(x) = g(x)/h(x)$ para los polinomios $g(x)$ y $h(x)$, y *si el grado de*

ESCUELA POLITÉCNICA

$g(x)$ es mayor que el grado de $h(x)$, entonces la gráfica de f tiene una asíntota oblicua. Para determinarla, se puede aplicar la división larga para expresar $f(x)$ en la forma

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = (ax + b) + \frac{r(x)}{h(x)},$$

en la cual $r(x) = 0$, o bien, el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $h(x)$. Según la parte (1) del teorema sobre asíntotas horizontales,

$$\frac{r(x)}{h(x)} \to 0 \quad \text{cuando } x \to \infty \text{ o cuando } x \to -\infty.$$

En consecuencia, $f(x)$ tiende a la recta $y = ax + b$ a medida que x aumenta o disminuye sin límite; es decir, $y = ax + b$ es una asíntota oblicua.

EJEMPLO 6 *Determinación de una asíntota oblicua*

Determinar todas las asíntotas y trazar la gráfica de f

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{2x - 4}.$$

SOLUCIÓN Se tiene una asíntota vertical si $2x - 4 = 0$, o sea, si $x = 2$.

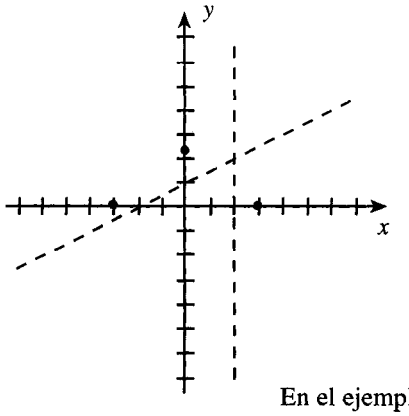
El grado del numerador de $f(x)$ es mayor que el del denominador. Por tanto, de acuerdo con la parte (3) del teorema sobre asíntotas horizontales, no hay asíntota horizontal. Sin embargo, como el grado del numerador $x^2 - 9$ es mayor que el grado del denominador, $2x - 4$, aumentado en *uno*, la gráfica tiene asíntota oblicua. Por división larga se obtiene

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}x + 1 \\ 2x - 4 \overline{)\, x^2 \quad\quad - 9} \\ \underline{x^2 - 2x} \\ 2x - 9 \\ \underline{2x - 4} \\ -5 \end{array}$$

Por lo tanto,

$$\frac{x^2 - 9}{2x - 4} = \left(\frac{1}{2}x + 1\right) - \frac{5}{2x - 4}.$$

FIGURA 4.27



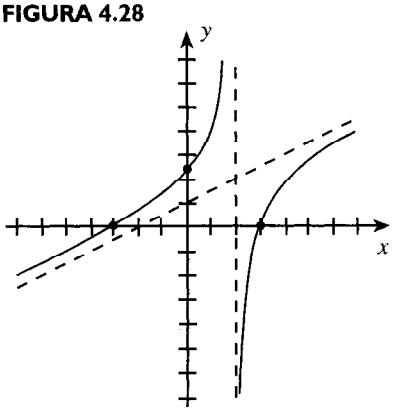
Como se indicó en la explicación anterior a este ejemplo, la recta $y = \frac{1}{2}x + 1$ es asíntota oblicua. Esta recta y la asíntota vertical $x = 2$ aparecen con líneas discontinuas en la Fig. 4.27.

Las abscisas en el origen de la gráfica son las soluciones de la ecuación $x^2 - 9 = 0$ y, por consiguiente, son 3 y -3. La ordenada en el origen es $f(0) = \frac{9}{4}$. En la Fig. 4.27 se grafican los puntos correspondientes. Ahora se puede ver que la gráfica tiene la forma indicada en la Fig. 4.28.

En el ejemplo anterior, la gráfica de f tiende a la recta $y = \frac{1}{2}x + 1$, *asintóticamente* cuando $x \to \infty$ o cuando $x \to -\infty$. Las gráficas de funciones racionales pueden tender a distintos tipos de curvas, en forma asintótica. Por ejemplo, si

$$f(x) = \frac{x^4 - x}{x^2} = x^2 - \frac{1}{x},$$

FIGURA 4.28



entonces, para valores grandes de $|x|$, $1/x \approx 0$ por tanto $f(x) \approx x^2$. Así, la gráfica de f tiende a la parábola $y = x^2$, en forma asintótica, cuando $x \to \infty$ o cuando $x \to -\infty$. En general, si $f(x) = g(x)/h(x)$, y si $q(x)$ es el cociente obtenido dividiendo $g(x)$ entre $h(x)$, entonces la gráfica de f tiende a la gráfica de $y = q(x)$ asintóticamente, cuando $x \to \infty$, o cuando $x \to -\infty$.

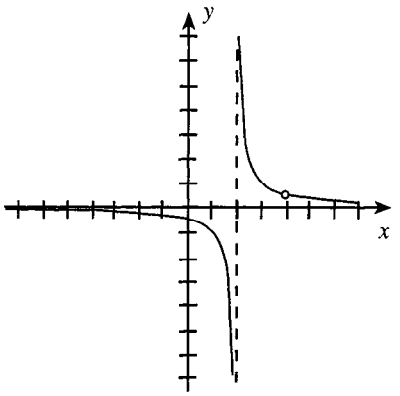
En las indicaciones para trazar la gráfica de una función racional, se supuso que el numerador y el denominador no tienen factor primo común. Si *existe* ese factor común, entonces puede haber un *agujero* en la gráfica, es decir, puede faltar un solo punto, como se ve en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 7 ***Gráfica con un agujero***

Trazar la gráfica de f.

$$f(x) = \frac{x-4}{(x-2)(x-4)}.$$

FIGURA 4.29



SOLUCIÓN Si $x \neq 4$, se cancela el factor $x - 4$, o sea,

$$f(x) = \frac{1}{x-2}, \quad \text{si } x \neq 4.$$

Así, la gráfica de f es la misma que se trazó en la Fig. 4.21, con una excepción: hay un agujero en la gráfica en $x = 4$. Para determinar el valor correspondiente de y, se usa la forma reducida de la función, con lo que se obtiene $f(4) = 1/(4-2) = \frac{1}{2}$. El punto $(4, \frac{1}{2})$ está indicado por el pequeño círculo de la Fig. 4.29. Se debe hacer notar que las calculadoras con medio graficador, o programas de computacionales para gráficos, podrán no indicar esta particularidad de la gráfica.

Las gráficas de las funciones racionales pueden complicarse mucho a medida que aumentan los grados de los polinomios de numerador y denominador. Se deben utilizar técnicas avanzadas de Cálculo, para tener un tratamiento completo de esas gráficas.

Las fórmulas que representan cantidades físicas pueden determinar funciones racionales. Por ejemplo, está la ley de Ohm en electricidad, la cual establece que $I = V/R$, donde R es la resistencia, en ohms (Ω), de un conductor; V la diferencia de potencial, en volts (V), a través del conductor, e I la corriente, en amperes (A), que pasa por el mismo. La resistencia de ciertas aleaciones tiende a cero a medida que la temperatura se acerca al cero absoluto, –273 °C, y la aleación se hace *superconductora* de electricidad. Si está fija la diferencia de potencial, V, entonces, para ese superconductor,

$$I = \frac{V}{R} \to \infty \quad \text{cuando } R \to 0^+;$$

es decir, cuando R tiende a 0, la corriente aumenta sin límite. Los superconductores permiten el paso de grandes corrientes en las plantas de generación y en motores. También tienen aplicaciones en transporte terrestre experimental de alta velocidad, en el cual se producen fuertes campos magnéticos mediante imanes de superconductores que permiten levitar los trenes, para que prácticamente no haya fricción entre las ruedas y la vía. Quizá el uso más importante de los superconductores es en los circuitos de las computadoras; con ellos se produce muy poco calor.

EJERCICIOS 4.5

Ejercicios 1 y 2: (a) Trace la gráfica de f. (b) Determine el dominio, D, y el contradominio, R, de f. (c) Halle los intervalos en los cuales f es creciente o decreciente.

1 $f(x) = \dfrac{4}{x}$ **2** $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Ejercicios 3 – 24: Trace la gráfica de f.

3 $f(x) = \dfrac{3}{x-4}$ **4** $f(x) = \dfrac{-3}{x+3}$

5 $f(x) = \dfrac{-3x}{x+2}$ **6** $f(x) = \dfrac{4x}{2x-5}$

7 $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-x-6}$ **8** $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x-3}$

9 $f(x) = \dfrac{-4}{(x-2)^2}$ **10** $f(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$

11 $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-1}$ **12** $f(x) = \dfrac{x+4}{x^2-4}$

13 $f(x) = \dfrac{2x^2-2x-4}{x^2+x-12}$ **14** $f(x) = \dfrac{-3x^2-3x+6}{x^2-9}$

15 $f(x) = \dfrac{-x^2-x+6}{x^2+3x-4}$ **16** $f(x) = \dfrac{x^2-3x-4}{x^2+x-6}$

17 $f(x) = \dfrac{3x^2-3x-36}{x^2+x-2}$ **18** $f(x) = \dfrac{2x^2+4x-48}{x^2+3x-10}$

19 $f(x) = \dfrac{-2x^2+10x-12}{x^2+x}$ **20** $f(x) = \dfrac{2x^2+8x+6}{x^2-2x}$

21 $f(x) = \dfrac{x-1}{x^3-4x}$ **22** $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x^3-9x}$

23 $f(x) = \dfrac{-3x^2}{x^2+1}$ **24** $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+1}$

Ejercicios 25 – 28: Determine la asíntota oblicua y trace la gráfica de f.

25 $f(x) = \dfrac{x^2-x-6}{x+1}$ **26** $f(x) = \dfrac{2x^2-x-3}{x-2}$

27 $f(x) = \dfrac{8-x^3}{2x^2}$ **28** $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2-9}$

Ejercicios 29 – 34: Simplifique $f(x)$ y trace la gráfica de f.

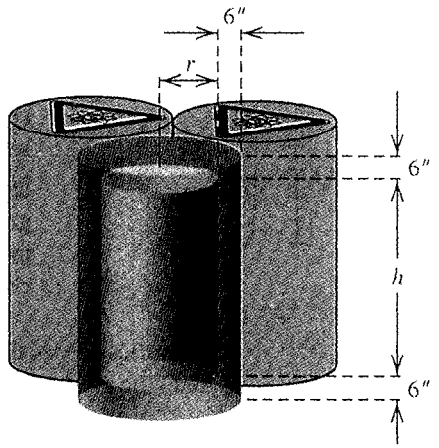
29 $f(x) = \dfrac{2x^2+x-6}{x^2+3x+2}$ **30** $f(x) = \dfrac{x^2-x-6}{x^2-2x-3}$

31 $f(x) = \dfrac{x-1}{1-x^2}$ **32** $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-4}$

33 $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x+2}$ **34** $f(x) = \dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x-2}$

35 ***Recipiente para desechos radiactivos*** Se construirá con plomo un recipiente cilíndrico para almacenar desechos radiactivos. Este recipiente debe tener 6 pulg de espesor. El volumen del cilindro exterior, que se ve en la figura, debe tener 16π pies^3.

(a) Exprese la altura, h, del cilindro interior, en función del radio interior, r.



(b) Demuestre que el volumen interior, $V(r)$, está expresado por

$$V(r) = \pi r^2\left[\frac{16}{(r+0.5)^2} - 1\right].$$

(c) ¿Qué valores de r se deben excluir en la parte (b)?

36 ***Dosis de medicamentos*** La regla de Young es una fórmula que se usa para modificar las dosis de adultos, a fin de adaptarlas a niños. Si a representa la dosis de adulto, en miligramos, y t es la edad del niño en años, entonces, la dosis del niño y, es $y = ta/(t+12)$. Trace la gráfica de esta ecuación, para $t > 0$ y $a = 100$.

37 ***Concentración de sal*** Agua salada cuya concentración es 0.1 lb de sal por galón, pasa a un gran depósito que contiene al principio 50 gal de agua pura.

(a) Si el flujo de agua salada al tanque es 5 gal/min, calcule el volumen $V(t)$ de agua y la cantidad de sal $A(t)$ en el depósito a los t minutos.

(b) Deduzca una fórmula para la concentración de sal, $c(t)$, en lb/gal, después de t minutos.

(c) Analice la variación de $c(t)$ cuando $t \to \infty$.

38 ***Cantidad de precipitación pluvial*** El número total de pulgadas de lluvia, $R(t)$, durante una tempestad que dura t horas, se puede aproximar mediante

$$R(t) = \frac{at}{t + b},$$

donde a y b son constantes positivas que dependen del lugar geográfico.

(a) Analice la variación de $R(t)$ cuando $t \to \infty$.

(b) La intensidad I de la lluvia, en pulg/h, se define mediante $I = R(t)/t$. Si $a = 2$ y $b = 8$, trace la gráfica de R e I en el mismo plano de coordenadas, para $t > 0$.

C **Ejercicios 39 – 42: Grafique f.**

39 $f(x) = \dfrac{20x^2 + 80x + 72}{10x^2 + 40x + 41}$

40 $f(x) = \dfrac{15x^2 - 60x + 68}{3x^2 - 12x + 13}$

41 $f(x) = \dfrac{(x - 1)^2}{(x - 0.999)^2}$

42 $f(x) = \dfrac{x^2 - 9.01}{x - 3}$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 4

Ejercicios 1 – 6: Determine todos los valores de x tales que $f(x) > 0$, y todos los valores de x tales que $f(x) < 0$, luego trace la gráfica de f.

1 $f(x) = (x + 2)^3$

2 $f(x) = x^6 - 32$

3 $f(x) = -\frac{1}{4}(x + 2)(x - 1)^2(x - 3)$

4 $f(x) = 2x^2 + x^3 - x^4$

5 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x$

6 $f(x) = \frac{1}{15}(x^5 - 20x^3 + 64x)$

7 Si $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 9$, use el teorema del valor intermedio para funciones polinomiales y demuestre que hay un número real a tal que $f(a) = 100$.

8 Demuestre que la ecuación $x^5 - 3x^4 - 2x^3 - x + 1 = 0$ tiene una solución entre 0 y 1.

Ejercicios 9 y 10: Determine el cociente y el residuo, cuando $f(x)$ se divide entre $p(x)$.

9 $f(x) = 3x^5 - 4x^3 + x + 5$; $p(x) = x^3 - 2x + 7$

10 $f(x) = 4x^3 - x^2 + 2x - 1$; $p(x) = x^2$

11 Si $f(x) = -4x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 7x - 10$, use el teorema del residuo para calcular $f(-2)$.

12 Con el teorema del factor demuestre que $x - 3$ es factor de $f(x) = 2x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 9$.

Ejercicios 13 y 14: Utilice la división sintética para determinar el cociente y el residuo cuando se divide $f(x)$ entre $p(x)$.

13 $f(x) = 6x^5 - 4x^2 + 8$; $p(x) = x + 2$

14 $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 2x + 1$; $p(x) = x - \sqrt{2}$

Ejercicios 15 y 16: Un polinomio, $f(x)$, con coeficientes reales, tiene el o los ceros así como el grado, indicados, y satisface la condición dada. Exprese $f(x)$ como producto de polinomios lineales y cuadráticos con coeficientes reales, que sean irreducibles en $\mathbb{R}$.

15 $-3 + 5i, -1$; grado 3; $f(1) = 4$

16 $1 - i, 3, 0$; grado 4; $f(2) = -1$

17 Deduzca un polinomio, $f(x)$, de grado 7 con coeficiente inicial 1, tal que -3 sea cero de multiplicidad 2, y 0 sea cero de multiplicidad 5; y trace la gráfica de f.

18 Demuestre que 2 es un cero o raíz de multiplicidad 3 del polinomio $f(x) = x^5 - 4x^4 - 3x^3 + 34x^2 - 52x + 24$, y exprese $f(x)$ como producto de factores lineales.

Ejercicios 19 y 20: Determine los ceros de $f(x)$ y la multiplicidad de cada cero.

19 $f(x) = (x^2 - 2x + 1)^2(x^2 + 2x - 3)$

20 $f(x) = x^6 + 2x^4 + x^2$

Ejercicios 21 y 22: (a) Con la regla de Descartes de los signos, determine el número de soluciones posibles positivas, negativas y complejas no reales de la ecuación. (b) Calcule los enteros mínimo y máximo que sean cotas superior e inferior, respectivamente, de las soluciones reales de la ecuación.

21 $2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 5x - 7 = 0$

22 $x^5 - 4x^3 + 6x^2 + x + 4 = 0$

23 Demuestre que $7x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 10$ no tiene cero real.

Ejercicios 24 – 26: Calcule todas las soluciones de la ecuación.

24 $x^4 + 9x^3 + 31x^2 + 49x + 30 = 0$

25 $16x^3 - 20x^2 - 8x + 3 = 0$

26 $x^4 - 7x^2 + 6 = 0$

Ejercicios 27 – 36: Trace la gráfica de f.

27 $f(x) = \dfrac{-2}{(x+1)^2}$ **28** $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^3}$

29 $f(x) = \dfrac{3x^2}{16 - x^2}$

30 $f(x) = \dfrac{x}{(x+5)(x^2 - 5x + 4)}$

31 $f(x) = \dfrac{-3x^2}{x^2 + 1}$ **32** $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$

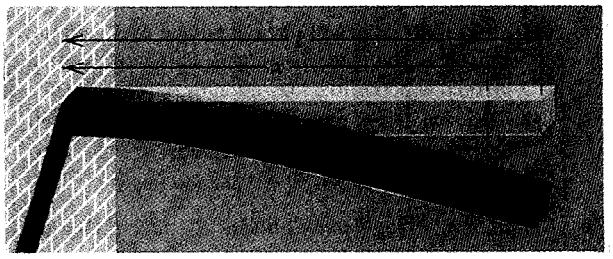
33 $f(x) = \dfrac{3x^2 + x - 10}{x^2 + 2x}$ **34** $f(x) = \dfrac{-2x^2 - 8x - 6}{x^2 - 6x + 8}$

35 $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x + 3}$ **36** $f(x) = \dfrac{x^4 - 16}{x^3}$

37 ***Deflexión de una viga*** Una viga horizontal tiene l pies de longitud, y está sostenida en un extremo y libre en el otro (véase la figura). Si la viga está sujeta a una carga uniforme, y si y representa la deflexión de la viga a una distancia de x pies del extremo empotrado, se puede demostrar que $y = cx^2(x^2 - 4lx + 6l^2)$, donde c es una constante positiva que depende de la carga y de las propiedades físicas de la viga.

(a) La viga tiene 10 pies de largo y la deflexión en el extremo libre es 2 pies; calcule c.

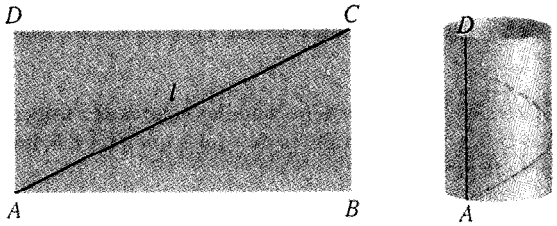
(b) Demuestre que la deflexión es de 1 pie en algún lugar entre $x = 6.1$ y $x = 6.2$.



38 ***Cilindro elástico*** Se desea enrollar un rectángulo de material elástico en forma de cilindro, uniendo la orilla AD con la BC, como se ve en la figura. A lo largo de la diagonal del rectángulo, se tiende un alambre de longitud fija, l, para reforzar la estructura. Sea x la altura del cilindro.

(a) Exprese el volumen del cilindro, V, en términos de x.

(b) ¿Para qué valores positivos de x es $V > 0$?



39 ***Cálculo de temperaturas*** Un meteorólogo determinó que la temperatura T, en °F, durante cierto periodo de 24 horas en invierno era $T = \frac{1}{20}t(t - 12)(t - 24)$ para $0 \le t \le 24$, siendo t el tiempo en horas; y $t = 0$ corresponde a las 6 A.M. ¿A qué hora(s) la temperatura fue 32°F?

40 ***Aumento de la población de venados*** Un rebaño de 100 venados se lleva a una isla pequeña. Suponiendo que el número $N(t)$, de ellos, después de t años, resulta ser $N(t) = -t^4 + 21t^2 + 100$, para $t > 0$, calcule cuándo el tamaño del rebaño es mayor que 180.

41 ***Curva de respuesta límite o umbral*** En bioquímica, la curva general de respuesta umbral es la gráfica de una ecuación

$$R = \frac{kS^n}{S^n + a^n},$$

en la cual R es la respuesta química a una sustancia cuando la concentración de ésta es S; a, k y n son constantes positivas. Un ejemplo es la tasa R, de eliminación de alcohol de la sangre, por parte del hígado, cuando la concentración de alcohol en la misma es S.

(a) Deduzca una ecuación para la asíntota horizontal de la gráfica.

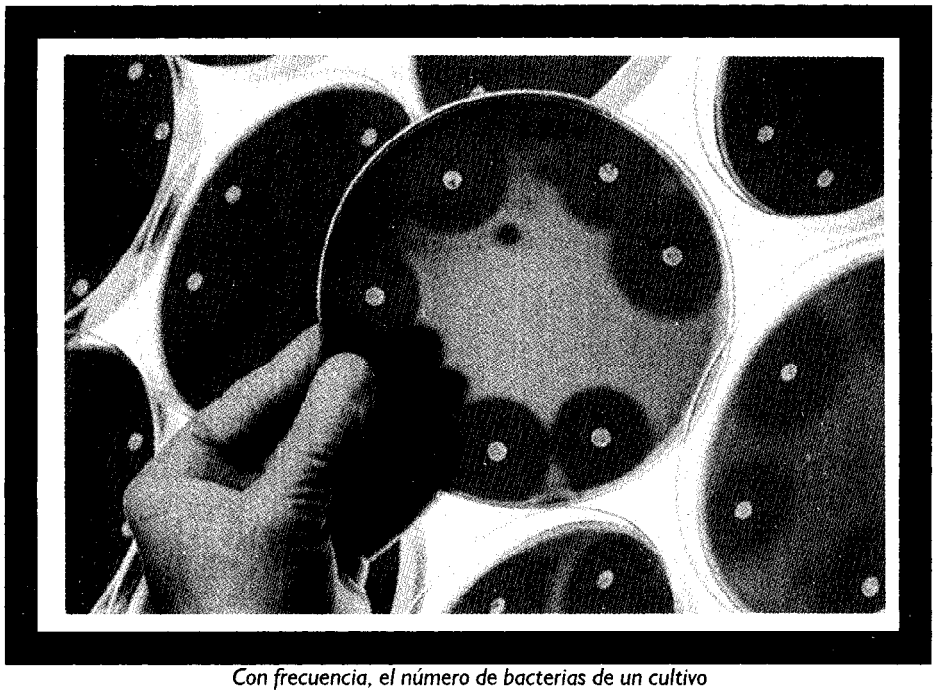
(b) En el caso de la eliminación de alcohol, $n = 1$ y un valor normal de k es 0.22 gramos por litro por minuto. ¿Cuál es la interpretación de k en este caso?

42 ***Limpieza de derrame de petróleo crudo*** El costo, $C(x)$, de limpiar x porcentaje de un derrame de petróleo crudo que ha llegado a la playa, aumenta mucho cuando x tiende a 100. Suponga que

$$C(x) = \frac{20x}{101 - x} \text{ (miles de dólares).}$$

(a) Compare $C(100)$ con $C(90)$.

(b) Trace la gráfica de C para $0 < x < 100$.



Con frecuencia, el número de bacterias de un cultivo aumenta en forma exponencial.

5.1	**FUNCIONES EXPONENCIALES**
5.2	**LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL**
5.3	**FUNCIONES LOGARÍTMICAS**
5.4	**PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS**
5.5	**ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS**

CAPÍTULO 5

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

■ *Las funciones exponenciales y logarítmicas son del tipo trascendente, porque no se pueden definir sólo en términos de suma, resta, multiplicación, división y elevación a potencias racionales de una variable x, como fue el caso de las funciones algebraicas estudiadas en capítulos anteriores. Estas funciones son de gran importancia en matemáticas y tienen aplicaciones en casi cualquier campo de la investigación humana. Son especialmente útiles en los campos de química, biología, física e ingeniería, donde ayudan a explicar la manera en la cual aumentan o disminuyen las cantidades en la naturaleza. En este capítulo se estudia una relación especial entre funciones específicas exponenciales y logarítmicas: son inversas entre sí.* ■

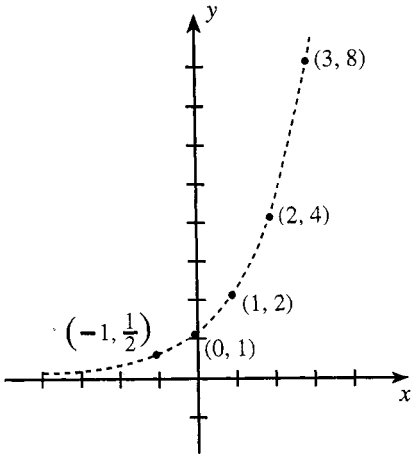
5.1 FUNCIONES EXPONENCIALES

Sea la función f, definida por

$$f(x) = 2^x,$$

en la cual x se limita a los números *racionales*. [Recuérdese que si $x = m/n$ para enteros m y n, donde $n > 0$, entonces $2^x = 2^{m/n} = (\sqrt[n]{2})^m$.] En la tabla siguiente aparecen coordenadas de algunos puntos de la gráfica de $y = 2^x$.

FIGURA 5.1



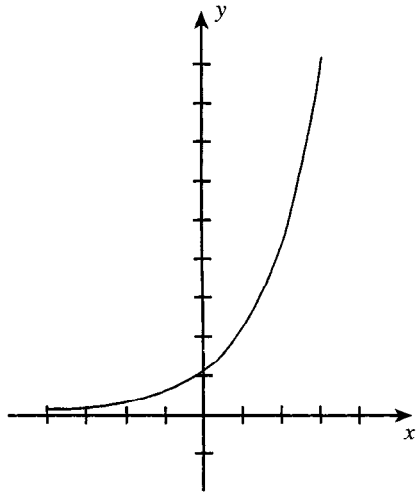
x	−10	−3	−2	−1	0	1	2	3	10
$y = 2^x$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	1024

Con una calculadora se aproximan otros valores de y para x racional, como $2^{1/3}$, $2^{-9/7}$ y $2^{5.143}$. Se demostrará algebraicamente que si x_1 y x_2 son números racionales tales que $x_1 < x_2$, entonces $2^{x_1} < 2^{x_2}$. Así, f es una función creciente y su gráfica asciende. Al ubicar los puntos se obtiene la Fig. 5.1, en la cual los puntos pequeños indican que sólo están en ella los puntos con abscisas *racionales*. Hay un *hueco*, o *agujero*, en la gráfica, siempre que la abscisa de un punto es irracional.

Para extender el dominio de f a todos los números reales, es necesario definir 2^x para todo exponente x *irracional*. Como ilustración, si se desea definir 2^π, se podría usar el número decimal inconmensurable (no terminante) 3.1415926... en lugar de π, y tener en cuenta las siguientes potencias *racionales* de 2:

$$2^3,\quad 2^{3.1},\quad 2^{3.14},\quad 2^{3.141},\quad 2^{3.1415},\quad 2^{3.14159},\quad \ldots$$

FIGURA 5.2

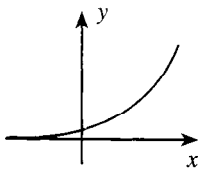
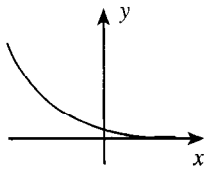


Se demuestra, mediante Cálculo, que cada potencia sucesiva se acerca a un número real único, representado por 2^π. Así,

$$2^x \to 2^\pi \quad \text{cuando} \quad x \to \pi \qquad \text{para} \quad x \text{ es racional.}$$

La misma técnica puede utilizarse con cualquier otra potencia irracional de 2. Para trazar la gráfica de $y = 2^x$ donde x es *real*, se remplazan con puntos los agujeros en la gráfica de la Fig. 5.1, y se obtiene la gráfica de la Fig. 5.2. La función f, definida mediante $f(x) = 2^x$ para todo número real x, se llama *función exponencial con base* 2.

A continuación, sea *cualquier* base a, donde a es un número positivo real distinto de 1. Como en la explicación anterior, a cada número real, x, corresponde exactamente un número positivo, a^x, tal que se cumplen las leyes de los exponentes. Por tanto, como en la tabla siguiente, puede definirse una función f, con dominio $\mathbb{R}$ y como contradominio el conjunto de los números reales positivos.

Terminología	Definición	Gráfica de f para $a > 1$	Gráfica de f para $0 < a < 1$
Función exponencial, f, con base a	$f(x) = a^x$ para toda x en $\mathbb{R}$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$		

Las gráficas de la tabla ilustran que si $a > 1$, entonces f es creciente en $\mathbb{R}$, y si $0 < a < 1$, f es decreciente en $\mathbb{R}$. (Esto se puede demostrar mediante Cálculo.) Las gráficas sólo indican la apariencia *general*; la forma *exacta* depende del valor de a. Sin embargo, nótese que como $a^0 = 1$, la ordenada en el origen es 1 para toda a.

Si $a > 1$, entonces, al *decrecer* x a través de los números negativos, la gráfica de f tiende al eje x (véase la tercera columna de la tabla). Así, el eje x es *asíntota horizontal*. Al incrementar x a través de los valores positivos, la gráfica asciende rápidamente. Este tipo de variación es característico de la **ley de crecimiento exponencial** y, a veces, se designa a f **función de crecimiento**.

Si $0 < a < 1$, entonces, al *aumentar* x, la gráfica de f tiende asintóticamente al eje x (véase la última columna de la tabla). Este tipo de variación se llama **decrecimiento exponencial.**

Al considerar a^x se excluyen los casos $a \leq 0$ y $a = 1$. Nótese que si $a < 0$, entonces a^x no es un número real para muchos valores de x, como por ejemplo, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ y $\frac{11}{6}$. Si $a = 0$, entonces $a^0 = 0^0$ es indefinido. Por último, si $a = 1$, entonces $a^x = 1$ para toda x, y la gráfica de $y = a^x$ es una recta horizontal.

La gráfica de una función exponencial f es creciente o decreciente en su dominio. Así, f es biunívoca según el teorema de la página 196. Combinando este resultado con la definición de una función biunívoca (véase pág. 195) se obtienen las partes (1) y (2) del teorema siguiente:

Teorema: Las funciones exponenciales son biunívocas

La función exponencial f expresada por

$$f(x) = a^x \quad \text{para} \quad 0 < a < 1, \quad \text{o bien} \quad a > 1$$

es biunívoca. De modo que, las condiciones equivalentes que siguen se satisfacen para números reales x_1 y x_2:

(1) Si $x_1 \neq x_2$, entonces $a^{x_1} \neq a^{x_2}$

(2) Si $a^{x_1} = a^{x_2}$, entonces $x_1 = x_2$.

Al aplicar este teorema como razón para una etapa en la solución de un ejemplo, se dice que *las funciones exponenciales son biunívocas.*

EJEMPLO ILUSTRATIVO

Las funciones exponenciales son biunívocas

❑ Si $7^{3x} = 7^{2x+5}$, entonces $3x = 2x + 5$, o sea, $x = 5$.

En el siguiente ejemplo se resuelve una *ecuación exponencial* sencilla, es decir, una ecuación en la cual la variable aparece en un exponente.

POLITE

EJEMPLO 1 ***Solución de una ecuación exponencial***

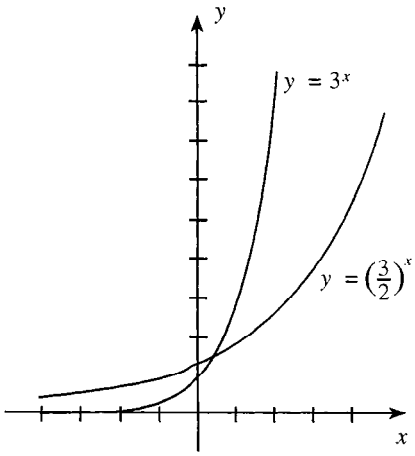
Resolver la ecuación $3^{5x-8} = 9^{x+2}$.

SOLUCIÓN

$3^{5x-8} = 9^{x+2}$	ecuación dada
$3^{5x-8} = (3^2)^{x+2}$	se expresan ambos miembros con la misma base
$3^{5x-8} = 3^{2x+4}$	ley de los exponentes
$5x - 8 = 2x + 4$	las funciones exponenciales son biunívocas
$3x = 12$	se resta $2x$ y se suma 8
$x = 4$	se divide entre 3

En los dos ejemplos que siguen se harán las gráficas de algunas funciones exponenciales.

FIGURA 5.3



EJEMPLO 2 ***Gráficas de funciones exponenciales***

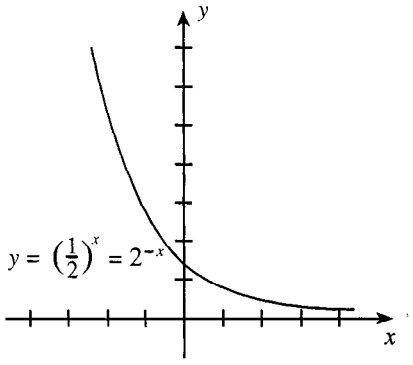
Si $f(x) = (\frac{3}{2})^x$ y $g(x) = 3^x$, trazar las gráficas de f y g en el mismo plano coordenado.

SOLUCIÓN Como $\frac{3}{2} > 1$ y $3 > 1$, cada gráfica *asciende* al aumentar x. La tabla siguiente presenta las coordenadas de varios puntos en esas gráficas.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$	$\frac{4}{9} \approx 0.4$	$\frac{2}{3} \approx 0.7$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4} \approx 2.3$	$\frac{27}{8} \approx 3.4$	$\frac{81}{16} \approx 5.1$
$y = 3^x$	$\frac{1}{9} \approx 0.1$	$\frac{1}{3} \approx 0.3$	1	3	9	27	81

Al graficar los puntos, y por estar familiarizados con la gráfica general de $y = a^x$, se obtienen las gráficas de la Fig. 5.3.

FIGURA 5.4



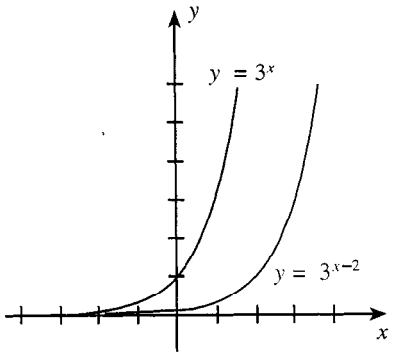
En el Ejemplo 2 se demuestra que si $1 < a < b$, entonces $a^x < b^x$ para valores positivos de x, y $b^x < a^x$ para valores negativos de x. En especial, como $\frac{3}{2} < 2 < 3$, la gráfica de $y = 2^x$ en la Fig. 5.1 queda entre las gráficas de f y g de la Fig 5.3.

EJEMPLO 3 ***Trazo de la gráfica de una función exponencial***

Trazar la gráfica de la ecuación $y = (\frac{1}{2})^x$.

(continúa)

FIGURA 5.5



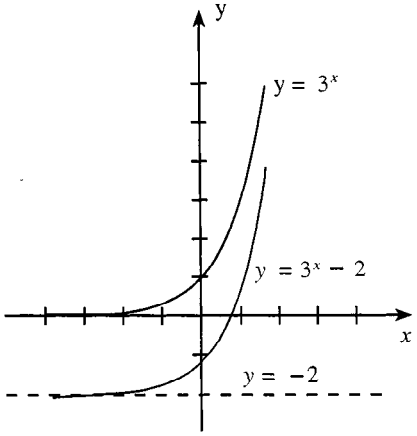
SOLUCIÓN Como $0 < \frac{1}{2} < 1$, la gráfica *decrece* al aumentar x. En la siguiente tabla se presentan las coordenadas de algunos puntos de la gráfica.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$y = (\frac{1}{2})^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

La Fig. 5.4 presenta la gráfica. Como $(\frac{1}{2})^x = 2^{-x}$, la gráfica es la misma que la de la ecuación $y = 2^{-x}$. Nótese que la gráfica es una reflexión de la de $y = 2^x$, en la Fig. 5.2, con respecto al eje y.

Las ecuaciones de la forma $y = a^u$, donde u es una expresión en x, se manejan en aplicaciones. Los dos ejemplos que siguen muestran ecuaciones de esta forma.

FIGURA 5.6



EJEMPLO 4 ***Traslación de gráficas de funciones exponenciales***

Graficar la ecuación:

(a) $y = 3^{x-2}$ **(b)** $y = 3^x - 2$

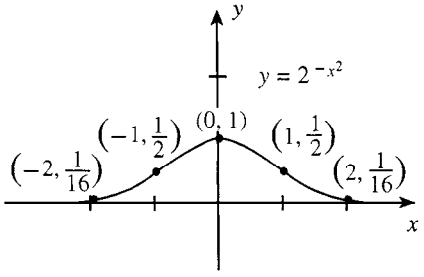
SOLUCIÓN

(a) La gráfica de $y = 3^x$ se tiene en la Fig. 5.3 y se vuelve a presentar en la Fig. 5.5. Según el estudio de las traslaciones (o desplazamientos) horizontales, en la Secc. 3.5, se obtiene la gráfica de $y = 3^{x-2}$ desplazando la de $y = 3^x$ dos unidades a la derecha, como se ve en la Fig. 5.5.

La gráfica de $y = 3^{x-2}$ también se puede obtener localizando algunos puntos y utilizándolos como guía para trazar una curva tipo exponencial.

(b) De acuerdo con el análisis de las traslaciones verticales en la Secc. 3.5, se puede obtener la gráfica de $y = 3^x - 2$ desplazando dos unidades hacia abajo la gráfica de $y = 3^x$, como se ve en la Fig. 5.6. Nótese que la ordenada en el origen es −1 y la recta $y = -2$ es asíntota horizontal de la gráfica.

FIGURA 5.7



La gráfica acampanada de la función del ejemplo que sigue es semejante a la *curva de probabilidad normal* de los estudios estadísticos.

EJEMPLO 5 ***Trazo de una gráfica acampanada***

Si $f(x) = 2^{-x^2}$, graficar f.

SOLUCIÓN Si se expresa $f(x)$ en la siguiente forma

$$f(x) = \frac{1}{2^{(x^2)}}$$

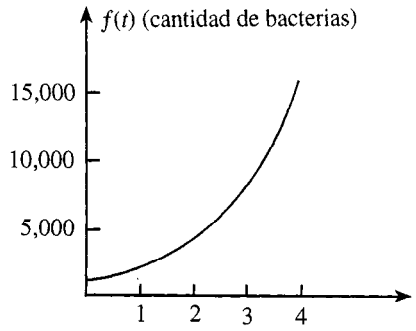
se ve que a medida que aumenta x en valores positivos, $f(x)$ decrece con rapidez, y por consiguiente, la gráfica tiende asintóticamente al eje x. El valor máximo de f es $f(0) = 1$. Como f es función par, la gráfica es simétrica con respecto al eje y. Algunos de los puntos de la gráfica son $(0,1)$, $(1, \frac{1}{2})$ y $(2, \frac{1}{16})$. Al graficar mediante la simetría, se obtiene el croquis de la Fig. 5.7.

APLICACIÓN

Crecimiento bacteriano

Se pueden utilizar funciones exponenciales para representar el crecimiento de algunas poblaciones. Por ejemplo, supóngase que se observa experimentalmente que el número de bacterias en un cultivo se duplica cada día. Si al comienzo hay 1 000 bacterias, entonces se tiene la siguiente tabla, en la cual t es tiempo, en días, y $f(t)$ es la cantidad de bacterias cuando el tiempo es t.

FIGURA 5.8



t (tiempo en días)	0	1	2	3	4
$f(t)$ (cantidad de bacterias)	1 000	2 000	4 000	8 000	16 000

Resulta que $f(t) = (1\,000)2^t$. Con esta fórmula se predice la cantidad de bacterias presentes en cualquier momento, t. Por ejemplo, cuando $t = 1.5 = \frac{3}{2}$,

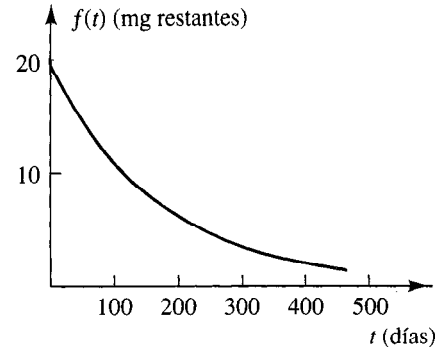
$$f(t) = (1000)2^{3/2} \approx 2828.$$

En la Fig. 5.8 aparece la gráfica de f.

APLICACIÓN

Desintegración radiactiva

FIGURA 5.9



Algunas cantidades físicas *decrecen* en forma exponencial. En esos casos, si a es la base de la función exponencial, entonces $0 < a < 1$. Uno de los ejemplos más comunes del decrecimiento exponencial es la desintegración de una sustancia radiactiva. La **semivida** (o "vida media") de un isótopo radiactivo es el tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de la cantidad original en una muestra dada. La semivida es la característica principal que se usa para diferenciar una sustancia radiactiva de otra. El isótopo del polonio ^{210}Po tiene una semivida aproximada de 140 días, es decir, dada cualquier cantidad, la mitad de ella se desintegrará en 140 días. Si hay al principio 20 mg de ^{210}Po, entonces la siguiente tabla indica la cantidad que queda después de cierto tiempo.

t (tiempo en días)	0	140	280	420	560
$f(t)$ (mg restantes)	20	10	5	2.5	1.25

La Fig. 5.9 muestra la naturaleza exponencial de la desintegración.

Otras sustancias radiactivas tienen semividas mucho más largas. En especial, un subproducto de los reactores nucleares es el isótopo radiactivo del plutonio, ^{239}Pu, cuya semivida aproximada es 24 000 años. Este es el motivo por el cual el destino de los desechos radiactivos es un gran problema de la sociedad moderna.

APLICACIÓN

Interés compuesto

El *interés compuesto* es buen ejemplo del crecimiento exponencial. Si una suma de dinero P, llamada *monto principal* o *principal* (capital inicial), se invierte a una tasa de *interés simple* r, entonces el interés al final de un periodo de interés (o de capitalización) es el producto Pr, donde r está expresada como decimal (véase pág. 61). Por ejemplo, si $P = \$1\,000$ y el *tipo* de interés es 9% anual, entonces $r = 0.09$, y el interés al final de un año es $\$1\,000(0.09)$, o sea $90.

Si se reinvierte el interés junto al principal al final del periodo, entonces el nuevo principal es

$$P + Pr, \qquad \text{o bien} \qquad P(1 + r).$$

Nótese que para calcular el nuevo principal se multiplica el original por $(1 + r)$. En este ejemplo, el nuevo principal es $\$1\,000(1.09)$, o sea, $1 090.

Después de otro periodo de interés, el nuevo principal se puede calcular multiplicando $P(1 + r)$ por $(1 + r)$. Así, el principal después de dos periodos es $P(1 + r)^2$. Si continuamos reinvirtiendo, el principal después de tres periodos es $P(1 + r)^3$; después de cuatro, será $P(1 + r)^4$. En general, el *monto total* (o capital final), A, acumulado después de k periodos de interés es

$$A = P(1 + r)^k.$$

El interés acumulado de acuerdo con esta fórmula se denomina **interés compuesto**. Nótese que A está expresado en términos de una función exponencial con base $1 + r$. El periodo de interés se puede medir en años, meses, semanas, días, u otra unidad adecuada de tiempo. Cuando se aplica la fórmula anterior, debe recordarse que *r es la tasa de interés por cada periodo, expresada como decimal* (el tipo de interés se expresa en porciento). Por ejemplo, si el tipo es 6% *anual compuesto mensualmente*, entonces el tipo por mes es $\frac{6}{12}\%$, o sea, 0.5%. Así, $r = 0.005$ y k es el número de meses. Si se invierten $100 a esta tasa, la fórmula de A es entonces

$$A = 100(1 + 0.005)^k = 100(1.005)^k.$$

En general, se llega a la siguiente fórmula.

Fórmula del interés compuesto

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt},$$

donde
- P = monto principal
- r = tasa de interés (expresada como decimal)
- n = número de periodos de interés por año
- t = número de años en los que se invierte P
- A = monto total (después de t años).

El ejemplo siguiente ilustra un caso especial de la capitalización a interés compuesto.

EJEMPLO 6 ***Uso de la fórmula del interés compuesto***

Supóngase que se invierten \$1 000 a un tipo de interés de 9% compuesto mensualmente. Calcular el monto total después de 5, 10 y 15 años. Ilustrar el crecimiento de la inversión en forma gráfica.

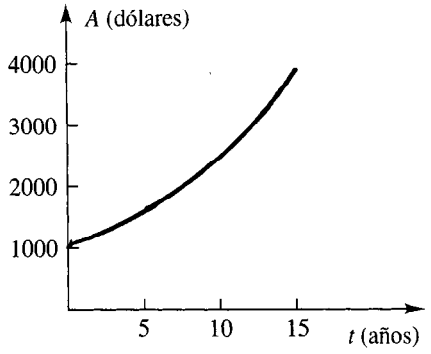
SOLUCIÓN Aplicando la fórmula del interés compuesto con $r = 0.09$, $n = 12$ y $P = \$1\,000$, se ve que el monto total a los t años es

$$A = 1000\left(1 + \frac{0.09}{12}\right)^{12t} = 1000(1.0075)^{12t}.$$

Introduciendo $t = 5$, 10 y 15, y empleando una calculadora, se obtiene la tabla siguiente:

Número de años	Monto total
5	$A = \$1000(1.0075)^{60} = \$1565.68$
10	$A = \$1000(1.0075)^{120} = \$2451.36$
15	$A = \$1000(1.0075)^{180} = \$3838.04$

FIGURA 5.10
Interés compuesto: $A = 1\,000(1.0075)^{12t}$



La naturaleza exponencial del incremento se nota en que durante los primeros 5 años el crecimiento es \$565.68; durante el segundo periodo de 5 años, es \$885.68, y durante el último periodo quinquenal es \$1 368.68.

La Fig. 5.10 muestra el crecimiento de los \$1 000 invertidos durante un periodo de 15 años.

Esta sección termina con un ejemplo en el cual se usa una calculadora con graficación.

EJEMPLO 7 ***Cálculo de concentraciones de medicamentos en el flujo sanguíneo***

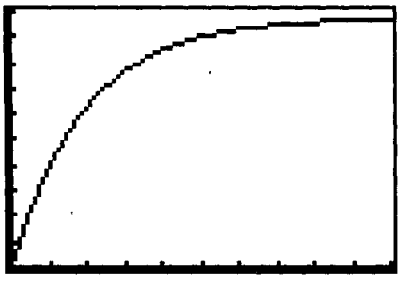
Si un adulto toma una tableta de 100 mg de determinada medicina, bucalmente, la tasa, R, con la cual el medicamento entra al flujo sanguíneo a los t minutos después. se predice que es

$$R = 5(0.95)^t \text{ mg/min}.$$

Se puede demostrar, mediante Cálculo, que la cantidad A del medicamento en la sangre, en el momento t, se puede aproximar mediante

$$A = 97.4786[1 - (0.95)^t] \text{ mg}.$$

FIGURA 5.11 [0, 100] por [0, 100]

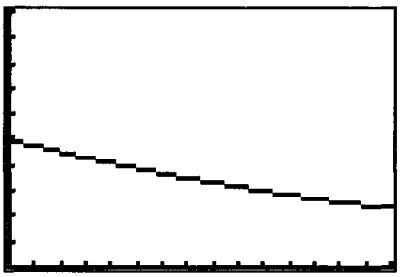


(a) Estimar cuánto tiempo tardan 50 mg del fármaco en entrar a la corriente sanguínea.
(b) Estimar el número de miligramos de la medicina en el flujo hemático, cuando está entrando a razón de 3 mg/min.

SOLUCIÓN

(a) Se desea determinar t cuando A es igual a 50. Como el valor de A no puede ser mayor que 97.4786, se elige el cuadro visual [0, 100] por [0, 100].

FIGURA 5.12 [0, 15] por [0, 10]



A continuación se asigna $97.4786[1 - (0.95)^x]$ a Y_1, y se grafica Y_1. Se obtiene un esquema semejante al de la Fig. 5.11 (nótese que $x = t$). Con los medios de trazo y amplificación, se estima que $A = 50$ mg cuando $x \approx 14$ min.

(b) Calcular t cuando R es igual a 3. Se asigna primero $5(0.95)^x$ a Y_2. Como el valor máximo de Y_2 es 5, cuando $t = 0$, se usa un cuadro visual de [0, 15] por [0, 10], para obtener una pantalla semejante a la de la Fig. 5.12. Al rastrear Y_2 hasta que $y = 3$, se obtiene $x \approx 9.96$. Así, después de casi 10 min, el fármaco llegará a la sangre a razón de 3 mg/min. (Nótese que la tasa inicial, cuando $t = 0$, es 5 mg/min.) Calculando el valor de Y_1 en $x = 10$, se observa que hay casi 39 mg del medicamento en la sangre, después de 10 minutos.

EJERCICIOS 5.1

Ejercicios 1– 8: Resuelva la ecuación.

1 $7^{x+6} = 7^{3x-4}$

2 $6^{7-x} = 6^{2x+1}$

3 $3^{2x+3} = 3^{(x^2)}$

4 $9^{(x^2)} = 3^{3x+2}$

5 $2^{-100x} = (0.5)^{x-4}$

6 $(\frac{1}{2})^{6-x} = 2$

7 $4^{x-3} = 8^{4-x}$

8 $27^{x-1} = 9^{2x-3}$

9 Grafique f si $a = 2$.

(a) $f(x) = a^x$

(b) $f(x) = -a^x$

(c) $f(x) = 3a^x$

(d) $f(x) = a^{x+3}$

(e) $f(x) = a^x + 3$

(f) $f(x) = a^{x-3}$

(g) $f(x) = a^x - 3$

(h) $f(x) = a^{-x}$

(i) $f(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$

(j) $f(x) = a^{3-x}$

10 Repita el Ejercicio 9 para $a = \frac{1}{2}$.

Ejercicios 11–20: Grafique f.

11 $f(x) = (\frac{2}{5})^{-x}$

12 $f(x) = (\frac{2}{5})^x$

13 $f(x) = -(\frac{1}{2})^x + 4$

14 $f(x) = -3^x + 9$

15 $f(x) = 2^{|x|}$

16 $f(x) = 2^{-|x|}$

17 $f(x) = 3^{1-x^2}$

18 $f(x) = 2^{-(x+1)^2}$

19 $f(x) = 3^x + 3^{-x}$

20 $f(x) = 3^x - 3^{-x}$

21 ***Población de alces*** Cien alces, cada uno de 1 año, se llevan a una reserva de cacería. Se espera que el número de animales vivos, $N(t)$, después de t años, sea $N(t) = 100(0.9)^t$. Estime el número de animales vivos en

(a) 1 año **(b)** 5 años **(c)** 10 años

22 ***Dosis medicinal*** Un fármaco se elimina del organismo mediante la orina. Suponga que para una dosis inicial de 10 mg, la cantidad, $A(t)$, que queda t horas después es $A(t) = 10(0.8)^t$.

(a) Estime la cantidad de fármaco en el organismo 8 horas después de la dosis inicial.

(b) ¿Qué porcentaje de la medicina que queda en el organismo se elimina cada hora?

23 ***Crecimiento bacteriano*** El número de bacterias en determinado cultivo aumentó de 600 a 1 800, de las 7:00 A.M. a las 9:00 A.M. Si se supone que el crecimiento es exponencial, la cantidad, $f(t)$, de bacterias t horas después de las 7:00 A.M. es $f(t) = 600(3)^{t/2}$.

(a) Estime el número de bacterias en el cultivo a las 8:00 A.M., 10:00 A.M. y 11:00 A.M.

(b) Trace la gráfica de f para $0 \le t \le 4$.

24 ***Ley de Newton del enfriamiento*** Según la ley mencionada, la rapidez a la cual se enfría un objeto es directamente proporcional a la diferencia de las temperaturas del objeto y el medio que lo rodea. La cara de una plancha casera se enfría de 125°F a 100 °F en 30 min, en un recinto que permanece a una temperatura constante de 75 °F. Según el Cálculo, la temperatura, $f(t)$, de la cara de la plancha a las t horas de enfriamiento, es $f(t) = 50(2)^{-2t} + 75$.

(a) Si se supone que $t = 0$ corresponde a la 1:00 P.M., calcule la temperatura a las 2:00 P.M., 3:30 P.M. y 4:00 P.M., con aproximación de un décimo de grado.

(b) Grafique f para $0 \le t \le 4$.

25 ***Desintegración radiactiva*** El isótopo radiactivo de bismuto, ^{210}Bi, tiene una semivida de 5 días. Si hay 100 miligramos de ^{210}Bi cuando $t = 0$, entonces la cantidad $f(t)$ que queda a los t días es $f(t) = 100(2)^{-t/5}$.

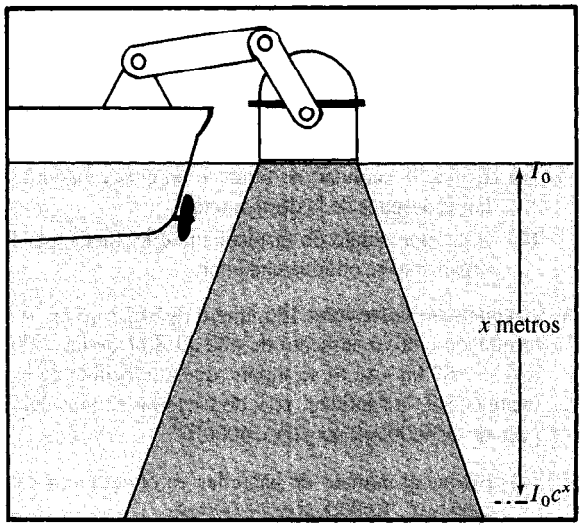
(a) ¿Cuánto ^{210}Bi queda después de 5 días? ¿Después de 10 días? ¿Después de 12.5 días?

(b) Grafique f para $0 \le t \le 30$.

26 ***Penetración de la luz en el mar*** Un problema importante en oceanografía es determinar la cantidad de luz que puede penetrar a diversas profundidades en el océano. La ley de Lambert y Beer dice que la función exponencial $I(x) = I_0c^x$ es un modelo de este fenómeno (véase la figura). Para determinado lugar, $I(x) = 10(0.4)^x$ es la cantidad de energía lumínica, expresada en calorías/cm^2/s, que llega a la profundidad de x metros.

(a) Calcule la cantidad de luz a una profundidad de 2 m.

(b) Trace la gráfica de I para $0 \le x \le 5$.



27 ***Desintegración del radio*** La semivida del radio es 1 600 años. Si la cantidad inicial es q_0 mg, entonces la cantidad $q(t)$ que queda a los t años está expresada por $q(t) = q_0 2^{kt}$. Calcule k.

28 ***Disolución de sal en agua*** Si se agregan 10 g de sal a una cantidad de agua, entonces, la cantidad, $q(t)$, que permanece sin disolverse t minutos después, es $q(t) = 10(\frac{4}{5})t$. Trace la gráfica que indica el valor $q(t)$ en cualquier momento, a partir de $t = 0$ hasta $t = 10$.

29 ***Interés compuesto*** Si se invierten \$1,000 a un tipo de interés de 12% anual compuesto mensualmente, calcule el monto total después de

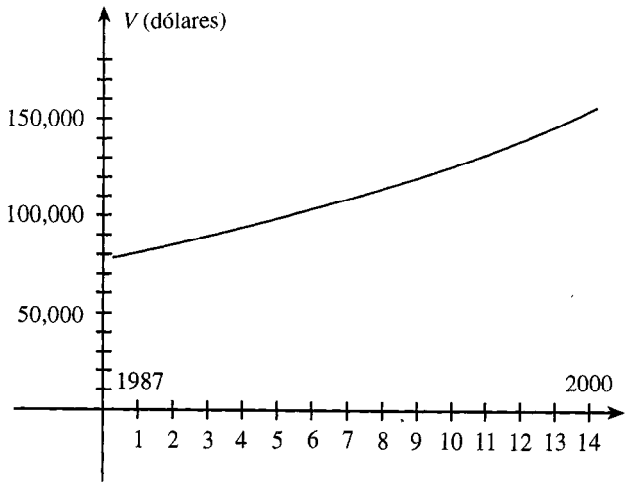
(a) 1 mes **(b)** 2 meses
(c) 6 meses **(d)** 1 año

30 ***Interés compuesto*** Si un fondo de ahorros paga interés de 10% compuesto semianualmente, ¿cuánto dinero invertido hoy se elevará a \$5 000 después de un año?

31 ***Valor de venta de un automóvil*** Determinado modelo de automóvil se compra en C dólares, y su valor de venta, después de t años, es $V(t) = 0.78C(0.85)^{t-1}$. Si el costo original es \$10 000 (dólares), calcule, con precisión de un dólar, el valor después de

(a) 1 año **(b)** 4 años **(c)** 7 años

32 ***Valuación de una propiedad*** Si el valor de una propiedad aumenta a una tasa del 5% anual, después de t años el valor, V, de una casa comprada en P dólares es $V = P(1.05)^t$. En la figura se ve una gráfica del valor de una casa comprada en \$80 000 en 1986. Calcule el valor de la casa, con precisión de \$1 000, en el año 2000.



33 ***Interés compuesto*** Si se invierten \$1 000 a un tipo de interés de 6% compuesto trimestralmente, calcule el monto final al término de

(a) 1 año **(b)** 2 años **(c)** 5 años **(d)** 10 años

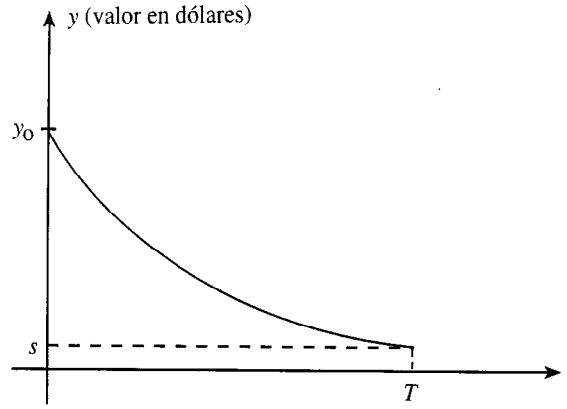
34 ***Interés de tarjeta de crédito*** Una tienda de departamentos pide que sus clientes de tarjeta de crédito paguen un interés de 18% anual, compuesto mensualmente sobre saldos insolutos. Si un cliente compra un televisor en \$500, a crédito, y no paga durante un año, ¿cuánto deberá al término del año?

35 ***Depreciación*** El método de saldo decreciente se usa en contabilidad; en él la cantidad de depreciación que se calcula cada año es un porcentaje fijo del valor presente del artículo. Si y es el valor del artículo en un año deter-

minado, la depreciación es ay cuando la tasa de depreciación es a, donde $0 < a < 1$, y el valor nuevo es $(1 - a)y$.

(a) Si el valor inicial del artículo es y_0, demuestre que el valor después de n años de depreciación es $(1 - a)^n y_0$.

(b) Al término de T años, el artículo tiene valor de recuperación de s dólares. El contribuyente desea escoger una tasa de depreciación tal que el valor del artículo después de T años sea igual al valor de recuperación (véase la figura). Demuestre que $a = 1 - \sqrt[T]{s/y_0}$.



36 ***Fechado del lenguaje*** La glotocronología es un método para fechar un lenguaje en determinada etapa, con base en la teoría de que en un tiempo largo, los cambios lingüísticos se llevan a cabo a una rapidez bastante constante. Supóngase que un lenguaje tuvo originalmente N_0 palabras básicas y que, un tiempo después, t, medido en milenios, el número de palabras básicas, $N(t)$, que quedan en uso común es $N(t) = N_0(0.805)^t$.

(a) Calcule, en forma aproximada, el porcentaje de palabras básicas que se pierden cada 100 años.

(b) Si $N_0 = 200$, grafique N para $0 \le t \le 5$.

Ejercicios 37 – 40: Algunas instituciones de préstamo calculan el pago mensual, M, por un préstamo de monto L a una tasa de interés r, mediante la fórmula

$$M = \frac{Lrk}{12(k-1)},$$

en la cual $k = [1 + (r/12)]^{12t}$, y t es el número de años de vigencia del préstamo.

37 ***Hipoteca de una casa***

(a) Estime el pago mensual por una hipoteca de una casa en \$90 000 (dólares) a 30 años, si el tipo de interés es 12%.

(b) Calcule el interés total que se paga por el préstamo del inciso (a).

38 ***Hipoteca de una casa*** Evalúe la hipoteca máxima de una casa, a 25 años, que se puede obtener a una tasa de interés de 10%, si el pago mensual ha de ser \$800.

39 ***Préstamo para un automóvil*** Un vendedor de automóviles ofrece préstamos sin enganche durante tres años a sus clientes, con un tipo de interés de 15%. Si un cliente puede pagar \$220 (dólares) mensualmente, estime el precio del automóvil más caro que pueda comprar.

40 ***Préstamo mercantil*** El dueño de una empresa pequeña decide financiar una nueva computadora con un crédito de \$3 000 durante 2 años, a un tipo de interés de 12.5%.

(a) Determine el pago mensual.

(b) Calcule el interés total que se paga por dicho empréstito.

C **41** ***Población de truchas*** En un estanque grande se introducen mil truchas, de 1 año de edad. Se espera que el número, $N(t)$ de las que viven todavía después de t años, sea $N(t) = 1\,000(0.9)^t$. Con la gráfica de N, estime aproximadamente cuándo habrá 500 truchas vivas.

C **42** ***Poder de compra*** Un economista predice que el poder de compra, $B(t)$, de una unidad monetaria a los t años a partir de hoy, será $B(t) = (0.95)^t$. Con la gráfica de B aproximar cuándo ese poder de compra será la mitad de lo que es hoy.

C **Ejercicios 43 y 44: Trace la gráfica de la ecuación. (a) Estime y para $x = 40$. (b) Estime x para $y = 2$.**

43 $y = (1.085)^x$ **44** $y = (1.0525)^x$

C **Ejercicios 45 y 46: Con una gráfica estime las raíces de la ecuación.**

45 $1.4x^2 - 2.2^x = 1$

46 $1.21^{3x} + 1.4^{-1.1x} - 2x = 0.5$

C **Ejercicios 47 y 48: Grafique f en el intervalo pedido. (a) Determine si f es biunívoca. (b) Estime las raíces de f.**

47 $f(x) = \dfrac{3.1^x - 2.5^{-x}}{2.7^x + 4.5^{-x}}$; $[-3, 3]$

48 $f(x) = \pi^{0.6x} - 1.3^{(x^{1.8})}$; $[-4, 4]$
(*Sugerencia:* Cambie $x^{1.8}$ a una forma equivalente que esté definida para $x < 0$.)

C **Ejercicios 49 y 50: Grafique f en el intervalo solicitado. (a) Estime dónde f es creciente o decreciente. (b) Estime el contradominio de f.**

49 $f(x) = 0.7x^3 + 1.7^{(-1.8x)}$; $[-4, 1]$

50 $f(x) = \dfrac{3.1^{-x} - 4.1^{x}}{4.4^{-x} + 5.3^{x}}$; $[-3, 3]$

C **51** ***Función de Gompertz*** A veces se usa la **función de Gompertz,**

$$y = ka^{(b^x)} \quad \text{con } k > 0,\ 0 < a < 1, \quad \text{y} \quad 0 < b < 1,$$

para representar las ventas de un producto nuevo cuyas ventas inicialmente son grandes, pero después se nivelan tendiendo a un nivel de saturación máxima. Grafique, en el mismo plano coordenado, la recta $y = k$ y la función de Gompertz con $k = 4$, $a = \frac{1}{8}$ y $b = \frac{1}{4}$. ¿Cuál es el significado de la constante k?

C **52** ***Función logística*** A veces se usa la **función logística,**

$$y = \frac{1}{k + ab^t},$$

$$\text{con } k > 0, a > 0, \text{ y } 0 < b < 1,$$

para representar las ventas de un nuevo producto que se vende poco inicialmente, y que después se vende mejor, tendiendo a un nivel máximo de saturación. Grafique, en el mismo plano coordenado, la recta $y = 1/k$ y la función logística con $k = \frac{1}{4}$, $a = \frac{1}{8}$ y $b = \frac{5}{8}$. ¿Cuál es el significado del valor $1/k$?

C **Ejercicios 53 y 54: Si se depositan pagos mensuales, p, en una cuenta de ahorros que paga una tasa anual de interés r, entonces el monto total, A, en la cuenta después de n años es**

$$A = \frac{p\left(1 + \dfrac{r}{12}\right)\left[\left(1 + \dfrac{r}{12}\right)^{12n} - 1\right]}{\dfrac{r}{12}}.$$

Grafique A para cada valor de p y r, y estime n para $A = \$100\,000$.

53 $p = 100$, $r = 0.05$ **54** $p = 250$, $r = 0.09$

5.2 LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

La *fórmula de interés compuesto* que se describió en la sección anterior es

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt},$$

en la cual P es el principal invertido, r es la tasa de interés, expresada como decimal, n es el número de periodos de interés por año, y t es el número de años durante los cuales el principal permanece invertido. El ejemplo siguiente muestra lo que sucede si se fijan la tasa y el tiempo total, pero se hace variar *el periodo de interés.*

EJEMPLO 1 *Aplicación de la fórmula de interés compuesto*

Sea la inversión de \$1 000 a un tipo de interés compuesto de 9%. Calcular el monto total después de un año, si el interés se compone cada tres meses, cada mes, cada semana, cada día, cada hora y cada minuto.

SOLUCIÓN Si $P = \$1\,000$, $t = 1$ y $r = 0.09$ en la fórmula del interés compuesto, entonces

$$A = \$1000\left(1 + \frac{0.09}{n}\right)^{n}$$

para n periodos de interés al año. Los valores de n que es necesario considerar aparecen en la tabla siguiente, en la que se ha supuesto que hay 365 días en un año y, por consiguiente, (365)(24) = 8 760 horas, y (8 760)(60) = 525 600 minutos. (En las transacciones comerciales reales, se considera que un año de inversión tiene 360 días).

Periodo de interés	Trimestre	Mes	Semana	Día	Hora	Minuto
n	4	12	52	365	8 760	525 600

Con la fórmula del interés compuesto y una calculadora, se obtienen las cantidades que aparecen en la siguiente tabla.

Periodo de interés	Monto total después de un año
Trimestre	$\$1000\left(1+\frac{0.09}{4}\right)^{4} = \$1093.08$
Mes	$\$1000\left(1+\frac{0.09}{12}\right)^{12} = \$1093.81$
Semana	$\$1000\left(1+\frac{0.09}{52}\right)^{52} = \$1094.09$
Día	$\$1000\left(1+\frac{0.09}{365}\right)^{365} = \$1094.16$
Hora	$\$1000\left(1+\frac{0.09}{8760}\right)^{8760} = \$1094.17$
Minuto	$\$1000\left(1+\frac{0.09}{525{,}600}\right)^{525{,}600} = \$1094.17$

Nótese que en el ejemplo anterior, al alcanzar un periodo de interés de una hora, el número de periodos por año no tiene efecto sobre la cantidad final. Si se hubiera compuesto el interés cada *segundo*, el resultado hubiera sido \$1 094.17, siempre que se truncara A al centavo más cercano. (Sí cambian algunas cifras decimales después de las primeras dos.) Así, la cantidad tiende a un valor fijo al aumentar n. Se dice que el interés está **compuesto continuamente** si el número de periodos de tiempo n, por año, aumenta sin límite.

Si $P = 1$, $r = 1$ y $t = 1$ en la fórmula del interés compuesto, entonces

$$A = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

La expresión del segundo miembro de la ecuación es importante en matemáticas. En el Ejemplo 1 se estudió un caso semejante: al aumentar n, A tendió a un valor límite. El mismo fenómeno sucede con esta fórmula, como se ve en la tabla siguiente, el cual se ha obtenido mediante una calculadora.

n	Aproximación a $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2.00000000
10	2.59374246
100	2.70481383
1 000	2.71692393
10 000	2.71814593
100 000	2.71826824
1 000 000	2.71828047
10 000 000	2.71828169
100 000 000	2.71828181
1 000 000 000	2.71828183

En Cálculo se demuestra que a medida que n aumenta sin límite, el valor de $[1 + (1/n)]^n$ tiende a determinado número irracional, que se representa por e. El número e aparece en el estudio de muchos fenómenos físicos. Su valor aproximado es $e \approx 2.71828$. Con la notación estudiada para funciones racionales, en la Secc. 4.5, lo anterior se representa como sigue:

El número e

Si n es entero positivo, entonces

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e \approx 2.71828 \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

En la siguiente definición se toma e como la base de una función exponencial importante.

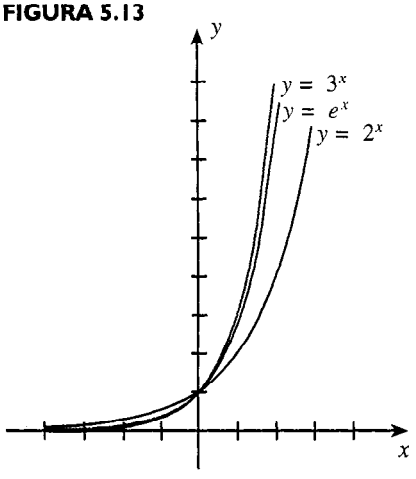
Definición de la función exponencial natural

La función exponencial natural f se define mediante

$$f(x) = e^x$$

para todo número real x.

FIGURA 5.13



La función exponencial natural es una de las más útiles en matemáticas avanzadas y en las aplicaciones. Como $2 < e < 3$, la gráfica de $y = e^x$ queda entre las de $y = 2^x$ y $y = 3^x$, como se ve en la Fig. 5.13. Las calculadoras científicas tienen una tecla $\boxed{e^x}$ para aproximar los valores de la función natural exponencial.

APLICACIÓN

Interés compuesto continuamente

La fórmula del interés compuesto es

$$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

Si $k = n/r$, entonces $n = kr$ y $nt = krt$; se puede volver a escribir la fórmula como sigue:

$$A = P\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{krt} = P\left[\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k}\right]^{rt}.$$

Para interés compuesto continuamente se hace que n (el número de periodos de interés al año) aumente sin límite, lo que se representa mediante $n \to \infty$, o bien, lo que es lo mismo, mediante $k \to \infty$. Con la definición de e, se observa que

$$P\left[\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k}\right]^{rt} \to P[e]^{rt} = Pe^{rt} \quad \text{cuando } k \to \infty.$$

Este resultado lleva a la siguiente fórmula.

Fórmula de interés compuesto continuamente

$$A = Pe^{rt},$$

donde P = principal
r = tasa de interés (expresada como decimal)
t = número de años durante los cuales P está invertido
A = monto total después de t años.

El ejemplo siguiente muestra un caso especial de esta fórmula.

EJEMPLO 2 ***Aplicación de la fórmula de interés compuesto continuamente***

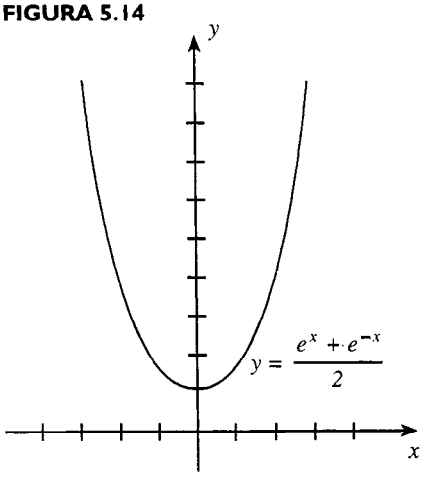
Supóngase que se depositan \$20 000 en una cuenta del mercado de valores que paga interés a un tipo de 8% anual compuesto continuamente. Calcular el saldo de la cuenta después de 5 años.

SOLUCIÓN Se aplica la fórmula del interés compuesto continuamente con $P = 20\,000$, $r = 0.08$ y $t = 5$. Con ello se tiene

$$A = Pe^{rt} = 20{,}000e^{0.08(5)} = 20{,}000e^{0.4}.$$

Con una calculadora, resulta que $A = \$29\,836.49$.

FIGURA 5.14



La función f del ejemplo siguiente es importante en matemáticas superiores.

EJEMPLO 3 ***Gráfica donde intervienen dos funciones exponenciales***

Graficar f si

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

SOLUCIÓN Nótese que f es función par, porque

$$f(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = f(x).$$

Así, la gráfica es simétrica con respecto al eje y. Con una calculadora, o con la Tabla 2 del Apéndice II, se obtienen las siguientes aproximaciones de $f(x)$:

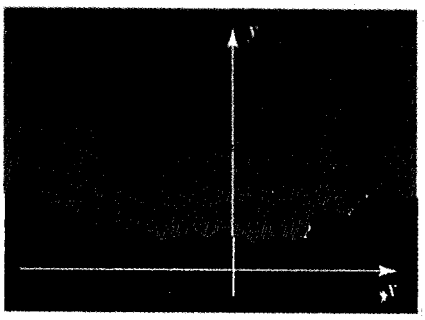
x	0	0.5	1.0	1.5	2.0
$f(x)$ (aprox.)	1	1.13	1.54	2.35	3.76

Al localizar los puntos y utilizar la simetría con respecto al eje y se obtiene el croquis de la Fig. 5.14. La gráfica *parece* una parábola; sin embargo, éste no es realmente el caso.

APLICACIÓN

Cables flexibles

FIGURA 5.15



La función f del Ejemplo 3 se presenta en matemáticas aplicadas e ingeniería, y se llama **función coseno hiperbólico**. Esta función se puede usar para representar la forma de un cable o cadena flexible uniforme colgante, cuyos extremos están soportados a la misma altura, como por ejemplo, un cable de teléfono o uno de alta tensión (Fig. 5.15). Si se define un sistema de coordenadas, como el que se ve en la figura, se puede demostrar que una ecuación que representa la forma del cable es

$$y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a}),$$

donde a es un número real. Se dice que la gráfica tiene forma de **catenaria**, palabra derivada del latín, que designa lo referente a una *cadena*. La función del Ejemplo 3 es el caso especial en el que $a = 1$.

APLICACIÓN

Radioterapia

Las funciones exponenciales desempeñan un papel importante en el campo de la *radioterapia*, el tratamiento de tumores con radiación. La fracción de células de un tumor que sobreviven al tratamiento, la cual es la *fracción sobreviviente*, no sólo depende de la energía y naturaleza de la radiación, sino también de la profundidad, tamaño y características del tumor mismo. Se puede uno imaginar que la exposición a la radiación es un conjunto de eventos potencialmente dañinos, en los cuales se necesita por lo menos un *tiro* para matar una célula tumoral. Por ejemplo, supóngase que cada célula tiene exactamente un *blanco* al que se debe tirar. Si k representa el tamaño promedio de una célula tumoral, y x es el número de eventos dañinos (la *dosis*), entonces, la fracción sobreviviente, $f(x)$ es

$$f(x) = e^{-kx}.$$

Esta ecuación se llama *fracción sobreviviente de un blanco y un tiro.*

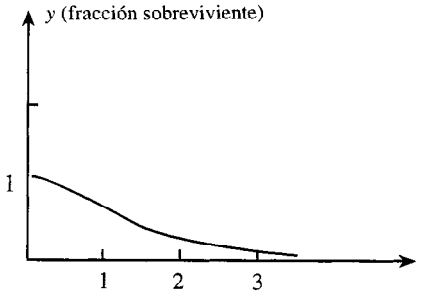
Supóngase a continuación que cada célula tiene n blancos, y que cada uno debe recibir un tiro para que muera la célula. En este caso, la *fracción sobreviviente de n blancos y un tiro* es

$$f(x) = 1 - (1 - e^{-kx})^n.$$

Se puede analizar la gráfica de f para determinar qué efecto tiene aumentar la dosis de x sobre la fracción sobreviviente de células tumorales. Nótese que $f(0) = 1$; es decir, si no hay dosis, entonces sobreviven todas las células. Por ejemplo, si $k = 1$ y $n = 2$, entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - (1 - e^{-x})^2 \\ &= 1 - (1 - 2e^{-x} + e^{-2x}) \\ &= 2e^{-x} - e^{-2x}. \end{aligned}$$

FIGURA 5.16
Fracción sobreviviente de células tumorales después de un tratamiento con radiación



Para un análisis completo de la gráfica de f se necesita del Cálculo. Esa gráfica aparece en la Fig. 5.16. La parte de la curva cerca del punto (0,1) representa la naturaleza umbral del tratamiento, es decir, una dosis pequeña elimina pocas células tumorales. Nótese que para una x grande, un aumento de dosis tiene poco efecto sobre la fracción sobreviviente. Para determinar la dosis ideal que se debe administrar a un paciente, los especialistas en radioterapia también deben tener en cuenta el número de células sanas que mueren durante un tratamiento.

En el estudio del Cálculo se encuentran problemas del tipo que se analiza en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 ***Cálculo de las raíces de una función donde intervienen exponenciales***

Si $f(x) = x^2(-2e^{-2x}) + 2xe^{-2x}$, calcular los ceros o raíces de f.

SOLUCIÓN Se puede factorizar $f(x)$ como sigue:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2xe^{-2x} - 2x^2e^{-2x} \\ &= 2xe^{-2x}(1 - x) \end{aligned}$$

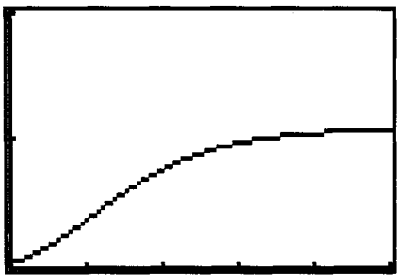
Para calcular los ceros de f, se resuelve la ecuación $f(x) = 0$. Como $e^{-2x} > 0$ para toda x, entonces $f(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$ o bien $1 - x = 0$. Entonces, los ceros de f son 0 y 1.

EJEMPLO 5 ***Trazo de una curva de crecimiento de Gompertz***

En biología, la **función de crecimiento de Gompertz** G es

$$G(t) = ke^{(-Ae^{-Bt})},$$

FIGURA 5.17 [0, 5] por [0, 2]



en la cual k, A y B son constantes positivas, se usa para estimar el tamaño de determinadas cantidades cuando el tiempo es t. La gráfica de G se llama **curva de crecimiento de Gompertz**. La función siempre es positiva y creciente, y al aumentar t sin límite, $G(t)$ se nivela y tiende al valor k. Graficar G en el intervalo [0, 5] para $k = 1.1$, $A = 3.2$ y $B = 1.1$, y estimar el tiempo, t, al cual $G(t) = 1$.

SOLUCIÓN Comenzaremos asignando

$$1.1e^{(-3.2e^{-1.1t})}$$

(continúa)

a Y_1. Como se desea graficar G en el intervalo [0, 5], se escoge Xmín = 0 y Xmáx = 5. Como $G(t)$ siempre es positivo y no rebasa el valor $k = 1.1$, se selecciona Ymín = 0 y Ymáx = 2. Por consiguiente, el rectángulo visual tiene dimensiones [0, 5] por [0, 2]. Al graficar G se obtiene una pantalla semejante a la de la Fig. 5.17. Los valores de los extremos de la gráfica son, aproximadamente, (0, 0.045) y (5, 1.086).

Para calcular el tiempo al cual $y = G(t) = 1$, se usan las funciones de trazo y ampliación y se obtiene $x = t \approx 3.194$.

EJERCICIOS 5.2

Ejercicios 1 – 4: Use la gráfica de $y = e^x$ como ayuda para trazar la gráfica de f.

1 **(a)** $f(x) = e^{-x}$ **(b)** $f(x) = -e^x$

2 **(a)** $f(x) = e^{2x}$ **(b)** $f(x) = 2e^x$

3 **(a)** $f(x) = e^{x+4}$ **(b)** $f(x) = e^x + 4$

4 **(a)** $f(x) = e^{-2x}$ **(b)** $f(x) = -2e^x$

Ejercicios 5 y 6: Si se deposita una suma P en una cuenta de ahorros que paga interés a un tipo de r% anual, compuesto continuamente, calcule el saldo a los t años.

5 $P = 1000$, $r = 8\frac{1}{4}$, $t = 5$

6 $P = 100$, $r = 12\frac{1}{2}$, $t = 10$

Ejercicios 7 y 8: ¿Cuánto dinero invertido a un tipo de interés de r% anual, compuesto continuamente, llegará a un monto A después de t años?

7 $A = 100{,}000$, $r = 11$, $t = 18$

8 $A = 15{,}000$, $r = 9.5$, $t = 4$

Ejercicios 9 y 10: Una inversión de P dólares aumentó a A dólares en t años. Si el interés fue compuesto continuamente, calcule la tasa de interés con la Tabla 2 del Apéndice II.

9 $A = 13{,}464$, $P = 1000$, $t = 20$

10 $A = 890.20$, $P = 400$, $t = 16$

Ejercicios 11 y 12: Resuelva la ecuación.

11 $e^{(x^2)} = e^{7x-12}$ 12 $e^{3x} = e^{2x-1}$

Ejercicios 13 –16: Calcule las raíces de f.

13 $f(x) = xe^x + e^x$

14 $f(x) = -x^2e^{-x} + 2xe^{-x}$

15 $f(x) = x^3(4e^{4x}) + 3x^2e^{4x}$

16 $f(x) = x^2(2e^{2x}) + 2xe^{2x} + e^{2x} + 2xe^{2x}$

Ejercicios 17 y 18: Simplifique la expresión.

17 $$\frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$$

18 $$\frac{(e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2}$$

19 ***Crecimiento de un cultivo*** Una función exponencial W tal que $W(t) = W_0e^{kt}$ para $k > 0$, describe el primer mes de crecimiento de cultivos como maíz, algodón y soya. El valor de la función, $W(t)$ es el peso total, en miligramos; W_0 es el peso en el día del brote, y t es el tiempo, en días. Si $k = 0.2$ y $W_0 = 68$ mg para una especie de soya, prediga el peso al final de 30 días.

20 ***Crecimiento de un cultivo*** Véase el Ejercicio 19. Con frecuencia es difícil medir el peso W_0 de una planta al brotar del terreno. Para una especie de algodón, si $k = 0.21$ y el peso después de 10 días es 575 mg, calcule W_0.

21 ***Crecimiento de la población en Estados Unidos*** La población de este país, en 1980, era aproximadamente 227 millones, y ha estado creciendo a una tasa de 0.7% anual. La población $N(t)$ a t años después de 1980, se puede aproximar mediante $N(t) = 227e^{0.007t}$. Prediga la población en el año 2000 si continúa esta tendencia de crecimiento.

22 ***Crecimiento de la población en la India*** La población estimada de la India, en 1985, era 762 millones, y ha crecido a una tasa aproximada de 2.2% anual. La población $N(t)$, t años después, puede representarse mediante $N(t) = 762e^{0.022t}$. Si se supone que continúa este rápido crecimiento, estime la población de la India en el año 2000.

23 ***Longevidad del hipogloso*** En piscicultura, una cohorte es el conjunto de peces originados en una reproducción anual. Por lo general se supone que la cantidad de peces $N(t)$, vivos, después de t años, se expresa mediante una función exponencial. Para el hipogloso del Pacífico, $N(t) = N_0e^{-0.2t}$, donde N_0 es el tamaño inicial de la cohorte.

Calcule el porcentaje aproximado del número original que sigue vivo después de 10 años.

24 ***Trazador radiactivo*** Se puede usar el trazador radiactivo ^{51}Cr para ubicar la posición de la placenta en las mujeres embarazadas. Con frecuencia, un laboratorio médico debe pedir el trazador. Si se envían A_0 unidades (microcuries), entonces, debido a la desintegración radiactiva, el número de unidades presentes después de t días es $A(t) = A_0e^{-0.0249t}$.

(a) Si se remiten 35 unidades y el pedido tarda 2 días en llegar, ¿cuántas unidades, aproximadamente, estarán disponibles para la prueba?

(b) Si se necesitan 35 unidades para la prueba, ¿cuántas unidades, aproximadamente, se necesita remitir?

25 ***Crecimiento de la población de ballena azul*** Se cree que la población de ballenas azules, en 1978, en el Hemisferio Sur, era 5 000. Como se ha prohibido la caza de estas ballenas, y disponen de un suministro abundante de alimentos, se espera que la población, $N(t)$, crezca exponencialmente según $N(t) = 5\,000\,e^{0.0030t}$, estando t en años y $t = 0$ corresponde a 1978. Prediga la población en el año 2000.

26 ***Crecimiento del hipogloso*** La longitud, en centímetros, de muchos peces comerciales, de t años de edad, se puede aproximar mediante una función de crecimiento de von Bertalanffy, de la forma $f(t) = a(1 - be^{-kt})$, donde a, b y k son constantes.

(a) Para el hipogloso del Pacífico, $a = 200$, $b = 0.956$ y $k = 0.18$. Estime la longitud de un hipogloso de 10 años.

(b) Con la gráfica de f, estime la longitud máxima que puede alcanzar el hipogloso del Pacífico.

27 ***Presión atmosférica*** Bajo ciertas condiciones, la presión atmosférica p, en pulgadas de mercurio, a una altitud de h pies, es $p = 29e^{-0.000034h}$. ¿Cuál es la presión a una altura de 40 000 pies?

28 ***Desintegración de un isótopo del polonio*** Si hay inicialmente c miligramos del isótopo ^{210}Po, la cantidad que queda después de t días se puede aproximar mediante $A = ce^{-0.00495t}$. Si la cantidad inicial es 50 miligramos, calcule la cantidad que queda, con precisión de centésimos de miligramo, después de

(a) 30 días **(b)** 180 días **(c)** 365 días.

29 ***Crecimiento de los niños*** Por lo general se considera que el modelo de Jenss es la fórmula más exacta para predecir la altura de un niño en edad preescolar. Si y es la altura, en centímetros, y x es la edad, en años, entonces

$$y = 79.041 + 6.39x - e^{3.261 - 0.993x}$$

para $\frac{1}{4} \le x \le 6$. De acuerdo con el Cálculo, la tasa de crecimiento, R, en cm/año, es $R = 6.39 + 0.993e^{3.261 - 0.993x}$. Calcule la altura y la tasa de crecimiento de un niño normal de 1 año de edad.

30 ***Velocidad de una partícula*** Una partícula muy pequeña, del orden de 5 micrometros de diámetro, se lanza hacia aire en reposo, con una velocidad inicial de v_0 m/s, pero debido a las fuerzas de resistencia, disminuye esa velocidad. La velocidad a los t segundos después es $v(t) = v_0e^{-at}$ para cierta $a > 0$, y la distancia que recorre la partícula, $s(t)$, es

$$s(t) = \frac{v_0}{a}(1 - e^{-at}).$$

La distancia de detención es la que recorre la partícula antes de llegar al reposo.

(a) Exprese la distancia de detención en términos de v_0 y a.

(b) Con la fórmula de la parte (a), estime la distancia de detención si $v_0 = 10$ m/s y $a = 8 \times 10^5$.

31 ***Salario mínimo*** En 1971, el salario mínimo en Estados Unidos era \$1.60 dólares por hora. Suponiendo que la tasa de inflación aumenta continuamente a razón de 5% anual, calcule el salario mínimo equivalente en el año 2000.

32 ***Valor de la tierra*** En 1867, Estados Unidos compró Alaska a Rusia en \$7 200 000. En Alaska hay 586 400 millas cuadradas de terreno. Suponiendo que el valor del suelo aumenta en forma continua a 3% anual, y que se puede comprar la tierra a precio equivalente, determine el precio de 1 acre el año 2000. Una milla cuadrada tiene 640 acres.

Ejercicios 33 y 34: El *rendimiento efectivo* (tasa efectiva anual de interés) para una inversión, es la tasa de interés simple que, al final de un año, daría la misma cantidad que la producida por el interés compuesto que realmente se aplica. Aproxime, con exactitud de 0.01%, el rendimiento efectivo que corresponde a un tipo de interés de r% anual compuesto (a) cada trimestre, y (b) continuamente.

33 $r = 7$ **34** $r = 12$

C **Ejercicios 35 y 36: Trace la gráfica de la ecuación. (a) Estime y para $x = 40$. (b) Calcule x para $y = 2$.**

35 $y = e^{0.085x}$ **36** $y = e^{0.0525x}$

C **Ejercicios 37–39: (a) Grafique f con una graficadora. (b) Trace la gráfica de g sacando recíprocos de las ordenadas en (a), *sin* usar graficadora.**

37 $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$; $g(x) = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

38 $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$; $g(x) = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$

39 $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; $g(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

40 ***Función de densidad de probabilidad*** En estadística, la función de densidad de probabilidad para la distribución normal es

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \quad \text{siendo } z = \frac{x - \mu}{\sigma},$$

donde μ y σ son números reales (μ es la *media* y σ^2 es la *varianza* de la distribución). Grafique f para el caso $\sigma = 1$ y $\mu = 0$.

Ejercicios 41 y 42: Grafique f y g en el mismo plano coordenado y estime las soluciones de la ecuación $f(x) = g(x)$.

41 $f(x) = e^{0.5x} - e^{-0.4x}$; $g(x) = x^2 - 2$

42 $f(x) = 0.3e^x$; $g(x) = x^3 - x$

Ejercicios 43 y 44: Con las funciones f y g se puede aproximar e^x en el intervalo [0, 1]. Grafique f, g y $y = e^x$ en el mismo plano de coordenadas, y compare la exactitud de $f(x)$ y $g(x)$ como aproximación a e^x.

43 $f(x) = x + 1$; $g(x) = 1.72x + 1$

44 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$; $g(x) = 0.84x^2 + 0.878x + 1$

Ejercicios 45 y 46: Grafique f y estime sus raíces o ceros.

45 $f(x) = x^2e^x - xe^{(x^2)} + 0.1$

46 $f(x) = x^3e^x - x^2e^{2x} + 1$

Ejercicios 47 y 48: Grafique f en el intervalo (0, 200]. Halle una ecuación aproximada para la asíntota horizontal.

47 $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ **48** $f(x) = \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^x$

Ejercicios 49 y 50: Aproxime la raíz real de la ecuación.

49 $e^{-x} = x$ **50** $e^{3x} = 5 - 2x$

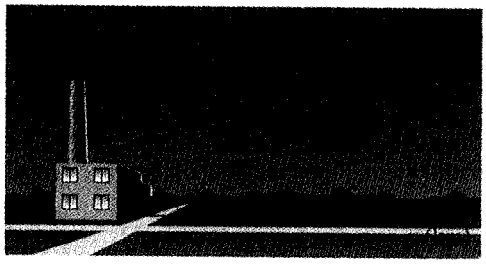
Ejercicios 51 y 52: Grafique f y determine dónde es creciente o decreciente.

51 $f(x) = xe^x$ **52** $f(x) = x^2e^{-2x}$

53 ***Contaminación procedente de una chimenea*** La concentración de un contaminante, C (en unidades/m^3), en un punto cercano al piso, a sotavento (lado donde no pega el viento) de una chimenea de altura h, se representa, a veces, mediante

$$C = \frac{Q}{\pi vab} e^{-y^2/(2a^2)}\left[e^{-(z-h)^2/(2b^2)} + e^{-(z+h)^2/(2b^2)}\right],$$

donde Q es la intensidad de la fuente (en unidades/s), v es la velocidad media del viento (en m/s), z es la altura (en metros), sobre el punto a sotavento, y es la distancia desde ese punto, en dirección perpendicular a la del viento, y a y b son constantes que dependen de la distancia a sotavento. Véase la figura.



(a) ¿Cómo varía la concentración del contaminante al nivel del piso, a sotavento ($y = 0$ y $z = 0$) si aumenta la altura de la chimenea?

(b) ¿Cómo varía la concentración del contaminante al nivel del piso ($z = 0$) para una chimenea de altura fija, h, si una persona se mueve en dirección perpendicular a la del viento, al aumentar y ?

54 ***Concentración de contaminante*** En el Ejercicio 53, si la altura de la chimenea es de 100 m, y $b = 12$, haga una gráfica para estimar la altura z sobre el punto a sotavento ($y = 0$), donde se tenga la contaminación máxima. (*Sugerencia:* Sea $h = 100$, $b = 12$, y grafique la ecuación $C = e^{-(z-h)^2/(2b^2)} + e^{-(z+h)^2/(2b^2)}$.)

55 ***Microcircuitos de computadora*** Para los fabricantes de *chips* o microcircuitos de computadora, es importante tener en cuenta la fracción, F, de *chips* que fallan a los t años de servicio. En algunos casos, esta fracción se puede aproximar mediante la fórmula $F = 1 - e^{-ct}$, donde c es una constante positiva.

(a) ¿Cómo afecta el valor de c a la confiabilidad de un *chip*?

(b) Si $c = 0.125$, ¿después de cuántos años habrá fallado el 35% de los *chips*?

5.3 FUNCIONES LOGARÍTMICAS

En la Secc. 5.1 se estableció que la función exponencial $f(x) = a^x$, resulta ser biunívoca para $0 < a < 1$, o para $a > 1$. Por tanto, f tiene una función inversa, f^{-1} (Secc. 3.8). A esta inversa de la función exponencial con base a se le llama **función logarítmica con base a**, y se representa mediante $\log_a$. Sus valores se escriben $\log_a(x)$ o bien $\log_a x$, y se leen "*logaritmo de x base a.*" Como, por definición de una función inversa f^{-1},

$$y = f^{-1}(x) \quad \text{si y sólo si} \quad x = f(y),$$

la definición de $\log_a$ se puede expresar como sigue:

Definición de $\log_a$

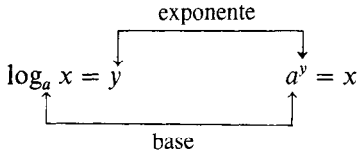
Sea a un número positivo real distinto de 1. El **logaritmo de x con base a** se define como

$$y = \log_a x \qquad \text{si y sólo si} \qquad x = a^y$$

para toda $x > 0$ y todo número real y.

Nótese que las dos ecuaciones de la definición son equivalentes. Se dice que la primera ecuación es la **forma logarítmica**, y que la segunda es la **forma exponencial**. El lector debe tratar de adquirir destreza para convertir cada forma en la otra. El siguiente diagrama le puede ayudar a ello.

Forma logarítmica **Forma exponencial**



Obsérvese que cuando se cambian las formas, *son iguales las bases de las formas logarítmica y exponencial.* El número y (es decir, $\log_a x$) corresponde al exponente de la forma exponencial. En otras palabras, *$\log_a x$ es el exponente al que hay que elevar la base para obtener x.*

Los siguientes ejemplos ilustrativos presentan varios casos de formas equivalentes.

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Formas equivalentes

Forma logarítmica	Forma exponencial
❑ $\log_5 u = 2$	$5^2 = u$
❑ $\log_b 8 = 3$	$b^3 = 8$
❑ $r = \log_p q$	$p^r = q$
❑ $w = \log_4 (2t + 3)$	$4^w = 2t + 3$
❑ $\log_3 x = 5 + 2z$	$3^{5+2z} = x$

El siguiente ejemplo muestra una aplicación donde se tiene que convertir de una forma exponencial a una logarítmica.

EJEMPLO 1 ***Conversión de la forma exponencial a forma logarítmica***

El número de bacterias, N, de cierto cultivo es $N = (1\,000)2^t$ después de t horas. Expresar t en forma de función logarítmica de N con base 2.

SOLUCIÓN Si $N = (1\,000)2^t$, entonces

$$2^t = \frac{N}{1000}.$$

Al cambiar a la forma logarítmica, se tiene

$$t = \log_2 \frac{N}{1000}.$$

En el ejemplo a continuación se presentan algunos casos especiales de logaritmos.

EJEMPLO 2 ***Cálculo de logaritmos***

Calcular el número

(a) $\log_{10} 100$ **(b)** $\log_2 \frac{1}{32}$ **(c)** $\log_9 3$ **(d)** $\log_7 1$

SOLUCIÓN En cada caso el dato es $\log_a x$, y hay que encontrar el exponente y tal que $a^y = x$. Los resultados son los siguientes:

(a) $\log_{10} 100 = 2$ porque $10^2 = 100$.

(b) $\log_2 \frac{1}{32} = -5$ porque $2^{-5} = \frac{1}{32}$.

(c) $\log_9 3 = \frac{1}{2}$ porque $9^{1/2} = 3$.

(d) $\log_7 1 = 0$ porque $7^0 = 1$.

Las siguientes propiedades generales son consecuencia de la interpretación de $\log_a x$ como un exponente.

Propiedad de $\log_a x$	Motivo	Ejemplo
(1) $\log_a 1 = 0$	$a^0 = 1$	$\log_3 1 = 0$
(2) $\log_a a = 1$	$a^1 = a$	$\log_{10} 10 = 1$
(3) $\log_a a^x = x$	$a^x = a^x$	$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$
(4) $a^{\log_a x} = x$	véase a continuación	$5^{\log_5 7} = 7$

La razón de la propiedad (4) es consecuencia directa de la definición de $\log_a$, ya que

$$\text{si} \quad y = \log_a x, \quad \text{entonces} \quad x = a^y, \quad \text{o sea,} \quad x = a^{\log_a x}.$$

La función logarítmica con base a es la inversa de la función exponencial con base a; por lo tanto, la gráfica de $y = \log_a x$ se puede obtener reflejando la de $y = a^x$ en la recta $y = x$ (véase Secc. 3.8). Este procedimiento se muestra en la Fig. 5.18 para el caso $a > 1$. Nótese que la abscisa en el origen de la gráfica es 1, el dominio es el conjunto de los números reales positivos, el contradominio es $\mathbb{R}$, y el eje y es asíntota vertical. Los logaritmos con base $a < 1$ se usan rara vez, por lo que no se verán sus gráficas.

Se observa en la Fig. 5.18 que si $a > 1$, entonces $\log_a x$ es creciente en $(0, \infty)$ y, por consiguiente, es biunívoca según el teorema de la pág. 196. Combinando este resultado con las partes (1) y (2) de las definiciones de función biunívoca en la pág. 195 se llega al siguiente teorema, que también se puede demostrar si $0 < a < 1$.

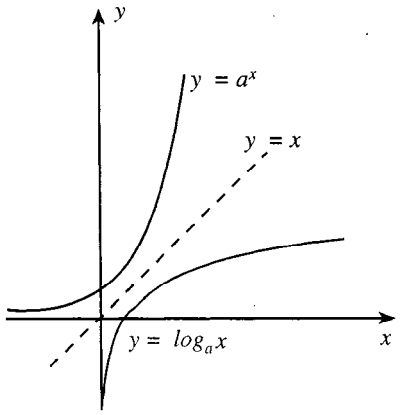
Teorema: las funciones logarítmicas son biunívocas

La función logarítmica con base a es biunívoca. Por consiguiente, se cumplen las siguientes condiciones equivalentes para números reales x_1 y x_2:

(1) Si $x_1 \neq x_2$, entonces $\log_a x_1 \neq \log_a x_2$.

(2) Si $\log_a x_1 = \log_a x_2$, entonces $x_1 = x_2$.

FIGURA 5.18



Al usar este teorema como justificación de un paso en la solución de un ejemplo, se dice que *las funciones logarítmicas son biunívocas*.

En el ejemplo que sigue se resuelve una *ecuación logarítmica* sencilla, es decir, una ecuación donde interviene el logaritmo de una expresión que contiene una variable.

EJEMPLO 3 ***Solución de una ecuación logarítmica***

Resolver la ecuación $\log_3(4x - 5) = \log_3(2x + 1)$.

SOLUCIÓN

$\log_3 (4x - 5) = \log_3 (2x + 1)$	ecuación dada
$4x - 5 = 2x + 1$	las funciones logarítmicas son biunívocas
$2x = 6$	se resta $2x$ y se suma 5
$x = 3$	se divide entre 2

✓ ***Comprobación*** $x = 3$ Se deben comprobar las soluciones de las ecuaciones logarítmicas para tener la seguridad de que los logaritmos *sólo son de números reales positivos*, porque una función logarítmica no está definida para números reales no positivos.

$$\text{Primer miembro: } \log_3 (4 \cdot 3 - 5) = \log_3 7$$

$$\text{Segundo miembro: } \log_3 (2 \cdot 3 + 1) = \log_3 7$$

Como $\log_3 7 = \log_3 7$ es una afirmación correcta, $x = 3$ es una solución.

En el ejemplo que sigue se utiliza la definición de logaritmo para resolver una ecuación logarítmica.

ESCUELA POLITÉCNICA

EJEMPLO 4 ***Resolver una ecuación logarítmica***

Resuelva la ecuación $\log_4(5 + x) = 3$.

SOLUCIÓN

$$\log_4 (5 + x) = 3 \quad \text{ecuación dada}$$
$$5 + x = 4^3 \quad \text{definición de logaritmo}$$
$$x = 59 \quad \text{se resta 5}$$

✓ ***Comprobación*** $x = 59$ Primer miembro: $\log_4(5 + 59) = \log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$
Segundo miembro: 3
Como $3 = 3$ es una afirmación correcta, $x = 59$ es una solución.

A continuación se trazará la gráfica de una función logarítmica específica.

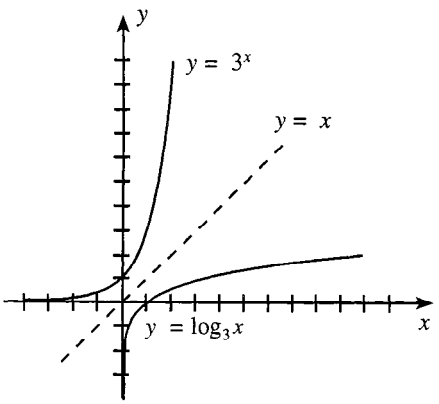
EJEMPLO 5 ***Trazar la gráfica de una función logarítmica***

Hacer el trazo de la gráfica de f, para $f(x) = \log_3 x$.

SOLUCIÓN Se explican tres métodos para dicho trazo de la gráfica.

Método 1 Como las funciones expresadas por $\log_3 x$ y 3^x son inversas entre sí, se procede como se hizo para $y = \log_a x$ en la Fig. 5.18; es decir, primero se hace la gráfica de $y = 3^x$ y después se refleja en la recta $y = x$. Con ello se obtiene el esquema de la Fig. 5.19. Nótese que los puntos $(-1, 3^{-1})$, (0,1) y (1,3) de la gráfica de $y = 3^x$ se reflejan en los puntos $(3^{-1}, -1)$, (1, 0) y (3, 1) de la gráfica de $y = \log_3 x$.

FIGURA 5.19



Método 2 Se pueden determinar puntos en la gráfica de $y = \log_3 x$ haciendo que $x = 3^k$, donde k es un número real y, a continuación, aplicar la propiedad (3) de los logaritmos, pág. 286 como sigue:

Con esta fórmula, se obtienen los puntos de la gráfica que se ve en la tabla siguiente:

$x = 3^k$	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^0	3^1	3^2	3^3
$y = \log_3 x = k$	−3	−2	−1	0	1	2	3

Con ello se encuentran los mismos puntos que se obtuvieron con el primer método.

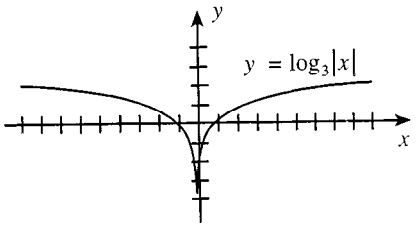
Método 3 Se puede trazar la gráfica de $y = \log_3 x$ graficando la forma exponencial $x = 3^y$.

Como se ve en los ejemplos que siguen, con frecuencia es conveniente trazar la gráfica de $f(x) = \log_a u$, donde u es una expresión donde aparece x.

EJEMPLO 6 *Tazo de la gráfica de una función logarítmica*

Trazar la gráfica de f, para $f(x) = \log_3 |x|$ y $x \neq 0$.

FIGURA 5.20



SOLUCIÓN La gráfica es simétrica con respecto al eje y, puesto que

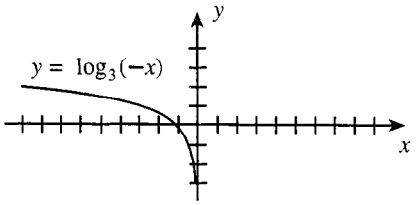
$$f(-x) = \log_3 |-x| = \log_3 |x| = f(x).$$

Si $x > 0$, entonces $|x| = x$, y la gráfica coincide con la de $y = \log_3 x$ que se ve en la Fig. 5.19. Mediante la simetría, se refleja esa parte de la gráfica en el eje y; se tiene así el esquema de la Fig. 5.20.

EJEMPLO 7 *Reflejar la gráfica de una función logarítmica*

Trazar la gráfica de f, para $f(x) = \log_3(-x)$.

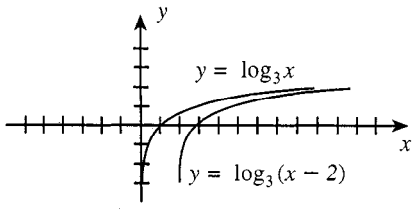
FIGURA 5.21



SOLUCIÓN El dominio de f es el conjunto de los números reales negativos, ya que $\log_3(-x)$ sólo existe si $-x > 0$ o bien, lo que es lo mismo, $x < 0$. Se obtiene la gráfica de f a partir de la de $y = \log_3 x$ remplazando cada punto (x,y) de la Fig. 5.19 por $(-x, y)$. Esto equivale a reflejar la gráfica de $y = \log_3 x$ en el eje y. La gráfica se ve en la Fig. 5.21.

Otro método es pasar $y = \log_3(-x)$ a la forma exponencial, $3^y = -x$, para después trazar la gráfica de $x = -3^y$.

FIGURA 5.22



EJEMPLO 8 *Desplazamiento de gráficas de ecuaciones logarítmicas*

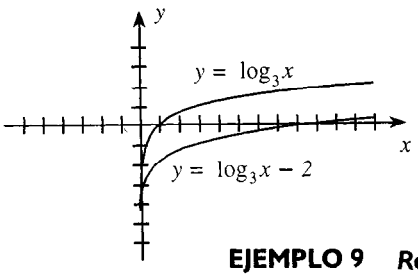
Trazar la gráfica de la ecuación:

(a) $y = \log_3 (x - 2)$ **(b)** $y = \log_3 x - 2$

SOLUCIÓN

(a) La gráfica de $y = \log_3 x$ se trazó en la Fig. 5.19, y se vuelve a presentar en la Fig. 5.22. A partir del análisis de los desplazamientos horizontales

FIGURA 5.23



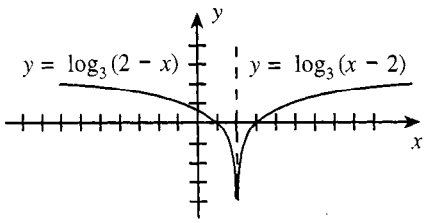
en la Secc. 3.5, se obtuvo la gráfica de $y = \log_3(x - 2)$ al mover la gráfica de $y = \log_3 x$ dos unidades a la derecha, como se ve en la Fig. 5.22.

(b) De acuerdo con el estudio de los desplazamientos verticales en la Secc. 3.5, se obtuvo la gráfica de $y = \log_3 x - 2$ al mover la gráfica de $y = \log_3 x$ dos unidades hacia abajo, como se ve en la Fig. 5.23. Nótese que la abscisa al origen es $\log_3 x = 2$, o bien, $x = 3^2 = 9$.

EJEMPLO 9 *Reflexión de la gráfica de una función logarítmica*

Trazar la gráfica de f, si $f(x) = \log_3(2 - x)$.

FIGURA 5.24



SOLUCIÓN Si se plantea

$$f(x) = \log_3(2 - x) = \log_3[-(x - 2)],$$

entonces, al aplicar la misma técnica con la que se obtuvo la gráfica de la ecuación $y = \log_3(-x)$ en el Ejem. 7, remplazando x por $x - 2$, se tiene que la gráfica de f es la reflexión de la gráfica de $y = \log_3(x - 2)$ en la recta vertical $x = 2$. Esto produce el esquema de la Fig. 5.24.

Otro método es cambiar $y = \log_3(2 - x)$ a la forma exponencial $3^y = 2 - x$ para luego trazar la gráfica de $x = 2 - 3^y$.

Antes de que se inventaran las calculadoras electrónicas, se usaban logaritmos base 10 para cálculos numéricos complicados en donde se manejaban cocientes, productos y potencias de números reales. Se utilizaba la base 10 porque se adapta bien a números que se expresan en notación científica. Los logaritmos de base 10 se llaman **logaritmos comunes**, o logaritmos decimales. Como abreviatura de $\log_{10} x$ se usa el símbolo **log** x (que suele leerse: "log" de x).

Definición de logaritmo común

$$\log x = \log_{10} x \quad \text{para toda} \quad x > 0$$

Debido a que en la actualidad se cuenta con calculadoras poco costosas, no hay necesidad absoluta de recurrir a los logaritmos comunes como medios para calcular. Sin embargo, en las aplicaciones sí se encuentra la base 10 y, por lo tanto, muchas calculadoras tienen una tecla LOG, que se emplea para aproximar los logaritmos comunes.

La función natural exponencial es $f(x) = e^x$ (véase Secc. 5.2). La función logarítmica con base e se llama **función logarítmica natural**. El símbolo **ln** x (que suele leerse "ele ene"de x) es abreviatura de $\log_e x$, y se llama **logaritmo natural de** x. Así, *la función logarítmica natural y la función exponencial natural son funciones inversas entre sí.*

Definición de logaritmo natural

$$\ln x = \log_e x \quad \text{para toda} \quad x > 0$$

Muchas calculadoras tienen una tecla LN, que sirve para aproximar los logaritmos naturales. En el ejemplo ilustrativo que sigue se muestran varios casos de formas equivalentes donde intervienen logaritmos comunes y naturales.

EJEMPLO ILUSTRATIVO

Formas equivalentes

Forma logarítmica	Forma exponencial
❑ $\log x = 2$	$10^2 = x$
❑ $\log z = y + 3$	$10^{y+3} = z$
❑ $\ln x = 2$	$e^2 = x$
❑ $\ln z = y + 3$	$e^{y+3} = z$

Para calcular x cuando se da $\log x$ o bien $\ln x$, se usa la tecla $\boxed{10^x}$, o la tecla $\boxed{e^x}$, respectivamente, en una calculadora, como en el ejemplo que sigue. Si su calculadora tiene la tecla $\boxed{\text{INV}}$ (de inversa), puede teclear x, y a continuación teclear sucesivamente $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{LOG}}$, o bien $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{LN}}$.

EJEMPLO 10 ***Solución de una ecuación logarítmica***

Calcular x si

(a) $\log x = 1.7959$ **(b)** $\ln x = 4.7$

SOLUCIÓN

(a) Pasando $\log x = 1.7959$ a su forma exponencial equivalente se tiene

$$x = 10^{1.7959}.$$

Al evaluar la última expresión con una precisión de tres cifras decimales resulta

$$x \approx 62.503.$$

(b) Pasando $\ln x = 4.7$ a su forma equivalente exponencial se obtiene

$$x = e^{4.7} \approx 109.95.$$

La tabla que sigue es una lista de las formas logarítmicas comunes y naturales para algunas de las propiedades antes mencionadas.

Logaritmos con base a	Logaritmos comunes	Logaritmos naturales
$\log_a 1 = 0$	$\log 1 = 0$	$\ln 1 = 0$
$\log_a a = 1$	$\log 10 = 1$	$\ln e = 1$
$\log_a a^x = x$	$\log 10^x = x$	$\ln e^x = x$
$a^{\log_a x} = x$	$10^{\log x} = x$	$e^{\ln x} = x$

Los tres ejemplos siguientes muestran la aplicación de los logaritmos comunes y naturales.

EJEMPLO 11 ***Escala de Richter***

En la escala de Richter, la magnitud R de un sismo de intensidad I está dada por

$$R = \log \frac{I}{I_0},$$

donde I_0 es cierta intensidad mínima.

Si la intensidad de un sismo es 1 000 I_0, calcular R.
Expresar I en términos de R e I_0.

SOLUCIÓN

(a)

$$R = \log \frac{I}{I_0} \qquad \text{ecuación dada}$$

$$= \log \frac{1000 I_0}{I_0} \qquad \text{sea } I = 1\,000\, I_0$$

$$= \log 1000 \qquad \text{se cancela } I_0$$

$$= \log 10^3 \qquad 1\,000 = 10^3$$

$$= 3 \qquad \log 10^x = x \text{ para toda } x$$

(b)

$$R = \log \frac{I}{I_0} \qquad \text{ecuación dada}$$

$$\frac{I}{I_0} = 10^R \qquad \text{definición de } \log_{10}$$

$$I = I_0 \cdot 10^R \qquad \text{se multiplica por } I_0$$

EJEMPLO 12 *Ley de Newton para el enfriamiento*

Esta ley dice que la rapidez con la cual se enfría un objeto es directamente proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y el medio que lo rodea. Esta ley se emplea para demostrar que, bajo ciertas condiciones, la temperatura T (en °C), de un objeto en el momento t (en horas) es $T = 75e^{-2t}$. Expresar t como función de T.

SOLUCIÓN

$$T = 75e^{-2t} \qquad \text{ecuación dada}$$

$$e^{-2t} = \frac{T}{75} \qquad \text{se aísla la expresión exponencial}$$

$$-2t = \ln \frac{T}{75} \qquad \text{se pasa a la forma logarítmica}$$

$$t = -\frac{1}{2} \ln \frac{T}{75} \qquad \text{se divide entre } -2$$

EJEMPLO 13 *Semivida (o "vida media") de una sustancia radiactiva*

Un investigador observa que una sustancia radiactiva desconocida indica 2 000 cuentas por minuto en un contador Geiger. Diez días después ve que indica 1 500 cuentas por minuto. Mediante el Cálculo se puede demostrar que al cabo de t días la cantidad de material radiactivo y, por consiguiente, el número de cuentas por minuto, $N(t)$, es directamente proporcional a e^{ct} para cierta c constante. Determinar la semivida de la sustancia.

SOLUCIÓN Como $N(t)$ es directamente proporcional a e^{ct},

$$N(t) = ke^{ct},$$

en la cual k es una constante. Haciendo $t = 0$ y empleando $N(0) = 2\,000$, se tiene

$$2000 = ke^{c0} = k \cdot 1 = k.$$

Por lo tanto, la fórmula para $N(t)$ se puede escribir

$$N(t) = 2000e^{ct}.$$

Como $N(10) = 1\,500$, es posible calcular c como sigue:

$$\begin{aligned} 1500 &= 2000e^{c \cdot 10} && \text{sea } t = 10 \text{ en } N(t) \\ \tfrac{3}{4} &= e^{10c} && \text{se divide entre 2 000 y se simplifica} \\ 10c &= \ln \tfrac{3}{4} && \text{se pasa a la forma logarítmica} \\ c &= \tfrac{1}{10} \ln \tfrac{3}{4} && \text{se divide entre 10} \end{aligned}$$

Por último, como la semivida es el tiempo t al cual $N(t)$ se reduce a la mitad, 1 000, entonces

$$\begin{aligned} 1000 &= 2000e^{ct} && \text{sea } N(t) = 1\,000 \\ \tfrac{1}{2} &= e^{ct} && \text{se divide entre 2 000} \\ ct &= \ln \tfrac{1}{2} && \text{se pasa a una forma logarítmica} \\ t &= \frac{1}{c} \ln \frac{1}{2} && \text{se divide entre } c \\ &= \frac{1}{\frac{1}{10} \ln \frac{3}{4}} \ln \frac{1}{2} && c = \tfrac{1}{10} \ln \tfrac{3}{4} \\ &\approx 24 \text{ días} && \text{se aproxima} \end{aligned}$$

EJERCICIOS 5.3

Ejercicios 1 y 2: Pase a la forma logarítmica.

1 **(a)** $4^3 = 64$ **(b)** $4^{-3} = \frac{1}{64}$ **(c)** $t^r = s$
(d) $3^x = 4 - t$ **(e)** $5^{7t} = \dfrac{a+b}{a}$ **(f)** $(0.7)^t = 5.3$

2 **(a)** $3^5 = 243$ **(b)** $3^{-4} = \frac{1}{81}$ **(c)** $c^p = d$
(d) $7^x = 100p$ **(e)** $3^{-2x} = \dfrac{P}{F}$ **(f)** $(0.9)^t = \frac{1}{2}$

Ejercicios 3 y 4: Cambie a la forma exponencial.

3 **(a)** $\log_2 32 = 5$ **(b)** $\log_3 \frac{1}{243} = -5$
(c) $\log_t r = p$ **(d)** $\log_3 (x + 2) = 5$
(e) $\log_2 m = 3x + 4$ **(f)** $\log_b 512 = \frac{3}{2}$

4 **(a)** $\log_3 81 = 4$ **(b)** $\log_4 \frac{1}{256} = -4$
(c) $\log_v w = q$ **(d)** $\log_6 (2x - 1) = 3$
(e) $\log_4 p = 5 - x$ **(f)** $\log_a 343 = \frac{3}{4}$

Ejercicios 5–8: Despeje t mediante logaritmos con base a.

5 $2a^{t/3} = 5$ **6** $3a^{4t} = 10$

7 $A = Ba^{Ct} + D$ **8** $L = Ma^{t/N} - P$

Ejercicios 9 y 10: Pase a la forma logarítmica.

9 **(a)** $10^5 = 100{,}000$ **(b)** $10^{-3} = 0.001$
(c) $10^x = y + 1$ **(d)** $e^7 = p$
(e) $e^{2t} = 3 - x$

10 **(a)** $10^4 = 10{,}000$ **(b)** $10^{-2} = 0.01$
(c) $10^x = 38z$ **(d)** $e^4 = D$
(e) $e^{0.1t} = x + 2$

Ejercicios 11 y 12: Cambie a la forma exponencial.

11 **(a)** $\log x = 50$ **(b)** $\log x = 20t$
(c) $\ln x = 0.1$ **(d)** $\ln w = 4 + 3x$
(e) $\ln (z - 2) = \frac{1}{6}$

12 **(a)** $\log x = -8$ **(b)** $\log x = y - 2$
(c) $\ln x = \frac{1}{2}$ **(d)** $\ln z = 7 + x$
(e) $\ln (t - 5) = 1.2$

Ejercicios 13 y 14: Calcule el número, de ser posible.

13 **(a)** $\log_5 1$ **(b)** $\log_3 3$ **(c)** $\log_4 (-2)$
(d) $\log_7 7^2$ **(e)** $3^{\log_3 8}$ **(f)** $\log_5 125$
(g) $\log_4 \frac{1}{16}$

14 **(a)** $\log_8 1$ **(b)** $\log_9 9$ **(c)** $\log_5 0$
(d) $\log_6 6^7$ **(e)** $5^{\log_5 4}$ **(f)** $\log_3 243$
(g) $\log_2 128$

Ejercicios 15 y 16: Calcule el número.

15 **(a)** $10^{\log 3}$ **(b)** $\log 10^5$ **(c)** $\log 100$
(d) $\log 0.0001$ **(e)** $e^{\ln 2}$ **(f)** $\ln e^{-3}$
(g) $e^{2 + \ln 3}$

16 **(a)** $10^{\log 7}$ **(b)** $\log 10^{-6}$ **(c)** $\log 100{,}000$
(d) $\log 0.001$ **(e)** $e^{\ln 8}$ **(f)** $\ln e^{2/3}$
(g) $e^{1 + \ln 5}$

Ejercicios 17 – 30: Resuelva la ecuación.

17 $\log_4 x = \log_4 (8 - x)$

18 $\log_3 (x + 4) = \log_3 (1 - x)$

19 $\log_5 (x - 2) = \log_5 (3x + 7)$

20 $\log_7 (x - 5) = \log_7 (6x)$

21 $\log x^2 = \log (-3x - 2)$ **22** $\ln x^2 = \ln (12 - x)$

23 $\log_3 (x - 4) = 2$ **24** $\log_2 (x - 5) = 4$

25 $\log_9 x = \frac{3}{2}$ **26** $\log_4 x = -\frac{3}{2}$

27 $\ln x^2 = -2$ **28** $\log x^2 = -4$

29 $e^{2 \ln x} = 9$ **30** $e^{-\ln x} = 0.2$

31 Trace la gráfica de f, para $a = 4$:
(a) $f(x) = \log_a x$ **(b)** $f(x) = -\log_a x$
(c) $f(x) = 2 \log_a x$ **(d)** $f(x) = \log_a (x + 2)$
(e) $f(x) = (\log_a x) + 2$ **(f)** $f(x) = \log_a (x - 2)$
(g) $f(x) = (\log_a x) - 2$ **(h)** $f(x) = \log_a |x|$
(i) $f(x) = \log_a (-x)$ **(j)** $f(x) = \log_a (3 - x)$
(k) $f(x) = |\log_a x|$

32 Repita el Ejercicio 31 con $a = 5$.

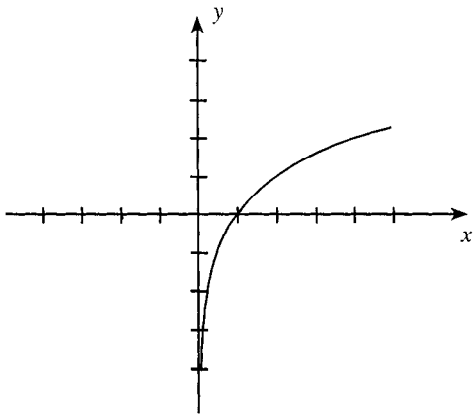
Ejercicios 33–36: Trace la gráfica de f.

33 $f(x) = \log x$ **34** $f(x) = \ln x$

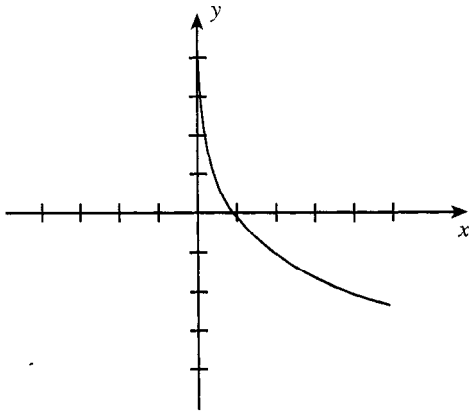
35 $f(x) = \log_2 |x - 5|$ **36** $f(x) = \log_3 |x + 1|$

Ejercicios 37–44: En la figura se muestra la gráfica de una función f. Exprese $f(x)$ en términos de logaritmos base 2.

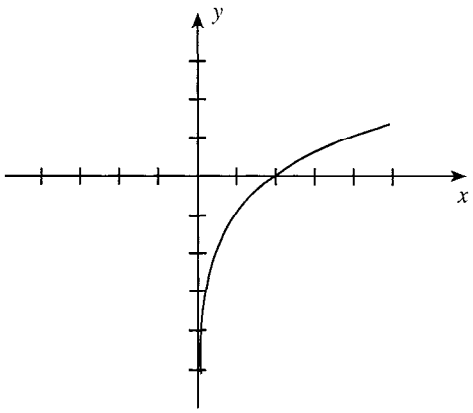
37



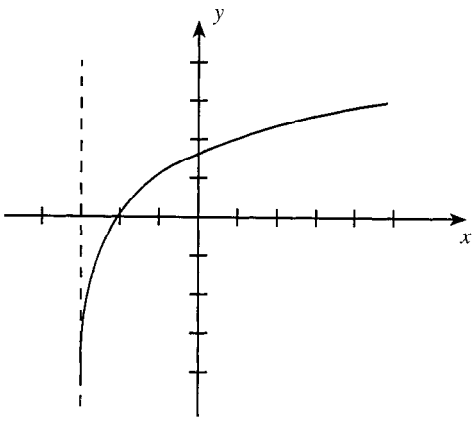
38



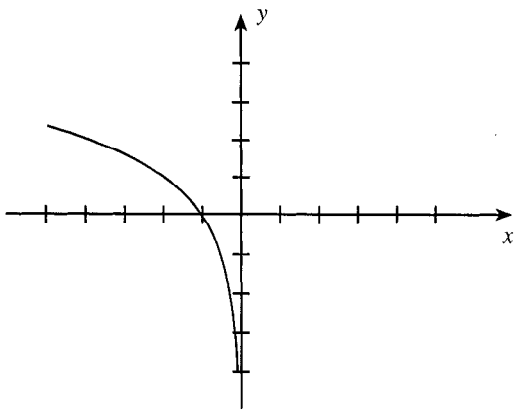
39



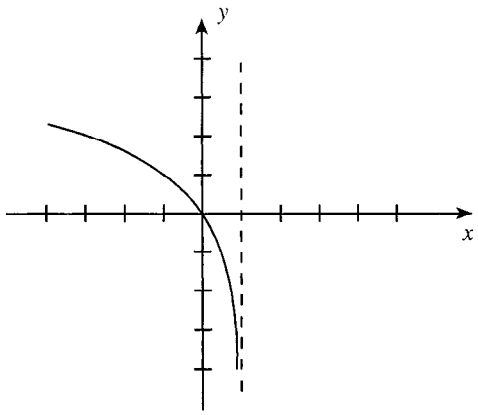
40



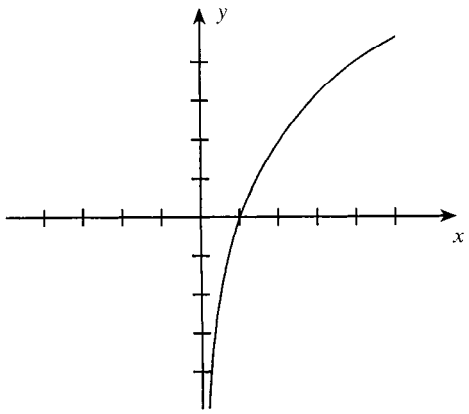
41



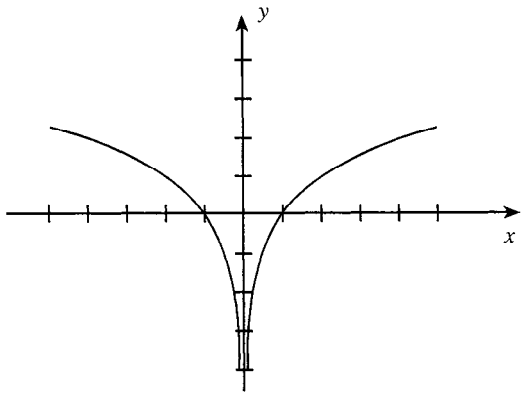
42



43



44



Ejercicios 45 y 46: Calcule x con tres cifras significativas.

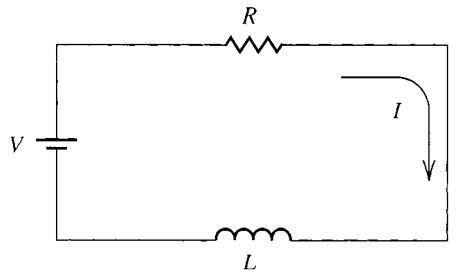
45 **(a)** $\log x = 3.6274$ **(b)** $\log x = 0.9469$
(c) $\log x = -1.6253$ **(d)** $\ln x = 2.3$
(e) $\ln x = 0.05$ **(f)** $\ln x = -1.6$

46 **(a)** $\log x = 1.8965$ **(b)** $\log x = 4.9680$
(c) $\log x = -2.2118$ **(d)** $\ln x = 3.7$
(e) $\ln x = 0.95$ **(f)** $\ln x = -5$

47 ***Desintegración del radio (Ra)*** Si se comienza con q_0 miligramos de radio, la cantidad q que queda al transcurrir t años es $q = q_0(2)^{-t/1600}$. Exprese t en términos de q y q_0.

48 ***Desintegración de un isótopo de bismuto*** El isótopo radiactivo del bismuto, ^{210}Bi, se desintegra según la ecuación $Q = k(2)^{-t/5}$, donde k es una constante y t el tiempo en días. Exprese t en términos de Q y k.

49 ***Circuito eléctrico*** En la figura se muestra un esquema de un circuito eléctrico simple formado por un resistor y un inductor. La corriente, I, en el instante es t, es $I = 20e^{-Rt/L}$, donde R es la resistencia y L la inductancia. Despeje t de esta ecuación.



50 ***Condensador eléctrico*** Se deja descargar un condensador o capacitor que tiene una carga inicial Q_0. Después de t segundos, la carga es $Q = Q_0e^{kt}$, donde k es una constante. Despeje t de esta ecuación.

51 ***Escala de Richter*** Use la fórmula de la escala de Richter, $R = \log(I/I_0)$, para calcular la magnitud de un sismo que tiene una intensidad
(a) 100 veces la de I_0
(b) 10 000 veces la de I_0
(c) 100 000 veces la de I_0

52 ***Escala de Richter*** En el Ejercicio 51, las magnitudes máximas registradas de sismos han sido entre 8 y 9. Calcule las intensidades correspondientes en términos de I_0.

53 ***Intensidad del sonido*** El volumen de un sonido, de acuerdo con el oído humano, se basa en su nivel de intensidad. Una fórmula que se usa para calcular el nivel de intensidad α, en decibels (dB), que corresponde a una intensidad sonora I es $\alpha = 10\log(I/I_0)$, en la cual I_0 es un valor especial de I que se toma como el sonido más débil que puede detectar el oído humano en ciertas condiciones. Calcule α si
(a) I es 10 veces mayor que I_0.
(b) I es 1 000 veces mayor que I_0.
(c) I es 10 000 veces mayor que I_0. (Esta es el nivel de intensidad de la voz humana promedio.)

54 ***Intensidad del sonido*** En relación con el Ejercicio 53, una intensidad sonora de 140 dB produce dolor en el oído humano promedio. Aproximadamente, ¿cuántas veces mayor que I_0 debe ser I para que α alcance esta intensidad?

55 ***Crecimiento de la población*** La población $N(t)$ en millones de habitantes de Estados Unidos, t años después de 1980, puede aproximarse mediante la fórmula $N(t) = 227e^{0.007t}$. ¿Cuándo se duplicará la población, respecto a la de 1980?

56 ***Crecimiento de población en la India*** La población $N(t)$ en millones de habitantes en la India, t años después de 1985, se puede aproximar mediante la fórmula $N(t) = 762e^{0.022t}$. ¿Cuándo llegará esa población a los 1 000 millones?

57 ***Peso de los niños*** La ecuación de Ehrenberg,

$$\ln W = \ln 2.4 + (1.84)\ln h$$

es una fórmula empírica que relaciona la estatura h, en metros, con el peso promedio W, en kilogramos, para niños de 5 a 13 años de edad.
(a) Exprese W como función de h, que no contenga el ln.
(b) Estime el peso promedio de un niño de 8 años de 1.5 m de estatura.

58 ***Interés compuesto continuamente*** Si se compone el interés continuamente a la tasa de 10% anual, calcule aproximadamente el número de años que se necesitarán para que un depósito inicial de \$6 000 llegue a \$25 000.

59 ***Presión del aire*** La presión atmosférica $p(h)$, en lb/pulg^2, a una altitud de h pies sobre el nivel del mar, se puede aproximar con la fórmula $p(h) = 14.7e^{-0.0000385h}$ Aproximadamente, ¿a qué altitud, h, la presión atmosférica es
(a) 10 lb/pulg^2? **(b)** la mitad de su valor al nivel del mar?

60 ***Presión de vapor*** La presión de vapor P de un líquido en lb/pulg^2, es una medida de su volatilidad, y se relaciona con su temperatura T, en °F, mediante la ecuación de Antoine

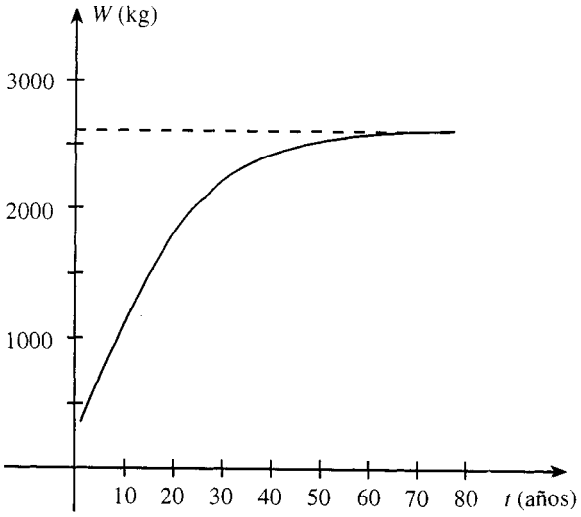
$$\log P = a + \frac{b}{c + T},$$

en la cual a, b y c son constantes. La presión de vapor aumenta rápidamente al aumentar la temperatura. Exprese P como función de T.

61 ***Crecimiento de un elefante*** El peso W, en kilogramos, de una elefanta africana a la edad de t años se puede calcular aproximadamente con la fórmula

(a) Aproxime el peso al nacer.

(b) Estime la edad de una elefanta africana que pesa 1 800 kg, empleando (1) la gráfica siguiente y (2) la fórmula para W.



62 ***Consumo de carbón*** Un país cuenta actualmente con reservas de carbón de 50 millones de toneladas. El año pasado consumió 6.5 millones de toneladas. Los datos pasados y las proyecciones de la población sugieren que la rapidez de consumo R, en millones de toneladas por año, aumentará según $R = 6.5e^{0.02t}$, y que la cantidad total T de carbón, en millones de toneladas, que se usará a los t años, será $T = 325(e^{0.02t} - 1)$. Si el país sólo usa sus propios recursos, ¿cuándo se agotarán sus reservas de carbón?

63 ***Densidad de población urbana*** Un modelo de densidad urbana es una fórmula que relaciona la densidad de población D, en miles/mi^2, con la distancia x, en millas al centro de la ciudad. Se ha encontrado que la fórmula $D = ae^{-bx}$ para la densidad a en el centro y el coeficiente b, son válidos para muchas ciudades grandes estadounidenses. Para la ciudad de Atlanta en 1970, $a = 5.5$ y $b = 0.10$. ¿Aproximadamente a qué distancia la densidad de población era 2 000 por milla cuadrada?

64 ***Brillo de las estrellas*** Las estrellas se clasifican en categorías de brillo llamadas magnitudes. A las estrellas más débiles, con un flujo luminoso L_0, se les asigna una magnitud 6. Las estrellas más brillantes, de flujo luminoso L, tienen asignada una magnitud m de acuerdo con la fórmula

$$m = 6 - (2.5)\log\frac{L}{L_0}.$$

(a) Calcule m, si $L = 10^{0.4}L_0$.

(b) Despeje L de la fórmula en términos de m y L_0.

65 ***Desintegración del yodo radiactivo*** El yodo radiactivo, ^{131}I, se usa con frecuencia en estudios de trazadores de la glándula tiroides. Este elemento se desintegra según la fórmula $A(t) = A_0a^{-t}$, donde A_0 es la dosis inicial y t el tiempo en días. Calcule a, suponiendo que la semivida ("vida media") del ^{131}I es 8 días.

66 ***Contaminación radiactiva*** El estroncio radiactivo, ^{90}Sr, se ha depositado en una gran extensión a través de la lluvia ácida. Si cantidades suficientes de él llegan, por la cadena alimenticia, a los seres humanos, puede provocar cáncer en los huesos. Se ha determinado que el nivel de radiactividad en el campo es 2.5 veces el nivel de seguridad, S. El ^{90}Sr se desintegra según la ecuación

$$A(t) = A_0e^{-0.0239t},$$

en la cual A_0 es la cantidad que hay en este momento en el campo, y t es el tiempo en años. ¿Durante cuántos años estará contaminado el campo?

67 ***Velocidad de caminar*** En una encuesta de 15 ciudades cuya población P varía de 300 a 300 000, se encontró que la rapidez promedio de caminamiento (en el andar) S, en pies/s, de una persona, puede aproximarse mediante la ecuación $S = 0.05 + 0.86 \log P$.

(a) ¿Qué tanto afecta la población a la velocidad promedio de caminamiento (en el andar)?

(b) ¿Para qué población la velocidad promedio de caminamiento (en el andar) es 5 pies/s?

Ejercicios 68–69: (a) Demuestre que f asume valores positivos y negativos en el intervalo [1, 2]. (b) Use el método del Ejercicio 67 de la Secc. 2.5, con $x_1 = 1.5$, para aproximar un cero o raíz de f con exactitud de dos cifras decimales.

68 $f(x) = x - 2 + \log x$

69 $f(x) = \log x - 10^{-x}$ (*Sugerencia:* Despeje x en $\log x$.)

ESCUELA POLITÉ... BIBLI...

5.4 PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

En la sección anterior se estudió que $\log_a x$ se puede interpretar como un exponente. De este modo, parece razonable esperar que las leyes de los exponentes puedan servir para obtener las leyes correspondientes de los logaritmos. Esto se observa en las demostraciones de las leyes que se exponen a continuación, y que son fundamentales para todo trabajo con logaritmos.

Leyes de los logaritmos

Si u y w representan números reales positivos, entonces

(1) $\log_a (uw) = \log_a u + \log_a w$

(2) $\log_a \dfrac{u}{w} = \log_a u - \log_a w$

(3) $\log_a (u^c) = c \log_a u$ para todo número real c

DEMOSTRACIÓN En toda la demostración se emplea

$$r = \log_a u \quad \text{y} \quad s = \log_a w.$$

Aplicando la definición de logaritmo, se tiene que

$$u = a^r \quad \text{y} \quad w = a^s$$

Ahora se procede como sigue:

(1)

$$uw = a^r a^s \qquad u = a^r \text{ y } w = a^s$$

$$uw = a^{r+s} \qquad \text{ley de los exponentes}$$

$$\log_a uw = r + s \qquad \text{definición de } \log_a$$

$$\log_a uw = \log_a u + \log_a w \qquad r = \log_a u,\ s = \log_a w$$

(2)

$$\frac{u}{w} = \frac{a^r}{a^s} \qquad u = a^r \text{ y } w = a^s$$

$$\frac{u}{w} = a^{r-s} \qquad \text{ley de los exponentes}$$

$$\log_a \frac{u}{w} = r - s \qquad \text{definición de } \log_a$$

$$\log_a \frac{u}{w} = \log_a u - \log_a w \qquad r = \log_a u,\ s = \log_a w$$

(3)

$$u^c = (a^r)^c \qquad u = a^r$$

$$u^c = a^{cr} \qquad \text{ley de los exponentes}$$

$$\log_a u^c = cr \qquad \text{definición de } \log_a$$

$$\log_a u^c = c \log_a u \qquad r = \log_a u \quad \blacksquare$$

Las leyes de los logaritmos, para los casos especiales con $a = 10$ (logaritmos comunes o decimales) y $a = e$ (logaritmos naturales) se resumen en la tabla siguiente:

Logaritmos comunes	Logaritmos naturales
$\log (uw) = \log u + \log w$	$\ln (uw) = \ln u + \ln w$
$\log \frac{u}{w} = \log u - \log w$	$\ln \frac{u}{w} = \ln u - \ln w$
$\log (u^c) = c \log u$	$\ln (u^c) = c \ln u$

Como lo indica el siguiente cuadro de advertencias, no hay leyes generales para expresar $\log_a (u + w)$, ni $\log_a (u - w)$ en términos de logaritmos más simples. Las expresiones del lado derecho corresponden a $\log_a uw$ y $\log_a \frac{u}{w}$, respectivamente.

☞ **Advertencias**

$$\log_a (u + w) \neq \log_a u + \log_a w; \quad \log_a (u - w) \neq \log_a u - \log_a w$$

Los ejemplos siguientes muestran aplicaciones de las leyes de los logaritmos

EJEMPLO 1 ***Uso de las leyes de logaritmos***

Expresar $\log_a \frac{x^3\sqrt{y}}{z^2}$ en términos de los logaritmos de x, y y z.

SOLUCIÓN Se escribe $\sqrt{y}$ en la forma $y^{1/2}$ y se usan las leyes de los logaritmos:

$$\begin{aligned} \log_a \frac{x^3\sqrt{y}}{z^2} &= \log_a (x^3 y^{1/2}) - \log_a z^2 && \text{ley (2)} \\ &= \log_a x^3 + \log_a y^{1/2} - \log_a z^2 && \text{ley (1)} \\ &= 3 \log_a x + \tfrac{1}{2} \log_a y - 2 \log_a z && \text{ley (3)} \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 ***Uso de las leyes de los logaritmos***

Expresar como un logaritmo:

$$\tfrac{1}{3} \log_a (x^2 - 1) - \log_a y - 4 \log_a z$$

SOLUCIÓN Se aplican como sigue las leyes de los logaritmos:

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{3} \log_a (x^2 - 1) - \log_a y - 4 \log_a z \\ &\quad = \log_a (x^2 - 1)^{1/3} - \log_a y - \log_a z^4 && \text{ley (3)} \\ &\quad = \log_a \sqrt[3]{x^2 - 1} - (\log_a y + \log_a z^4) && \text{álgebra} \\ &\quad = \log_a \sqrt[3]{x^2 - 1} - \log_a (yz^4) && \text{ley (1)} \\ &\quad = \log_a \frac{\sqrt[3]{x^2 - 1}}{yz^4} && \text{ley (2)} \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 ***Resolución de una ecuación logarítmica***

Resolver la ecuación $\log_5(2x + 3) = \log_5 11 + \log_5 3$.

SOLUCIÓN

$\log_5 (2x + 3) = \log_5 11 + \log_5 3$	ecuación dada
$\log_5 (2x + 3) = \log_5 (11 \cdot 3)$	ley (1)
$\log_5 (2x + 3) = \log_5 33$	se multiplica
$2x + 3 = 33$	las funciones logarítmicas son biunívocas
$2x = 30$	se resta 3
$x = 15$	se divide entre 2

✓ ***Comprobación*** $x = 15$ Primer miembro: $\log_5 (2 \cdot 15 + 3) = \log_5 33$

Segundo miembro: $\log_5 11 + \log_5 3 = \log_5 (11 \cdot 3) = \log_5 33$

Como $\log_5 33 = \log_5 33$ es una proposición cierta, $x = 15$ es una solución.

Las leyes de los logaritmos se demostraron para logaritmos de números reales *positivos* u y w. Si se aplican a ecuaciones en las que u y w sean expresiones donde interviene una variable, pueden presentarse soluciones extrañas. Por esta razón se deben sustituir las variables calculadas en u y w para determinar si estas expresiones están definidas.

EJEMPLO 4 ***Solución de una ecuación logarítmica***

Resolver la ecuación $\log_2 x + \log_2 (x + 2) = 3$.

SOLUCIÓN

$\log_2 x + \log_2 (x + 2) = 3$	ecuación dada
$\log_2 [x(x + 2)] = 3$	ley (1)
$x(x + 2) = 2^3$	definición de logaritmo
$x^2 + 2x - 8 = 0$	se simplifica
$(x - 2)(x + 4) = 0$	se factoriza
$x - 2 = 0, \quad x + 4 = 0$	se iguala a 0 cada factor
$x = 2, \quad x = -4$	se despeja x

✓ ***Comprobación*** $x = 2$ Primer miembro: $\log_2 2 + \log_2 (2 + 2) = 1 + \log_2 4$

$= 1 + \log_2 2^2 = 1 + 2 = 3$

Segundo miembro: 3

Como $3 = 3$ es una proposición verdadera, $x = 2$ es una solución.

✓ ***Comprobación*** $x = -4$ Primer miembro: $\log_2(-4) + \log_2 (-4 + 2)$

Como no están definidos los logaritmos de números negativos, $x = -4$ no es una solución.

EJEMPLO 5 ***Solución de una ecuación logarítmica***

Resolver la ecuación $\ln (x + 6) - \ln 10 = \ln (x - 1) - \ln 2$.

SOLUCIÓN

$$\ln (x + 6) - \ln (x - 1) = \ln 10 - \ln 2 \qquad \text{se reacomodan los términos}$$

$$\ln \left(\frac{x + 6}{x - 1}\right) = \ln \frac{10}{2} \qquad \text{ley (2)}$$

$$\frac{x + 6}{x - 1} = 5 \qquad \ln \text{ es biunívoco}$$

$$x + 6 = 5x - 5 \qquad \text{se multiplica por } x - 1$$

$$4x = 11 \qquad \text{se resta } x \text{ y se suma 5}$$

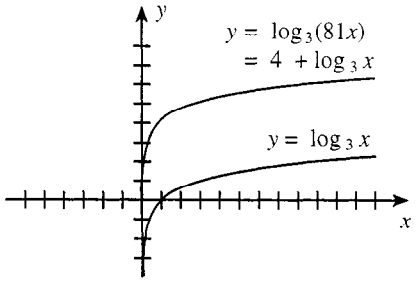
$$x = \tfrac{11}{4} \qquad \text{se divide entre 4}$$

✓ ***Comprobación*** Como tanto $\ln (x + 6)$ como $\ln (x - 1)$ están definidos cuando $x = \frac{11}{4}$ (son logaritmos de números reales positivos) y como los pasos algebraicos son correctos, entonces $\frac{11}{4}$ es una solución de la ecuación dada.

EJEMPLO 6 ***Desplazamiento de la gráfica de una ecuación logarítmica***

Trazar la gráfica de $y = \log_3 (81x)$.

FIGURA 5.25



SOLUCIÓN Se puede reformular la ecuación como sigue:

$$y = \log_3 (81x) \qquad \text{ecuación dada}$$

$$= \log_3 81 + \log_3 x \qquad \text{ley (1)}$$

$$= \log_3 3^4 + \log_3 x \qquad 81 = 3^4$$

$$= 4 + \log_3 x \qquad \log_a a^x = x$$

Así se obtiene la gráfica de $y = \log_3 (81x)$ desplazando verticalmente la gráfica de $y = \log_3 x$ en la Fig. 5.19 cuatro unidades hacia arriba. Con ello resulta la Fig. 5.25.

EJEMPLO 7 ***Trazo de gráficas de ecuaciones logarítmicas***

Trazar la gráfica de la ecuación:

(a) $y = \log_3 (x^2)$ **(b)** $y = 2 \log_3 x$

SOLUCIÓN

(a) Como $x^2 = |x|^2$, se reescribe la ecuación dada como sigue

$$y = \log_3 |x|^2.$$

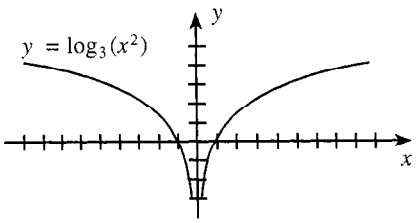
Por medio de una de las leyes de los logaritmos,

$$y = 2 \log_3 |x|.$$

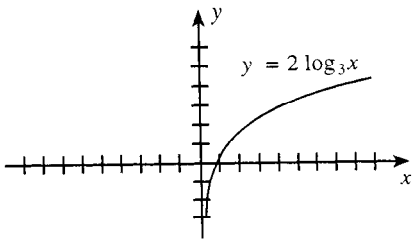
(continúa)

FIGURA 5.26

(a)



(b)



La gráfica de $y = 2 \log_3 |x|$ se obtiene multiplicando por 2 las ordenadas de los puntos de la gráfica de $y = \log_3 |x|$ de la Fig. 5.20. Con esto se llega a la gráfica de la Fig. 5.26(a).

(b) Si $y = 2 \log_3 x$, entonces x debe ser positiva. Por consiguiente, la gráfica es idéntica a la parte de la gráfica de $y = 2 \log_3 |x|$ de la Fig. 5.26(a) que queda a la derecha del eje y. Resulta así la Fig. 5.26(b).

EJEMPLO 8 *Relación entre precio de venta y demanda*

En economía, la demanda D de un producto se relaciona con frecuencia con su precio de venta p, mediante una ecuación de la forma

$$\log_a D = \log_a c - k \log_a p,$$

en la cual a, c y k son constantes positivas.

(a) Despejar D de esta ecuación.

(b) ¿Cómo afecta a la demanda el aumento o disminución del precio de venta?

SOLUCIÓN

(a)

$$\log_a D = \log_a c - k \log_a p \qquad \text{ecuación dada}$$

$$\log_a D = \log_a c - \log_a p^k \qquad \text{ley (3)}$$

$$\log_a D = \log_a \frac{c}{p^k} \qquad \text{ley (2)}$$

$$D = \frac{c}{p^k} \qquad \log_a \text{ es biunívoco}$$

(b) Si se eleva el precio p también aumentará el denominador p^k en $D = c/p^k$ y, por consiguiente, la demanda D del producto disminuirá. Si el precio desciende, entonces p^k aumentará y también crecerá la demanda D.

EJERCICIOS 5.4

Ejercicios 1–8: Exprese en términos de los logaritmos de x, y, z, w.

1 **(a)** $\log_4 (xz)$ **(b)** $\log_4 (y/x)$ **(c)** $\log_4 \sqrt[3]{z}$

2 **(a)** $\log_3 (xyz)$ **(b)** $\log_3 (xz/y)$ **(c)** $\log_3 \sqrt[5]{y}$

3 $\log_a \dfrac{x^3 w}{y^2 z^4}$

4 $\log_a \dfrac{y^5 w^2}{x^4 z^3}$

5 $\log \dfrac{\sqrt[3]{z}}{x\sqrt{y}}$

6 $\log \dfrac{\sqrt{y}}{x^4 \sqrt[3]{z}}$

7 $\ln \sqrt[4]{\dfrac{x^7}{y^5 z}}$

8 $\ln x \sqrt[3]{\dfrac{y^4}{z^5}}$

Ejercicios 9–16: Escriba la expresión en forma de un logaritmo.

9 **(a)** $\log_3 x + \log_3 (5y)$ **(b)** $\log_3 (2z) - \log_3 x$ **(c)** $5 \log_3 y$

10 **(a)** $\log_4 (3z) + \log_4 x$ **(b)** $\log_4 x - \log_4 (7y)$ **(c)** $\frac{1}{3} \log_4 w$

11 $2 \log_a x + \frac{1}{3} \log_a (x - 2) - 5 \log_a (2x + 3)$

12 $5 \log_a x - \frac{1}{2} \log_a (3x - 4) - 3 \log_a (5x + 1)$

13 $\log (x^3 y^2) - 2 \log x \sqrt[3]{y} - 3 \log \left(\frac{x}{y}\right)$

14 $2 \log \frac{y^3}{x} - 3 \log y + \frac{1}{2} \log x^4 y^2$

15 $\ln y^3 + \frac{1}{3} \ln (x^3 y^6) - 5 \ln y$

16 $2 \ln x - 4 \ln (1/y) - 3 \ln (xy)$

Ejercicios 17 – 32: Resuelva la ecuación.

17 $\log_6 (2x - 3) = \log_6 12 - \log_6 3$

18 $\log_4 (3x + 2) = \log_4 5 + \log_4 3$

19 $2 \log_3 x = 3 \log_3 5$

20 $3 \log_2 x = 2 \log_2 3$

21 $\log x - \log (x + 1) = 3 \log 4$

22 $\log (x + 2) - \log x = 2 \log 4$

23 $\ln (-4 - x) + \ln 3 = \ln (2 - x)$

24 $\ln x + \ln (x + 6) = \frac{1}{2} \ln 9$

25 $\log_2 (x + 7) + \log_2 x = 3$

26 $\log_6 (x + 5) + \log_6 x = 2$

27 $\log_3 (x + 3) + \log_3 (x + 5) = 1$

28 $\log_3 (x - 2) + \log_3 (x - 4) = 2$

29 $\log (x + 3) = 1 - \log (x - 2)$

30 $\log (57x) = 2 + \log (x - 2)$

31 $\ln x = 1 - \ln (x + 2)$

32 $\ln x = 1 + \ln (x + 1)$

Ejercicios 33 – 44: Trace la gráfica de f.

33 $f(x) = \log_3 (3x)$

34 $f(x) = \log_4 (16x)$

35 $f(x) = 3 \log_3 x$

36 $f(x) = \frac{1}{3} \log_3 x$

37 $f(x) = \log_3 (x^2)$

38 $f(x) = \log_2 (x^2)$

39 $f(x) = \log_2 (x^3)$

40 $f(x) = \log_3 (x^3)$

41 $f(x) = \log_2 \sqrt{x}$

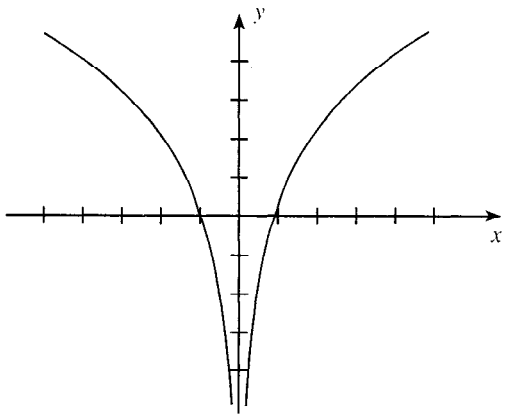
42 $f(x) = \log_2 \sqrt[3]{x}$

43 $f(x) = \log_3 \left(\frac{1}{x}\right)$

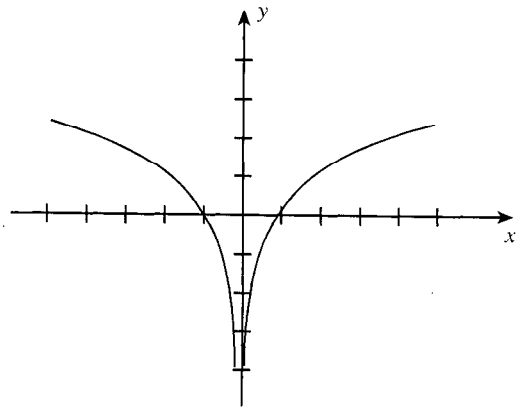
44 $f(x) = \log_2 \left(\frac{1}{x}\right)$

Ejercicios 45 – 48: En la figura se muestra la gráfica de una función, f. Exprese $f(x)$ como logaritmo con base 2.

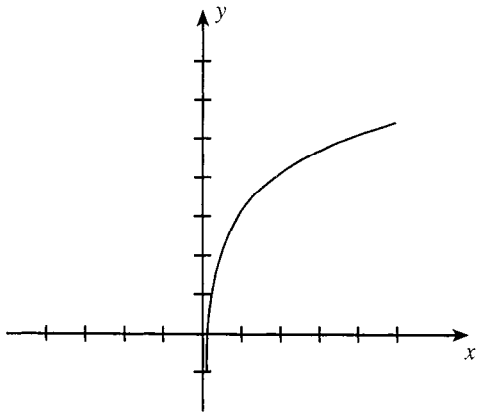
45



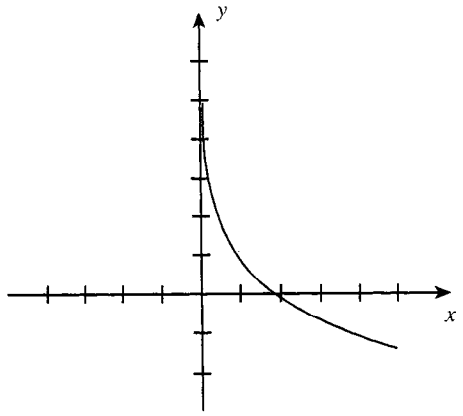
46



47



48



49 ***Ley de Pareto*** La ley de Pareto para países capitalistas, afirma que la relación entre el ingreso anual x y el número y de individuos cuyo ingreso es mayor que x es

$$\log y = \log b - k \log x,$$

donde b y k son constantes positivas. Despeje y de esta ecuación.

50 ***Precio y demanda*** Si p representa al precio de venta de un artículo, y x es la demanda correspondiente, en cantidad vendida por día, entonces la relación entre p y x se puede expresar, algunas veces, mediante $p = p_0 e^{-ax}$, donde p_0 y a son constantes positivas. Exprese x como función de p.

51 ***Velocidad del viento*** Si v representa la velocidad del viento, en m/s, a una altura de z metros sobre el piso, entonces, en ciertas condiciones, $v = c \ln (z/z_0)$, donde c es una constante positiva y z_0 la altura a la cual la velocidad es cero. Trace la gráfica de esta ecuación en un plano zv para el caso $c = 0.5$ y $z_0 = 0.1$ m.

52 ***Eliminación de la contaminación*** Si en forma repentina se detuviera la contaminación del lago Erie, se ha estimado que la concentración y de contaminantes decrecería según la fórmula $y = y_0 e^{-0.3821t}$, donde t es el tiempo en años y y_0 la concentración de contaminantes a la cual cesó la contaminación. ¿Cuántos años pasarían para que desapareciera el 50% de los contaminantes?

53 ***Reacción a un estímulo*** Sea R la reacción de un individuo a un estímulo de intensidad x. Hay muchas posibilidades para R y x. Si el estímulo x es la salinidad (en gramos de sal por litro) R puede ser la estimación de qué tan salobre está la solución con base en una escala de 0 a 10. Una relación entre R y x es la fórmula de Weber-Fechner, $R(x) = a \log (x/x_0)$, donde a es una constante positiva y x_0 el estímulo umbral.

(a) Calcule $R(x_0)$.

(b) Deduzca una relación entre $R(x)$ y $R(2x)$.

54 ***Energía de los electrones*** La energía $E(x)$ de un electrón, después de pasar a través de un material de espesor x, está expresada por $E(x) = E_0 e^{-x/x_0}$, donde E_0 es la energía inicial y x_0 la longitud de radiación.

(a) Exprese, en términos de E_0, la energía de un electrón al pasar a través del material de espesor x_0.

(b) Exprese, en términos de x_0, el espesor al cual el electrón pierde el 99% de su energía inicial.

55 ***Capa de ozono*** Un método para estimar el espesor de la capa de ozono es con la fórmula $\ln I_0 - \ln I = kx$, en la cual I_0 es la intensidad de determinada longitud de onda proveniente del Sol, antes de llegar a la atmósfera, I es la intensidad de la misma longitud de onda después de pasar a través de una capa de ozono de x cm de espesor; k es la constante de absorción del ozono para esa longitud de onda. Suponga que para una longitud de onda de $3\,176 \times 10^{-8}$ cm, con $k \approx 0.39$, I_0/I vale 1.12. Calcule el espesor de la capa de ozono con una precisión de 0.01 cm.

56 ***Capa de ozono*** En el Ejerc. 55, calcule aproximadamente el porcentaje de disminución de la intensidad de la luz de longitud de onda $3\,176 \times 10^{-8}$ cm, si la capa de ozono es de 0.24 cm de espesor.

C **Ejercicios 57 y 58: Grafique f y g en el mismo plano coordenado y estime la solución de la desigualdad $f(x) \geq g(x)$.**

57 $f(x) = x^3 - 3.5x^2 + 3x$; $g(x) = \log 3x$

58 $f(x) = 3^{-0.5x}$; $g(x) = \log x$

C **Ejercicios 59 y 60: Utilizando una gráfica, estime las raíces de la ecuación en el intervalo dado.**

59 $e^{-x} - 2 \log (1 + x^2) + 0.5x = 0$; $[0, 8]$

60 $2 \log 2x - \log_3 x^2 = 0$; $(0, 3)$

C **Ejercicios 61 y 62: Grafique f en el intervalo [0.2, 16]. (a) Estime los intervalos en los cuales f es creciente o decreciente. (b) Estime los valores máximos y mínimos de f en [0.2, 16].**

61 $f(x) = 2 \log 2x - 1.5x + 0.1x^2$

62 $f(x) = 1.1^{3x} + x - 1.35^x - \log x + 5$

5.5 ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

En esta sección se estudian diversos tipos de ecuaciones exponenciales y logarítmicas y sus aplicaciones.

EJEMPLO 1 ***Solución de una ecuación exponencial***

Resolver la ecuación $3^x = 21$.

SOLUCIÓN

$$3^x = 21 \qquad \text{ecuación dada}$$

$$\log (3^x) = \log 21 \qquad \text{se obtienen los logaritmos de ambos miembros}$$

$$x \log 3 = \log 21 \qquad \text{ley (3) de los logaritmos}$$

$$x = \frac{\log 21}{\log 3} \qquad \text{se divide entre log 3}$$

También se podría haber utilizado logaritmos naturales para llegar a

$$x = \frac{\ln 21}{\ln 3}.$$

Con una calculadora se obtiene la solución aproximada $x \approx 2.77$. Una comprobación parcial es advertir que como $3^2 = 9$ y $3^3 = 27$, el número x tal que $3^x = 21$, debe estar entre 2 y 3, algo más cerca de 3 que de 2.

También se podría haber resuelto la ecuación del Ejemplo 1 cambiando la forma exponencial, $3^x = 21$, a la forma logarítmica, como se hizo en la Secc. 5.3, para obtener

$$x = \log_3 21.$$

Es decir, la solución de la ecuación; sin embargo, como las calculadoras tienen normalmente sólo teclas de log y ln, no se puede aproximar $\log_3 21$ en forma directa. El siguiente teorema da una *fórmula de cambio de base* para calcular $\log_b u$ cuando $u > 0$, y si b es *cualquier* base logarítmica.

Teorema: Fórmula de cambio de base

Si $u > 0$ y a y b son números reales positivos distintos de 1, entonces

$$\log_b u = \frac{\log_a u}{\log_a b}.$$

DEMOSTRACIÓN Se inicia con las ecuaciones equivalentes

$$w = \log_b u \quad \text{y} \quad b^w = u$$

y se continúa como sigue:

$$b^w = u \qquad \text{ecuación dada}$$

$$\log_a b^w = \log_a u \qquad \text{se sacan logaritmos en ambos miembros}$$

$$w \log_a b = \log_a u \qquad \text{ley (3) de los logaritmos}$$

$$w = \frac{\log_a u}{\log_a b} \qquad \text{se divide entre } \log_a b$$

Como $w = \log_b u$, se ha obtenido la fórmula. ■

El siguiente caso especial de la fórmula de cambio de base, resulta haciendo que $u = a$ y por medio de $\log_a a = 1$:

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

A veces se confunde la fórmula de cambio de base con la ley (2) de los logaritmos. Se debe recordar la siguiente advertencia: "un cociente de logaritmos *no es* el logaritmo del cociente."

☞ **Advertencia**

$$\frac{\log_a u}{\log_a b} \neq \log_a \frac{u}{b}$$

Los casos especiales de uso más frecuente de la fórmula de cambio de base son aquéllos en que $a = 10$, en logaritmos comunes, y $a = e$, en logaritmos naturales, como se ve en el siguiente cuadro.

Fórmulas especiales de cambio de base

$$\textbf{(1)} \quad \log_b u = \frac{\log u}{\log b} \qquad\qquad \textbf{(2)} \quad \log_b u = \frac{\ln u}{\ln b}$$

A continuación se vuelve al Ejemplo 1 y se usa una fórmula de cambio de base.

EJEMPLO 2 *Uso de una fórmula de cambio de base*

Resuelva la ecuación $3^x = 21$.

SOLUCIÓN Se procede como sigue:

$$3^x = 21 \qquad \text{ecuación dada}$$

$$x = \log_3 21 \qquad \text{pasar a la forma logarítmica}$$

$$= \frac{\log 21}{\log 3} \qquad \text{fórmula (1) especial de cambio de base}$$

Otro método es usar la fórmula especial (2) de cambio de base, con lo cual se llega a

$$x = \frac{\ln 21}{\ln 3}$$

Los logaritmos con base 2 se utilizan en computación. El ejemplo que sigue indica cómo calcular logaritmos con dicha base mediante fórmulas de cambio de base.

EJEMPLO 3 ***Cálculo aproximado de un logaritmo con base 2***

Calcular, en forma aproximada, $\log_2 5$ con

(a) logaritmos decimales **(b)** logaritmos naturales

SOLUCIÓN Con las fórmulas especiales (1) y (2) de cambio de base, se obtiene lo siguiente:

(a) $$\log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2} \approx 2.322$$

(b) $$\log_2 5 = \frac{\ln 5}{\ln 2} \approx 2.322$$

EJEMPLO 4 ***Resolución de una ecuación exponencial***

Resolver la ecuación $5^{2x+1} = 6^{x-2}$.

SOLUCIÓN Se pueden usar logaritmos decimales o naturales. Si se usa la base 10, se tiene lo siguiente:

$5^{2x+1} = 6^{x-2}$	ecuación dada
$\log (5^{2x+1}) = \log (6^{x-2})$	se obtienen los logaritmos de ambos miembros
$(2x + 1) \log 5 = (x - 2) \log 6$	ley (3) de los logaritmos
$2x \log 5 + \log 5 = x \log 6 - 2 \log 6$	se multiplica
$2x \log 5 - x \log 6 = -\log 5 - 2 \log 6$	se resta $\log 5$ y $x \log 6$
$x(\log 5^2 - \log 6) = -(\log 5 + \log 6^2)$	se factoriza y se aplica la ley (3) de los logaritmos
$x = -\dfrac{\log (5 \cdot 36)}{\log \frac{25}{6}}$	se despeja x y se aplican las leyes de los logaritmos

La respuesta aproximada es $x \approx -3.64$.

EJEMPLO 5 ***Resolución de una ecuación exponencial***

Resolver la ecuación $\dfrac{5^x - 5^{-x}}{2} = 3$.

SOLUCIÓN

$$\frac{5^x - 5^{-x}}{2} = 3 \qquad \text{ecuación dada}$$

$$5^x - 5^{-x} = 6 \qquad \text{se multiplica por 2}$$

$$5^x - \frac{1}{5^x} = 6 \qquad \text{definición de exponente negativo}$$

$$5^x(5^x) - \frac{1}{5^x}(5^x) = 6(5^x) \qquad \text{se multiplica por el mínimo común divisor, } 5^x$$

$$5^{2x} - 6(5^x) - 1 = 0 \qquad \text{se simplifica y se resta } 6(5^x)$$

Se identifica esta forma de la ecuación como cuadrática en 5^x, y se continúa como sigue:

$$(5^x)^2 - 6(5^x) - 1 = 0 \qquad \text{ley de los exponentes}$$

$$u^2 - 6u - 1 = 0 \qquad \text{sea } u = 5^x$$

$$u = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 4}}{2} \qquad \text{fórmula para la ecuación cuadrática}$$

$$5^x = 3 \pm \sqrt{10} \qquad u = 5^x$$

$$5^x = 3 + \sqrt{10} \qquad 5^x > 0, \text{ pero } 3 - \sqrt{10} < 0$$

$$\log 5^x = \log (3 + \sqrt{10}) \qquad \text{se toman logaritmos en ambos miembros}$$

$$x \log 5 = \log (3 + \sqrt{10}) \qquad \text{ley (3) de los logaritmos}$$

$$x = \frac{\log (3 + \sqrt{10})}{\log 5} \qquad \text{se divide entre log 5}$$

También se podría haber aplicado logaritmos naturales, para obtener

$$x = \frac{\ln (3 + \sqrt{10})}{\ln 5}.$$

El cálculo aproximado es $x \approx 1.13$.

EJEMPLO 6 ***Penetración de la luz en el océano***

La ley de Lambert y Beer dice que la energía luminosa, I, que penetra hasta una profundidad de x metros en agua de mar, es $I = I_0 c^x$, donde $0 < c < 1$, y se tiene que I_0 es la intensidad o energía de la luz en la superficie.

(a) Despejar x utilizando logaritmos decimales.

(b) Despejar x por medio de logaritmos naturales.

(c) Si $c = \frac{1}{4}$, calcular en forma aproximada la longitud a la cual $I = 0.01I_0$. Esto determina la zona donde se puede efectuar la fotosíntesis.

SOLUCIÓN

(a)

$$I = I_0 c^x \qquad \text{ecuación dada}$$

$$\frac{I}{I_0} = c^x \qquad \text{se aísla la expresión exponencial}$$

$$x = \log_c \frac{I}{I_0} \qquad \text{se pasa a la forma logarítmica}$$

$$= \frac{\log (I/I_0)}{\log c} \qquad \text{fórmula especial (1) de cambio de base}$$

(b) Sustituyendo log por ln en la parte (*a*), se obtiene

$$x = \frac{\ln (I/I_0)}{\ln c}.$$

(c) Haciendo que $I = 0.01I_0$ y $c = \frac{1}{4}$ en la fórmula de x que se obtuvo en el inciso (a), se tiene que

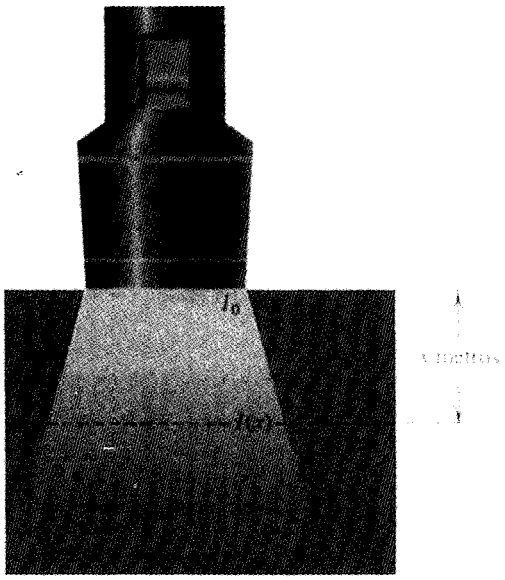
$$x = \frac{\log (0.01I_0/I_0)}{\log \frac{1}{4}} = \frac{\log (0.01)}{\log 1 - \log 4} = \frac{\log 10^{-2}}{0 - \log 4} = \frac{-2}{-\log 4} = \frac{2}{\log 4}.$$

El cálculo aproximado es $x \approx 3.32$ m.

EJEMPLO 7 *Comparación de intensidades luminosas*

Si un rayo de luz con intensidad I_0 se dirige verticalmente hacia abajo, en el agua, entonces su intensidad, $I(x)$, a una profundidad de x metros, es $I(x) = I_0 e^{-1.4x}$ (véase Fig. 5.27). ¿A qué profundidad la intensidad es la mitad de su valor en la superficie?

FIGURA 5.27



SOLUCIÓN En la superficie, $x = 0$, y la intensidad es

Se desea determinar el valor de x tal que $I(x) = \frac{1}{2} I_0$. Esto lleva a lo siguiente:

$$I(x) = \tfrac{1}{2} I_0 \qquad \text{intensidad deseada}$$

$$I_0 e^{-1.4x} = \tfrac{1}{2} I_0 \qquad \text{fórmula de } I(x)$$

$$e^{-1.4x} = \tfrac{1}{2} \qquad \text{se divide entre } I_0$$

$$-1.4x = \ln \tfrac{1}{2} \qquad \text{se pasa a la forma logarítmica}$$

$$x = \frac{\ln \frac{1}{2}}{-1.4} \qquad \text{se divide entre } -1.4$$

El resultado aproximado es $x \approx 0.495$ m.

EJEMPLO 8 *Curva logística*

Una **curva logística** es la gráfica de una ecuación de la forma

$$y = \frac{k}{1 + be^{-cx}},$$

en la cual k, b y c son constantes positivas. Esas curvas tienen utilidad para representar una población y que crece rápidamente al principio, pero cuya velocidad de crecimiento disminuye después de haber alcanzado determinado valor x. En un famoso estudio que hizo Gause sobre los protozoarios, encontró que una población de *Paramecium caudata* se podía representar mediante una ecuación logística en la cual $c = 1.1244$, $k = 105$ y x es igual al tiempo, en días.

(a) Calcular b si la población inicial era de 3 protozoarios.

(b) En el estudio, la máxima tasa de crecimiento tuvo lugar en $y = 52$. ¿En qué momento x sucedió lo anterior?

(c) Demostrar que al cabo de un largo tiempo, la población descrita por cualquier curva logística tiende a la constante k.

SOLUCIÓN

(a) Sea $c = 1.1244$ y $k = 105$ en la ecuación logística; entonces

$$y = \frac{105}{1 + be^{-1.1244x}}.$$

Ahora se procede como sigue:

$$3 = \frac{105}{1 + be^0} = \frac{105}{1 + b} \qquad y = 3 \text{ cuando } x = 0$$

$$1 + b = 35 \qquad \text{se multiplica por } \frac{1 + b}{3}$$

$$b = 34 \qquad \text{se despeja } b.$$

(b) Se emplea el hecho de que $b = 34$, y se llega a lo siguiente:

$$52 = \frac{105}{1 + 34e^{-1.1244x}} \qquad \text{sea } y = 52 \text{ en la parte (a)}$$

$$1 + 34e^{-1.1244x} = \frac{105}{52} \qquad \text{se multiplica por } \frac{1 + 34e^{-1.1244x}}{52}$$

$$e^{-1.1244x} = (\tfrac{105}{52} - 1) \cdot \tfrac{1}{34} = \tfrac{53}{1768} \qquad \text{se despeja } e^{-1.1244x}$$

$$-1.1244x = \ln \tfrac{53}{1768} \qquad \text{se transforma a la forma logarítmica}$$

$$x = \frac{\ln \frac{53}{1768}}{-1.1244} \approx 3.12 \text{ days} \qquad \text{se divide entre } -1.1244$$

(c) Cuando $x \to \infty$, $e^{-cx} \to 0$. Por consiguiente,

$$y = \frac{k}{1 + be^{-cx}} \quad \to \quad \frac{k}{1 + b \cdot 0} = k.$$

En el siguiente ejemplo se traza la gráfica de la ecuación obtenida en el inciso (a) del ejemplo anterior.

EJEMPLO 9 *Trazo de la curva logística*

Graficar la ecuación logística

$$y = \frac{105}{1 + 34e^{-1.1244x}},$$

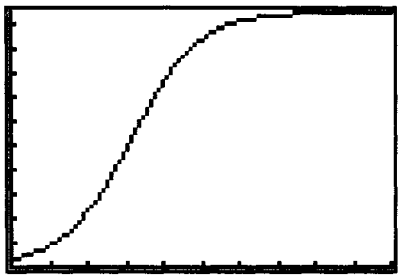
y estimar el valor de x cuando $y = 52$.

SOLUCIÓN Se comienza asignando

$$\frac{105}{1 + 34e^{-1.1244x}}$$

a Y_1. Como el tiempo x es no negativo, se selecciona Xmín = 0. También se selecciona Xmáx = 10 para incluir el valor de x que se estimó en el inciso (b) del Ejemplo 8. De acuerdo con la parte (c), se sabe que el valor de y no puede ser mayor que 105. De modo que se selecciona Ymín = 0 y Ymáx = 105, y se obtiene en la pantalla una figura semejante a la Fig. 5.28.

FIGURA 5.28 [0, 10] por [0, 105]



Con los dispositivos de trazo y ampliación, se tiene que para $y = 52$, el valor aproximado de x es 3.12, lo cual concuerda con la aproximación que se encontró en el inciso (b) del Ejemplo 8.

El ejemplo que sigue indica perfectamente el poder de una graficadora, ya que es imposible calcular la solución exacta tan sólo con métodos algebraicos.

EJEMPLO 10 *Estimación de puntos de intersección de gráficas logarítmicas*

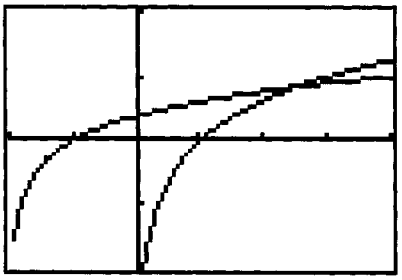
Estimar el punto de intersección de las gráficas de

$$f(x) = \log_3 x \qquad \text{y} \qquad g(x) = \log_6 (x + 2).$$

SOLUCIÓN La mayor parte de las graficadoras pueden trabajar sólo con funciones logarítmicas decimales y naturales. Así, primero se utiliza una fórmula de cambio de base para escribir de nuevo f y g como sigue:

$$f(x) = \frac{\ln x}{\ln 3} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{\ln (x + 2)}{\ln 6}.$$

FIGURA 5.29 [–2, 4] por [–2, 2]



A continuación, se asigna $(\ln x)/\ln 3$ y $(\ln (x + 2))/\ln 6$ a Y_1 y Y_2, respectivamente. Después de graficar Y_1 y Y_2 con un rectángulo visual normal, se observa que hay un punto de intersección en el primer cuadrante, para $2 < x < 3$. Con los dispositivos de trazo y ampliación, se ve que el punto de intersección, aproximadamente, es (2.52, 0.84).

Se obtuvo la Fig. 5.29 usando el rectángulo visual de dimensiones [–2, 4] por [–2, 2]. No hay otros puntos de intersección, ya que f aumenta con más rapidez que g para $x > 3$.

EJERCICIOS 5.5

Ejercicios 1–4: Calcule la solución exacta y su aproximación a dos cifras decimales mediante (a) el método del Ejemplo 1, y (b) el método del Ejemplo 2.

1 $5^x = 8$

2 $4^x = 3$

3 $3^{4-x} = 5$

4 $(\frac{1}{3})^x = 100$

Ejercicios 5 – 10: Evalúe las expresiones, con la fórmula de cambio de base.

5 $\log_5 6$

6 $\log_2 20$

7 $\log_9 0.2$

8 $\log_6 \frac{1}{2}$

9 $\dfrac{\log_5 16}{\log_5 4}$

10 $\dfrac{\log_7 243}{\log_7 3}$

Ejercicios 11 – 24: Obtenga la solución exacta, aplicando logaritmos comunes, y una aproximación a dos cifras decimales de cada solución, cuando sea el caso.

11 $3^{x+4} = 2^{1-3x}$

12 $4^{2x+3} = 5^{x-2}$

13 $2^{2x-3} = 5^{x-2}$

14 $3^{2-3x} = 4^{2x+1}$

15 $2^{-x} = 8$

16 $2^{-x^2} = 5$

17 $\log x = 1 - \log (x - 3)$

18 $\log (5x + 1) = 2 + \log (2x - 3)$

19 $\log (x^2 + 4) - \log (x + 2) = 2 + \log (x - 2)$

20 $\log (x - 4) - \log (3x - 10) = \log (1/x)$

21 $5^x + 125(5^{-x}) = 30$

22 $3(3^x) + 9(3^{-x}) = 28$

23 $4^x - 3(4^{-x}) = 8$

24 $2^x - 6(2^{-x}) = 6$

Ejercicios 25–30: Resuelva la ecuación sin emplear calculadora ni tabla.

25 $\log (x^2) = (\log x)^2$

26 $\log \sqrt{x} = \sqrt{\log x}$

27 $\log (\log x) = 2$

28 $\log \sqrt{x^3 - 9} = 2$

29 $x^{\sqrt{\log x}} = 10^8$

30 $\log (x^3) = (\log x)^3$

Ejercicios 31 – 34: Por medio de logaritmos decimales exprese x en términos de y.

31 $y = \dfrac{10^x + 10^{-x}}{2}$

32 $y = \dfrac{10^x - 10^{-x}}{2}$

33 $y = \dfrac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}}$

34 $y = \dfrac{10^x + 10^{-x}}{10^x - 10^{-x}}$

Ejercicios 35 – 38: Con logaritmos naturales exprese x en términos de y.

35 $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ **36** $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

37 $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ **38** $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Ejercicios 39 y 40: Trace la gráfica de f, y con la fórmula de cambio de base, calcule aproximadamente la ordenada al origen.

39 $f(x) = \log_2 (x + 3)$ **40** $f(x) = \log_3 (x + 5)$

Ejercicios 41 y 42: Trace la gráfica de f y aplique la fórmula de cambio de base para calcular aproximadamente la abscisa al origen.

41 $f(x) = 4^x - 3$ **42** $f(x) = 3^x - 6$

Ejercicios 43 – 46: En química se usa un índice llamado pH para representar en forma cuantitativa la acidez o basicidad de soluciones. Por definición, pH = $-\log[H^+]$, donde $[H^+]$ es la concentración de iones hidrógeno en moles por litro.

43 Calcule el pH aproximado de cada sustancia:

(a) vinagre: $[H^+] \approx 6.3 \times 10^{-3}$

(b) zanahorias: $[H^+] \approx 1.0 \times 10^{-5}$

(c) agua de mar: $[H^+] \approx 5.0 \times 10^{-9}$

44 Estime la concentración aproximada de iones hidrógeno, $[H^+]$, de cada sustancia:

(a) manzanas: pH ≈ 3.0

(b) cerveza: pH ≈ 4.2

(c) leche: pH ≈ 6.6

45 Se considera que una solución es alcalina si $[H^+] < 10^{-7}$, y ácida si $[H^+] > 10^{-7}$. Determine las desigualdades correspondientes en las que intervenga el pH.

46 Muchas soluciones tienen un pH entre 1 y 14. Determine los límites correspondientes de $[H^+]$.

47 ***Interés compuesto*** Con la fórmula del interés compuesto, calcule cuánto tiempo se necesita para que se duplique una cantidad de dinero que se invierte a un interés del 6% anual, compuesto mensualmente.

48 ***Interés compuesto*** Despeje t de la fórmula de interés compuesto,

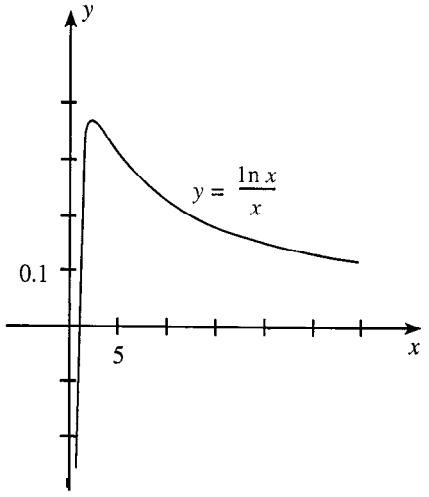
$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

utilizando logaritmos naturales.

49 ***Región iluminada bajo el mar*** Refiérase al Ejemplo 6. La zona más importante en el mar, desde el punto de vista de biología marina, es la *zona fótica*, en la cual se lleva a cabo la fotosíntesis. Esta zona termina a una profundidad a la cual llega aproximadamente 1% de la luz de la superficie. En aguas muy transparentes, en el Caribe, el 50% de la luz que llega a la superficie alcanza una profundidad aproximada de 13 m. Estime la profundidad de la zona fótica.

50 ***Zona fótica*** En comparación con el caso descrito en el ejercicio anterior, en partes del puerto de Nueva York, el 50% de la luz de la superficie no alcanza una profundidad de 10 cm. Estime la profundidad de la zona fótica.

51 En la figura siguiente se presenta la gráfica de $f(x) = (\ln x)/x$ para $x > 0$. El valor máximo de $f(x)$ se tiene cuando $x = e$.



(a) Los enteros 2 y 4 tienen la rara propiedad de que $2^4 = 4^2$. Demuestre que si $x^y = y^x$ para números reales positivos x y y, entonces $(\ln x)/x = (\ln y)/y$.

(b) Emplee la gráfica de f para explicar por qué muchos pares de números reales satisfacen la ecuación $x^y = y^x$.

52 ***Historia del idioma*** En el Ejerc. 36 de la Secc. 5.1, si un idioma originalmente tuviera N_0 palabras básicas, de las cuales siguieran usándose $N(t)$, se tendría que $N(t) = N_0(0.805)^t$, en la cual el tiempo t se mide en miles de años o milenios. ¿Después de cuántos años se sigue usando la mitad de las palabras básicas?

53 ***Absorción de medicamentos*** Si se toma por vía oral una tableta de 100 mg de un medicamento para el asma, y si nada de él se encuentra en el organismo al tomar la primera tableta, la cantidad total, A, en el flujo sanguíneo, después de t minutos, se espera que sea

$$A = 100[1 - (0.9)^t] \text{ para } 0 \le t \le 10.$$

(a) Trace la gráfica de la ecuación.

(b) Calcule el número de minutos necesarios para que 50 mg de la medicina pasen a la sangre.

54 ***Dosis de medicamentos*** Un fármaco se elimina del organismo mediante la orina. Suponga que para una dosis de 10 mg, la cantidad, $A(t)$ que queda en el organismo t horas después, es $A(t) = 10(0.8)^t$; para que sea eficaz ese medicamento, deben existir cuando menos 2 mg en el organismo.

(a) Calcule cuándo quedan 2 mg en el organismo.

(b) ¿Cuál es la semivida del medicamento?

55 ***Mutación genética*** El origen de la diversidad genética es la mutación, o sea, los cambios en la estructura química de los genes. Si un gen muta a una tasa constante m, y las demás fuerzas evolutivas no tienen importancia, entonces la frecuencia F del gen original, después de t generaciones, es $F = F_0(1 - m)^t$, donde F_0 es la frecuencia cuando $t = 0$.

(a) Despeje a t de la ecuación utilizando logaritmos decimales.

(b) Si $m = 5 \times 10^{-5}$, ¿después de cuántas generaciones $F = \frac{1}{2}F_0$?

56 ***Productividad laboral*** Se pueden representar algunos procesos de aprendizaje mediante la gráfica de $f(x) = a + b(1 - e^{-cx})$, donde a, b y c son constantes positivas. Suponga que un fabricante calcula que un empleado nuevo puede producir cinco artículos en su primer día de trabajo. Al volverse más competente el operario, aumenta su producción diaria hasta haber alcanzado determinada producción máxima. Suponga que en el n-ésimo día en su trabajo, la cantidad $f(n)$ de artículos producidos está expresada, aproximadamente, por la fórmula

$$f(n) = 3 + 20(1 - e^{-0.1n}).$$

(a) Estime el número de artículos producidos en los días 5°, 9°, 24° y 30°.

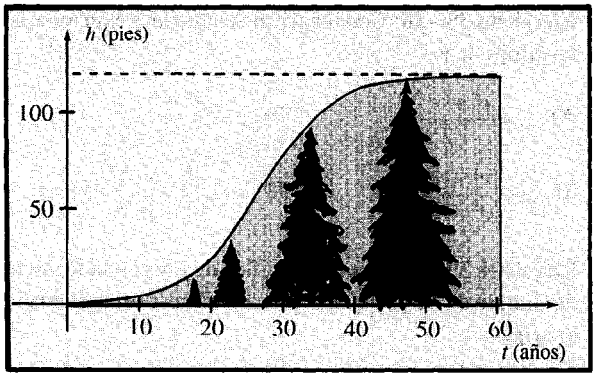
(b) Trace la gráfica de f desde $n = 0$ hasta $n = 30$. A las gráficas de este tipo se les llama *curvas de aprendizaje*, y se usan con frecuencia en educación y psicología.

(c) ¿Qué sucede cuando n crece sin límite?

57 ***Altura de los árboles*** El crecimiento de los árboles se representa con frecuencia mediante una ecuación logística. Suponga que la altura h en pies, de un árbol de edad t años, es

$$h = \frac{120}{1 + 200e^{-0.2t}},$$

tal como se ve en la gráfica de la figura siguiente.



(a) ¿Cuál es la altura del árbol a la edad de 10 años?

(b) ¿A qué edad su altura es 50 pies?

58 ***Productividad laboral*** A veces los fabricantes emplean fórmulas de base empírica para predecir el tiempo necesario para producir el enésimo artículo en una línea de ensamble (n es entero). Si $T(n)$ representa el tiempo necesario para ensamblar el n-ésimo artículo y T_1 denota el tiempo requerido para fabricar el primer artículo, o prototipo, entonces por lo común $T(n) = T_1 n^{-k}$ para cierta constante positiva k.

(a) Para muchos aviones, el tiempo necesario para armar la segunda unidad, $T(2)$, es igual a $(0.80)T_1$. Calcule el valor de k.

(b) Exprese, en términos de T_1, el tiempo necesario para ensamblar el cuarto avión.

(c) Exprese, en términos de $T(n)$, el tiempo necesario $T(2n)$ para ensamblar el $(2n)$-ésimo avión.

59 ***Esfuerzo deslizante vertical en el viento*** Véanse los Ejercs. 65 y 66 de la Secc. 3.3. Si v_0 es la velocidad del viento a la altura h_0, y v_1 es la correspondiente a la altura h_1, entonces se puede calcular el esfuerzo deslizante vertical del viento mediante la ecuación

$$\frac{v_0}{v_1} = \left(\frac{h_0}{h_1}\right)^P,$$

donde P es constante. Durante un periodo de un año, en Montreal, el esfuerzo deslizante máximo vertical del viento se presentó cuando los vientos a 200 pies de altura eran de 25 mi/h, mientras que a 35 pies de altura eran de 6 mi/h. Para estas condiciones, calcule P.

60 ***Esfuerzo deslizante vertical del viento*** Refiérase al Ejerc. 59. El esfuerzo deslizante promedio vertical del viento es

$$s = \frac{v_1 - v_0}{h_1 - h_0}.$$

Suponga que la velocidad del viento se incrementa al aumentar la altura, y que todos los valores de velocida-

des de viento tomados a las alturas de 35 y 200 pies, son mayores que 1 mi/h. ¿Produce el valor mayor de P valores mayores o menores de s?

Ejercicios 61 y 62: Un economista cree que los siguientes puntos quedan en una gráfica $y = c2^{kx}$, donde c y k son constantes. Si los puntos tienen exactitud de tres cifras decimales, ¿es correcta la hipótesis?

61 (0, 4), (1, 3.249), (2, 2.639), (3, 2.144)

62 (0, −0.3), (0.5, −0.345), (1, −0.397), (1.5, −0.551), (2, −0.727)

Ejercicios 63 y 64: Se cree que los siguientes puntos quedan en la gráfica $y = c \log(kx + 10)$, donde c y k son constantes. Si los datos tienen exactitud de tres cifras decimales, ¿es correcta la hipótesis?

63 (0, 1.5), (1, 1.619), (2, 1.720), (3, 1.997)

64 (0, 0.7), (1, 0.782), (2, 0.847), (3, 0.900), (4, 0.945)

C Ejercicios 65 y 66: Calcule, aproximadamente, la raíz real de la ecuación.

65 $x \ln x = 1$ **66** $\ln x + x = 0$

C Ejercicios 67 y 68: Grafique f y g en el mismo plano de coordenadas, y estime la solución de la desigualdad $f(x) > g(x)$.

67 $f(x) = 3^{-x} - 4^{0.2x}$, $g(x) = \ln(1.2) - x$

68 $f(x) = 3 \log_4 x - \log x$, $g(x) = e^x - 0.25x^4$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 5

Ejercicios 1–16: Trace la gráfica de f.

1 $f(x) = 3^{x+2}$ **2** $f(x) = (\frac{3}{5})^x$

3 $f(x) = (\frac{3}{2})^{-x}$ **4** $f(x) = 3^{-2x}$

5 $f(x) = 3^{-x^2}$ **6** $f(x) = 1 - 3^{-x}$

7 $f(x) = e^{x/2}$ **8** $f(x) = \frac{1}{2}e^x$

9 $f(x) = e^{x-2}$ **10** $f(x) = e^{2-x}$

11 $f(x) = \log_6 x$ **12** $f(x) = \log_6(36x)$

13 $f(x) = \log_4(x^2)$ **14** $f(x) = \log_4 \sqrt[3]{x}$

15 $f(x) = \log_2(x + 4)$ **16** $f(x) = \log_2(4 - x)$

Ejercicios 17 y 18: Evalúe lo siguiente, sin calculadora ni tablas.

17 **(a)** $\log_2 \frac{1}{16}$ **(b)** $\log_\pi 1$ **(c)** $\ln e$
(d) $6^{\log_6 4}$ **(e)** $\log 1{,}000{,}000$ **(f)** $10^{3 \log 2}$
(g) $\log_4 2$

18 **(a)** $\log_5 \sqrt[3]{5}$ **(b)** $\log_5 1$ **(c)** $\log 10$
(d) $e^{\ln 5}$ **(e)** $\log \log 10^{10}$ **(f)** $e^{2 \ln 5}$
(g) $\log_{27} 3$

Ejercicios 19–36: Resuelva la ecuación sin utilizar calculadora ni tablas.

19 $2^{3x-1} = \frac{1}{2}$ **20** $\log \sqrt{x} = \log(x - 6)$

21 $\log_8(x - 5) = \frac{2}{3}$

22 $\log_4(x + 1) = 2 + \log_4(3x - 2)$

23 $2 \ln(x + 3) - \ln(x + 1) = 3 \ln 2$

24 $\log \sqrt[4]{x + 1} = \frac{1}{2}$ **25** $2^{5-x} = 6$

26 $3^{(x^2)} = 7$ **27** $2^{5x+3} = 3^{2x+1}$

28 $\log_3(3x) = \log_3 x + \log_3(4 - x)$

29 $\log_4 x = \sqrt[3]{\log_4 x}$ **30** $e^{x+\ln 4} = 3e^x$

31 $10^{2 \log x} = 5$ **32** $e^{\ln(x+1)} = 3$

33 $x^2(-2xe^{-x^2}) + 2xe^{-x^2} = 0$

34 $e^x + 2 = 8e^{-x}$

35 $\log x^2 = \log(6 - x)$ **(b)** $2 \log x = \log(6 - x)$

36 $\ln(e^x)^2 = 16$ **(b)** $\ln e^{(x^2)} = 16$

37 Exprese $\log x^4 \sqrt[3]{y^2/z}$ en términos de los logaritmos de x, y y z.

38 Exprese $\log(x^2/y^3) + 4 \log y - 6 \log \sqrt{xy}$ como un logaritmo.

Ejercicios 39 y 40: Con logaritmos comunes despeje x de la ecuación para que quede en términos de y.

39 $y = \dfrac{1}{10^x + 10^{-x}}$ **40** $y = \dfrac{1}{10^x - 10^{-x}}$

Ejercicios 41 y 42: Calcule x con aproximación a tres cifras significativas.

41 **(a)** $x = \ln 6.6$ **(b)** $\log x = 1.8938$
(c) $\ln x = -0.75$

42 **(a)** $x = \log 8.4$
(b) $\log x = -2.4260$
(c) $\ln x = 1.8$

43 ***Crecimiento bacteriano*** El número de bacterias en determinado cultivo, a las t horas, es $Q(t) = 2(3^t)$; $Q(t)$ está en miles.

(a) ¿Cuál es el número de bacterias cuando $t = 0$?
(b) Calcule el número a los 10 min, 30 min y 1 hora.

44 ***Interés compuesto*** Si se invierten \$1 000 a un tipo de 12% anual, compuesto trimestralmente, ¿cuánto es el capital después de 1 año?

45 ***Desintegración radiactiva de yodo*** El yodo radiactivo, ^{131}I, que se usa con frecuencia en estudios de trazado de la glándula tiroides, se desintegra según $N = N_0(0.5)^{t/8}$, en la cual N_0 es la dosis inicial y t es el tiempo, en días.

(a) Trace la gráfica de la ecuación para $N_0 = 64$.
(b) Calcule la semivida del ^{131}I.

46 ***Población de truchas*** En un estanque se descargan 1 000 truchas. Tres meses después se calcula que quedan 600. Deduzca una fórmula del tipo $N = N_0a^{ct}$ que se pueda usar para estimar el número de truchas que quedan después de t meses.

47 ***Interés compuesto continuamente*** Se invierten 10 000 dólares en un fondo de ahorro en el cual el interés se compone continuamente a una tasa de 11% anual.

(a) ¿Cuándo habrá \$35 000 en la cuenta?
(b) ¿Cuánto tiempo se necesita para que se duplique la cantidad de dinero?

48 ***Corriente eléctrica*** La corriente $I(t)$ en determinado circuito eléctrico, en el instante t, es $I(t) = I_0e^{-Rt/L}$, donde R es la resistencia, L la inductancia e I_0 la corriente inicial, cuando $t = 0$. Calcule el valor de t, en términos de L y R, para el cual $I(t)$ sea el 1% de I_0.

49 ***Intensidad del sonido*** La fórmula para la intensidad del sonido es $\alpha = 10 \log (I/I_0)$.

(a) Despeje I en términos de α e I_0.
(b) Demuestre que un aumento en el nivel de intensidad, α, de un decibel (1 dB), corresponde a un aumento de 26% en la intensidad I.

50 ***Crecimiento de peces*** La longitud L de un pez se relaciona con su edad mediante la fórmula de crecimiento de von Bertalanffy,

$$L = a(1 - be^{-kt}),$$

en la cual a, b y k son constantes positivas que dependen del tipo de pez. Despeje t de esta ecuación para obtener una fórmula que sirva para estimar la edad de un pez, mediante una medición de su longitud.

51 ***Zona sísmica en el oeste*** En el oeste de Estados Unidos, el área A, en mi^2, afectada por un terremoto, se relaciona con la magnitud R del mismo mediante la fórmula

$$R = 2.3 \log (A + 3000) - 5.1.$$

Despeje a A en términos de R.

52 ***Zona sísmica en el este*** Vea el Ejercicio 51. Para el este de Estados Unidos, la fórmula área-magnitud es

$$R = 2.3 \log (A + 34{,}000) - 7.5.$$

Si A_1 es el área afectada por un terremoto de magnitud R en el oeste, y A_2 es la afectada por un sismo igual en el este, deduzca una fórmula para A_1/A_2 en términos de R.

53 ***Zona sísmica en la región central*** En el Ejerc. 51, para los estados de las montañas Rocosas y centrales, la fórmula área-magnitud es

$$R = 2.3 \log (A + 14{,}000) - 6.6.$$

Si un terremoto tiene magnitud 4 en la escala de Richter, calcule el área A de la región donde se sienta el sismo.

54 ***Presión atmosférica*** Bajo ciertas condiciones, la presión atmosférica p en relación con la altitud h, está dada por la fórmula $p = 29e^{-0.000034h}$. Exprese h como función de p.

55 ***Velocidad de un cohete*** Un cohete de masa m_1 se llena con combustible, cuya masa inicial es m_2. Sin tomar en cuenta las fuerzas de fricción, la masa total m del cohete, cuando el tiempo es t después del encendido, se relaciona con su velocidad de ascenso v mediante $v = -a \ln m + b$, donde a y b son constantes. En el instante de encendido, $t = 0$, $v = 0$ y $m = m_1 + m_2$. Cuando se agota el combustible, $m = m_1$. Con esta información, deduzca una fórmula, en términos de un logaritmo, para la velocidad del cohete cuando se agota el combustible.

56 ***Frecuencia de sismos*** Sea n el número promedio de terremotos en un año, cuyas magnitudes son entre R y $R + 1$ en la escala de Richter. Una fórmula que calcula de modo aproximado la relación entre n y R, es $\log n = 7.7 - (0.9)R$.

(a) De esa ecuación, despeje n en función de R.

(b) Calcule n, para $R = 4$, 5 y 6.

57 ***Energía sísmica*** La energía E, en ergs, liberada durante un terremoto de magnitud R, se puede calcular aproximadamente con la fórmula $\log E = 11.4 + (1.5)R$.

(a) Despeje E en función de R.

(b) Calcule la energía liberada durante el famoso terremoto de Alaska, en 1964, que llegó a 8.4 en la escala de Richter.

58 ***Desintegración radiactiva*** Determinada sustancia radiactiva se desintegra según la ecuación $q(t) = q_0 e^{-0.0063t}$, donde q_0 es la cantidad inicial de la sustancia, y t es el tiempo en días. Calcule, aproximadamente, la semivida de la sustancia.

59 ***Crecimiento infantil*** El modelo Count es una fórmula que se puede usar para predecir la estatura de niños de edad preescolar. Si h es la altura, en centímetros, y t es la edad, en años, entonces

$$h = 70.228 + 5.104t + 9.222 \ln t$$

para $\frac{1}{4} \le t \le 6$. Según el Cálculo, la tasa de crecimiento R, en cm/año, es $R = 5.104 + (9.222/t)$. Prediga la estatura y tasa de crecimiento de un niño normal de 2 años de edad.

60 ***Circuito eléctrico*** La corriente I, en determinado circuito eléctrico, cuando el tiempo es t, es

$$I = \frac{V}{R}(1 - e^{-Rt/L}),$$

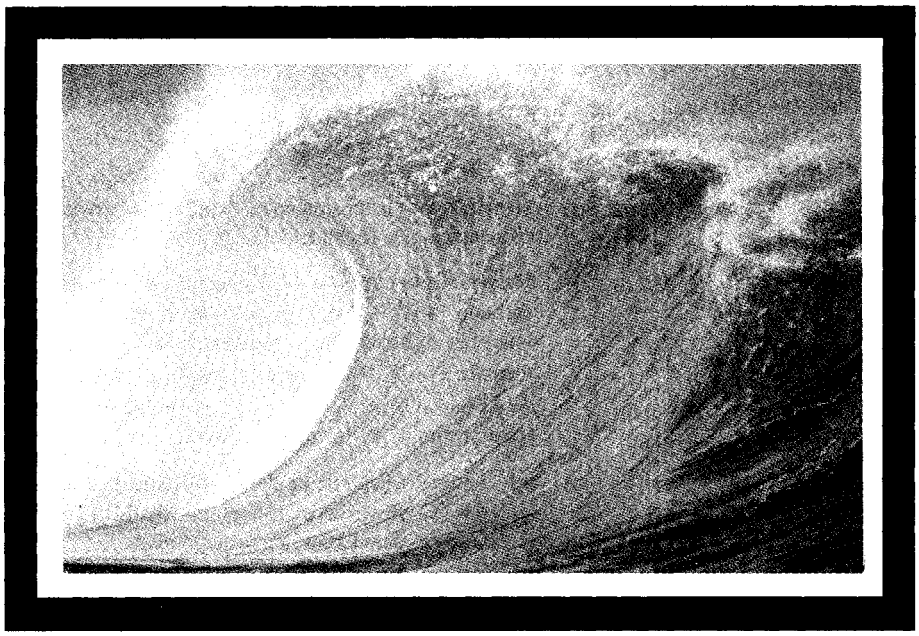
en la cual V es la tensión aplicada, R la resistencia y L la inductancia. De la ecuación, despeje t.

61 ***Datación con carbono 14*** La técnica de datación con carbono 14 (^{14}C) se emplea para determinar la edad de muestras arqueológicas y geológicas. A veces se usa la fórmula $T = -8310 \ln x$ para estimar la edad T, en años, de un hueso fósil, donde x es el porcentaje (expresado como decimal) de ^{14}C todavía presente en el fósil.

(a) Estime la edad de un hueso fósil que contiene 4% del ^{14}C que se encuentra en una cantidad igual de carbono en un hueso en la actualidad.

(b) Calcule, aproximadamente, el porcentaje de ^{14}C presente en un fósil de 10 000 años de antigüedad.

62 ***Población de Kenya*** Con base en las tasas actuales de nacimientos y muertes, se espera que la población de Kenya aumente de acuerdo con la fórmula $N = 20.2e^{0.041t}$, donde N está en millones y $t = 0$ corresponde a 1985. ¿Cuántos años pasarán para que se duplique la población?



El movimiento de las olas del mar es un ejemplo de función periódica.

6.1	**ÁNGULOS**
6.2	**FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS**
6.3	**APLICACIONES DONDE INTERVIENEN TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS**
6.4	**FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO CUALQUIERA**
6.5	**GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS**
6.6	**GRÁFICAS TRIGONOMÉTRICAS GENERALIZADAS**
6.7	**OTRAS GRÁFICAS TRIGONOMÉTRICAS**
6.8	**MOVIMIENTO ARMÓNICO**

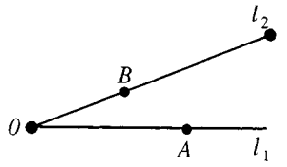
CAPÍTULO 6

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

■ *Los griegos inventaron la trigonometría hace más de 2 000 años. Necesitaban métodos precisos para medir ángulos y lados de triángulos. De hecho, la palabra* **trigonometría** *se deriva de dos palabras griegas:* trigonon *(triángulo) y* metria *(medición). El capítulo comienza con una explicación de los ángulos y la forma de medirlos. A continuación se presentan las funciones trigonométricas usando relaciones de lados, o catetos, de un triángulo rectángulo; luego se considera una gran variedad de aplicaciones. Después de generalizar los dominios de las funciones trigonométricas a ángulos arbitrarios y números reales, se estudian sus gráficas y técnicas de graficación en las que se utilizan amplitudes, periodos y desplazamientos de fase. El capítulo termina con una breve explicación del movimiento armónico.* ■

6.1 ÁNGULOS

FIGURA 6.1

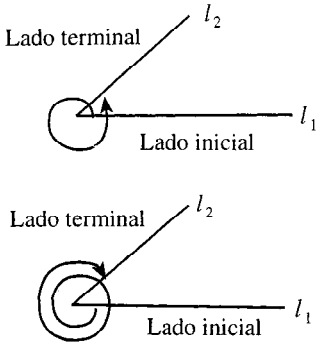


En geometría, un **ángulo** se define como el conjunto de puntos determinados por dos semirrectas, l_1 y l_2, que tienen el mismo punto de partida O. Si A y B son puntos en l_1 y l_2, como en la Fig. 6.1, se considera el **ángulo** AOB, o bien $\angle AOB$. También se puede considerar a un ángulo como dos segmentos finitos con un punto extremo común.

En trigonometría, con frecuencia se interpreta a los ángulos como rotaciones de rayos (o semirrectas). Se empieza con un rayo fijo, l_1, que tiene punto de partida O y gira respecto a O en un plano, hasta la posición especificada por el rayo l_2. Se dice que l_1 es el **lado inicial**, l_2 es el **lado terminal**, y que O es el **vértice** de $\angle AOB$. No se restringe, por ningún motivo, la magnitud o el sentido de la rotación. Se podría hacer que l_1 diera varias vueltas o *revoluciones* en cualquier sentido alrededor de O, antes de llegar a la posición de l_2, como indican las flechas curvas de la Fig. 6.2. Así, hay muchos ángulos que tienen los mismos lados inicial y terminal. Dos cualesquiera de ellos se llaman **ángulos coterminales**.

FIGURA 6.2

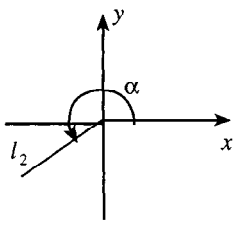
Ángulos coterminales



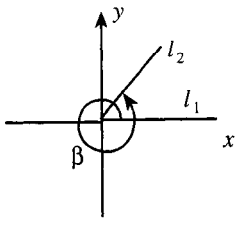
Si se introduce un sistema de coordenadas rectangulares, entonces la **posición normal** de un ángulo se obtiene colocando el vértice en el origen y haciendo que el lado inicial, l_1, coincida con el eje x positivo. Si l_1 gira en *sentido contrario al de las manecillas del reloj*, hasta la posición terminal l_2, se considera entonces que el ángulo es **positivo**. Si l_1 se hace girar *en el mismo sentido que el del reloj*, el ángulo es **negativo**. Con frecuencia los ángulos se representan con letras griegas minúsculas, como por ejemplo, α (*alfa*), β (*beta*), γ (*gama*), θ (*teta*), ϕ (*fi*), etc. En la Fig. 6.3 se presentan dos ángulos positivos, α y β, y uno negativo, γ. Si el lado terminal de un ángulo en posición normal está en determinado cuadrante, se dice que el *ángulo* está en tal cuadrante. En la Fig. 6.3, α está en el cuadrante III, β en el cuadrante I y γ en el cuadrante II. Se expresa que un ángulo es **cuadrantal** si su lado terminal queda en un eje coordenado.

FIGURA 6.3 Posición normal de un ángulo

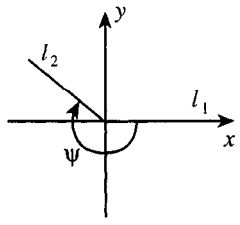
Ángulo positivo



Ángulo positivo



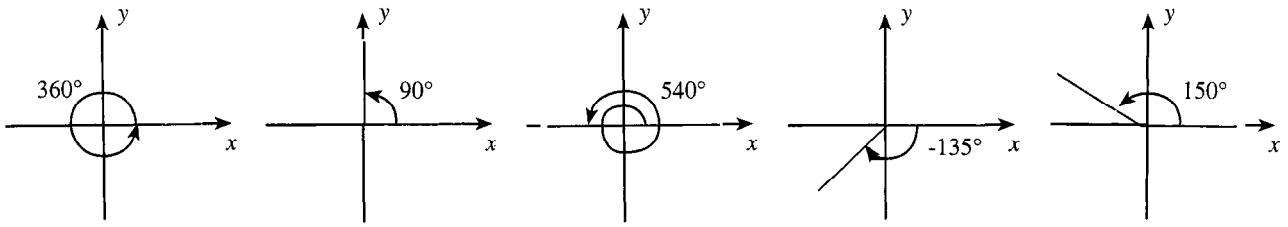
Ángulo negativo



Una unidad de medida de ángulos es el **grado**. El ángulo en posición normal que se obtiene con una revolución completa en sentido contrario al de las manecillas del reloj mide 360 grados, lo cual se escribe 360°. Así, un ángulo que mida 1 grado (1°) se obtiene con $\frac{1}{360}$ de una revolución

en sentido contrario al del reloj. En la Fig. 6.4 se muestran varios ángulos medidos en grados, en posición normal sobre sistemas de coordenadas ortogonales. Nótese que los primeros tres ángulos son cuadrantales.

FIGURA 6.4



En este libro, la notación $\theta = 60°$ especifica un ángulo θ cuya medida es 60°. También se dice que es *un ángulo de* 60°, en vez de *un ángulo que mide* 60°.

EJEMPLO 1 *Determinación de ángulos coterminales*

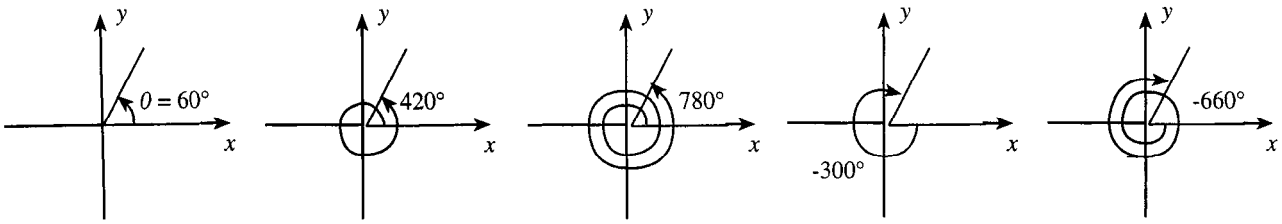
Si $\theta = 60°$ está en posición normal, determinar dos ángulos positivos y dos negativos que sean coterminales con θ.

SOLUCIÓN En el primer esquema de la Fig. 6.5 se muestra el ángulo θ en posición normal. Para determinar los ángulos coterminales positivos, se suma 360° o bien 720° (o cualquier otro múltiplo positivo de 360°) a θ, con lo cual se obtiene

$$60° + 360° = 420° \qquad \text{y también} \qquad 60° + 720° = 780°.$$

Estos ángulos coterminales también se muestran en la Fig. 6.5.

FIGURA 6.5



Para determinar ángulos coterminales negativos, se suma –360° o bien –720° (o cualquier otro múltiplo negativo de 360°) a θ, con lo cual se tiene

$$60° + (-360°) = -300° \qquad \text{y} \qquad 60° + (-720°) = -660°,$$

como se ve en la Fig. 6.5.

Un ángulo θ es **ángulo recto** si $\theta = 90°$. En la tabla siguiente hay definiciones de otros ángulos especiales.

Terminología	Definición	Ejemplo
ángulo agudo θ	$0° < \theta < 90°$	12°; 37°
ángulo obtuso θ	$90° < \theta < 180°$	95°; 157°
ángulos complementarios α, β	$\alpha + \beta = 90°$	20°, 70°; 7°, 83°
ángulos suplementarios α, β	$\alpha + \beta = 180°$	115°, 65°; 18°, 162°

Si se necesitan menores dimensiones que un grado, se emplean décimos, centésimos o milésimos de grado. También, se puede dividir el grado en 60 partes iguales, que se llaman **minutos** (se representan con $'$) y dividir cada minuto en 60 partes iguales, llamadas **segundos** (se representan con $''$). Así, $1° = 60'$ y $1' = 60''$. La notación $\theta = 73° 56'18''$ indica un ángulo θ cuya medida es 73 grados, 56 minutos, 18 segundos.

EJEMPLO 2 ***Cálculo de ángulos complementarios***

Determinar el ángulo que sea complementario de θ:

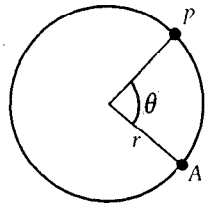
(a) $\theta = 25°43'37''$ **(b)** $\theta = 73.26°$

SOLUCIÓN Hay que calcular $90° - \theta$. Se dispone el cálculo como sigue:

(a)
$$\begin{array}{rl} 90° & = 89°59'60'' \\ \theta & = 25°43'37'' \\ \hline 90° - \theta & = 64°16'23'' \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rl} 90° & = 90.00° \\ \theta & = 73.26° \\ \hline 90° - \theta & = 16.74° \end{array}$$

FIGURA 6.6
Ángulo central θ



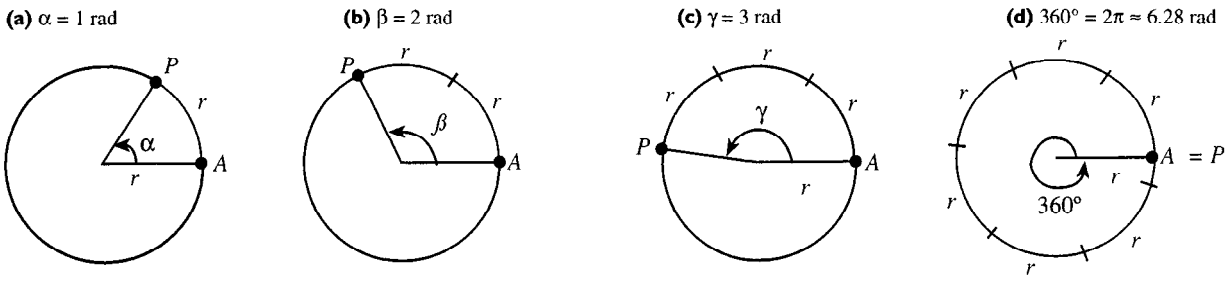
La medición de ángulos en grados se emplea en campos como topografía, navegación y diseño de equipo mecánico. En aplicaciones científicas que requieren del Cálculo, se acostumbra usar la *medida en radianes* (rad). Para definir un ángulo cuya medida en radianes sea 1, considérese una circunferencia de radio r. Un **ángulo central** de una circunferencia es aquél cuyo vértice se encuentra en el centro de la curva. Si θ es el ángulo central que se muestra en la Fig. 6.6, se dice que el arco AP **subtiende a** θ, o que θ **está subtendido por** $\widehat{AP}$, o **que el ángulo θ determina** al arco AP. Si la longitud de $\widehat{AP}$ es igual al radio r de la circunferencia, entonces θ tiene la medida de un radián, o mide un radián, según la siguiente definición:

Definición de radián

Un **radián** (símbolo: rad) es la medida del ángulo central de una circunferencia subtendido por un arco de longitud igual al radio de dicha curva.

Si se tiene una circunferencia de radio r, entonces el ángulo α cuya medida es 1 rad corta un arco AP de longitud r, como se ve en la Fig. 6.7(a). El ángulo β en la Fig. 6.7(b) tiene una medida de 2 rad, ya que está subtendido por un arco de longitud $2r$. Igualmente, γ, en (c) de la figura, tiene una medida de 3 rad, ya que está subtendido por un arco de longitud $3r$.

FIGURA 6.7



Para determinar la medida en radianes que corresponde a 360°, debemos calcular el número de veces que puede trazarse un arco circular de longitud r sobre la circunferencia (véase Fig. 6.7(d)). Este número no es entero, ni siquiera es racional. Como el perímetro de una circunferencia es $2\pi r$, el número de veces que pueden caber r unidades es 2π. Así, un ángulo que mida 2π rad corresponde a la medida de 360°, y entonces $360° = 2\pi$ rad. Este resultado da las siguientes relaciones:

Relaciones entre grados y radianes

(1) $180° = \pi$ rad

(2) $1° = \dfrac{\pi}{180}$ rad ≈ 0.0175 rad

(3) $1 \text{ rad} = \left(\dfrac{180}{\pi}\right)° \approx 57.2958°$

Cuando se usan ángulos medidos en radianes suele no indicarse la unidad. Por tanto, si un ángulo es de 5 rad, se escribe $\theta = 5$. No habrá confusión acerca de si se usan medidas en radianes o en grados, ya que si θ está *en grados*, y su medida es 5, se escribe $\theta = 5°$ y no $\theta = 5$.*

En la tabla siguiente se muestra cómo pasar de una medida angular a otra.

Cambio de medidas angulares

Para pasar de	Multiplíquese por	Ejemplo
grados a radianes	$\dfrac{\pi}{180}$	$150° = 150\left(\dfrac{\pi}{180}\right) = \dfrac{5\pi}{6}$
		$225° = 225\left(\dfrac{\pi}{180}\right) = \dfrac{5\pi}{4}$
radianes a grados	$\dfrac{180}{\pi}$	$\dfrac{7\pi}{4} = \dfrac{7\pi}{4}\left(\dfrac{180}{\pi}\right)° = 315°$
		$\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{180}{\pi}\right)° = 60°$

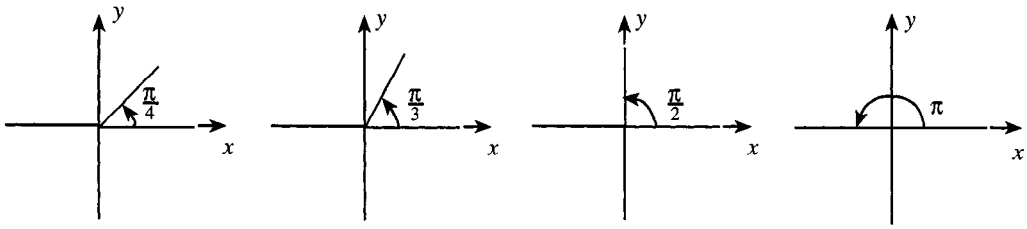
Se puede aplicar el método anterior para formar la siguiente tabla, que muestra las medidas en radianes y grados de algunos ángulos especiales.

* (N. del R.) En física, la velocidad y la aceleración angulares se expresan indicando casi siempre las unidades como rad/s y rad/s^2, para mayor claridad. [F.P]

Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Grados	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360

Algunos de estos ángulos especiales, en radianes, se muestran en su posición normal, en la Fig. 6.8.

FIGURA 6.8



EJEMPLO 3 ***Transformar radianes a grados, minutos y segundos***

Si $\theta = 3$, aproximar θ en grados, minutos y segundos.

SOLUCIÓN

$$3 \text{ radianes} = 3\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \qquad \text{se multiplica por } \frac{180}{\pi}$$

$$\approx 171.8873^\circ \qquad \text{se aproxima}$$

$$= 171^\circ + (0.8873)(60') \qquad 1^\circ = 60'$$

$$= 171^\circ + 53.238' \qquad \text{se multiplica}$$

$$= 171^\circ + 53' + (0.238)(60'') \qquad 1' = 60''$$

$$= 171^\circ 53' + 14.28'' \qquad \text{se multiplica}$$

$$\approx 171^\circ 53' 14'' \qquad \text{se aproxima}$$

Algunas calculadoras tienen una tecla que se utiliza para convertir radianes a grados, y viceversa. También pueden tener una tecla DMS para convertir grados y decimales de grado, a grados, minutos y segundos, y viceversa. Como los datos se ingresan en términos de decimales, los ángulos expresados en grados, minutos y segundos se deben pasar a la forma decimal. Si no se dispone de una tecla DMS, puede procederse como en el siguiente ejemplo. (DMS significa "decimal measure" = medida decimal.)

EJEMPLO 4 ***Expresar minutos y segundos como fracciones decimales de grado***

Pasar 19°47′23″ a la forma decimal, redondenado al diezmilésimo de grado.

SOLUCIÓN Como $1' = (\frac{1}{60})^\circ$, y además $1'' = (\frac{1}{60})' = (\frac{1}{3600})^\circ$,

$$19°47'23'' = 19° + (\tfrac{47}{60})° + (\tfrac{23}{3600})°$$
$$\approx 19° + 0.7833° + 0.0064°$$
$$= 19.7897°.$$

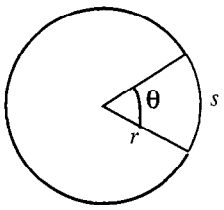
El siguiente resultado especifica la relación entre la longitud de un arco circular y el ángulo central que subtiende.

Fórmula de la longitud de un arco circular

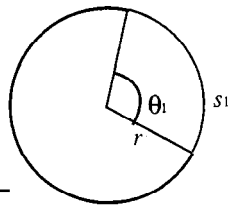
Si un arco de longitud s en una circunferencia de radio r subtiende un ángulo central θ (en radianes), entonces

FIGURA 6.9

(a)



(b)



DEMOSTRACIÓN En la Fig. 6.9(a) se ven un arco de longitud s y el ángulo central θ correspondiente. En la Fig. 6.9(b) se ilustra un arco de longitud s_1 y ángulo central θ_1. Si se usan radianes, entonces, de acuerdo con la geometría plana, la razón de las longitudes de arco es igual que la razón de las medidas angulares; es decir,

$$\frac{s}{s_1} = \frac{\theta}{\theta_1}.$$

Si se considera el caso especial en el cual θ_1 mide 1 rad, entonces, de acuerdo con la definición de radián, $s_1 = r$, y

$$\frac{s}{r} = \frac{\theta}{1}, \quad \text{o bien} \quad s = r\theta.$$

La siguiente fórmula se demuestra en forma semejante.

Fórmula del área de un sector circular

Si θ es el ángulo central, expresado en radianes, de una circunferencia de radio r, y si A es el área del sector circular subtendido por θ, entonces

$$A = \tfrac{1}{2} r^2\theta$$

DEMOSTRACIÓN Si A y A_1 son las áreas de los sectores en la Fig. 6.9(a) y 6.9(b), respectivamente, entonces, de acuerdo con la geometría plana,

$$\frac{A}{A_1} = \frac{\theta}{\theta_1}, \quad \text{o bien} \quad A = \frac{A_1}{\theta_1}\theta.$$

Si se considera el caso especial en que $\theta_1 = 2\pi$, entonces $A_1 = \pi r^2$ y

$$A = \frac{\pi r^2}{2\pi}\theta = \frac{1}{2}r^2\theta.$$

Al aplicar las fórmulas anteriores, es importante recordar que θ debe estar *en radianes*, y no en grados, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 5 ***Aplicación de las fórmulas del arco y sector circulares***

Un ángulo central, θ, está subtendido por un arco de 10 cm de longitud en una circunferencia de 4 cm de radio.
(a) Aproximar la medida de θ en grados.
(b) Calcular el área del sector circular determinado por θ.

SOLUCIÓN Se procede como sigue:

(a)

$$s = r\theta \qquad \text{fórmula de la longitud de un arco circular}$$

$$\theta = \frac{s}{r} \qquad \text{se despeja } \theta$$

$$= \tfrac{10}{4} = 2.5 \qquad \text{porque } s = 10,\ r = 4$$

Es la medida radiánica de θ. Convirtiendo a grados, se tiene

$$\theta = 2.5\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = \left(\frac{450}{\pi}\right)^\circ \approx 143.24^\circ.$$

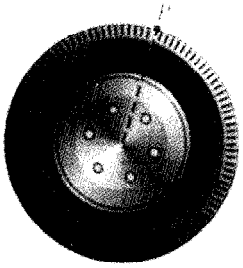
(b)

$$A = \tfrac{1}{2}r^2\theta \qquad \text{fórmula del área de un sector circular}$$

$$= \tfrac{1}{2}(4)^2(2.5) \qquad r = 4,\ \theta = 2.5$$

$$= 20\ \text{cm}^2 \qquad \text{por la multiplicación}$$

FIGURA 6.10



La **velocidad angular** de una rueda que gira a velocidad constante es el ángulo generado, en una unidad de tiempo, por un segmento girante que parte del centro de la rueda y llega al punto P sobre su circunferencia (véase Fig. 6.10). La **velocidad lineal** de un punto P en dicha curva es la distancia que recorre P por unidad de tiempo.

EJEMPLO 6 ***Cálculo de velocidades angulares y lineales***

Supóngase que una máquina tiene una rueda de 3 pies (ft) de diámetro, y gira a una velocidad de 1 600 rpm (revoluciones por minuto).
(a) Calcular la velocidad angular de dicha rueda.
(b) Determinar la velocidad lineal de un punto P en la circunferencia.

SOLUCIÓN
(a) Sea O el centro de la rueda, y P un punto en su circunferencia. Como el número de revoluciones por minuto es 1 600, y como cada revolución corresponde a un ángulo de 2π rad, el ángulo generado por el segmento girante OP en un minuto mide $(1\ 600)(2\pi)$ rad, o sea

$$\text{velocidad angular} = (1\ 600)(2\pi) = 3\ 200\pi \text{ rad/min}$$

Nótese que no importa el diámetro de la rueda en el cálculo de la velocidad angular.
(b) La velocidad lineal de P es la distancia circular que recorre en un minuto. Se calcula esta distancia con la fórmula $s = r\,\theta$, en la cual $r = \frac{3}{2}$ pies, y $\theta = 3\ 200\pi$. Así,

$$s = \tfrac{3}{2}(3200\pi) = 4800\pi \text{ pies},$$

y, por consiguiente, la velocidad lineal de P es 4 800π pies/min. Aproximando al entero más cercano, es 15 080 pies/min, o sea, 171.36 mi/h. A diferencia de la velocidad angular, la velocidad lineal *sí* depende del diámetro de la rueda.

EJERCICIOS 6.1

Ejercicios 1– 4: Si el ángulo dado está en posición normal, determine dos ángulos coterminales positivos y dos negativos.

1 (a) 120° (b) 135° (c) $-30°$

2 (a) 240° (b) 315° (c) $-150°$

3 (a) 620° (b) $\frac{5\pi}{6}$ (c) $-\frac{\pi}{4}$

4 (a) 570° (b) $\frac{2\pi}{3}$ (c) $-\frac{5\pi}{4}$

Ejercicios 5 y 6: Determine el ángulo complementario a θ.

5 (a) $\theta = 5°17'34''$ (b) $\theta = 32.5°$

6 (a) $\theta = 63°4'15''$ (b) $\theta = 82.73°$

Ejercicios 7 y 8: Determine el ángulo suplementario a θ.

7 (a) $\theta = 48°51'37''$ (b) $\theta = 136.42°$

8 (a) $\theta = 152°12'4''$ (b) $\theta = 15.9°$

Ejercicios 9 – 12: Calcule la medida exacta, en radianes, del ángulo dado.

9 (a) 150° (b) $-60°$ (c) 225°

10 (a) 120° (b) $-135°$ (c) 210°

11 (a) 450° (b) 72° (c) 100°

12 (a) 630° (b) 54° (c) 95°

Ejercicios 13 – 16: Encuentre el valor exacto, en grados, del ángulo dado.

13 (a) $\frac{2\pi}{3}$ (b) $\frac{11\pi}{6}$ (c) $\frac{3\pi}{4}$

14 (a) $\frac{5\pi}{6}$ (b) $\frac{4\pi}{3}$ (c) $\frac{11\pi}{4}$

15 (a) $-\frac{7\pi}{2}$ (b) 7π (c) $\frac{\pi}{9}$

16 (a) $-\frac{5\pi}{2}$ (b) 9π (c) $\frac{\pi}{16}$

Ejercicios 17–20: Exprese θ en términos de grados, minutos y segundos, al segundo más cercano.

17 $\theta = 2$ **18** $\theta = 1.5$

19 $\theta = 5$ **20** $\theta = 4$

Ejercicios 21–24: Exprese el ángulo en forma decimal, con precisión de diezmilésimo de grado.

21 37°41′ **22** 83°17′

23 115°26′27″ **24** 258°39′52″

Ejercicios 25 –28: Exprese el ángulo en grados, minutos y segundos, al segundo más cercano.

25 63.169° **26** 12.864°

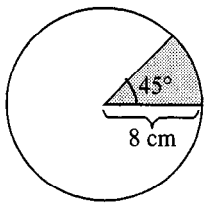
27 310.6215° **28** 81.7238°

Ejercicios 29 y 30: Si un arco circular de la longitud dada s, subtiende al ángulo central θ de una circunferencia, calcule el radio de ésta.

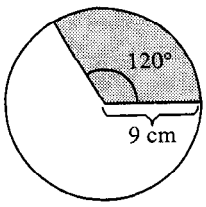
29 $s = 10$ cm, $\theta = 4$ **30** $s = 3$ km, $\theta = 20°$

Ejercicios 31 y 32: (a) Calcule la longitud del arco del sector sombreado de la figura. (b) Determine el área de ese sector.

31



32



Ejercicios 33 y 34: (a) Calcule y exprese en radianes y grados el ángulo central θ, el cual está subtendido por el arco dado de longitud s en una circunferencia de radio r. (b) Calcule el área del sector determinado por θ.

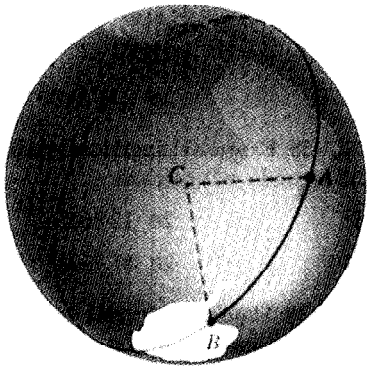
33 $s = 7$ cm, $r = 4$ cm **34** $s = 3$ pies, $r = 20$ pulg.

Ejercicios 35 y 36: (a) Calcule la longitud del arco que subtiende el ángulo central dado θ en una circunferencia de diámetro *d*. (b) Calcule el área del sector determinado por θ.

35 $\theta = 50°$, $d = 16$ m **36** $\theta = 2.2$, $d = 120$ cm

37 *Medición de distancias sobre la Tierra* La distancia entre dos puntos *A* y *B* sobre la Tierra, se mide sobre una circunferencia que tiene su centro *C* en el centro del planeta, y cuyo radio es igual a la distancia de *C* a la superficie (véase la figura). Si el diámetro de la Tierra es, aproximadamente, de 8 000 mi, calcule la distancia aproximada entre *A* y *B* si el ángulo *ACB* tiene la medida indicada:

(a) 60° **(b)** 45° **(c)** 30° **(d)** 10° **(e)** 1°



38 *Millas náuticas* En el Ejercicio 37, si el ángulo *ACB* mide 1′, entonces la distancia entre *A* y *B* es una *milla náutica*. Calcule aproximadamente el número de millas terrestres que tiene una milla náutica.

39 *Medición de ángulos mediante una distancia* Refiérase al Ejercicio 37. Si dos puntos *A* y *B* están a 500 millas náuticas de distancia, exprese el ángulo *ACB* en radianes y en grados.

40 *Centro de un tornado* Un modelo sencillo del interior de un tornado es un cilindro circular recto que gira en torno a su eje. Si tal ciclón tiene un diámetro en su núcleo de 200 pies y la velocidad máxima del viento es de 180 mi/h (264 pies/s) en la periferia del núcleo, calcule el número aproximado de revoluciones que éste efectúa en cada minuto (su velocidad angular).

41 *Rotación de la Tierra* Nuestro planeta gira alrededor de su eje una vez cada 23 horas, 56 minutos y 4 segundos. Calcule, aproximadamente, el número de radianes que gira la Tierra en un segundo.

42 *Rotación de la Tierra* Refiérase al Ejercicio 41. El radio ecuatorial terrestre es, aproximadamente, de 3 963.3 mi. Calcule la velocidad lineal de un punto en el ecuador como resultado de la rotación de la Tierra.

Ejercicios 43 y 44: Una rueda con radio igual al indicado, gira a la velocidad que se indica.

(a) Calcule su velocidad angular, en radianes por minuto.

(b) Calcule la velocidad lineal de un punto en la periferia (en pies por minuto).

43 radio, 5 pulg, 40 rpm **44** radio, 9 pulg; 2 400 rpm

45 *Rotación de discos fonográficos* Los dos tipos comunes de discos fonográficos, LP y de corta duración, tienen, respectivamente, diámetro de 12 y 7 pulgadas. El grande gira a una velocidad de $33\frac{1}{3}$ rpm, y el chico a 45 rpm.

(a) Calcule la velocidad angular, en radianes por minuto, del disco grande y del menor.

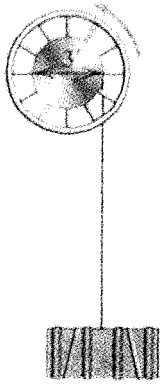
(b) Calcule la velocidad lineal, en pies por minuto, de un punto en la periferia del disco grande y del chico.

46 *Revoluciones de un neumático* Un neumático característico, en un automóvil compacto, tiene un diámetro de 22 pulg. Si el auto corre a una velocidad de 60 mi/h, calcule el número de revoluciones que da el neumático por minuto.

47 *Montacargas* Para izar una carga se usa un montacargas de 3 pies de diámetro, como se ve en la figura.

(a) Calcule la distancia que la carga sube si el montacargas gira un ángulo de $7\pi/4$ radianes.

(b) Calcule el ángulo, en radianes, que debe girar el cilindro izador para hacer que la carga suba *d* pies.

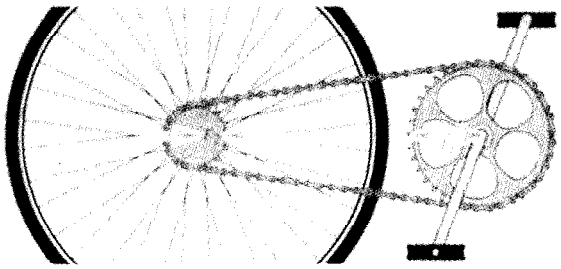


48 *Oscilación de un péndulo* El péndulo de un reloj antiguo tiene 4 pies de longitud y oscila describiendo en un arco de 6 pulg de largo. Calcule el ángulo aproximado, en grados, que describe el péndulo en una oscilación.

49 *Precios de pizzas* Una persona vende rebanadas de pizza en dos tamaños. La rebanada *chica* tiene $\frac{1}{6}$ de una pizza

circular de 18 pulg de diámetro, y la vende a \$2.00. La rebanada *grande* tiene $\frac{1}{8}$ de una pizza circular de 26 pulg de diámetro, y su precio es \$3.00. ¿Cuál rebanada tiene más pizza por cada dólar?

50 ***Mecánica de bicicletas*** En la figura se ve el conjunto de transmisión para cadena (catarina y maza) de una bicicleta. Si la rueda catarina tiene radio r_1 y gira un ángulo θ_1 radianes, calcule el ángulo correspondiente de giro de la maza de radio r_2.

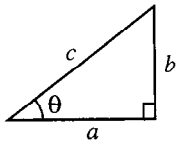


51 ***Mecánica de bicicletas*** Un ciclista experto puede alcanzar una velocidad de 40 mi/h. Si en el Ejercicio 50 el conjunto de transmisión tiene $r_1 = 5$ pulg, $r_2 = 2$ pulg y la transmisión tiene un diámetro de 28 pulg, ¿a cuántas revoluciones por minuto, aproximadamente, debe girar dicha rueda dentada delantera para alcanzar una velocidad de 40 mi/h? (*Sugerencia:* Convierta primero 40 mi/h a pulg/s.)

52 ***Desplazamiento del polo magnético*** Los polos norte geográfico y magnético están en distintos lugares. En la actualidad, el polo norte magnético se desplaza hacia el oeste a 0.0017 rad/año, y el ángulo de desplazamiento tiene su vértice en el centro de la Tierra. Si continúa este movimiento, ¿aproximadamente cuántos años tardará el polo norte magnético en desplazarse un total de 5°?

6.2 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS

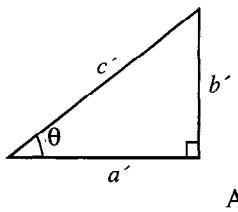
FIGURA 6.11



Se describen las funciones trigonométricas del modo como se originaron históricamente: como relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo. El **triángulo rectángulo** es aquél en que uno de sus ángulos es recto. Si θ es cualquier ángulo agudo, se podría considerar un triángulo rectángulo que tiene θ como uno de sus ángulos, como en la Fig. 6.11, en la cual la marca ⌜ indica que el ángulo es de 90°. Se pueden obtener seis razones entre las longitudes de los lados, a, b y c, del triángulo:

$$\frac{b}{c}, \quad \frac{a}{c}, \quad \frac{b}{a}, \quad \frac{a}{b}, \quad \frac{c}{a}, \quad \frac{c}{b}$$

FIGURA 6.12



Es posible demostrar que esas relaciones sólo dependen de θ, y no del tamaño del triángulo, según se ve en la Fig. 6.12. Como los dos triángulos tienen ángulos iguales, son semejantes y, por consiguiente, son proporcionales las razones de sus lados correspondientes. Por ejemplo,

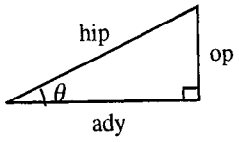
$$\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}, \qquad \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}, \qquad \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}.$$

Así, para cada valor de θ, las seis relaciones quedan determinadas en forma única y, por consiguiente, son funciones de θ. Se llaman **funciones trigonométricas**, y sus nombres específicos son **seno, coseno, tangente, cotangente, secante** y **cosecante**, respectivamente, y sus símbolos respectivos son **sen, cos, tan, cot, sec** y **csc**. El símbolo sen θ, o sen (θ), indica la relación b/c, que la función seno asocia con θ. Los valores de las otras cinco funciones se representan de manera semejante. En resumen, si θ es el ángulo agudo del triángulo rectángulo de la Fig. 6.11, entonces, por definición,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{c} \qquad \cos\theta = \frac{a}{c} \qquad \tan\theta = \frac{b}{a}$$

$$\csc\theta = \frac{c}{b} \qquad \sec\theta = \frac{c}{a} \qquad \cot\theta = \frac{a}{b}$$

FIGURA 6.13



El dominio de cada una de las seis funciones trigonométricas es el conjunto de todos los ángulos agudos. En la Secc. 6.4 se generalizan los dominios a mayores conjuntos de ángulos y a los números reales.

Si θ es el ángulo en la Fig. 6.11, a los lados del triángulo, cuyas longitudes son *a*, *b* y *c*, se les llama **cateto adyacente, cateto opuesto** e **hipotenusa**, respectivamente. Para indicar las longitudes de esos lados, se usan las abreviaturas **ady, op** e **hip**. Así se puede representar al triángulo como en la Fig. 6.13. Con esta notación, las funciones trigonométricas se pueden expresar como sigue:

Definición de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} \qquad \tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}}$$

$$\csc\theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{ady}}{\text{op}}$$

Las fórmulas así definidas se pueden aplicar a cualquier triángulo rectángulo sin mencionar las longitudes *a*, *b* y *c* de los lados. Como esas longitudes son números reales positivos, *los valores de las seis funciones trigonométricas son positivos para todo ángulo agudo* θ. Además, la hipotenusa siempre es mayor que los catetos, sea el adyacente o el opuesto y, por lo tanto, $\operatorname{sen}\theta < 1$, $\cos\theta < 1$, $\csc\theta > 1$, $\sec\theta > 1$, para todo ángulo agudo θ.

Nótese que como

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \text{y} \qquad \csc\theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}}$$

entonces sen θ y csc θ son recíprocas entre sí, lo cual lleva a las dos identidades en la columna de la izquierda del recuadro siguiente. De igual manera, cos θ y sec θ son recíprocas entre sí, así como tan θ y cot θ.

Identidades recíprocas

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\csc\theta} \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \qquad \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

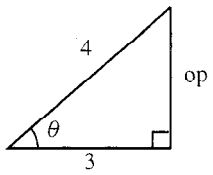
$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

Al final de esta sección se estudian algunas otras identidades importantes en las que intervienen funciones trigonométricas.

EJEMPLO 1 *Cálculo de los valores de las funciones trigonométricas*

Si θ es agudo, y $\cos\theta = \frac{3}{4}$, calcular los valores de las seis funciones trigonométricas de θ.

FIGURA 6.14



SOLUCIÓN Se empieza dibujando un triángulo rectángulo que tenga el ángulo agudo θ, y en el que ady = 3, hip = 4, como se ve en la Fig. 6.14, para proseguir como sigue:

$$3^2 + (\text{op})^2 = 4^2 \qquad \text{teorema de Pitágoras}$$

$$(\text{op})^2 = 16 - 9 = 7 \qquad \text{se resta 9}$$

$$\text{op} = \sqrt{7} \qquad \text{se saca raíz cuadrada}$$

Aplicando la definición de funciones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo, se obtiene lo siguiente:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{7}}{4} \qquad \cos\theta = \frac{3}{4} \qquad \tan\theta = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\csc\theta = \frac{4}{\sqrt{7}} \qquad \sec\theta = \frac{4}{3} \qquad \cot\theta = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

En el Ejemplo 1 se podría haber racionalizado los denominadores de csc θ y cot θ escribiendo

$$\csc\theta = \frac{4\sqrt{7}}{7} \qquad \text{y} \qquad \cot\theta = \frac{3\sqrt{7}}{7}.$$

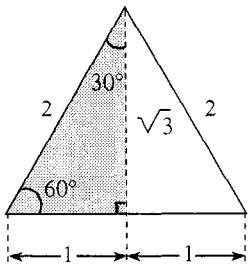
Pero en la mayor parte de los ejercicios se dejan las expresiones sin racionalizar. La excepción a esta práctica está en los valores de funciones trigonométricas especiales que corresponden a 60°, 30° y 45°, que se calculan en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 ***Cálculo de los valores de las funciones trigonométricas de 60°, 30° y 45°***

Calcular los valores de las funciones trigonométricas que corresponden a θ:

(a) $\theta = 60°$ **(b)** $\theta = 30°$ **(c)** $\theta = 45°$

FIGURA 6.15



SOLUCIÓN Considérese un triángulo equilátero cuyos lados midan 2. La mediana de un lado opuesto a un vértice biseca al ángulo en ese vértice, como se ilustra con la línea discontinua de la Fig. 6.15. De acuerdo con el teorema de Pitágoras, el cateto opuesto a 60° en el triángulo rectángulo sombreado tiene una longitud igual a $\sqrt{3}$. Con las fórmulas de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo, se calculan los valores que corresponden a 60° y a 30° como sigue:

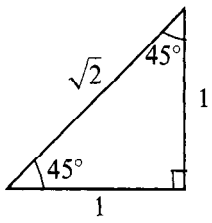
(a) $\operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60° = \frac{1}{2} \qquad \tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

$$\csc 60° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \sec 60° = \frac{2}{1} = 2 \qquad \cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(b) $\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2} \qquad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\csc 30° = \frac{2}{1} = 2 \qquad \sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \cot 30° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

FIGURA 6.16



(c) Para calcular los valores para $\theta = 45°$, se considera un triángulo rectángulo isósceles cuyos dos catetos iguales tengan una longitud 1, como se ve en la Fig. 6.16. Por el teorema de Pitágoras, la longitud de la hipotenusa es $\sqrt{2}$. Entonces los valores correspondientes a 45° son:

$$\operatorname{sen} 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45° \qquad \tan 45° = \frac{1}{1} = 1$$

$$\csc 45° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} = \sec 45° \qquad \cot 45° = \frac{1}{1} = 1$$

Como referencia se da la lista de los valores calculados en el Ejemplo 2, junto con las medidas de los ángulos en radianes. Hay dos razones para hacer notar esos valores: se trata de valores exactos y se presentan con frecuencia en los trabajos donde interviene la trigonometría. Debido a la importancia de esos valores especiales, se aconseja memorizar la tabla, o aprender cómo calcularlos con rapidez por medio de triángulos, como en el Ejemplo 2.

Valores especiales de las funciones trigonométricas

θ (radianes)	θ (grados)	sen θ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	csc θ
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Es posible aproximar, a cualquier grado de exactitud, los valores de las funciones trigonométricas para cualquier ángulo agudo. En la Tabla 4, en el Apéndice II, se presentan aproximaciones de muchos valores, con cuatro decimales. El manejo de la Tabla 4 se explica en el Apéndice I. La Tabla 5 del Apéndice II se puede emplear para determinar los valores de funciones si θ es una aproximación a la segunda cifra decimal de la medida de un ángulo en radianes, y si $0 < \theta < 1.57$. (Obsérvese que $1.57 \approx \pi/2$.)

Las calculadoras científicas tienen teclas identificadas como SIN, COS y TAN que se pueden emplear para calcular, aproximadamente, los valores de esas funciones. Después se pueden calcular los valores de csc, sec y cot mediante la tecla de recíprocos. *Antes de utilizar una calculadora para determinar valores de funciones que correspondan al valor de un ángulo agudo en radianes, asegúrese de que la calculadora esté en el modo radián. Para valores que correspondan a medidas en grados, seleccione el modo grados.*

Como ejemplo, para calcular sen 30° en una calculadora cualquiera, se selecciona el modo de grados, se teclea 30 y se usa la tecla SIN para obtener sen 30° = 0.5, que es el valor exacto. Con el mismo procedimiento para 60°, se obtiene una aproximación decimal a $\sqrt{3}/2$, que es

$$\operatorname{sen} 60° \approx 0.8660.$$

La mayor parte de las calculadoras dan 8 a 10 cifras decimales para esos valores de función; sin embargo, en este libro se redondea, por lo general, a cuatro cifras decimales.

Para obtener un valor como cos 1.3, donde 1.3 es la medida en radianes de un ángulo agudo, se selecciona en la calculadora el modo de radianes y se teclea 1.3. A continuación se oprime la tecla [COS] y entonces

$$\cos 1.3 \approx 0.2675.$$

Para sec 1.3 se podría calcular cos 1.3 y después oprimir la tecla de recíprocos, que, por lo general, se identifica como [1/x], o bien, como [x^{-1}], para obtener

$$\sec 1.3 = \frac{1}{\cos 1.3} \approx 3.7383.$$

Ahora considérese la solución de ecuaciones del siguiente tipo:

Problema: Dado sen $\theta = 0.6635$, determinar θ.

Un método para calcular aproximadamente θ es emplear una tabla. Algunas calculadoras tienen una tecla con el rótulo [SIN $^{-1}$] que puede servir para ayudar a resolver la ecuación. Con otras calculadoras será necesario emplear otra tecla o sucesión de teclas, como por ejemplo [INV] [SIN]. (Consulte el manual de usuario de la calculadora.) Se emplea la siguiente notación al calcular θ, en la cual $-1 \leq k \leq 1$:

$$\text{si} \quad \text{sen}\,\theta = k, \quad \text{entonces} \quad \theta = \text{sen}^{-1}k.$$

Esta notación es semejante a la que se usa para la función inversa, f^{-1} de una función f, que se describió en la Secc. 3.8, para la cual, en ciertas condiciones,

$$\text{si} \quad f(x) = y, \quad \text{entonces} \quad x = f^{-1}(y).$$

Para el problema sen $\theta = 0.6635$, f es la función seno, $x = \theta$ y $y = 0.6635$. La notación sen^{-1} se basa *en las funciones trigonométricas inversas* que se estudian en la Secc. 7.6. En esta etapa *se considera que* sen^{-1} *es simplemente una entrada a una calculadora que tiene la tecla* [SIN^{-1}]. Así, para el problema planteado se tiene que

$$\theta = \text{sen}^{-1}(0.6635) \approx 41.57^\circ \approx 0.7255.$$

Como ya se indicó, al calcular el ángulo por costumbre se redondean las medidas en grados al centésimo de grado, 0.01°, y las medidas en radianes a cuatro cifras decimales.

De modo semejante, dado cos $\theta = k$, o bien tan $\theta = k$, se puede escribir

$$\theta = \cos^{-1}k \quad \text{o} \quad \theta = \tan^{-1}k$$

para indicar el empleo de la tecla [COS^{-1}] o bien [TAN^{-1}] en una calculadora.

Dados csc θ, sec θ o cot θ se emplea la relación de recíprocos para evaluar θ como se ve en el ejemplo que sigue.

EJEMPLO ILUSTRATIVO

Cálculo del ángulo agudo. Resolución de ecuaciones con calculadora

Ecuación	Solución con calculadora (grados y radianes)
❑ $\operatorname{sen}\theta = 0.5$	$\theta = \operatorname{sen}^{-1}(0.5) = 30° \approx 0.5236$
❑ $\cos\theta = 0.5$	$\theta = \cos^{-1}(0.5) = 60° \approx 1.0472$
❑ $\tan\theta = 0.5$	$\theta = \tan^{-1}(0.5) \approx 26.57° \approx 0.4636$
❑ $\csc\theta = 2$	$\theta = \operatorname{sen}^{-1}(\frac{1}{2}) = 30° \approx 0.5236$
❑ $\sec\theta = 2$	$\theta = \cos^{-1}(\frac{1}{2}) = 60° \approx 1.0472$
❑ $\cot\theta = 2$	$\theta = \tan^{-1}(\frac{1}{2}) \approx 26.57° \approx 0.4636$

En la Secc. 6.4 se explica cómo determinar con calculadora ángulos no agudos como soluciones de ecuaciones.

Las fórmulas que aparecen en el recuadro siguiente son, sin duda alguna, las identidades más importantes en trigonometría, porque se pueden emplear para simplificar y unificar muchos aspectos diferentes del tema. Como las fórmulas son parte de la base para trabajar en trigonometría, se llaman *identidades fundamentales.*

En tres de las citadas identidades intervienen cuadrados, como por ejemplo $(\operatorname{sen}\theta)^2$ y $(\cos\theta)^2$. Por lo general, si n es un entero diferente de -1, entonces una potencia como $(\cos\theta)^n$ se simboliza convencionalmente como $\cos^n\theta$. Los símbolos $\operatorname{sen}^{-1}\theta$ y $\cos^{-1}\theta$ se reservan para las funciones trigonométricas inversas, que se analizan en el siguiente capítulo. Con esta convención, se tiene que, por ejemplo

$$\cos^2\theta = (\cos\theta)^2 = (\cos\theta)(\cos\theta)$$

$$\tan^3\theta = (\tan\theta)^3 = (\tan\theta)(\tan\theta)(\tan\theta)$$

$$\sec^4\theta = (\sec\theta)^4 = (\sec\theta)(\sec\theta)(\sec\theta)(\sec\theta).$$

Primero se hará una lista de todas las identidades fundamentales, y después se estudiarán las demostraciones. Estas fórmulas son válidas para todo ángulo agudo θ. Luego veremos que también se aplican para otros ángulos y para números reales.

Identidades fundamentales

(1) Las identidades recíprocas:

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

(2) Las identidades de tangente y cotangente:

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

(3) Las identidades pitagóricas:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \qquad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

DEMOSTRACIÓN

(1) Las identidades recíprocas ya fueron demostradas.

(2) Para demostrar la identidad de la tangente, considérese el triángulo rectángulo de la Fig. 6.11; se aplican las definiciones de las funciones trigonométricas como sigue:

$$\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{b/c}{a/c} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

Para comprobar la identidad de cotangente se emplea una relación recíproca y la identidad de la tangente:

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta/\cos\theta} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

(3) Las identidades pitagóricas se llaman así por el primer paso en su demostración. De acuerdo con la Fig. 6.11, se obtiene

$$b^2 + a^2 = c^2 \qquad \text{teorema de Pitágoras}$$

$$\left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 = 1 \qquad \text{se divide entre } c^2$$

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1. \qquad \text{definiciones de sen } \theta \text{ y cos } \theta$$

Se aplica esta identidad para comprobar la segunda identidad pitagórica, como sigue:

$$\frac{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} \qquad \text{se divide entre } \cos^2\theta$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} \qquad \text{ecuación equivalente}$$

$$\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)^2 + \left(\frac{\cos\theta}{\cos\theta}\right)^2 = \left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2 \qquad \text{ley de los exponentes}$$

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \qquad \text{identidades de tangente y recíproca}$$

Para demostrar que $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$ se podrían dividir entre $\operatorname{sen}^2\theta$ ambos miembros de $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$. ■

Es posible utilizar las identidades fundamentales para expresar cada función trigonométrica en términos de cualquier otra de ellas. En el siguiente ejemplo se presentan dos casos.

EJEMPLO 3 *Uso de las identidades fundamentales*

Sea θ un ángulo agudo.
(a) Expresar sen θ en términos de cos θ.
(b) Expresar tan θ en términos de sen θ.

SOLUCIÓN

(a) Se procede como sigue:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \text{identidad fundamental}$$

$$\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta \qquad \text{se resta } \cos^2\theta$$

(continúa)

$$\operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta} \qquad \text{se saca raíz cuadrada}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} \qquad \operatorname{sen}\theta > 0 \text{ para ángulos agudos}$$

(b) Se empieza con la identidad fundamental

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta},$$

luego, se expresa $\cos\theta$ en términos de $\operatorname{sen}\theta$, despejando $\cos\theta$ de $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, y se obtiene

$$\cos\theta = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}, \quad \text{para} \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Por lo tanto,

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}} \quad \text{para} \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Con frecuencia se usan las identidades fundamentales para simplificar expresiones donde intervienen funciones trigonométricas, como se ve en el ejemplo que sigue.

EJEMPLO 4 ***Demostrar que una ecuación es una identidad***

Probar que la siguiente ecuación es una identidad, transformando el primer miembro hasta obtener el valor del segundo.

$$(\sec\theta + \tan\theta)(1 - \operatorname{sen}\theta) = \cos\theta$$

SOLUCIÓN Se empieza con el lado izquierdo y se procede como sigue:

$$\begin{aligned}
&(\sec\theta + \tan\theta)(1 - \operatorname{sen}\theta) \\
&= \left(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)(1 - \operatorname{sen}\theta) && \text{identidades recíproca y de la tangente} \\
&= \left(\frac{1+\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)(1 - \operatorname{sen}\theta) && \text{se suman las fracciones} \\
&= \frac{1-\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta} && \text{se multiplica} \\
&= \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta} && \text{se aplica } \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \\
&= \cos\theta && \text{se cancela un } \cos\theta.
\end{aligned}$$

Hay otras maneras de simplificar la expresión del lado izquierdo en el Ejemplo 4. Se podría haber multiplicado primero los dos factores, para después simplificar y combinar los términos. El método utilizado —cambiar todas las expresiones a una en donde sólo intervienen senos y cosenos—, ayuda con frecuencia. Sin embargo, esa técnica no siempre conduce a la simplificación más breve posible.

De aquí en adelante se usará la frase *verificar la identidad*, en vez de *demostrar que una ecuación es una identidad*. Cuando se comprueba una identidad, se usan con frecuencia las

identidades fundamentales y la manipulación algebraica para simplificar las expresiones, como se hizo en el ejemplo anterior.

☞ **Precaución**

> Si una supuesta identidad contiene fracciones, no multiplique ambos lados por el mínimo común denominador.

Una razón del aviso precautorio es que si no se tiene cuidado con las restricciones de los ángulos se puede llegar a conclusiones erróneas. Para ilustrar, considérese la ecuación

$$\frac{1-\operatorname{sen}\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}=\frac{1+\operatorname{sen}\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}.$$

Si se multiplican ambos miembro por el mínimo común denominador $(1-\operatorname{sen}\theta)(1+\operatorname{sen}\theta)$ y se simplifica, resulta

$$(1-\operatorname{sen}\theta)(1+\operatorname{sen}\theta)=(1+\operatorname{sen}\theta)(1-\operatorname{sen}\theta)$$

$$1\operatorname{sen}^2\theta=1-\operatorname{sen}^2\theta$$

Esta última ecuación es válida para todo valor de θ. Pero no es el caso para la ecuación *dada*, ya que si $\operatorname{sen}\theta=1$, al sustituir se obtiene lo siguiente:

$$\text{PM: } \frac{0}{0}\text{ (indeterminado);} \qquad \text{SM: } \frac{2}{2}=1$$

Igualmente, la ecuación dada es falsa para todo valor de θ tal que $\operatorname{sen}\theta=-1$. Si se hubiera agregado la restricción $\operatorname{sen}\theta\neq\pm 1$, la ecuación dada sería una identidad, ya que se reduce a $1=1$ para todo valor de θ. La nota precautoria evita tener estas restricciones cada vez que se encuentre una supuesta identidad.

EJEMPLO 5 *Comprobación de una identidad*

Verificar la siguiente identidad transformando el lado izquierdo en el segundo miembro:

$$\frac{\tan\theta+\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}=\sec\theta+\cot\theta$$

SOLUCIÓN Según la nota precautoria anterior, *no se permite multiplicar ambos miembros por* $\operatorname{sen}\theta$. Puede transformarse el primer miembro en el segundo miembro como sigue:

$$\frac{\tan\theta+\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}=\frac{\tan\theta}{\operatorname{sen}\theta}+\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \text{se divide el numerador entre sen } \theta$$

$$=\frac{\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)}{\operatorname{sen}\theta}+\cot\theta \qquad \text{identidades de tangente y cotangente}$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}+\cot\theta \qquad \text{regla de cocientes}$$

$$=\frac{1}{\cos\theta}+\cot\theta \qquad \text{se cancela sen } \theta$$

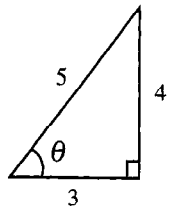
$$=\sec\theta+\cot\theta \qquad \text{identidad recíproca}$$

En la Secc. 7.1 se comprueban otras identidades, con métodos semejantes a los utilizados en los dos últimos ejemplos.

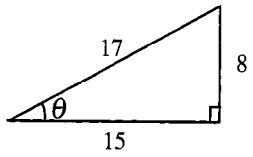
EJERCICIOS 6.2

Ejercicios 1– 8: Calcule los valores de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ.

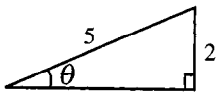
1



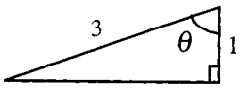
2



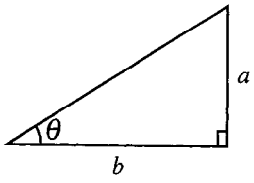
3



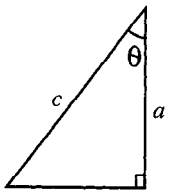
4



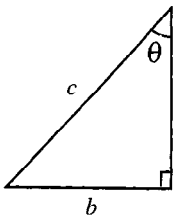
5



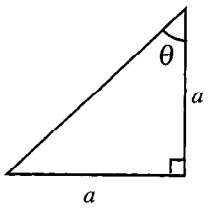
6



7

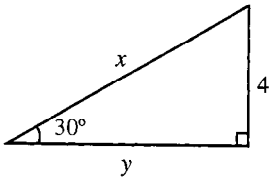


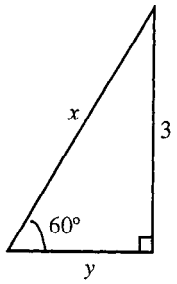
8



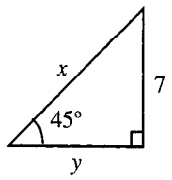
Ejercicios 9 –14: Calcule los valores exactos de x y y.

9

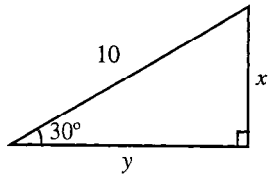




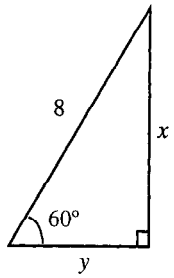
11



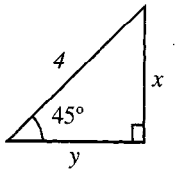
12



13



14



Ejercicios 15 –20: Calcule los valores exactos de las funciones trigonométricas del ángulo agudo θ.

15 $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$

16 $\cos\theta = \frac{8}{17}$

17 $\tan\theta = \frac{5}{12}$

18 $\cot\theta = \frac{7}{24}$

19 $\sec\theta = \frac{6}{5}$

20 $\csc\theta = 4$

Ejercicios 21–26: Obtenga el valor aproximando a tres cifras decimales.

21 **(a)** sen 73°20′ **(b)** cos 0.68

22 **(a)** cos 38°30′ **(b)** sen 1.48

23 **(a)** tan 21°10′ **(b)** cot 1.13

24 **(a)** cot 9°10′ **(b)** tan 0.75

25 **(a)** sec 67°50′ **(b)** csc 0.32

26 **(a)** csc 43°40′ **(b)** sec 0.26

Ejercicios 27– 34: Calcule el ángulo agudo, θ, con aproximación de (a) (0.01)°, y (b) 1′.

27 $\cos\theta = 0.8620$

28 $\operatorname{sen}\theta = 0.6612$

29 $\tan\theta = 3.7$

30 $\cos\theta = 0.8$

31 $\operatorname{sen}\theta = 0.4217$

32 $\tan\theta = 4.91$

33 $\sec\theta = 4.246$

34 $\csc\theta = 11$

Ejercicios 35 – 40: Mediante las identidades fundamentales, escriba la primera expresión en términos de la segunda, para cualquier ángulo agudo θ.

35 $\cot\theta,\ \operatorname{sen}\theta$

36 $\tan\theta,\ \cos\theta$

37 $\sec\theta,\ \operatorname{sen}\theta$

38 $\csc\theta,\ \cos\theta$

39 $\operatorname{sen}\theta,\ \sec\theta$

40 $\cos\theta,\ \cot\theta$

Ejercicios 41 – 62: Compruebe la identidad transformando el lado izquierdo en el lado derecho.

41 $\cos\theta\sec\theta = 1$

42 $\tan\theta\cot\theta = 1$

43 $\operatorname{sen}\theta\sec\theta = \tan\theta$

44 $\operatorname{sen}\theta\cot\theta = \cos\theta$

45 $\dfrac{\csc\theta}{\sec\theta} = \cot\theta$

46 $\cot\theta\sec\theta = \csc\theta$

47 $(1+\cos\theta)(1-\cos\theta) = \operatorname{sen}^2\theta$

48 $\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

49 $\cos^2\theta(\sec^2\theta - 1) = \operatorname{sen}^2\theta$

50 $(\tan\theta + \cot\theta)\tan\theta = \sec^2\theta$

51 $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\csc\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sec\theta} = 1$

52 $1 - 2\operatorname{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

53 $(1+\operatorname{sen}\theta)(1-\operatorname{sen}\theta) = \dfrac{1}{\sec^2\theta}$

54 $(1-\operatorname{sen}^2\theta)(1+\tan^2\theta) = 1$

55 $\sec\theta - \cos\theta = \tan\theta\operatorname{sen}\theta$

56 $\dfrac{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}{\cos\theta} = 1 + \tan\theta$

57 $(\cot\theta + \csc\theta)(\tan\theta - \operatorname{sen}\theta) = \sec\theta - \cos\theta$

58 $\cot\theta + \tan\theta = \csc\theta\sec\theta$

59 $\sec^2\theta\csc^2\theta = \sec^2\theta + \csc^2\theta$

60 $\dfrac{1+\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = 2\csc^2\theta - 1$

61 $\log\csc\theta = -\log\operatorname{sen}\theta$

62 $\log\tan\theta = \log\operatorname{sen}\theta - \log\cos\theta$

63 ***Espesor de la capa de ozono*** Se estima el espesor de la capa atmosférica de ozono con la siguiente fórmula:

$$\ln I_0 - \ln I = kx\sec\theta,$$

en la cual I_0 es la intensidad de cierta longitud de onda de la luz del Sol, antes de llegar a la atmósfera; I es la intensidad de la misma longitud de onda después de pasar a través de una capa de ozono de x cm de espesor; k es la constante de absorción de ozono para esa longitud de onda; y θ es el ángulo agudo que forma la luz del Sol con la vertical. Suponga que para una longitud de onda de 3055×10^{-8} cm, con $k \approx 1.88$, se mide I_0/I, y resulta 1.72 cuando $\theta = 12°$. Calcule el espesor de la capa de ozono con precisión de 0.01 cm.

64 ***Espesor de la capa de ozono*** En el Ejercicio 63, si se calcula que la capa de ozono es de 0.31 cm de espesor y, para una longitud de onda de $3\,055 \times 10^{-8}$ cm, se calcula I_0/I y resulta ser 2.05, calcule el ángulo aproximado que formó el Sol con la vertical cuando se hizo la medición.

65 ***Radiación solar*** La cantidad de luz solar que ilumina la pared de una construcción puede afectar mucho la eficiencia energética del edificio. La radiación solar que llega a un muro vertical que ve hacia el este es $R = R_0\cos\theta\operatorname{sen}\phi$, donde R_0 es la radiación solar máxima posible, θ es el ángulo que forma el Sol con la horizontal, y φ es la dirección del Sol en el cielo, siendo $\phi = 90°$ cuando el Sol está en el este, y $\phi = 0°$ cuando está en el sur.

(a) ¿Cuándo llega la radiación solar máxima R_0 a la pared?

(b) ¿Qué porcentaje de R_0 llega a la pared cuando $\theta = 60°$ y el Sol se encuentra al sureste?

66 ***Cálculos meteorológicos*** A veces se puede estimar en las latitudes medias la distancia entre regiones consecutivas de baja presión. Si φ es la latitud, en grados, R es el radio de la Tierra, en kilómetros, y v es la velocidad horizontal del viento, en kilómetros por hora, entonces la distancia d, en kilómetros, de una zona de baja presión a la siguiente se puede estimar con la fórmula

$$d = 2\pi\left(\frac{vR}{0.52\cos\phi}\right)^{1/3}$$

(a) A una latitud de 48°, el radio aproximado de la Tierra es 6 369 km. Calcule d si la velocidad del viento es 45 km/h.

(b) Si v y R son constantes, ¿cómo varía d cuando aumenta la latitud?

6.3 APLICACIONES DONDE INTERVIENEN TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

La trigonometría se creó para ayudar a resolver problemas en los que intervienen ángulos y las longitudes de lados de los triángulos. Ya no son las aplicaciones más importantes los problemas de este tipo; sin embargo, siguen surgiendo en la física cuestiones acerca de triángulos. En esta sección se restringe el análisis a triángulos rectángulos. Los triángulos que no tengan un ángulo recto se consideran en el Cap. 8.

La notación que se usa con frecuencia es la siguiente. Los vértices de un triángulo se representan con A, B, C; los ángulos en A, B y C se llaman α, β, γ, respectivamente. Las longitudes de los lados opuestos a esos ángulos serán a, b, c, en forma respectiva. Al triángulo se le llama *triángulo ABC*. Si un triángulo es rectángulo, y si se conocen uno de los ángulos agudos y un lado, o si dos lados son datos, entonces es posible calcular las partes restantes mediante las fórmulas de la Secc. 6.2, que expresan las funciones trigonométricas en forma de relaciones de los lados de un triángulo.

En todos los ejemplos *se supone que ya se sabe cómo calcular los valores de las funciones trigonométricas y de los ángulos, empleando calculadora, tablas o los resultados para ángulos especiales.*

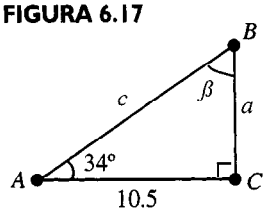
EJEMPLO 1 *Calcular las partes de un triángulo rectángulo*

En el triángulo ABC, $\gamma = 90°$, $\alpha = 34°$ y $b = 10.5$. Calcular las partes restantes.

SOLUCIÓN Como la suma de los tres ángulos interiores de un triángulo es 180°, y $\alpha + \gamma = 90° + 34° = 124°$,

$$\beta = 180° - (\alpha + \gamma) = 180° - 124° = 56°.$$

FIGURA 6.17



De acuerdo con la Fig. 6.17, se tiene

$$\tan 34° = \frac{a}{10.5} \qquad \tan \alpha = \frac{\text{op}}{\text{ady}}$$

$$a = (10.5) \tan 34° \qquad \text{se despeja } a$$

$$\approx (10.5)(0.6745) \approx 7.1. \qquad \text{se aproxima}$$

Para calcular el lado c, se usa cualquiera de las funciones coseno o secante, como en (1) o (2), respectivamente:

(1)
$$\cos 34° = \frac{10.5}{c} \qquad \cos \alpha = \frac{\text{ady}}{\text{hip}}$$

$$c = \frac{10.5}{\cos 34°} \qquad \text{se despeja } c$$

$$\approx \frac{10.5}{0.8290} \approx 12.7 \qquad \text{se aproxima}$$

(2)
$$\sec 34° = \frac{c}{10.5} \qquad \sec \alpha = \frac{\text{hip}}{\text{ady}}$$

$$c = (10.5) \sec 34° \qquad \text{se despeja } c$$

$$\approx (10.5)(1.2062) \approx 12.7 \qquad \text{se aproxima}$$

Como se vio en el Ejemplo 1, cuando se trabaja con triángulos, por lo general se redondean los resultados. Una razón para hacerlo es que en la mayor parte de las aplicaciones, las longitudes de los lados de los triángulos, y las medidas de los ángulos, se determinan con dispositivos mecánicos y, por consiguiente, sólo son aproximaciones a los valores exactos. Por consiguiente, un número como 10.5 en el Ejemplo 1 se supone que ya está redondeado al décimo. No se puede esperar más exactitud en los valores calculados de los lados restantes y, por consiguiente, también se deben redondear a décimos.

En algunos problemas se podrá encontrar un número con muchos dígitos, como 36.4635, como valor de la longitud de un lado de un triángulo. Si se usa una calculadora, el número se podrá teclear como de costumbre; sin embargo, si se emplea la Tabla 4, un número de este tipo se debe redondear antes de iniciar cualquier cálculo. Si se expresa un número a en forma científica: $a = c \times 10^k$, donde $1 \le c \le 10$, entonces, antes de emplear la Tabla 4, se debe redondear c a tres decimales. Otro modo de decir lo mismo es que c se debe redondear a 4 *cifras significativas*. Este procedimiento se aclara con algunos ejemplos. Si $c = 36.4635$, se redondea a 36.46. El número 684 279 se debe redondear a 684 300. Para una fracción decimal como 0.096202, se usa 0.09620. La razón de redondear es que los valores de las funciones trigonométricas de la Tabla 4 se han redondeado a 4 cifras significativas y, por consiguiente, no se puede esperar una exactitud mayor de 4 cifras en los cálculos.

Para determinar ángulos, los resultados se deben redondear como se indica en la siguiente tabla:

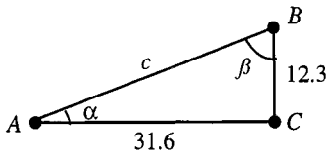
Número de cifras significativas en la longitud de los lados	Redondeo de la medida del ángulo en grados
2	1°
3	10′ o bien 0.1°
4	1′ o bien 0.01°

Para justificar esta tabla se necesita un análisis cuidadoso de los problemas donde intervienen datos aproximados.

EJEMPLO 2 ***Cálculo aproximado de las partes de un triángulo rectángulo***

En el triángulo ABC, $\gamma = 90°$, $a = 12.3$ y $b = 31.6$; calcular aproximadamente las partes restantes.

FIGURA 6.18



SOLUCIÓN De acuerdo con el triángulo que se ve en la Fig. 6.18,

$$\tan \alpha = \frac{12.3}{31.6}.$$

Como los lados están expresados con tres cifras significativas, la regla mencionada en la tabla anterior señala que se debe redondear α a 0.1°, o al múltiplo más cercano de 10′. Con una calculadora en modo de grados, se obtiene

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{12.3}{31.6} \approx 21.3° \quad \text{o, equivalentemente} \quad \alpha \approx 21°20'.$$

Como α y β son ángulos complementarios,

$$\beta = 90° - \alpha \approx 90° - 21.3° = 68.7°.$$

La única parte que falta calcular es c. Se podrían emplear varias relaciones en donde interviene c para calcular su valor. Entre ellas están

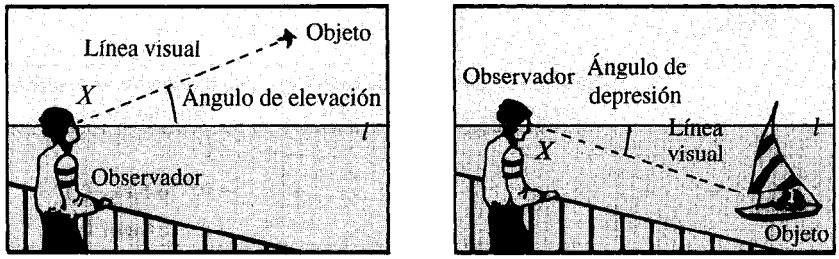
$$\sec \alpha = \frac{c}{31.6}, \qquad \sec \beta = \frac{c}{12.3}, \qquad \text{y} \qquad a^2 + b^2 = c^2.$$

Siempre que sea posible, es mejor usar una relación en donde sólo intervenga la información dada, ya que no depende de algún resultado que se haya calculado con anterioridad. Por consiguiente, con $a = 12.3$ y $b = 31.6$, se tiene que

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(12.3)^2 + (31.6)^2} = \sqrt{1149.85} \approx 33.9.$$

Como se ve en la Fig. 6.19, si un observador en un punto X ve un objeto, entonces el ángulo que forma la visual con la horizontal l, es el **ángulo de elevación** del objeto, si está arriba de la horizontal, o el **ángulo de depresión** del mismo, si éste está abajo de la horizontal. Se usa esta terminología en los dos ejemplos siguientes.

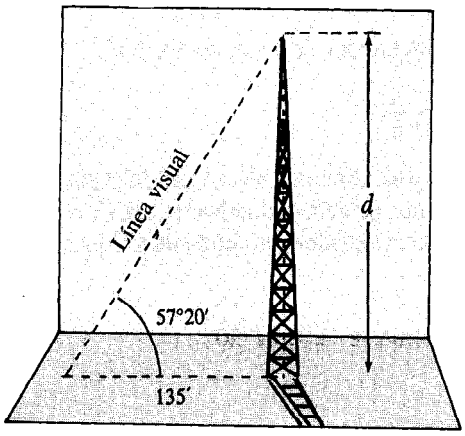
FIGURA 6.19



EJEMPLO 3 ***Uso del ángulo de elevación***

Desde un punto al nivel del terreno, a 135 pies de la base de una torre, el ángulo de elevación de la punta de dicha torre es 57°20′. Calcular la altura aproximada de ésta.

FIGURA 6.20



SOLUCIÓN Si d es la altura de la torre, entonces los datos se representan con el triángulo en la Fig. 6.20. De acuerdo con esta figura, se obtiene

$$\tan 57°20' = \frac{d}{135} \qquad \tan 57°20' = \frac{\text{op}}{\text{ady}}$$

$$d = 135 \tan 57°20' \qquad \text{se despeja } d$$

$$\approx 135(1.560) \approx 211. \qquad \text{resultado aproximado}$$

La torre mide aproximadamente 211 pies de altura.

EJEMPLO 4 ***Uso del ángulo de depresión***

Desde la azotea de un edificio que da al mar, un observador ve un bote navegando directamente hacia el edificio. Si el observador está a 100 pies sobre el nivel del mar, y si el ángulo de depresión del bote cambia de 25° a 40° durante el periodo de observación, calcular la distancia aproximada que recorre el bote.

SOLUCIÓN Como se ve en la Fig. 6.21, sean A y B las posiciones del bote que corresponden a los ángulos de 25° y 40°, respectivamente. Supóngase que el observador se encuentra en el punto D, y que C es el punto 100 pies directamente abajo. Sea d la distancia que recorre la lancha, y sea k la distancia de B a C. Si α y β representan los ángulos DAC y DBC, respectivamente, entonces, de acuerdo con la geometría, $\alpha = 25°$ y $\beta = 40°$.

FIGURA 6.21

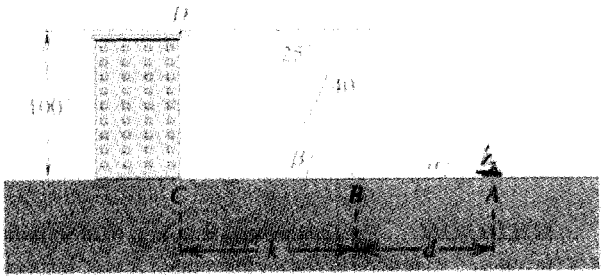
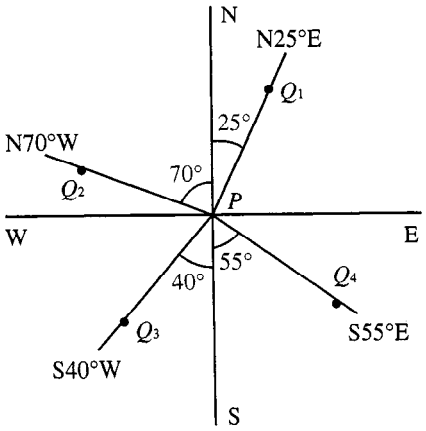


FIGURA 6.22



De acuerdo con el triángulo BCD:

$$\cot \beta = \cot 40° = \frac{k}{100} \qquad \cot \beta = \frac{\text{ady}}{\text{op}}$$

$$k = 100 \cot 40° \qquad \text{se despeja } k$$

Según el triángulo DAC:

$$\cot \alpha = \cot 25° = \frac{d + k}{100} \qquad \cot \alpha = \frac{\text{ady}}{\text{op}}$$

$$d + k = 100 \cot 25° \qquad \text{se multiplica por 100}$$

$$d = 100 \cot 25° - k \qquad \text{se resta } k$$

$$= 100 \cot 25° - 100 \cot 40° \qquad k = 100 \cot 40°$$

$$= 100(\cot 25° - \cot 40°) \qquad \text{se saca 100 como factor común}$$

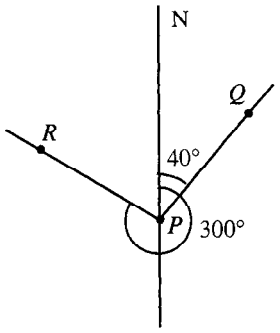
$$\approx 100(2.145 - 1.192) \approx 95 \qquad \text{resultado aproximado}$$

Por consiguiente, el bote recorre 95 pies.

En algunos problemas de navegación o de topografía, se especifica el **rumbo** (o **dirección**)*, de un punto P a un punto Q mencionando el ángulo (de 0° a 90°) que forma el segmento PQ con la línea norte-sur que pasa por P. También se menciona si Q está al norte o al sur, y al este o al oeste de P. En la Fig. 6.22 se muestran cuatro posibilidades. El rumbo de Q_1 respecto a P

* (N. del R.) Se complementa con la terminología usual, aclarando lo expresado en el original en inglés. [F.P.]

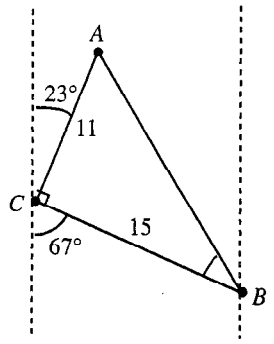
FIGURA 6.23



es 25° al este del norte, que se representa como N25°E. También se dice el rumbo (o dirección) N25°E, de P a Q_1. Los rumbos de Q_2, Q_3 y Q_4 respecto de P se indican en la misma forma en la figura. Nótese que cuando se usa esta notación para rumbos o direcciones, siempre aparecen N y S *a la izquierda* del ángulo, y W o E *a la derecha.*

En la navegación aérea la dirección se expresa midiendo a partir del norte un ángulo (de 0° a 360°) en *sentido de las manecillas del reloj.* En este caso, se asigna una medida positiva al ángulo, en lugar de la medida negativa a que uno está acostumbrado para rotaciones en el sentido del reloj. Según la Fig. 6.23, se ve que la dirección de PQ es 40°, y que la dirección de PR es 300°. (Este ángulo director se denomina *acimut.*)

FIGURA 6.24



EJEMPLO 5 *Uso de los rumbos*

De un puerto salen dos barcos al mismo tiempo, uno de ellos con el rumbo N23°E, a una velocidad de 11 mi/h; el segundo navega en dirección S67°E a 15 mi/h. Calcule aproximadamente el rumbo desde el segundo barco hacia el primero, una hora después.

SOLUCIÓN En el esquema de la Fig. 6.24 se indican las posiciones del primero y segundo barcos en los puntos A y B, respectivamente, después de una hora. El punto C representa al puerto. Se desea calcular el rumbo de B a A. Nótese que

$$\angle ACB = 180° - (23° + 67°) = 90°,$$

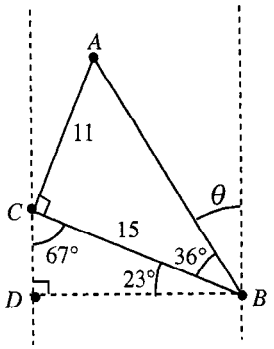
y, por consiguiente, el triángulo ACB es rectángulo. Así,

$$\tan \beta = \frac{11}{15} \qquad \tan \beta = \frac{\text{op}}{\text{ady}}$$

$$\beta = \tan^{-1} \tfrac{11}{15} \approx 36°. \quad \text{resultado aproximado}$$

Se ha redondeado β al grado más cercano, ya que los lados de los triángulos aparecen con dos cifras significativas.

FIGURA 6.25



De acuerdo con la Fig. 6.25 se obtiene lo siguiente:

$$\angle CBD = 90° - \angle BCD = 90° - 67° = 23°$$

$$\angle ABD = \angle ABC + \angle CBD \approx 36° + 23° = 59°$$

$$\theta = 90° - \angle ABD \approx 90° - 59° = 31°$$

Por consiguiente, el rumbo de B a A es, aproximadamente, N31° W.

EJERCICIOS 6.3

Ejercicios 1– 8: Dados los elementos indicados del triángulo ABC, con $\gamma = 90°$, calcule los valores exactos de los elementos restantes.

1 $\alpha = 30°$, $b = 20$ **2** $\beta = 45°$, $b = 35$

3 $\beta = 45°$, $c = 30$ **4** $\alpha = 60°$, $c = 6$

5 $a = 5$, $b = 5$ **6** $a = 4\sqrt{3}$, $c = 8$

7 $b = 5\sqrt{3}$, $c = 10\sqrt{3}$ **8** $b = 7\sqrt{2}$, $c = 14$

Ejercicios 9–16: Dados los elementos indicados del triángulo ABC, con $\gamma = 90°$, aproxime los elementos restantes.

9 $\alpha = 37°$, $b = 24$ **10** $\beta = 64°20'$, $a = 20.1$

11 $\beta = 71°51'$, $b = 240.0$ **12** $\alpha = 31°10'$, $a = 510$

13 $a = 25$, $b = 45$ **14** $a = 31$, $b = 9.0$

15 $c = 5.8$, $b = 2.1$ **16** $a = 0.42$, $c = 0.68$

Ejercicios 17–24: Dadas las partes indicadas del triángulo ABC, donde $\gamma = 90°$, exprese el tercer elemento restante en términos de las primeras dos.

17 $\alpha, c;\ b$ **18** $\beta, c;\ b$

19 $\beta, b;\ a$ **20** $\alpha, b;\ a$

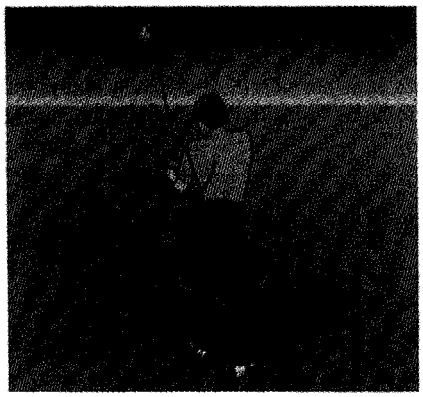
21 $\alpha, a;\ c$ **22** $\beta, a;\ c$

23 $a, c;\ b$ **24** $a, b;\ c$

25 ***Altura de un árbol*** Un silvicultor se encuentra a 200 pies de la base de un cedro, y observa que el ángulo entre el suelo y la punta del árbol es 60°. Estime la altura del árbol.

26 ***Distancia al monte*** El Fujiyama, en Japón, tiene una altura aproximada de 12 400 pies. Un estudiante de trigonometría, a una distancia de varias millas, ve que el ángulo entre el suelo y la cumbre es 30°. Estime la distancia al centro de la base de la montaña.

27 ***Altura de una cometa*** Una persona echa a volar una cometa sujeta al cordel a 4 pies sobre el terreno. El hilo está tenso y forma un ángulo de 60° con la horizonal (véase la figura). Calcule la altura aproximada de la cometa sobre el terreno, cuando se han soltado 500 pies de cordel.

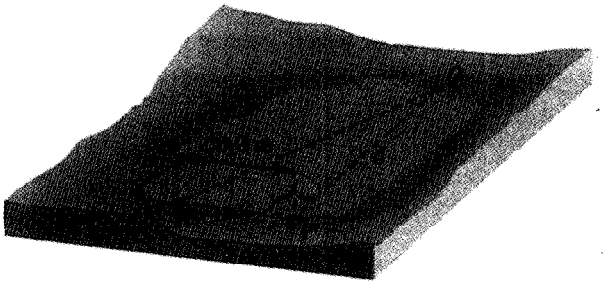


28 ***Topografía*** Desde un punto a 15 m sobre terreno plano, un topógrafo mide el ángulo de depresión de un objeto sobre el suelo y es 68°. Calcule aproximadamente la distancia del objeto al punto en el terreno directamente bajo el topógrafo.

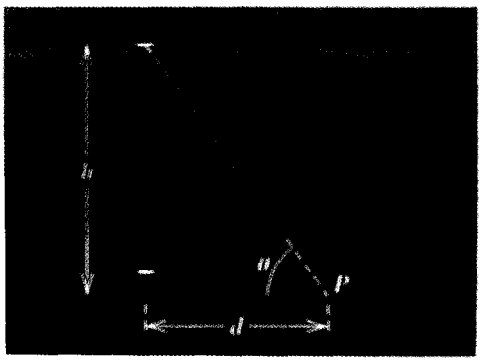
29 ***Aterrizaje de un avión*** Un piloto, que vuela a una altura de 5 000 pies, desea llegar a los números en una pista formando un ángulo de 10°. Calcule, aproximadamente, la distancia del avión al inicio del descenso, a los números.

30 ***Radioantena*** Un cable de retenida se fija a la punta de una antena de radio, y a un punto en el terreno horizontal a una distancia de 40.0 m de la base de la misma. Si el cable forma un ángulo de 58°20′ con el suelo, calcule su longitud aproximada.

31 ***Topografía*** Para determinar la distancia d entre dos puntos P y Q en las orillas opuestas de un lago, un topógrafo localiza un punto R que está a 50.0 m de P, de tal modo que RP es perpendicular a PQ, como se ve en la figura. A continuación, con un teodolito, el topógrafo mide el ángulo PRQ, que resulta de 72°40′. Calcule d.



32 ***Cálculos meteorológicos*** Para medir la altura h de un casquete de nubes, un estudiante de meteorología dirige un reflector verticalmente hacia arriba, desde el piso. Desde un punto P, sobre el suelo a nivel, que se encuentra a d metros del reflector, se mide el ángulo de elevación, θ, del área iluminada en las nubes (véase la figura).



(a) Exprese h en términos de d y θ.
(b) Calcule h si $d = 1\,000$ m y $\theta = 59°$.

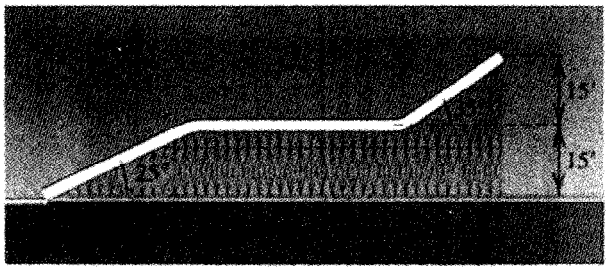
33 ***Altura de un cohete*** Un cohete se dispara a nivel del mar y sube a un ángulo constante de 75° una distancia de 10 000 pies. Calcule la altura que alcanza con una aproximación de un pie.

34 ***Despegue de un avión*** Un aeroplano despega formando un ángulo de 10° y viaja a una velocidad de 250 pies/s. ¿Cuánto tiempo tarda aproximadamente en llegar a una altura de 15 000 pies?

35 ***Diseño de un puente levadizo*** Un puente levadizo tiene 150 pies de longitud cuando se atraviesa sobre un río. Como se ve en la figura, se pueden hacer girar las dos secciones del puente hacia arriba, un ángulo de 35°.

(a) Si el nivel del agua está a 15 pies por debajo del puente cerrado, calcule la distancia d entre el extremo de una sección y el nivel del agua cuando el puente está completamente abierto.
(b) Aproximadamente, ¿qué distancia hay entre los extremos de las dos secciones cuando el puente está completamente abierto, como se ve en la figura?

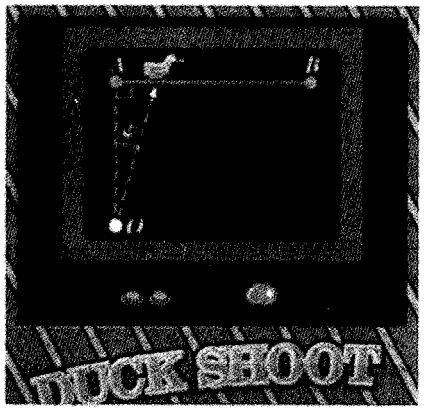
36 ***Diseño de un tobogán de agua*** En la figura se ve parte de un diseño para un tobogán acuático. Calcule la longitud total de la resbaladilla, con exactitud de 1 pie.



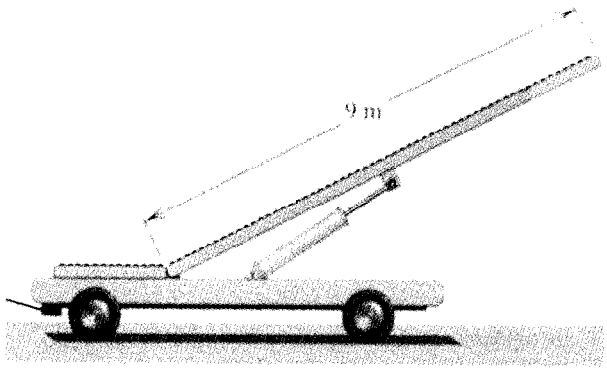
37 ***Elevación del Sol*** Calcule el ángulo aproximado de elevación α del Sol, cuando una persona de 5.0 pies de estatura proyecta una sombra de 4.0 pies de longitud en terreno a nivel (véase la figura).

38 ***Construcción de una rampa*** Un constructor desea formar una rampa de 24 pies de longitud que suba a una altura de 5.0 pies sobre terreno plano. Calcule el ángulo aproximado que debe formar la rampa con la horizontal.

39 ***Videojuego*** En la figura se ve la pantalla de un videojuego, en la cual se mueven patos desde A hasta B, a una velocidad de 7 cm/s. Las balas que se disparan desde el punto O viajan a 25 cm/s. Si un jugador dispara tan pronto como aparece un pato en A, ¿a qué ángulo φ debe apuntarse el arma para obtener un blanco?



40 ***Banda transportadora*** Una banda transportadora de 9 m de largo se puede hacer girar, hidráulicamente, hacia



arriba, hasta un ángulo de 40° para cargar y descargar bultos en aviones (véase la figura).

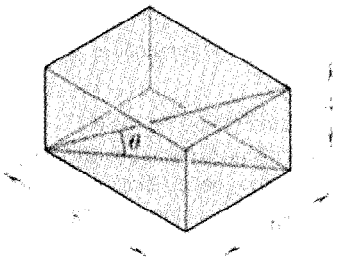
(a) Calcule, al grado más cercano, el ángulo que debe hacerse girar la banda para alcanzar una puerta que se encuentra a 4 m sobre la plataforma de la banda.

(b) Calcule la altura máxima aproximada, sobre la plataforma, que puede alcanzar la banda.

41 ***El terreno del Pentágono*** El Pentágono (en Washington, Estados Unidos) es el edificio de oficinas más grande del mundo, en lo que se refiere a área de terreno. El perímetro de la construcción tiene la forma de un pentágono regular y cada lado tiene una longitud de 921 pies. Calcule el área que encierra el perímetro de ese edificio.

42 ***Perímetro de un octágono*** En un círculo de 12.0 cm de radio se inscribe un octágono regular. Calcule el perímetro aproximado del octágono.

43 ***Diagonales de una caja*** Una caja rectangular tiene las dimensiones 8 pulg × 6 pulg × 4 pulg. Calcule, con exactitud de décimo de grado, el ángulo θ que forma una diagonal de la base y la diagonal de la caja, como se ve en la figura.



44 ***Volumen de un vaso cónico*** Un vaso cónico de papel tiene 2 pulg de radio. Calcule, aproximando al grado más cercano, el ángulo β (véase la figura), de tal modo que el cono tenga un volumen de 20 pulg^3.

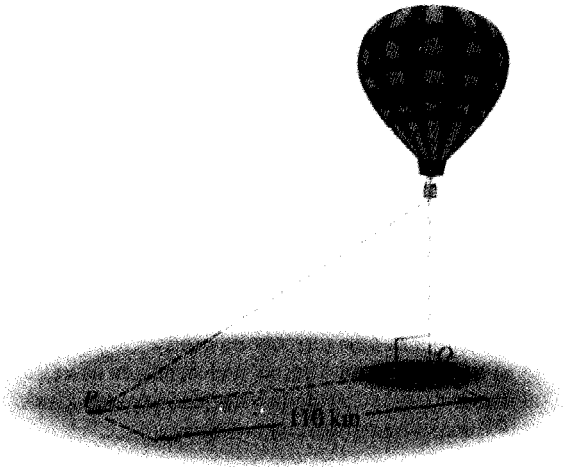
45 ***Altura de una torre*** Desde un punto P sobre el terreno horizontal, el ángulo de elevación de la punta de una torre es 26°50′. Desde un punto a 25.0 m más cercano a la torre, en la misma línea que P y la base de la torre, el ángulo de elevación es 53°30′. Calcule la altura aproximada de la estructura.

46 ***Cálculos de una escalera*** Una escalera de 20 pies de longitud está apoyada contra el muro de una construcción, y el ángulo que forman es de 22°.

(a) Calcule la distancia aproximada del pie de la escalera al muro.

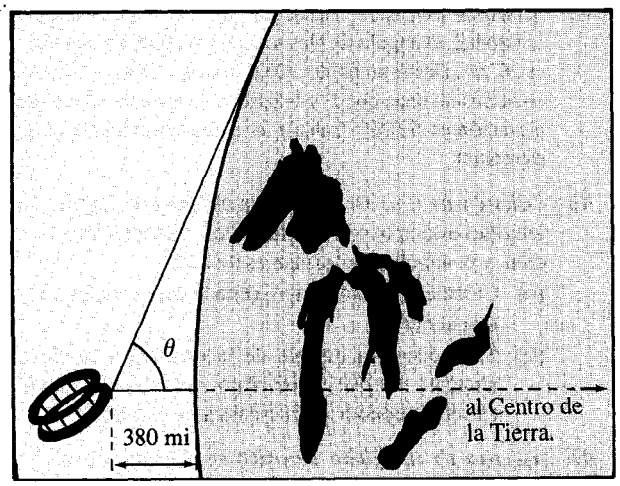
(b) Si la distancia del pie de la escalera a la pared aumenta 3.0 pies, ¿qué altura aproximada baja el extremo superior de la escalera en el muro?

47 ***Ascenso de un globo aerostático*** Cuando un globo aerostático sube verticalmente, su ángulo de elevación desde un punto P, sobre terreno horizontal a 110 km de distancia del punto Q, directamente abajo del globo, cambia de 19°20′ a 31°50′ (véase la figura). ¿Qué ascenso aproximado alcanza el globo durante esas observaciones?

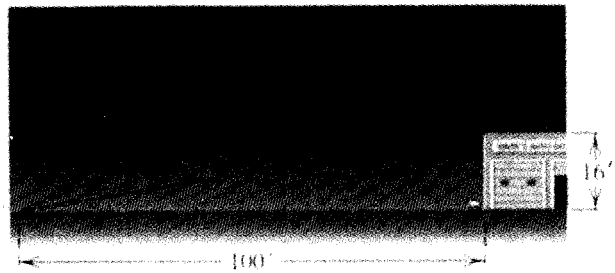


48 ***Altura de un edificio*** Desde un punto A, que está a 8.20 m sobre el piso, el ángulo de elevación de la parte superior del edificio es 31°20′, y el ángulo de depresión a la base de la construcción es 12°50′. Calcule la altura aproximada del edificio.

49 ***Radio de la Tierra*** Una cápsula espacial gira alrededor de la Tierra a una altura de 380 mi. Cuando un astronauta ve el horizonte, el ángulo θ que se indica en la figura es 65.8°. Con esta información, estime el radio de la Tierra.



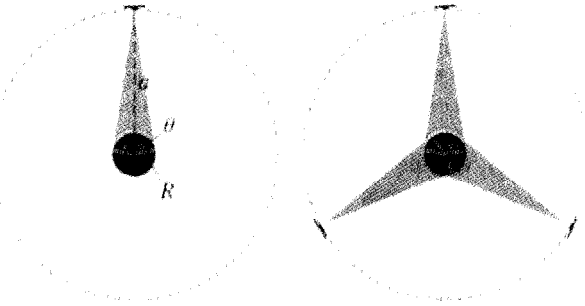
50 ***Longitud de una antena*** Una antena de banda civil está sobre una cochera, cuya altura es 16 pies. Desde un punto en el terreno horizontal, a 100 pies del punto directamente abajo de la antena, ésta subtiende un ángulo de 12°, como se ve en la figura. Calcule la longitud aproximada de dicha antena.



51 ***Velocidad de un avión*** Un avión que vuela a una altura de 10 000 pies, pasa directamente sobre un objeto fijo en el suelo. Un minuto después, el ángulo de depresión al objeto es 42°. Calcule la velocidad aproximada del avión, con exactitud de 1 mi por hora.

52 ***Altura de una montaña*** Un conductor, que viaja por una carretera horizontal a una velocidad de 60 mi/h, se dirige hacia una montaña, y observa que entre la 1:00 P.M. y la 1:10 P.M el ángulo de elevación de la cumbre cambia de 10° a 70°. Calcule la altura aproximada de la montaña.

53 ***Satélite de comunicaciones*** En la figura se ve un satélite de comunicaciones con órbita ecuatorial, es decir, una órbita casi circular en el plano determinado por el ecuador terrestre. Si el satélite circunda la Tierra a una altitud $a = 22\ 300$ mi, su velocidad es igual a la velocidad de rotación de la Tierra. Para un observador en el ecuador, el satélite parece estacionario. Es decir, su órbita es geoestacionaria o geosincrónica.



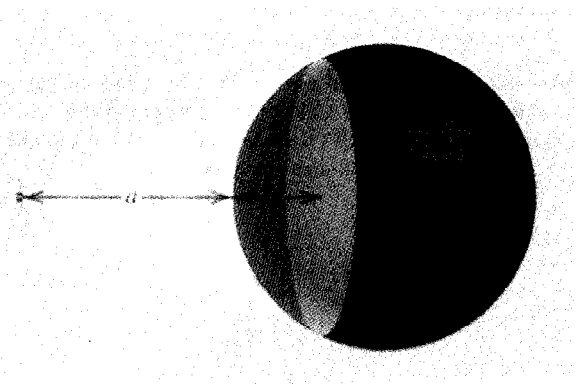
(a) Con $R = 4\ 000$ mi como radio de la Tierra, determine el porcentaje de la extensión del ecuador que queda bajo los límites de la señal de ese satélite.

(b) Como se ve en la segunda figura, hay tres satélites igualmente espaciados en órbitas ecuatoriales geosincrónicas. Con el valor de θ obtenido en el inciso (a), explique por qué todos los puntos sobre el ecuador quedan siempre dentro del alcance de la señal de cuando menos uno de los tres satélites.

54 ***Satélite de comunicaciones*** Tome como referencia el Ejercicio 53. En la figura siguiente se ve el área que cubre uno de los satélites de comunicaciones que gira alrededor de un planeta de radio R a una altura a. La parte de la superficie del planeta al alcance del satélite es un casquete esférico de profundidad d y área superficial $A = 2\pi Rd$.

(a) Exprese d en términos de R y θ.

(b) Estime el porcentaje de la superficie del planeta que queda al alcance de la señal de un solo satélite en órbita sincrónica ecuatorial.



55 ***Altura de una cometa*** Generalice el Ejercicio 27 al caso en el cual el ángulo sea α; la longitud del cordel, en pies, sea d, y el extremo inferior del hilo esté a c pies sobre el terreno. Exprese la altura h de la cometa en términos de α, d y c.

56 ***Topografía*** Generalice el Ejercicio 28 para el caso en el cual el punto esté a d metros sobre el nivel del suelo horizontal, y el ángulo de depresión sea α. Exprese la distancia x en términos de d y α.

57 ***Altura de una torre*** Generalice el Ejercicio 45 para el caso en que el primer ángulo sea α, el segundo sea β y la distancia entre los dos puntos sea d. Exprese la altura h de la torre en términos de d, α y β.

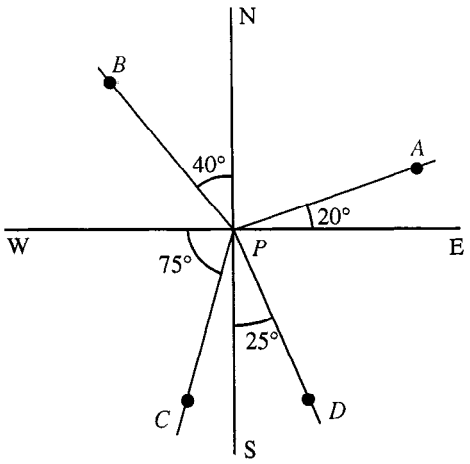
58 ***Perímetro de un octágono*** Generalice el Ejercicio 42 para el caso de un polígono de n lados inscrito en un círculo de radio r. Exprese el perímetro P en términos de n y r.

59 ***Ascensión de un globo aerostático*** Generalice el Ejercicio 47 al caso en el cual la distancia de P a Q sea d kilómetros, y el ángulo de elevación cambie de α a β.

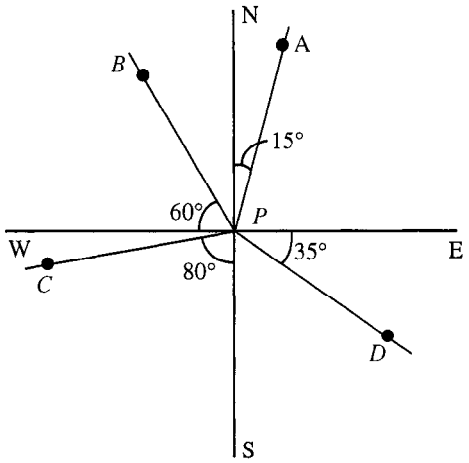
60 ***Altura de un edificio*** Generalice el Ejercicio 48 al caso en el cual el punto A esté a d metros sobre el piso y los ángulos de elevación y depresión sean α y β, respectivamente. Exprese la altura h del edificio, en términos de d, α y β.

Ejercicios 61 y 62: Determine el rumbo de cada uno de los puntos *A*, *B*, *C* y *D*, respecto a *P*.

61



62

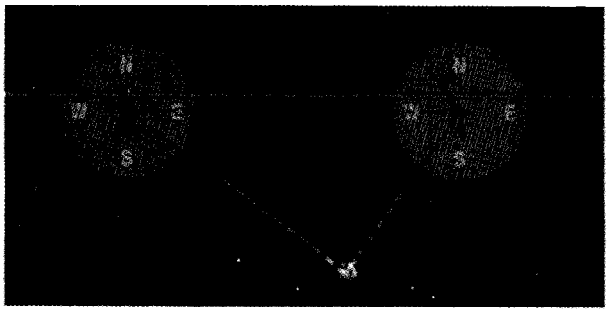


63 ***Rumbos de barcos*** Un barco sale de un puerto a la 1:00 P. M. y viaja en dirección N34°W a una velocidad de 24 mi/h. Otro barco sale a la 1:30 P. M. y viaja en dirección N56°E a una velocidad de 18 mi/h.

(a) ¿A qué distancia se encuentran aproximadamente los barcos a las 3:00 P. M.?

(b) ¿Cuál es la dirección aproximada en grados desde el primer barco al segundo?

64 ***Localización de un incendio forestal*** Desde un punto de observación A, un guardabosques ve un incendio en dirección S35°50′W (véase la figura). De un punto B, a 5 mi hacia el oeste de A, otro guardabosques ve el mismo incendio en una dirección S54°10′E. Calcule aproximadamente a décimos de milla la distancia del incendio al punto A.



65 ***Vuelo de un avión*** Un avión vuela a una velocidad de 360 mi/h desde un punto A en dirección (acimut) 137° durante 30 min; después vira y viaja en dirección 227° durante 45 minutos. Calcule con aproximación de una milla la distancia del avión a A.

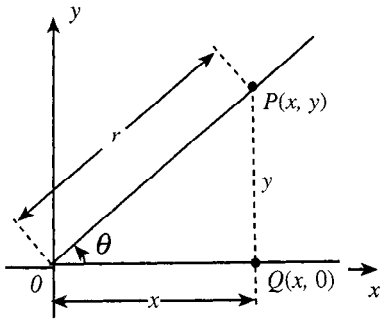
66 ***Plan de vuelo*** Un aeroplano vuela durante 1 h a una velocidad de 400 mi/h desde un punto A, en dirección 153°; después vuela en dirección 63° durante 1 h.

(a) ¿En qué dirección necesita volar la aeronave para regresar al punto A?

(b) ¿Cuánto tardará en regresar al punto A?

6.4 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO CUALQUIERA

FIGURA 6.26

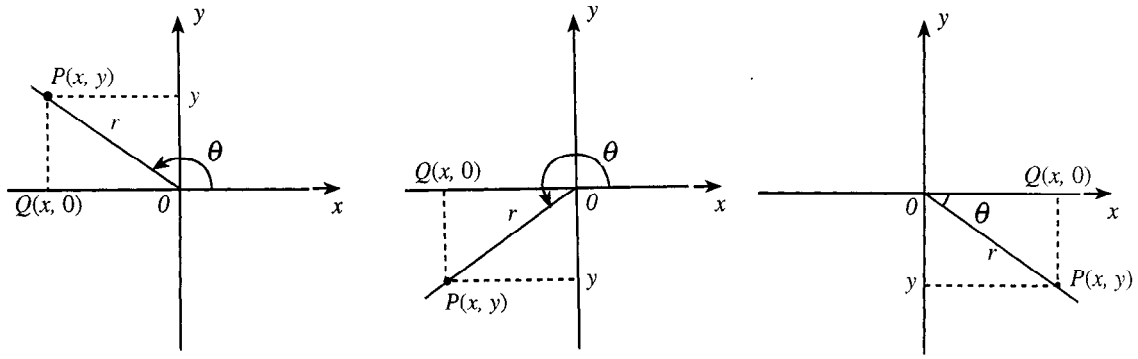


Como en muchos problemas de aplicación intervienen ángulos que no son agudos, es necesario ampliar las definiciones de las funciones trigonométricas. Se hace esta generalización empleando la posición normal de un ángulo θ en un sistema de coordenadas rectangulares. Si θ es agudo, se tiene el caso ilustrado en la Fig. 6.26, en la cual se ha escogido un punto $P(x, y)$ en el lado terminal de θ y en el cual $d(O, P) = r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Según el triángulo OPQ, se tiene

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{y}{r}, \quad \cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} = \frac{x}{r}, \quad \text{y} \quad \tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}} = \frac{y}{x}.$$

Ahora se consideran ángulos como los que se ven en la Fig. 6.27, o cualquier *otro* ángulo, sea positivo, negativo o cero. Obsérvese que en la Fig. 6.27 el valor de x o de y puede ser negativo. En cada caso, el cateto QP (op, en la Fig. 6.27) tiene la longitud $|y|$; el cateto OQ (ady, en la Fig. 6.27) tiene la longitud $|x|$ y la hipotenusa OP tiene longitud r. Se definen las seis funciones trigonométricas de modo que sus valores concuerden con los que se dieron antes, cuando el ángulo es agudo. Se entiende que si ocurre un denominador cero, entonces el valor de la función correspondiente es indefinido.

FIGURA 6.27



Definición de las funciones trigonométricas para cualquier ángulo

Sea θ un ángulo en posición normal en un sistema de coordenadas rectangulares, y sea $P(x, y)$ cualquier punto distinto del origen O en el lado terminal de θ. Si $d(O, P) = r = \sqrt{x^2 + y^2}$, entonces

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \quad \cos\theta = \frac{x}{r} \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y} \quad \sec\theta = \frac{r}{x} \quad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

Se puede demostrar, con triángulos semejantes, que las fórmulas en esta definición no dependen del punto $P(x, y)$ que se escoja en el lado terminal de θ. Las identidades fundamentales, que se establecieron para los ángulos agudos también valen para las funciones trigonométricas de cualquier ángulo.

Los dominios de las funciones seno y coseno consisten en todos los ángulos θ. Sin embargo, tan θ y sec θ no están definidas si $x = 0$, es decir, si el lado terminal de θ está en el eje y. Así, los dominios de las funciones tangente y secante consisten en todos los ángulos, *excepto* los que tienen las medidas $(\pi/2) + \pi n$ en radianes para cualquier entero n. Algunos casos especiales son $\pm \pi/2$, $\pm 3\pi/2$ y $\pm 5\pi/2$. Los ángulos correspondientes, expresados en grados, son $\pm 90°$, $\pm 270°$ y $\pm 450°$.

Los dominios de las funciones cotangente y cosecante consisten en todos los ángulos, excepto los que tienen $y = 0$, es decir, todos los ángulos excepto los que tienen sus lados terminales en el eje x. Son los que miden πn en radianes (o en grados, $180° \cdot n$) para cualquier entero n.

En la tabla siguiente se resume nuestra explicación de los dominios, donde n representa un número entero.

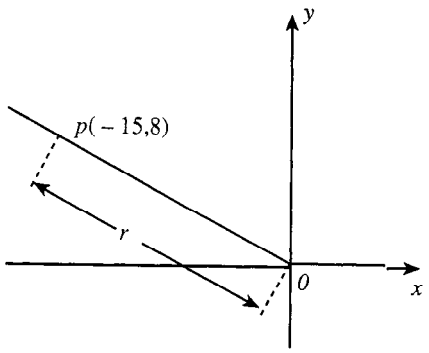
Función	Dominio
sen, cos	todo ángulo θ
tan, sec	todo ángulo θ, excepto $\theta = \frac{\pi}{2} + \pi n = 90° + 180° \cdot n$
cot, csc	todo ángulo θ, excepto $\theta = \pi n = 180° \cdot n$

Para cualquier punto $P(x, y)$ en la definición anterior, $|x| \leq r$ y $|y| \leq r$, o lo que es lo mismo $|x/r| \leq 1$ y también $|y/r| \leq 1$. Así,

$$|\operatorname{sen}\theta| \leq 1, \qquad |\cos\theta| \leq 1, \qquad |\csc\theta| \geq 1, \qquad \text{y} \qquad |\sec\theta| \geq 1$$

para todo valor de θ en los dominios de esas funciones.

FIGURA 6.28



EJEMPLO 1 ***Cálculo de los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo en posición normal***

Si θ es un ángulo en posición normal en un sistema de coordenadas rectangulares, y si $P(-15, 8)$ está en el lado terminal de θ, calcular los valores de las seis funciones trigonométricas de θ.

SOLUCIÓN El punto $P(-15, 8)$ se muestra en la Fig. 6.28. Aplicando la definición de funciones trigonométricas para cualquier ángulo, en este caso con

$$x = -15, \qquad y = 8,$$

y

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-15)^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17,$$

(continúa)

se obtiene lo siguiente:

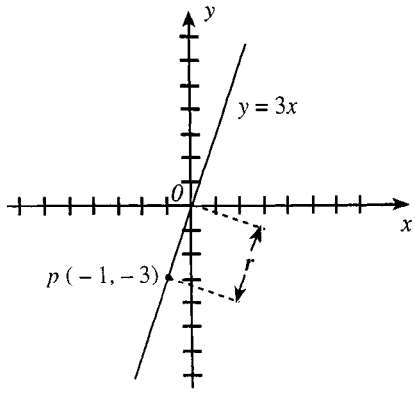
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{8}{17} \qquad \cos\theta = -\frac{15}{17} \qquad \tan\theta = -\frac{8}{15}$$

$$\csc\theta = \frac{17}{8} \qquad \sec\theta = -\frac{17}{15} \qquad \cot\theta = -\frac{15}{8}$$

EJEMPLO 2 *Cálculo de los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo en posición normal*

Un ángulo, θ, está en posición normal, y su lado terminal está en el cuadrante III, en la recta $y = 3x$. Calcular los valores de las funciones trigonométricas de θ.

FIGURA 6.29



SOLUCIÓN En la Fig. 6.29 se presenta la gráfica de $y = 3x$, junto con los lados inicial y terminal de θ. Como el lado terminal de θ está en el cuadrante III, se empieza por escoger un valor negativo conveniente para x, por ejemplo $x = -1$. Se sustituye en $y = 3x$ y se obtiene $y = 3(-1) = -3$; por consiguiente, P(−1, −3) está en el lado terminal. Aplicando la definición de funciones trigonométricas de cualquier ángulo para

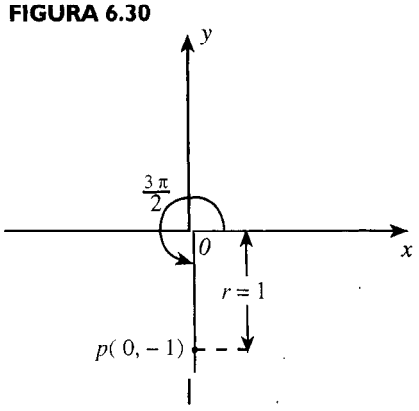
$$x = -1, \quad y = -3, \quad \text{y} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$$

se tiene

$$\operatorname{sen}\theta = -\frac{3}{\sqrt{10}} \qquad \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{10}} \qquad \tan\theta = \frac{-3}{-1} = 3$$

$$\csc\theta = -\frac{\sqrt{10}}{3} \qquad \sec\theta = -\frac{\sqrt{10}}{1} \qquad \cot\theta = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

FIGURA 6.30



Se pueden aplicar las definiciones de las funciones trigonométricas si θ es cuadrantal. El procedimiento se ve en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3 *Cálculo de los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo cuadrantal*

Si $\theta = 3\pi/2$, calcular los valores de las funciones trigonométricas de θ.

SOLUCIÓN Nótese que $3\pi/2 = 270°$. Si θ se coloca en posición normal, su lado terminal coincide con el eje y negativo, como se ve en la Fig. 6.30. Para aplicar la definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo, se escoge *cualquier* punto P en el lado terminal de θ. Para simplificar se usa $P(0, -1)$. En este caso, $x = 0$, $y = -1$ y $r = 1$. Entonces

$$\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = \frac{-1}{1} = -1 \qquad \cos\frac{3\pi}{2} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\csc\frac{3\pi}{2} = \frac{1}{-1} = -1 \qquad \cot\frac{3\pi}{2} = \frac{0}{-1} = 0$$

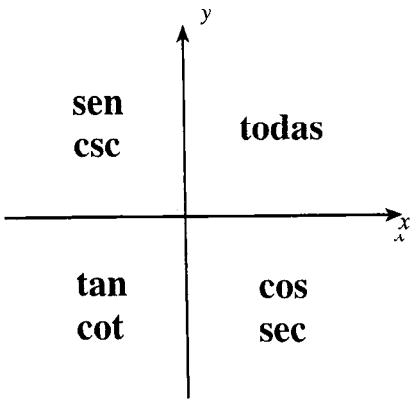
Las funciones tangente y secante están indefinidas porque surgen las expresiones $\tan\theta = (-1)/0$, y $\sec\theta = 1/0$, carentes de valor definido, al sustituir en las fórmulas correspondientes.

Enseguida se determinan los signos asociados a los valores de las funciones trigonométricas. Si θ está en el cuadrante II, y si $P(x, y)$ es un punto en el lado terminal, entonces x es negativa y y es positiva. Por consiguiente, $\text{sen}\,\theta = y/r$, y $\csc\theta = r/y$ son positivos, y las otras cuatro funciones trigonométricas son negativas. Al comprobar los cuadrantes restantes de modo similar, se obtiene la siguiente tabla.

Signos de las funciones trigonométricas

Cuadrante que contiene a θ	Funciones positivas	Funciones negativas
I	todas	ninguna
II	sen, csc	cos, sec, tan, cot
III	tan, cot	sen, csc, cos, sec
1V	cos, sec	sen, csc, tan, cot

FIGURA 6.31
Funciones trigonométricas positivas



El diagrama de la Fig. 6.31 sirve para recordar los cuadrantes en los cuales las funciones trigonométricas son *positivas*. Si una función no está en la lista (como por ejemplo, cos en el cuadrante II) entonces tal función es negativa.

EJEMPLO 4 ***Determinación del cuadrante que contiene a un ángulo***

Determinar qué cuadrante contiene a θ si $\text{sen}\,\theta < 0$ y $\cos\theta > 0$.

SOLUCIÓN Si se consulta la tabla de signos de la Fig. 6.31, se observa que $\cos\theta > 0$ si θ está en el cuadrante I o IV, y que $\text{sen}\,\theta < 0$ si θ está en el cuadrante III o IV. Por consiguiente, para satisfacer ambas condiciones, θ debe estar en el cuadrante IV.

El dominio de cada función trigonométrica que hemos descrito es un conjunto de ángulos. En Cálculo, y en muchas aplicaciones, los dominios de funciones consisten en números reales. Para poder considerar que el dominio de una función trigonométrica es un subconjunto de $\mathbb{R}$, se usa la siguiente definición.

Definición de las funciones trigonométricas de números reales

El **valor de una función trigonométrica en un número real** t es su valor para un ángulo de t radianes, siempre que exista ese valor

Con esta definición uno puede interpretar una notación, por ejemplo, sen 2, como el seno del número real 2, *o bien*, el seno de un ángulo de 2 rad. Según la Secc. 6.2, si se usan medidas en grados, se debe escribir sen 2°. Entonces,

$$\text{sen } 2 \neq \text{sen } 2°.$$

Para calcular los valores de las funciones trigonométricas de números reales con una calculadora, se debe emplear en el modo de radianes.

A continuación se muestra cómo puede calcularse el valor de cualquier función trigonométrica en un número real t, o en un ángulo de θ grados, a partir de sus valores en el intervalo t de $(0, \pi/2)$, o en el intervalo de θ $(0°, 90°)$, respectivamente. A veces es necesaria esta técnica cuando se usa una calculadora o tablas para determinar todos los ángulos o números reales que corresponden a un valor determinado de función.

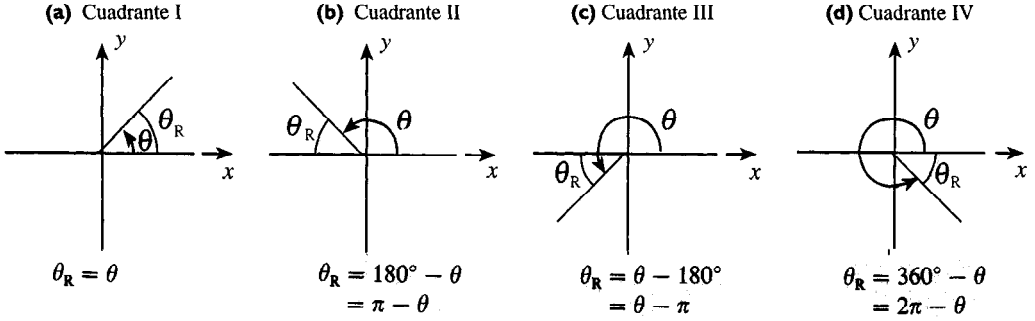
Se emplea el siguiente concepto:

Definición de ángulo de referencia

Sea θ un ángulo que no es cuadrantal en su posición normal. El **ángulo de referencia** de θ es el ángulo agudo, θ_R, que forma el lado terminal de θ con el eje x.

En la Fig. 6.32 se muestra el ángulo de referencia, θ_R, para un ángulo θ que no es cuadrantal, donde $0° < \theta < 360°$, o bien $0 < \theta < 2\pi$, en cada uno de los cuatro cuadrantes.

FIGURA 6.32 Ángulos de referencia



Las fórmulas bajo los ejes en esta figura se pueden emplear para determinar la medida de θ_R en grados o radianes, cuando θ está en grados o radianes, respectivamente. *Para un ángulo que no es cuadrantal, mayor que* 360° *o menor que* 0°, *primero se determina el ángulo coterminal* θ, *donde* $0° < \theta < 360°$, *o bien*, $0 < \theta < 2\pi$, y después aplicar las fórmulas de la Fig. 6.32.

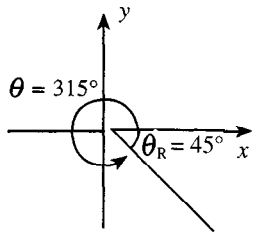
EJEMPLO 5 *Cálculo de ángulos de referencia*

Determinar el ángulo de referencia, θ_R, de θ, y trazar θ y θ_R en posición normal, en el mismo plano coordenado.

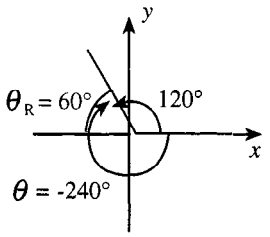
(a) $\theta = 315°$ **(b)** $\theta = -240°$ **(c)** $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$ **(d)** $\theta = 4$

FIGURA 6.33

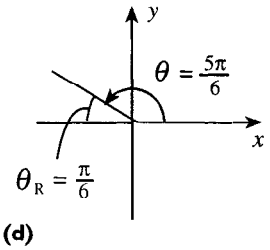
(a)



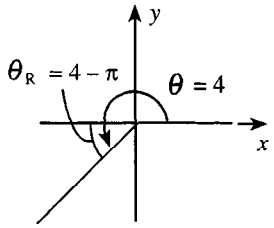
(b)



(c)



(d)



SOLUCIÓN

(a) El ángulo $\theta = 315°$ está en el cuadrante IV y, por consiguiente, como se ve en la Fig. 6.32(d),

$$\theta_R = 360° - 315° = 45°.$$

En la Fig. 6.33(a) aparecen los ángulos θ y θ_R.

(b) El ángulo entre 0° y 360°, que es coterminal con $\theta = -240°$, es

$$-240° + 360° = 120°,$$

y está en el cuadrante II. Con la fórmula de la Fig. 6.32(b) se obtiene

$$\theta_R = 180° - 120° = 60°.$$

Los ángulos θ y θ_R aparecen en la Fig. 6.33(b).

(c) Como el ángulo $\theta = 5\pi/6$ está en el cuadrante II, se tiene

$$\theta_R = \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6},$$

como se ve en la Fig. 6.33(c).

(d) Como $\pi < 4 < 3\pi/2$, el ángulo $\theta = 4$ está en el cuadrante III. Con la fórmula de la Fig. 6.32(c) resulta

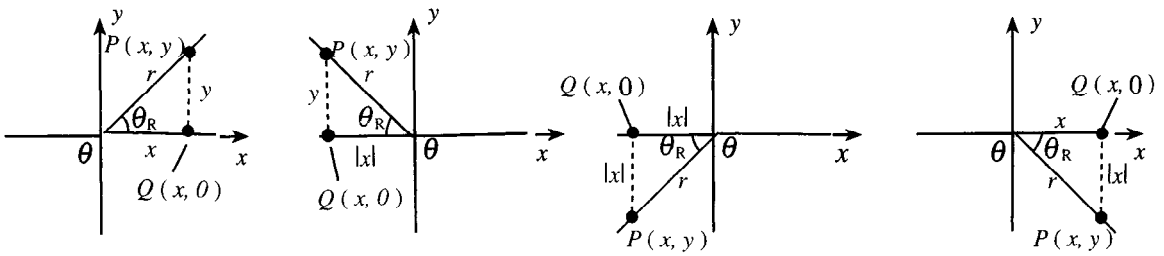
$$\theta_R = 4 - \pi.$$

Los ángulos están en la Fig. 6.33(d).

A continuación se indica cómo se pueden emplear los ángulos de referencia para determinar los valores de las funciones trigonométricas.

Si θ es un ángulo no cuadrantal cuyo ángulo de referencia es θ_R, entonces $0° < \theta_R < 90°$, o bien $0 < \theta_R < \pi/2$. Sea $P(x, y)$ un punto en el lado terminal de θ, y considérese el punto $Q(x, 0)$ en el eje x. En la Fig. 6.34 se muestra un caso característico de θ en cada cuadrante.

FIGURA 6.34



En cada caso, las longitudes de los lados del triángulo OPQ son

$$d(O, Q) = |x|, \qquad d(Q, P) = |y|, \qquad \text{y} \qquad d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2} = r.$$

Es posible aplicar la definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo, y usar también el triángulo OPQ para obtener las siguientes fórmulas:

$$|\operatorname{sen}\theta| = \left|\frac{y}{r}\right| = \frac{|y|}{|r|} = \frac{|y|}{r} = \operatorname{sen}\theta_R$$

$$|\cos\theta| = \left|\frac{x}{r}\right| = \frac{|x|}{|r|} = \frac{|x|}{r} = \cos\theta_R$$

$$|\tan\theta| = \left|\frac{y}{x}\right| = \frac{|y|}{|x|} = \tan\theta_R$$

Estas fórmulas conducen al siguiente teorema. Si θ es un ángulo cuadrantal, se debe emplear la definición de las funciones trigonométricas para calcular sus valores.

Teorema sobre los ángulos de referencia

> Si θ es un ángulo que no es cuadrantal en posición normal, entonces, para calcular el valor de una función trigonométrica de θ, determine su valor para el ángulo θ_R de referencia, y anteponga el signo adecuado.

El "signo adecuado" que menciona el teorema se puede determinar a partir de la tabla de signos de las funciones trigonométricas, que se describió antes en esta sección.

EJEMPLO 6 *Uso de ángulos de referencia*

Utilizar ángulos de referencia para obtener los valores exactos de sen θ, cos θ y tan θ si

(a) $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$ **(b)** $\theta = 315°$

SOLUCIÓN

(a) El ángulo $\theta = 5\pi/6$ y su ángulo de referencia, $\theta_R = \pi/6$ se ven en la Fig. 6.33(c). Ya que θ está en el cuadrante II, sen θ es positivo, y cos θ y tan θ son ambos negativos. Por lo tanto, según el teorema sobre los ángulos de referencia y los resultados ya conocidos de los ángulos especiales (véase la pág. 332) se obtienen los valores siguientes:

$$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{5\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\frac{5\pi}{6} = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

(b) El ángulo $\theta = 315°$ y su ángulo de referencia, $\theta_R = 45°$, aparecen en la Fig. 633(a). Como θ está en el cuadrante IV, sen $\theta < 0$, cos $\theta > 0$ y tan $\theta < 0$. En consecuencia, según el teorema sobre ángulos de referencia, se tiene

$$\operatorname{sen} 315° = -\operatorname{sen} 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 315° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 315° = -\tan 45° = -1.$$

Si se usa una calculadora para obtener aproximadamente los valores de las funciones, son innecesarios los ángulos de referencia. Por ejemplo, determinar sen 210°, se selecciona en la calculadora el modo de grados, y se obtiene sen 210° = – 0.5, que es el valor exacto. Con el mismo procedimiento para 240° se obtiene una representación decimal:

$$\text{sen } 240° \approx -0.8660$$

No se debe usar la calculadora para hallar el valor *exacto* de sen 240° . En este caso se busca el ángulo de referencia 60° de 240°, y se aplica el teorema sobre los ángulos de referencia, junto con resultados conocidos para ángulos especiales, para obtener

$$\text{sen } 240° = -\text{sen } 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

En la Secc. 6.2 se explica cómo usar una calculadora para resolver una ecuación como sen = 0.6635 para un ángulo agudo θ. Se puede aplicar la misma técnica si es *cualquier* ángulo o número real. Así, empleando la tecla [SIN^{-1}] se obtiene, en modo de grados o radianes,

$$\theta = \text{sen}^{-1}(0.6635) \approx 41.57° \approx 0.7255,$$

que es el ángulo de referencia para θ. Si sen θ es *negativo*, entonces con una calculadora se obtiene *el negativo* del ángulo de referencia. Por ejemplo,

$$\text{sen}^{-1}(-0.6635) \approx -41.57° \approx -0.7255.$$

Igualmente, dados cos θ o tan θ, se determina θ con calculadora empleando las teclas [COS^{-1}] o bien [TAN^{-1}], respectivamente. El intervalo que contiene θ aparece en la siguiente tabla. Es importante notar que si cos θ es negativo, entonces θ *no es* el negativo del ángulo de referencia, sino que está en el intervalo $\pi/2 < \theta \leq \pi$, o bien $90° < \theta \leq 180°$. Las razones para emplear esos intervalos se explican en la Secc. 7.6. Como en la Secc. 6.2, se pueden emplear relaciones recíprocas para resolver ecuaciones semejantes donde intervienen csc θ, sec θ y cot θ.

Ecuación	Valores de k	Solución con calculadora	Intervalo que contiene θ si se usa calculadora
$\text{sen } \theta = k$	$-1 \leq k \leq 1$	$\theta = \text{sen}^{-1} k$	$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ o bien $-90° \leq \theta \leq 90°$
$\cos \theta = k$	$-1 \leq k \leq 1$	$\theta = \cos^{-1} k$	$0 \leq \theta \leq \pi$ o bien $0° \leq \theta \leq 180°$
$\tan \theta = k$	cualquier k	$\theta = \tan^{-1} k$	$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ o bien $-90° < \theta < 90°$

En el ejemplo siguiente se presentan algunos casos específicos en modos de grados y radianes.

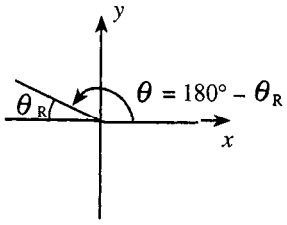
EJEMPLO ILUSTRATIVO

Determinación de ángulos con calculadora

Ecuación	Solución con calculadora (grados y radianes)
❑ $\operatorname{sen}\theta = -0.5$	$\theta = \operatorname{sen}^{-1}(-0.5) = -30° \approx -0.5236$
❑ $\cos\theta = -0.5$	$\theta = \cos^{-1}(-0.5) = 120° \approx 2.0944$
❑ $\tan\theta = -0.5$	$\theta = \tan^{-1}(-0.5) \approx -26.57° \approx -0.4636$

Cuando se usa una calculadora para determinar θ, uno debe tener en mente las restricciones para θ. Si se desean otros valores, entonces se pueden emplear los ángulos de referencia, u otros métodos, como se ve en el ejemplo siguiente.

FIGURA 6.35



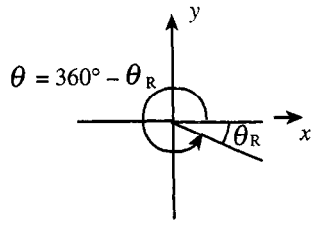
EJEMPLO 7 ***Evaluar un ángulo con calculadora***

Si $\tan\theta = -0.4623$ y $0° \le \theta < 360°$, calcular θ con precisión de 0.1°.

SOLUCIÓN Como se hizo notar en la explicación anterior, si se usa calculadora (en modo de grados) para determinar θ cuando tan θ es negativa, entonces el ángulo en grados queda en el intervalo (– 90°, 0°). En este caso se obtiene lo siguiente:

$$\theta = \tan^{-1}(-0.4623) \approx -24.8°$$

FIGURA 6.36



Como se desea determinar valores de θ entre 0° y 360°, se usa el ángulo de referencia, aproximado, $\theta_R \approx 24.8°$. Hay dos valores de θ posibles, tales que tan θ sea negativa: uno en el cuadrante II, y el otro en el cuadrante IV. Si θ está en el cuadrante II y $0° \le \theta \le 360°$, se tiene el caso de la Fig. 6.35, y

$$\theta = 180° - \theta_R \approx 180° - 24.8° = 155.2°.$$

Si θ se halla en el cuadrante IV y $0° \le \theta < 360°$, entonces, como se ve en la Fig. 6.36,

$$\theta = 360° - \theta_R \approx 360° - 24.8° = 335.2°.$$

EJERCICIOS 6.4

Ejercicios 1–4: Calcule los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de θ, si éste se encuentra en posición normal y *P* está en el lado terminal.

1 $P(4, -3)$

2 $P(-8, -15)$

3 $P(-2, -5)$

4 $P(-1, 2)$

Ejercicios 5–10: Calcule los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de θ si éste se encuentra en posición normal y su lado terminal está en el cuadrante especificado y satisface la condición dada.

5 II; en la recta $y = -4x$

6 IV; en la recta $3y + 5x = 0$

7 I; en una recta que tiene pendiente $\frac{4}{3}$

8 III; biseca al cuadrante

9 III; paralela a la recta $2y - 7x + 2 = 0$

10 II; paralela a la recta que pasa por $A(1, 4)$ y $B(3, -2)$

Ejercicios 11 y 12: Calcule los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de cada ángulo, siempre que sea posible.

11 **(a)** $90°$ **(b)** $0°$ **(c)** $\frac{7\pi}{2}$ **(d)** 3π

12 **(a)** $180°$ **(b)** $-90°$ **(c)** 2π **(d)** $\frac{5\pi}{2}$

Ejercicios 13 y 14: Determine el cuadrante que contiene a θ si son válidas las condiciones dadas:

13 **(a)** $\cos\theta > 0$ y $\operatorname{sen}\theta < 0$
(b) $\operatorname{sen}\theta < 0$ y $\cot\theta > 0$
(c) $\csc\theta > 0$ y $\sec\theta < 0$
(d) $\sec\theta < 0$ y $\tan\theta > 0$

14 **(a)** $\tan\theta < 0$ y $\cos\theta > 0$
(b) $\sec\theta > 0$ y $\tan\theta < 0$
(c) $\csc\theta > 0$ y $\cot\theta < 0$
(d) $\cos\theta < 0$ y $\csc\theta < 0$

Ejercicios 15 – 20: Obtenga el ángulo de referencia, θ_R, si θ tiene la dimensión dada.

15 **(a)** $240°$ **(b)** $340°$ **(c)** $-202°$ **(d)** $-660°$

16 **(a)** $165°$ **(b)** $275°$ **(c)** $-110°$ **(d)** $400°$

17 **(a)** $\frac{3\pi}{4}$ **(b)** $\frac{4\pi}{3}$ **(c)** $-\frac{\pi}{6}$ **(d)** $\frac{9\pi}{4}$

18 **(a)** $\frac{7\pi}{4}$ **(b)** $\frac{2\pi}{3}$ **(c)** $-\frac{3\pi}{4}$ **(d)** $-\frac{23\pi}{6}$

19 **(a)** 3 **(b)** -2 **(c)** 5.5 **(d)** 100

20 **(a)** 6 **(b)** -4 **(c)** 4.5 **(d)** 80

Ejercicios 21 – 32: Calcule el valor exacto.

21 **(a)** $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$ **(b)** $\operatorname{sen}\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$

22 **(a)** $\operatorname{sen} 210°$ **(b)** $\operatorname{sen}(-315°)$

23 **(a)** $\cos 150°$ **(b)** $\cos(-60°)$

24 **(a)** $\cos\frac{5\pi}{4}$ **(b)** $\cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$

25 **(a)** $\tan\frac{5\pi}{6}$ **(b)** $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

26 **(a)** $\tan 330°$ **(b)** $\tan(-225°)$

27 **(a)** $\cot 120°$ **(b)** $\cot(-150°)$

28 **(a)** $\cot\frac{3\pi}{4}$ **(b)** $\cot\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

29 **(a)** $\sec\frac{2\pi}{3}$ **(b)** $\sec\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

30 **(a)** $\sec 135°$ **(b)** $\sec(-210°)$

31 **(a)** $\csc 240°$ **(b)** $\csc(-330°)$

32 **(a)** $\csc\frac{3\pi}{4}$ **(b)** $\csc\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

Ejercicios 33 y 34: Calcule el valor de la función con cuatro cifras decimales.

33 **(a)** $\operatorname{sen} 98°10'$ **(b)** $\cos 623.7°$ **(c)** $\tan 3$
(d) $\cot 231°40'$ **(e)** $\sec 1175.1°$ **(f)** $\csc 0.82$

34 **(a)** $\operatorname{sen} 496.4°$ **(b)** $\cos 0.65$ **(c)** $\tan 105°40'$
(d) $\cot 1030.2°$ **(e)** $\sec 1.46$ **(f)** $\csc 320°50'$

Ejercicios 35 y 36: Calcule, con precisión de 0.1°, todos los ángulos θ en el intervalo [0°, 360°) que satisfagan la ecuación.

35 **(a)** $\operatorname{sen}\theta = -0.5640$ **(b)** $\cos\theta = 0.7490$
(c) $\tan\theta = 2.798$ **(d)** $\cot\theta = -0.9601$
(e) $\sec\theta = -1.116$ **(f)** $\csc\theta = 1.485$

36 **(a)** $\operatorname{sen}\theta = 0.8225$ **(b)** $\cos\theta = -0.6604$
(c) $\tan\theta = -1.5214$ **(d)** $\cot\theta = 1.3752$
(e) $\sec\theta = 1.4291$ **(f)** $\csc\theta = -2.3179$

Ejercicios 37 y 38: Calcule, con precisión de 0.01 de radián, todos los ángulos θ en el intervalo $[0, 2\pi)$ que satisfagan la ecuación.

37 **(a)** $\operatorname{sen}\theta = 0.4195$ **(b)** $\cos\theta = -0.1207$
(c) $\tan\theta = -3.2504$ **(d)** $\cot\theta = 2.6815$
(e) $\sec\theta = 1.7452$ **(f)** $\csc\theta = -4.8521$

38 **(a)** $\operatorname{sen}\theta = -0.0135$ **(b)** $\cos\theta = 0.9235$
(c) $\tan\theta = 0.42$ **(d)** $\cot\theta = -2.731$
(e) $\sec\theta = -3.51$ **(f)** $\csc\theta = 1.258$

Ejercicios 39 – 44: Reformule la expresión de modo que no tenga radical, sin emplear valores absolutos, para los valores indicados de θ.

39 $\sqrt{\sec^2\theta - 1}$; $\pi/2 < \theta < \pi$

40 $\sqrt{1 + \cot^2\theta}$; $0 < \theta < \pi$

41 $\sqrt{1 + \tan^2\theta}$; $3\pi/2 < \theta < 2\pi$

42 $\sqrt{\csc^2\theta - 1}$; $3\pi/2 < \theta < 2\pi$

43 $\sqrt{\operatorname{sen}^2(\theta/2)}$; $2\pi < \theta < 4\pi$

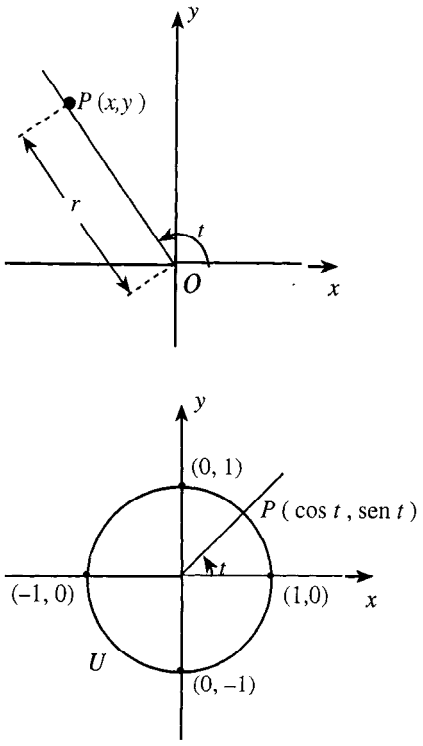
44 $\sqrt{\cos^2(\theta/2)}$; $0 < \theta < \pi$

45 ***Brazo de robot*** Los puntos en los lados terminales de ángulos desempeñan un papel importante en el diseño de los brazos para un robot. Suponga que un autómata tiene un brazo recto de 18 pulg de longitud que puede girar alrededor del origen en un plano de coordenadas. Si la mano del robot está en (18, 0) y, a continuación, gira un ángulo de 60°, ¿cuál es el nuevo lugar de la mano?

46 ***Brazo de robot*** Suponga que el brazo del autómata del Ejercicio 45 puede cambiar de longitud, además de girar alrededor del origen. Si la mano se encuentra inicialmente en (12, 12), ¿cuántos grados, aproximadamente, debe girar el brazo, y cuánto debe hacerse variar su longitud para mover la mano a (–16, 10)?

6.5 GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

FIGURA 6.37



Al hacer esquemas de las gráficas de las funciones trigonométricas, *siempre se supone que los ángulos están expresados en radianes, o en números reales*. Esto es cierto si se localizan puntos en un plano coordenado, o se usa una graficadora (en modo de radianes).

Considérese un ángulo de t radianes en su posición normal, como se ve en la Fig. 6.37, en la cual $P(x, y)$ es cualquier punto distinto de O en el lado terminal, y $d(O, P) = r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Según las definiciones de las funciones trigonométricas de un ángulo cualquiera,

$$\cos t = \frac{x}{r} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} t = \frac{y}{r}.$$

En seguida se estudia la variación de sen t y cos t cuando t aumenta o disminuye. Como P puede ser cualquier punto distinto de O en el lado terminal, se escoge $P(x, y)$ tal que $r = 1$ para toda t. Así, $P(x, y)$ *siempre se encuentra en la circunferencia unitaria U con centro en el origen*. Si $r = 1$, las fórmulas $\cos t = x/r$ y $\operatorname{sen} t = y/r$ asumen las formas más simples

$$\cos t = \frac{x}{1} = x \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} t = \frac{y}{1} = y.$$

Por lo tanto, el punto $P(x, y)$ se puede representar como sigue:

$$P(\cos t, \operatorname{sen} t)$$

Ahora se tiene el caso que se ilustra en la Fig. 6.38, donde se han localizado los puntos en U que están en los ejes coordenados.

Si se hace que t aumente de 0 a 2π radianes, el punto $P(\cos t, \text{sen } t)$ recorre la circunferencia unitaria U una vez en el sentido contrario al del reloj. Observando la variación de las coordenadas x, y de P, se tiene la siguiente tabla. La notación $0 \rightarrow \pi/2$ en el primer renglón de la tabla quiere decir que t aumenta de 0 a $\pi/2$, y la notación $(1, 0) \rightarrow (0, 1)$ representa la variación correspondiente de $P(\cos t, \text{sen } t)$ al recorrer U de $(1, 0)$ a $(0, 1)$. Si t aumenta de 0 a $\pi/2$, entonces sen t aumenta de 0 a 1, lo cual se indica con $0 \rightarrow 1$. Además, sen t asume todos los valores entre 0 y 1. Si t aumenta de $\pi/2$ a π, entonces sen t decrece de 1 a 0, lo cual se indica mediante $1 \rightarrow 0$. Los demás elementos de la tabla se pueden interpretar del mismo modo.

t	$P(\cos t, \text{sen } t)$	$\cos t$	sen t
$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$	$(1, 0) \rightarrow (0, 1)$	$1 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow 1$
$\frac{\pi}{2} \rightarrow \pi$	$(0, 1) \rightarrow (-1, 0)$	$0 \rightarrow -1$	$1 \rightarrow 0$
$\pi \rightarrow \frac{3\pi}{2}$	$(-1, 0) \rightarrow (0, -1)$	$-1 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow -1$
$\frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi$	$(0, -1) \rightarrow (1, 0)$	$0 \rightarrow 1$	$-1 \rightarrow 0$

Si t aumenta de 2π a 4π, el punto $P(\cos t, \text{sen } t)$ en la Fig. 6.38 describe de nuevo la circunferencia unitaria U, y se repiten los comportamientos de sen t y cos t; es decir,

$$\text{sen } (t + 2\pi) = \text{sen } t, \quad \text{y} \quad \cos(t + 2\pi) = \cos t$$

para toda t en el intervalo $[0, 2\pi]$. Lo mismo sucede si t aumenta de 4π a 6π, de 6π a 8π, etc. En general, se llega al siguiente teorema.

Teorema sobre los valores repetidos de las funciones sen y cos

Si n es cualquier entero, entonces

$$\text{sen } (t + 2\pi n) = \text{sen } t \quad \text{y} \quad \cos (t + 2\pi n) = \cos t.$$

La variación repetitiva de las funciones seno y coseno es *periódica*, en el sentido de la siguiente definición.

Definición de función periódica

Una función f es **periódica** si existe un número real positivo k tal que

$$f(t + k) = f(t)$$

para toda t en el dominio de f. El mínimo número real positivo k, si existe, es el **periodo** de f.

El periodo de las funciones sen y cos es 2π.

Trácese la gráfica de $y = \text{sen } t$ en un sistema coordenado ty, donde t es un número real, o la medida de un ángulo en radianes. La tabla siguiente presenta una lista de coordenadas de algunos puntos de la gráfica, para $0 \leq t\ 2\pi$. Se pueden determinar más puntos empleando resul-

t	$y = \operatorname{sen} t$
0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$
$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$
π	0
$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0.7$
$\frac{3\pi}{2}$	-1
$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0.7$
2π	0

tados para ángulos especiales, como por ejemplo $\operatorname{sen}(\pi/6) = \frac{1}{2}$, y $\operatorname{sen}(\pi/3) = \sqrt{3}/2 \approx 0.87$.

Para trazar la gráfica cuando $0 \le t \le 2\pi$, se localizan los puntos que aparecen en la tabla, recordando que sen t aumenta en $[0, \pi/2]$, disminuye en $[\pi/2, \pi]$ y $[\pi, 3\pi/2]$, y aumenta en $[3\pi/2, 2\pi]$. Con ello se obtiene el esquema de la Fig. 6.39. Como la función es periódica, el diagrama de la Fig. 6.39 se repite hacia la izquierda y la derecha, en intervalos de longitud 2π. Así resulta la Fig. 6.40.

FIGURA 6.39 $y = \operatorname{sen} t$; $0 \le t \le 2\pi$

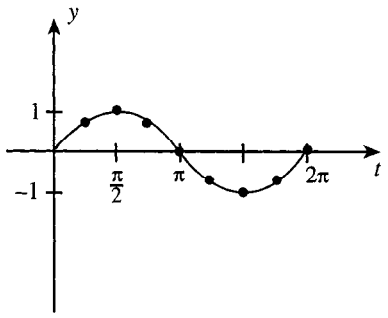
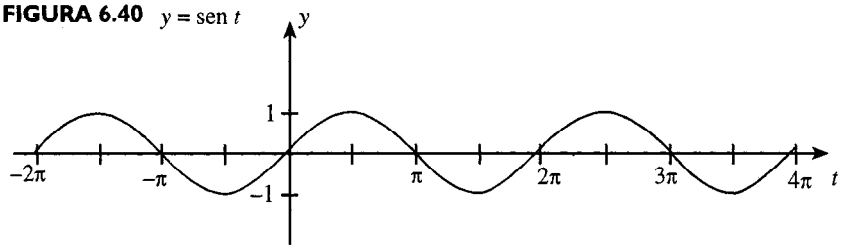


FIGURA 6.40 $y = \operatorname{sen} t$



t	$y = \cos t$
0	1
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$
$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0.7$
π	-1
$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0.7$
$\frac{3\pi}{2}$	0
$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$
2π	1

Se emplea el mismo procedimiento para trazar la gráfica de $y = \cos t$. La tabla al margen presenta las coordenadas de varios puntos de la gráfica para $0 \le t \le 2\pi$. Al localizar esos puntos se obtiene la parte de la gráfica que se ve en la Fig. 6.41. Si se repite este patrón hacia la derecha y la izquierda, en intervalos de longitud 2π, se tiene el dibujo de la Fig. 6.42.

FIGURA 6.41 $y = \cos t$; $0 \le t \le 2\pi$

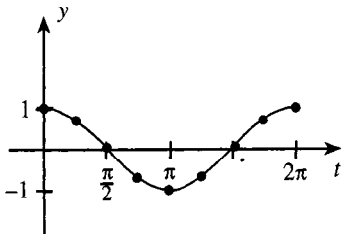
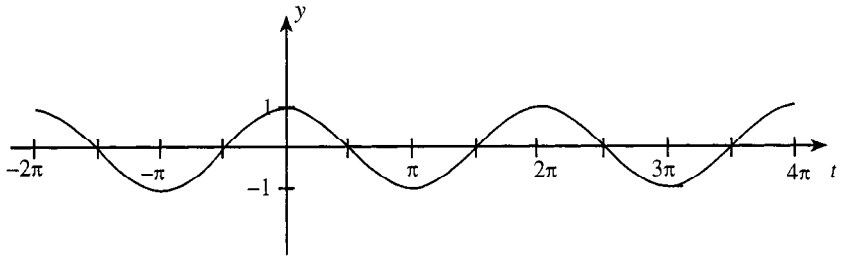


FIGURA 6.42 $y = \cos t$



La parte de la gráfica de la función seno o coseno que corresponde a $0 \leq t \leq 2\pi$ es un **ciclo**. Un ciclo corresponde a la variación completa en una **onda senoidal** o en una **onda cosenoidal**.*

El contradominio de las funciones seno y coseno consiste en todos los números reales en el intervalo cerrado $[-1, 1]$. Como $\csc t = 1/\text{sen } t$, y $\sec t = 1/\cos t$, entonces el contradominio de las funciones cosecante y secante consiste en todos los números reales que tienen valor absoluto mayor que o igual a 1.

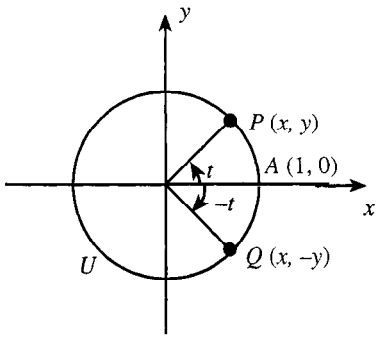
Como se ve, el contradominio de las funciones tangente y cotangente consiste en todos los números reales.

Antes de analizar las gráficas de las demás funciones trigonométricas, se establecen fórmulas en las que intervenga $-t$, para toda t. Como hay signo menos, se les llama *fórmulas de ángulos negativos*.

Fórmulas para ángulos negativos

$\text{sen}(-t) = -\text{sen } t$	$\cos(-t) = \cos t$	$\tan(-t) = -\tan t$
$\csc(-t) = -\csc t$	$\sec(-t) = \sec t$	$\cot(-t) = -\cot t$

FIGURA 6.43



DEMOSTRACIÓN Considérese la circunferencia unitaria U como en la Fig. 6.43. A medida que t aumenta de 0 a 2π, el punto $P(x, y)$ la recorre una vez en sentido contrario al de las manecillas del reloj, y el punto $Q(x, -y)$, que corresponde a $-t$, describe la circunferencia U una vez en el mismo sentido que el del reloj. Aplicando la definición de funciones trigonométricas de cualquier ángulo (con $r = 1$) se tiene que

$$\text{sen}(-t) = -y = -\text{sen } t$$

$$\cos(-t) = x = \cos t$$

$$\tan(-t) = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\tan t.$$

Las demostraciones de las tres fórmulas restantes son semejantes. ■

En el ejemplo que sigue se usan las fórmulas para ángulos negativos a fin de determinar el valor exacto de cada función trigonométrica.

---

* (N.del R.) La gráfica de la función seno (o coseno) se denomina *senoide* (o respectivamente, *cosenoide*). Pueden constar ambas curvas de uno o varios ciclos u ondulaciones. [F.P.]

EJEMPLO ILUSTRATIVO

Uso de las fórmulas de ángulos negativos

- $\operatorname{sen}(-45°) = -\operatorname{sen} 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\cos(-30°) = \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\tan\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$
- $\csc(-30°) = -\csc 30° = -2$
- $\sec(-60°) = \sec 60° = 2$
- $\cot\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\cot\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -1$

A continuación se aplican las fórmulas para ángulos negativos en la comprobación de una identidad trigonométrica.

EJEMPLO 1 ***Uso de las fórmulas de ángulos negativos para comprobar una identidad***

Verificar la identidad siguiente tratando de transformar el primer miembro en el segundo:

$$\operatorname{sen}(-t)\tan(-t) + \cos(-t) = \sec t$$

SOLUCIÓN Puede procederse como sigue:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}(-t)\tan(-t) + \cos(-t) \\
&= (-\operatorname{sen} t)(-\tan t) + \cos t && \text{fórmulas para ángulos negativos} \\
&= \operatorname{sen} t \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} + \cos t && \text{identidad de la tangente} \\
&= \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos t} + \cos t && \text{se multiplica} \\
&= \frac{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}{\cos t} && \text{se suman términos} \\
&= \frac{1}{\cos t} && \text{identidad pitagórica} \\
&= \sec t && \text{identidad recíproca}
\end{aligned}$$

Se puede emplear las fórmulas para los ángulos negativos en la demostración del teorema siguiente:

Teorema sobre funciones trigonométricas pares e impares

(1) Las funciones coseno y secante son pares.

(2) Las funciones seno, tangente, cotangente y cosecante son impares.

DEMOSTRACIÓN Se demuestra el teorema en el caso de las funciones coseno y seno.

Si $f(t) = \cos t$, entonces

$$f(-t) = \cos(-t) = \cos t = f(t),$$

lo cual quiere decir que la función coseno es par.

Si $f(t) = \operatorname{sen} t$, entonces

$$f(-t) = \operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t = -f(t).$$

Por lo tanto, la función seno es impar. ■

Como la función seno es impar, su gráfica es simétrica con respecto al origen (Fig. 6.40). Como la función coseno es par, su gráfica es simétrica con respecto al eje y (Fig. 6.42).

Según el teorema anterior, la función tangente es impar y, por consiguiente, la gráfica de $y = \tan t$ es simétrica con respecto al origen. La tabla de la izquierda es una lista de algunos puntos de la gráfica para $-\pi/2 < t < \pi/2$. Los puntos correspondientes se muestran en la Fig. 6.44. Los valores de $\tan t$ cercanos a $t = \pi/2$ requieren atención especial. Si se considera que $\tan t = \operatorname{sen} t/\cos t$, entonces, al aumentar t hacia $\pi/2$, el numerador sen t tiende a 1 y el denominador $\cos t$ tiende a 0. En consecuencia, $\tan t$ asume valores grandes positivos. A continuación se presentan algunas aproximaciones de $\tan t$, para t cercana a $\pi/2 \approx 1.5708$:

t	$y = \tan t$
$-\frac{\pi}{3}$	$-\sqrt{3} \approx -1.7$
$-\frac{\pi}{4}$	-1
$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3} \approx -0.6$
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.6$
$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3} \approx 1.7$

$$\tan 1.5700 \approx 1{,}255.8$$

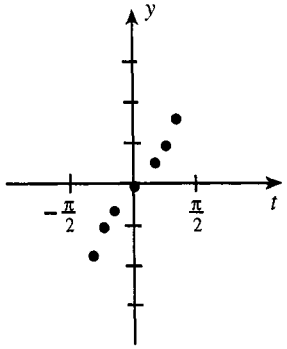
$$\tan 1.5703 \approx 2{,}014.8$$

$$\tan 1.5706 \approx 5{,}093.5$$

$$\tan 1.5707 \approx 10{,}381.3$$

$$\tan 1.57079 \approx 158{,}057.9$$

FIGURA 6.44



Nótese cuán rápidamente aumenta $\tan t$ cuando t se acerca a $\pi/2$. Se dice que *t aumenta sin límite cuando t tiende a $\pi/2$, con valores menores que $\pi/2$*. Igualmente, si t tiende a $-\pi/2$ con valores *mayores* que $-\pi/2$, entonces $\tan t$ *disminuye sin límite*. Esta variación se representa con la notación que se presentó para las funciones racionales en la Secc. 4.5:

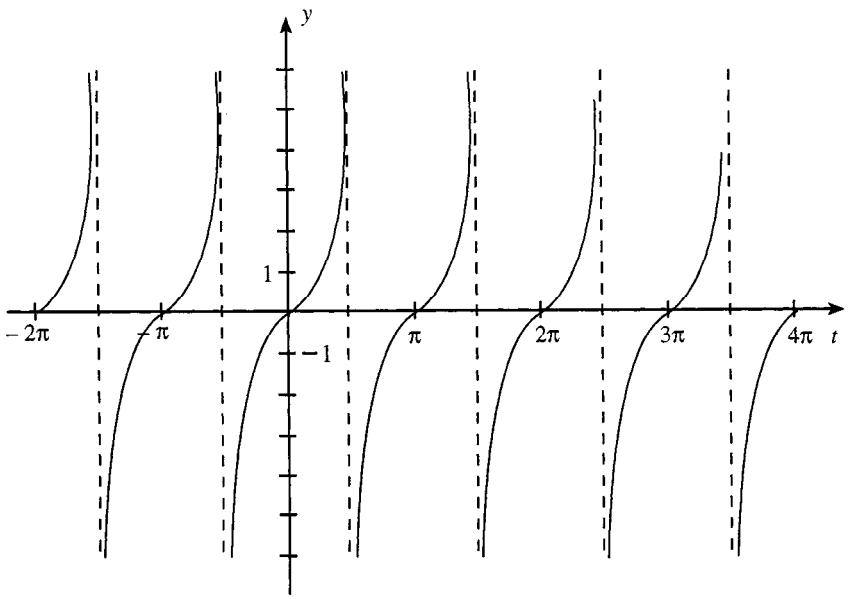
$$\text{cuando} \quad t \to \frac{\pi}{2}^{-}, \qquad \tan t \to \infty$$

$$\text{cuando} \quad t \to -\frac{\pi}{2}^{+}, \qquad \tan t \to -\infty$$

Esta variación de $\tan t$ en el intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$ se ve en la Fig. 6.45. Las rectas $t = \pi/2$ y $t = -\pi/2$ son asíntotas verticales de la gráfica. El mismo comportamiento se repite en los intervalos abiertos $(-3\pi/2, -\pi/2)$, $(\pi/2, 3\pi/2)$ y $(3\pi/2, 5\pi/2)$, así como en intervalos seme-

jantes de extensión π, como se ve en la figura. Por lo tanto, *la función tangente es periódica, con periodo* π.

FIGURA 6.45 $y = \tan t$



Se pueden emplear las gráficas de sen, cos y tan como ayuda para trazar las gráficas de las restantes tres funciones trigonométricas. Por ejemplo, como csc t = 1/sen t, entonces puede calcularse la ordenada de un punto en la gráfica de la función cosecante evaluando el recíproco de la ordenada correspondiente en la gráfica del seno para cada valor de t, excepto $t = \pi n$ para cualquier entero n. (Si $t = \pi n$, sen $t = 0$ y, por consiguiente, 1/sen t es indefinido.) Como ayuda para trazar la gráfica de la función cosecante, conviene trazar la gráfica de la función seno, que en la Fig. 6.46 se ve en negro, y a continuación calcular los recíprocos para obtener puntos sobre la gráfica de la cosecante.

Nótese la manera en que aumenta o disminuye sin límite la función cosecante, cuando t se aproxima a πn para cualquier entero n. La gráfica tiene asíntotas verticales $t = \pi n$, como se ve en la figura.

Como sec t = 1/cos t, y cot t = 1/tan t, entonces las gráficas de las funciones secante y cotangente se obtienen calculando los recíprocos de las ordenadas de los puntos sobre las gráficas de las funciones coseno y tangente, según se muestra en las Figs. 6.47 y 6.48*.

---

* (N. del R.) Las gráficas de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante se denominan tangentoide, cotangentoide, secantoide y cosecantoide. [F.P.]

FIGURA 6.46 $y = \csc t$

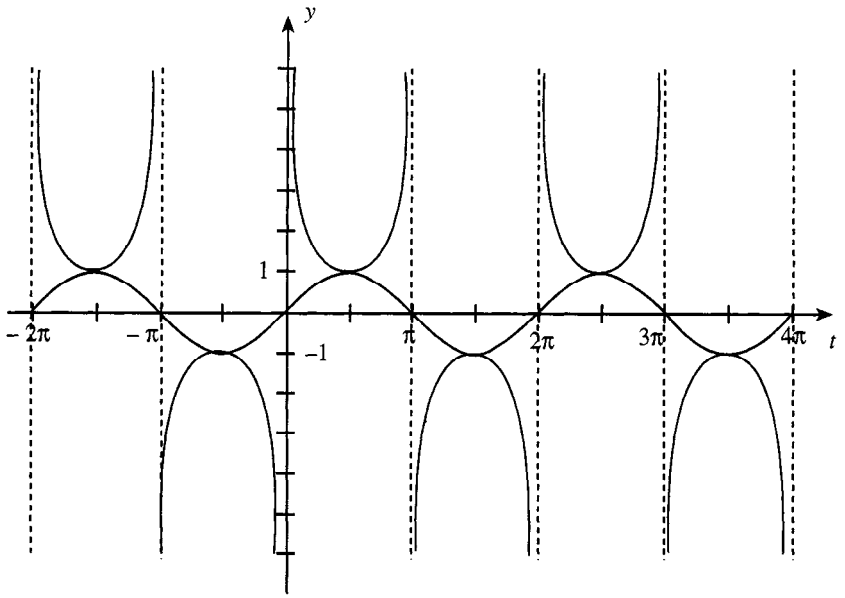
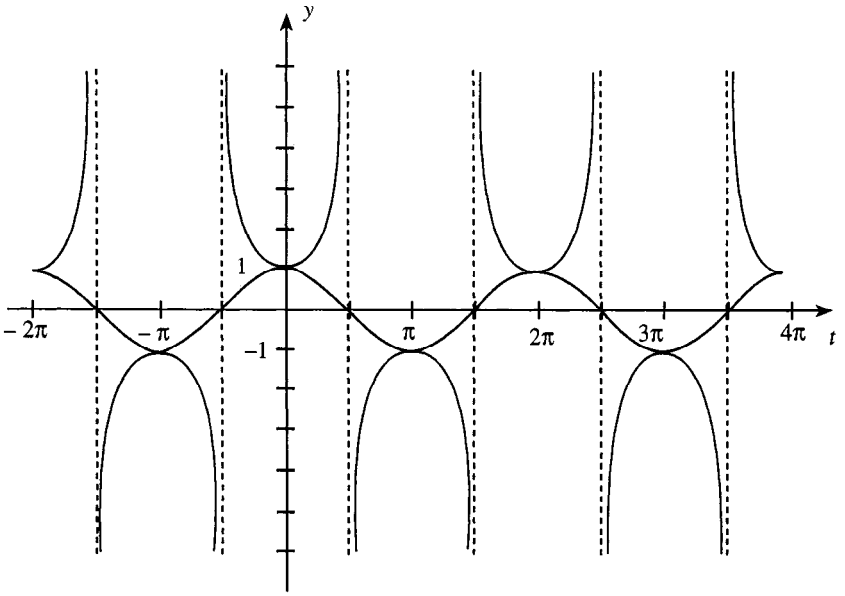
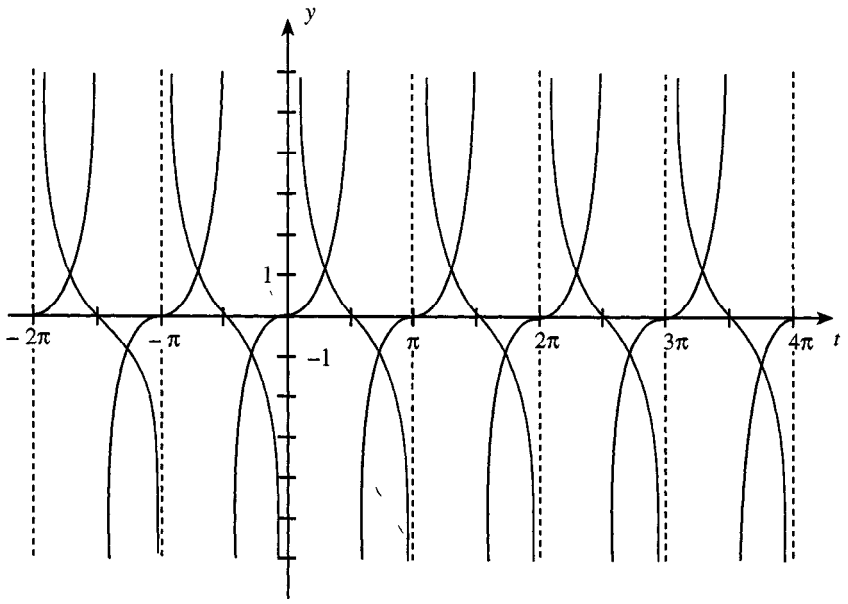


FIGURA 6.47 $y = \sec t$



Se han descrito muchas propiedades de las seis funciones trigonométricas de t, donde t es un número real, o la dimensión en radianes de un ángulo. La tabla siguiente contiene un resumen de propiedades importantes de esas funciones. Como de costumbre, x y y son coordenadas de un punto, P, en el lado terminal del ángulo t (en posición normal), $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, y n indica un entero arbitrario.

FIGURA 6.48 $y = \cot t$



Resumen de propiedades de las funciones trigonométricas y de sus gráficas

Propiedad	sen t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc t
Definición	y/r	x/r	y/x	x/y	r/x	r/y
Dominio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$t \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$	$t \neq \pi n$	$t \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$	$t \neq \pi n$
Asíntotas verticales	ninguna	ninguna	$t = \frac{\pi}{2} + \pi n$	$t = \pi n$	$t = \frac{\pi}{2} + \pi n$	$t = \pi n$
Contradominio	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
Intercepciones t	πn	$\frac{\pi}{2} + \pi n$	πn	$\frac{\pi}{2} + \pi n$	ninguna	ninguna
Intercepciones y	0	1	0	ninguna	1	ninguna
Periodo	2π	2π	π	π	2π	2π
Par o impar	impar	par	impar	impar	par	impar
Simetría respecto del	origen	eje y	origen	origen	eje y	origen

EJEMPLO 2 ***Investigación de la variación de*** **csc** t

Investigar la variación de csc t cuando

$$t \to \pi^-, \quad t \to \pi^+, \quad t \to \frac{\pi^-}{2}, \quad \text{y} \quad t \to \frac{\pi^+}{6}.$$

SOLUCIÓN De acuerdo con la gráfica de $y = \csc t$ de la Fig. 6.46, y aplicando los conocimientos adquiridos sobre los valores especiales de la función cosecante, se tiene lo siguiente:

$$\text{cuando} \quad t \to \pi^-, \quad \csc t \to \infty$$
$$\text{cuando} \quad t \to \pi^+, \quad \csc t \to -\infty$$
$$\text{cuando} \quad t \to \frac{\pi^-}{2}, \quad \csc t \to 1$$
$$\text{cuando} \quad t \to \frac{\pi^+}{6}, \quad \csc t \to 2$$

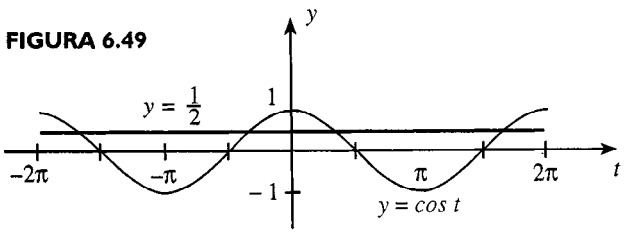
EJEMPLO 3 ***Solución de ecuaciones y desigualdades donde interviene una función trigonométrica***

Determinar todos los valores de t en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ tales que

(a) $\cos t = \frac{1}{2}$ **(b)** $\cos t > \frac{1}{2}$ **(c)** $\cos t < \frac{1}{2}$

SOLUCIÓN Este problema se puede resolver con facilidad examinando las gráficas de $y = \cos t$ y $y = \frac{1}{2}$, que aparecen en el mismo plano ty, en la Fig. 6.49, para $-2\pi \le t \le 2\pi$.

FIGURA 6.49



(a) Los valores de t tales que $\cos t = \frac{1}{2}$ son las abscisas de los puntos en los cuales se intersecan las gráficas. Como el ángulo de referencia es $\pi/3$, se ve que los valores positivos son

$$t = \frac{\pi}{3} \quad \text{y} \quad t = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}.$$

Por simetría, los valores negativos son

$$t = -\frac{\pi}{3} \quad \text{y} \quad t = -\frac{5\pi}{3}.$$

(continúa)

(b) Los valores de t tales que $\cos t > \frac{1}{2}$ se pueden calcular determinando dónde la gráfica de $y = \cos t$ de la Fig. 6.49, queda *arriba* de la recta $y = \frac{1}{2}$. Con ello se obtienen los intervalos de t

$$\left[-2\pi, -\frac{5\pi}{3}\right), \quad \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right), \quad \left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right].$$

(c) Para considerar $\cos t = \frac{1}{2}$, de nuevo se observa la Fig. 6.49 y se toma nota de dónde queda la gráfica de $y = \cos t$ *abajo* de la recta $y = \frac{1}{2}$. Con esto se obtienen los intervalos de t

$$\left(-\frac{5\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right), \quad \left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right).$$

Otro método para considerar $\cos t < \frac{1}{2}$ es notar que las soluciones son los subintervalos abiertos de $[-2\pi, 2\pi]$, que *no están* incluidos en los intervalos que se obtuvieron en la parte (b).

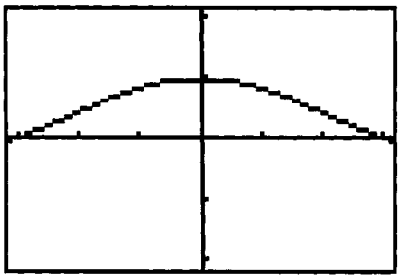
El resultado que se obtiene en el ejemplo siguiente desempeña un papel importante en matemáticas superiores.

EJEMPLO 4 *Graficar* $f(t) = (\text{sen } t)/t$

Si $f(t) = (\text{sen } t)/t$, trazar la gráfica de f en $[-\pi, \pi]$ e investigar el comportamiento de $f(t)$ cuando $t \to 0^-$ y cuando $t \to 0^+$.

SOLUCIÓN Nótese que f no está definida en $t = 0$, pues por sustitución se obtiene la expresión 0/0, que es indefinida.

FIGURA 6.50
[–3.15, 3.15] por [–2.1, 2.1]



Se asigna $(\text{sen } x)/x$ a Y_1. Como $\pi \approx 3.1416$, se usa el rectángulo visual en la pantalla, de [–3.15, 3.15] por [–2.1, 2.1], con lo cual se obtiene una figura semejante a la de la Fig. 6.50. Con las funciones de rastreo y ampliación, resulta que

cuando $t \to 0^-$, entonces $f(t) \to 1$, y cuando $t \to 0^+$, entonces $f(t) \to 1$.

Hay un agujero en la gráfica en el punto (0, 1); sin embargo, la mayor parte de las graficadoras no son capaces de revelar este hecho.

Esta técnica gráfica *no demuestra* que $f(t) \to 1$ cuando $t \to 0$, pero sí lo hace muy probable. En los libros de Cálculo se puede encontrar una demostración rigurosa, basada en la definición de sen t y en consideraciones geométricas.

Un resultado interesante que se obtiene en el Ejemplo 4 es que *si t está en radianes* y

$$\text{si } t \approx 0, \quad \text{entonces } \frac{\text{sen } t}{t} \approx 1, \quad \text{o bien, } \quad t \approx t.$$

Esta última afirmación proporciona una *fórmula de aproximación* para sen t, si t está cerca de 0. Como ejemplo, con una calculadora se encuentra que

$$\text{sen } (0.06) \approx 0.0599640$$
$$\text{sen } (0.05) \approx 0.0499792$$
$$\text{sen } (0.04) \approx 0.0399893$$
$$\text{sen } (0.03) \approx 0.0299955$$
$$\text{sen } (0.02) \approx 0.0199987$$
$$\text{sen } (0.01) \approx 0.0099998.$$

EJERCICIOS 6.5

Ejercicios 1–4: Con una fórmula para ángulos negativos, calcule el valor exacto.

1 **(a)** $\text{sen}(-30°)$ **(b)** $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ **(c)** $\tan(-45°)$

2 **(a)** $\text{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ **(b)** $\cos(-60°)$ **(c)** $\tan(-\pi)$

3 **(a)** $\cot\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ **(b)** $\sec(-150°)$ **(c)** $\csc\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

4 **(a)** $\cot(-225°)$ **(b)** $\sec\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ **(c)** $\csc(-45°)$

Ejercicios 5–10: Compruebe la identidad, transformando el primer miembro en el segundo.

5 $\text{sen}(-t)\sec(-t) = -\tan t$

6 $\csc(-t)\cos(-t) = -\cot t$

7 $\dfrac{\cot(-t)}{\csc(-t)} = \cos t$ **8** $\dfrac{\sec(-t)}{\tan(-t)} = -\csc t$

9 $\dfrac{1}{\cos(-t)} - \tan(-t)\,\text{sen}(-t) = \cos t$

10 $\cot(-t)\cos(-t) + \text{sen}(-t) = -\csc t$

Ejercicios 11–22: Complete la afirmación consultando una gráfica de una función trigonométrica.

11 **(a)** Cuando $t \to 0^+$, $\text{sen } t \to$ _____

(b) Cuando $t \to -\frac{\pi}{2}^-$, $\text{sen } t \to$ _____

12 **(a)** Cuando $t \to \pi^+$, $\text{sen } t \to$ _____

(b) Cuando $t \to \frac{\pi}{6}^-$, $\text{sen } t \to$ _____

13 **(a)** Cuando $t \to \frac{\pi}{4}^+$, $\cos t \to$ _____

(b) Cuando $t \to \pi^-$, $\cos t \to$ _____

14 **(a)** Cuando $t \to 0^+$, $\cos t \to$ _____

(b) Cuando $t \to -\frac{\pi}{3}^-$, $\cos t \to$ _____

15 **(a)** Cuando $t \to \frac{\pi}{4}^+$, $\tan t \to$ _____

(b) Cuando $t \to \frac{\pi}{2}^+$, $\tan t \to$ _____

16 **(a)** Cuando $t \to 0^+$, $\tan t \to$ _____

(b) Cuando $t \to -\frac{\pi}{2}^-$, $\tan t \to$ _____

17 **(a)** Cuando $t \to -\frac{\pi}{4}^-$, $\cot t \to$ _____

(b) Cuando $t \to 0^+$, $\cot t \to$ _____

18 **(a)** Cuando $t \to \frac{\pi}{6}^+$, $\cot t \to$ _____

(b) Cuando $t \to \pi^-$, $\cot t \to$ _____

19 **(a)** Cuando $t \to \frac{\pi}{2}^-$, $\sec t \to$ _____

(b) Cuando $t \to \frac{\pi}{4}^+$, $\sec t \to$ _____

20 **(a)** Cuando $t \to \frac{\pi}{2}^+$, $\sec t \to$ _____

(b) Cuando $t \to 0^-$, $\sec t \to$ _____

21 **(a)** Cuando $t \to 0^-$, $\csc t \to$ _____

(b) Cuando $t \to \frac{\pi^+}{2}$, $\csc t \to$ _____

22 **(a)** Cuando $t \to \pi^+$, $\csc t \to$ _____

(b) Cuando $t \to \frac{\pi^-}{4}$, $\csc t \to$ _____

Ejercicios 23 – 30: Vea la gráfica de $y = \operatorname{sen} t$, o de $y = \cos t$ para determinar los valores exactos de t en el intervalo $[0, 4\pi]$ que satisfagan la ecuación dada.

23 $\operatorname{sen} t = -1$ **24** $\operatorname{sen} t = 1$

25 $\operatorname{sen} t = \frac{1}{2}$ **26** $\operatorname{sen} t = -\sqrt{2}/2$

27 $\cos t = 1$ **28** $\cos t = -1$

29 $\cos t = \sqrt{2}/2$ **30** $\cos t = -\frac{1}{2}$

Ejercicios 31–34: Vea la gráfica de $y = \tan t$ para determinar los valores exactos de t en el intervalo $(-\pi/2, 3\pi/2)$ que satisfagan la ecuación dada.

31 $\tan t = 1$ **32** $\tan t = \sqrt{3}$

33 $\tan t = 0$ **34** $\tan t = -1/\sqrt{3}$

Ejercicios 35–38: Consulte la gráfica de la ecuación en el intervalo especificado. Calcule todos los valores de t tales que para el número real a, se tiene que (a) $y = a$, (b) $y > a$, y (c) $y < a$.

35 $y = \operatorname{sen} t$; $[-2\pi, 2\pi]$; $a = \frac{1}{2}$

36 $y = \cos t$; $[0, 4\pi]$; $a = \sqrt{3}/2$

37 $y = \cos t$; $[-2\pi, 2\pi]$; $a = -\frac{1}{2}$

38 $y = \operatorname{sen} t$; $[0, 4\pi]$; $a = -\sqrt{2}/2$

Ejercicios 39 – 46: Con la gráfica de la función trigonométrica correspondiente, trace la gráfica de la ecuación, sin localizar puntos.

39 $y = 2 + \operatorname{sen} t$ **40** $y = 3 + \cos t$

41 $y = \cos t - 2$ **42** $y = \operatorname{sen} t - 1$

43 $y = 1 + \tan t$ **44** $y = \cot t - 1$

45 $y = \sec t - 2$ **46** $y = 1 + \csc t$

Ejercicios 47 – 50: Determine los intervalos, entre -2π y 2π, en los cuales la función dada sea (a) creciente y (b) decreciente.

47 secante **48** cosecante

49 tangente **50** cotangente

51 Practique el trazo de la gráfica de la función seno, tomando distintas unidades de longitud en los ejes horizontal y vertical. Practique la graficación de las funciones coseno y tangente, en forma similar. Continúe esta práctica hasta alcanzar un estado en el cual si lo despertaran de un sueño profundo a medianoche, y le pidieran trazar una de esas gráficas, lo pudiera hacer en menos de 30 segundos.

52 Realice el Ejercicio 51 para las funciones cosecante, secante y cotangente.

C **Ejercicios 53 y 54: Grafique la ecuación dada y estime los valores de t en el intervalo especificado que corresponde al valor dado de y.**

53 $y = \operatorname{sen}(t^2)$, $[-\pi, \pi]$; $y = 0.5$

54 $y = \tan(\sqrt{t})$, $[0, 25]$; $y = 5$

C **Ejercicios 55 y 56: Grafique f en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$, y estime las coordenadas de los puntos máximo y mínimo.**

55 $f(t) = t \operatorname{sen} t$ **56** $f(t) = \operatorname{sen}^2 t \cos t$

C **Ejercicios 57 – 62: Cuando $t \to 0^+$, resulta que $f(t) \to L$ para cierto número real, L. Mediante una gráfica prediga L.**

57 $f(t) = \dfrac{1 - \cos t}{t}$ **58** $f(t) = \dfrac{6t - 6\operatorname{sen} t}{t^3}$

59 $f(t) = t \cot t$ **60** $f(t) = \dfrac{t + \tan t}{\operatorname{sen} t}$

61 $f(t) = \dfrac{\tan t}{t}$ **62** $f(t) = \dfrac{\cos(t + \frac{1}{2}\pi)}{t}$

6.6 GRÁFICAS TRIGONOMÉTRICAS GENERALIZADAS

En la sección anterior se usó sen t para indicar el valor de la función seno en t, donde t es un número real o una medida en radianes. Como ahora se desea trazar gráficas en un sistema de coordenadas xy, se consideran ecuaciones como $y = \text{sen } x$, en lugar de $y = \text{sen } t$. *Las variables x, y que se usan aquí no se deben confundir con las que se emplean en la Secc. 6.4 para un punto $P(x, y)$ en el lado terminal de un ángulo.* Se considera que x es la medida en radianes de un ángulo, o un número real. Son puntos de vista equivalentes, ya que el seno de un ángulo de x radianes es lo mismo que el seno del número real x. El número y es el valor de la función que corresponde a x.

En esta sección se analizan las gráficas de las ecuaciones

$$y = a \text{ sen } (bx + c) \quad \text{y} \quad y = a \cos (bx + c)$$

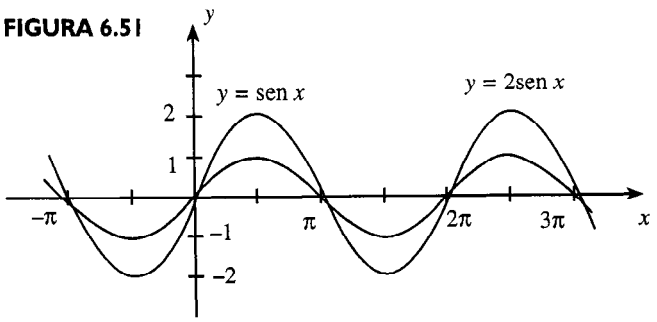
para números reales a, b y c. La meta es trazar esas gráficas sin localizar demasiados puntos. Para hacerlo se aplica lo aprendido acerca de las representaciones de las funciones sen y cos que se estudiaron en la Secc. 6.5.

Se empieza por considerar el caso especial $c = 0$ y $b = 1$; es decir,

$$y = a \text{ sen } x \quad \text{y} \quad y = a \cos x.$$

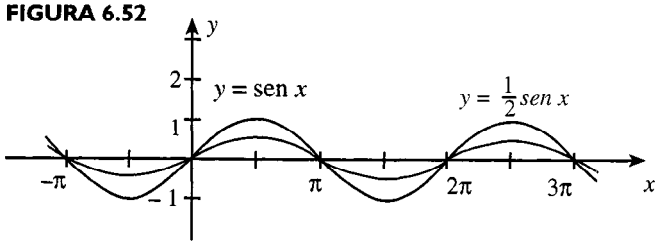
Se determinan ordenadas de los puntos en las gráficas multiplicando por a las ordenadas de las representaciones de $y = \text{sen } x$ y $y = \cos x$. Por ejemplo, si $y = 2 \text{ sen } x$, se multiplica por 2 la ordenada de cada punto en la gráfica de $y = \text{sen } x$. Esto da la Fig. 6.51, en la cual, como comparación, se ha indicado la gráfica de $y = \text{sen } x$. El procedimiento es igual al que se sigue para ampliar la gráfica de una función, que se estudió en la Secc. 3.5.

FIGURA 6.51



Otro ejemplo: si $y = \frac{1}{2} \text{ sen } x$, se multiplican por $\frac{1}{2}$ las ordenadas de los puntos en la gráfica de $y = \text{sen } x$. Con ello se reduce en un factor de 2 la gráfica de $y = \text{sen } x$, como se ve en la Fig. 6.52.

FIGURA 6.52



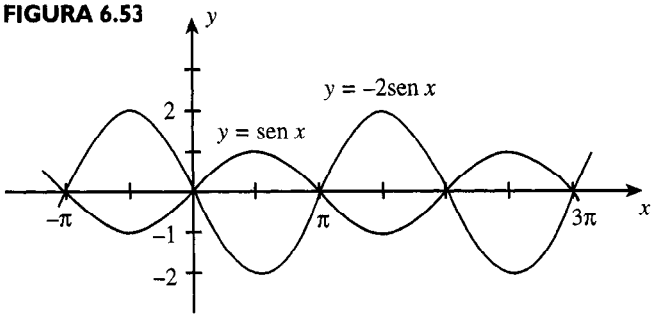
En el ejemplo que sigue se ilustra una gráfica de $y = a \operatorname{sen} x$ cuando a es negativo.

EJEMPLO 1 ***Trazo de la gráfica de una ecuación donde interviene*** **sen** x

Graficar la ecuación $y = -2 \operatorname{sen} x$.

SOLUCIÓN En la Fig. 6.53 se muestra la representación de $y = -2 \operatorname{sen} x$; se puede obtener trazando primero la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$, que se ve en la misma figura, y después multiplicando por –2 las ordenadas. Otro método es reflejar la gráfica de $y = 2 \operatorname{sen} x$ (Fig. 6.51) según el eje x.

FIGURA 6.53



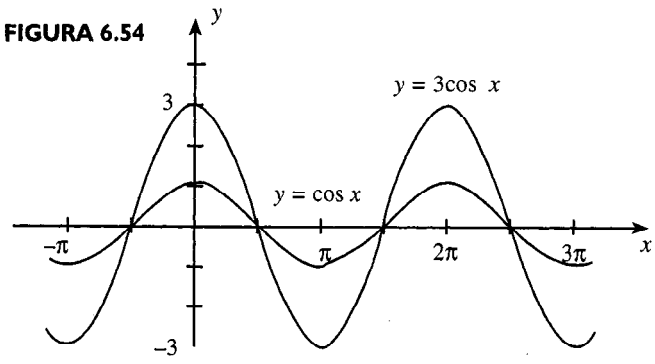
Para toda $a \neq 0$, la gráfica de $y = a \operatorname{sen} x$ tiene la apariencia general de una de las gráficas que se muestran en las Figs. 6.51 a 6.53. La magnitud de ampliación de la gráfica $y = \operatorname{sen} x$, y el caso de reflexión de la misma, se determinan por el valor absoluto y el signo de a. La ordenada máxima $|a|$ es la **amplitud de la gráfica**, o también, **la amplitud de la función** f expresada por $f(x) = a \operatorname{sen} x$. En las Figs. 6.51 y 6.53, la amplitud es 2. En la Fig. 6.52, la amplitud es $\frac{1}{2}$. Si $y = a \cos x$, se aplican las mismas observaciones.

EJEMPLO 2 ***Trazo de la gráfica de una ecuación donde interviene*** **cos** x

Calcular la amplitud y trazar la gráfica de $y = 3 \cos x$.

SOLUCIÓN De acuerdo con la explicación anterior, la amplitud es 3. Como se ve en la Fig. 6.54, primero se traza la gráfica de $y = \cos x$ y después se multiplican por 3 las ordenadas.

FIGURA 6.54



A continuación se considera $y = a \operatorname{sen} bx$ y $y = a \cos bx$, para números reales a y b distintos de cero. Como antes, la amplitud es $|a|$. Si $b > 0$, entonces transcurre exactamente un ciclo cuando bx aumenta de 0 a 2π o, lo que es lo mismo, cuando x aumenta de 0 a $2\pi/b$. Si $b < 0$, entonces $-b > 0$, y transcurre un ciclo si x aumenta de 0 a $2\pi/(-b)$. Así, el periodo de la función f expresada por $f(x) = a \operatorname{sen} bx$, o bien $f(x) = a \cos bx$, es $2\pi/|b|$. Por conveniencia también se dice que $2\pi/|b|$ es el periodo de la *gráfica* de f. El teorema siguiente resume lo analizado.

Teorema sobre amplitudes y periodos

> Si $y = a \operatorname{sen} bx$ o bien $y = a \cos bx$ para los números reales a y b distintos de cero, entonces la gráfica tiene la amplitud $|a|$, y el periodo $\dfrac{2\pi}{|b|}$.

EJEMPLO 3 *Cálculo de amplitud y periodo*

Calcular la amplitud y el periodo, y trazar la gráfica de $y = 3 \operatorname{sen} 2x$.

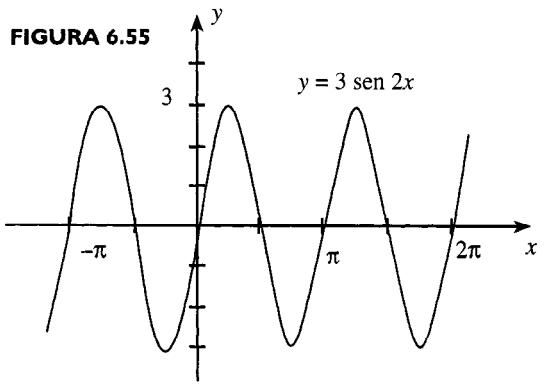
SOLUCIÓN Con el teorema sobre amplitudes y periodos, con $a = 3$ y $b = 2$, se obtiene lo siguiente:

$$\text{amplitud:} \quad |a| = |3| = 3$$

$$\text{periodo:} \quad \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

De modo que hay exactamente una onda senoidal de amplitud 3 en el intervalo de abscisas $[0, \pi]$. Luego de trazar esta onda y de ampliar la gráfica a derecha e izquierda, se tiene la Fig. 6.55.

FIGURA 6.55



EJEMPLO 4 *Determinación de la amplitud y el periodo*

Calcular la amplitud y el periodo, y trazar la gráfica de $y = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$.

SOLUCIÓN Con el teorema sobre amplitudes y periodos, haciendo $a = 2$ y $b = \frac{1}{2}$, se llega a lo siguiente:

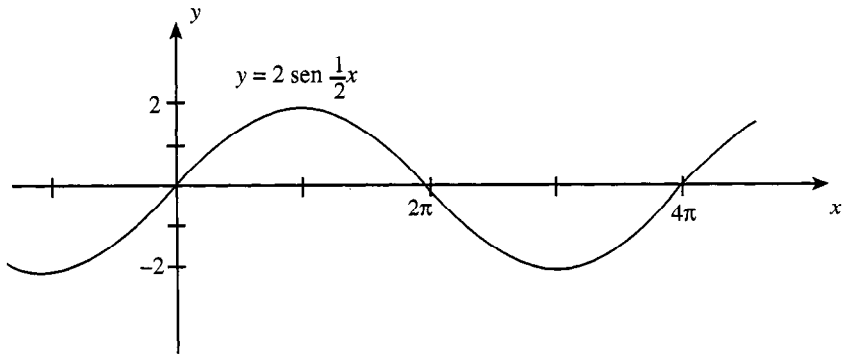
$$\text{amplitud:} \quad |a| = |2| = 2$$

$$\text{periodo:} \quad \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

(continúa)

Así, hay una onda senoidal de amplitud 2 en el intervalo $[0, 4\pi]$. Al graficar esa onda, y prolongar a derecha e izquierda, se obtiene la gráfica de la Fig. 6.56.

FIGURA 6.56



Si $y = a \operatorname{sen} bx$ y si b es un número positivo grande, entonces el periodo $2\pi/b$ es pequeño y las ondas senoidales son próximas entre sí, habiendo b ondas en el intervalo $[0, 2\pi]$. Por ejemplo, en la Fig. 6.55, $b = 2$ y hay dos ondas senoidales en $[0, 2\pi]$. Si b es un número positivo pequeño, entonces el periodo $2\pi/b$ es grande, y las ondas están alejadas. Por ejemplo, si $y = \operatorname{sen} \frac{1}{10}x$, entonces en $[0, 2\pi]$ hay la décima parte de una onda, y se necesita un intervalo de 20π unidades de longitud para dibujar un ciclo completo. (Véase también que en la Fig. 6.56, para $y = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$, se tiene la mitad de una onda senoidal en $[0, 2\pi]$.)

Si $b < 0$, se puede aplicar el hecho que $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ para obtener la gráfica de $y = a \operatorname{sen} bx$. Por ejemplo, la gráfica de $y = \operatorname{sen}(-2x)$ es la misma que la de $y = -\operatorname{sen} 2x$.

EJEMPLO 5 *Determinación de la amplitud y el periodo*

Calcular la amplitud y el periodo, y trazar la gráfica de $y = 2 \operatorname{sen}(-3x)$.

SOLUCIÓN Como $\operatorname{sen}(-3x) = -\operatorname{sen} 3x$, se puede escribir $y = -2 \operatorname{sen} 3x$. La amplitud es $|-2| = 2$, y el periodo es $2\pi/3$. Entonces hay un ciclo en un intervalo de longitud $2\pi/3$. El signo negativo indica una reflexión en el eje x. Si se analiza el intervalo $[0, 2\pi/3]$ y se traza la gráfica de una onda senoidal de amplitud 2 (reflejada en el eje x) queda clara la forma de la gráfica. La parte de la gráfica en el intervalo $[0, 2\pi/3]$ se repite periódicamente, como se ve en la Fig. 6.57.

FIGURA 6.57

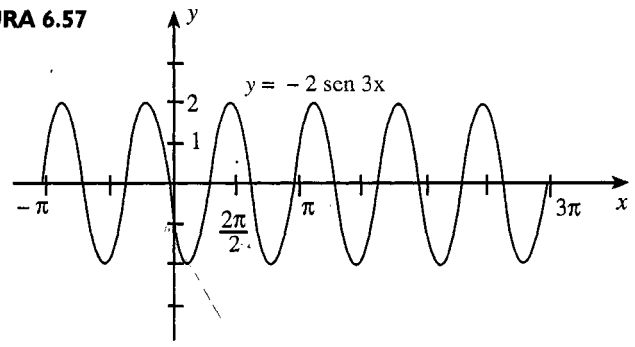
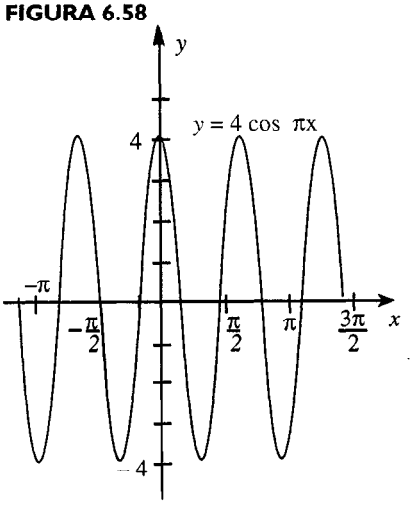


FIGURA 6.58



EJEMPLO 6 ***Determinación de la amplitud y el periodo***

Calcular la amplitud y el periodo, y trazar la gráfica de $y = 4 \cos \pi x$.

SOLUCIÓN La amplitud es $|4| = 4$, y el periodo es $2\pi/\pi = 2$. Entonces, hay exactamente una onda cosenoidal de amplitud 4 en el intervalo $[0, 2]$. Al trazar esa onda, y prolongarla a izquierda y derecha, se obtiene la gráfica de la Fig. 6.58.

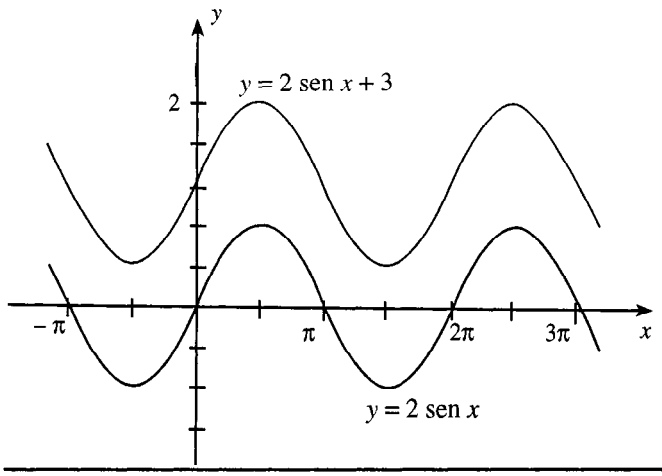
Como en la Secc. 3.5, si f es una función y c es un número real positivo, entonces se puede obtener la gráfica de $y = f(x) + c$ desplazando la gráfica de $y = f(x)$ en sentido vertical, hacia arriba, una distancia c. Para la gráfica de $y = f(x) - c$, se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ verticalmente hacia abajo una distancia c. En el ejemplo que sigue, se usa esa técnica para una gráfica de una función trigonométrica.

EJEMPLO 7 ***Desplazamiento vertical de una gráfica trigonométrica***

Trazar la gráfica de $y = 2 \operatorname{sen} x + 3$.

SOLUCIÓN Es importante hacer notar que $y \neq 2 \operatorname{sen} (x + 3)$. En la Fig. 6.59 se presenta la gráfica de $y = 2 \operatorname{sen} x$. Si se desplaza verticalmente hacia arriba una distancia 3, se obtiene la representación de $y = 2 \operatorname{sen} x + 3$.

FIGURA 6.59



A continuación se considera la gráfica de

$$y = a \operatorname{sen} (bx + c).$$

(continúa)

Como antes, la amplitud es $|a|$, y el periodo es $2\pi/|b|$. Transcurre un ciclo si $bx + c$ aumenta de 0 a 2π. Por consiguiente, se puede determinar un intervalo que contenga exactamente una onda senoidal resolviendo las ecuaciones

$$bx + c = 0 \qquad \text{y} \qquad bx + c = 2\pi.$$

Las soluciones son

$$x = -\frac{c}{b} \qquad \text{y} \qquad x = -\frac{c}{b} + \frac{2\pi}{b}.$$

El número $-c/b$ es el **desplazamiento de fase**, o **desfasamiento**, asociado a la gráfica. Se puede obtener la gráfica de $y = a \operatorname{sen}(bx + c)$ desplazando la gráfica de $y = a \operatorname{sen} bx$ hacia la izquierda, si el desplazamiento de fase es negativo, o hacia la derecha si es positivo.

Son válidos resultados análogos para $y = a \cos(bx + c)$. El teorema que sigue resume la explicación.

Teorema sobre amplitudes, periodos y desfasamientos

Si $y = a \operatorname{sen}(bx + c)$, o bien $y = a \cos(bx + c)$, donde a y b son números reales distintos de cero, entonces

(1) la amplitud es $|a|$ y el periodo es $\dfrac{2\pi}{|b|}$;

(2) se pueden calcular el desplazamiento de fase y el intervalo que contiene exactamente un ciclo resolviendo las dos ecuaciones siguientes:

$$bx + c = 0 \qquad \text{y} \qquad bx + c = 2\pi.$$

EJEMPLO 8 ***Determinación de la amplitud, periodo y desfasamiento***

Calcular la amplitud, periodo y desplazamiento de fase, y trazar la gráfica de

$$y = 3 \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right).$$

SOLUCIÓN La ecuación tiene la forma $y = a \operatorname{sen}(bx + c)$, donde $a = 3$, $b = 2$ y $c = \pi/2$. Entonces, la amplitud es $|a| = 3$, y el periodo es $2\pi/|b| = 2\pi/2 = \pi$.

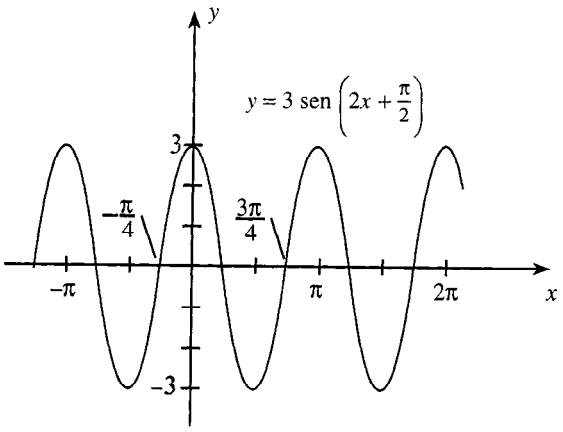
De acuerdo con la parte (2) del teorema anterior, se puede determinar el desplazamiento de fase y el intervalo que contiene una onda senoidal resolviendo las dos ecuaciones

$$2x + \frac{\pi}{2} = 0 \qquad \text{y} \qquad 2x + \frac{\pi}{2} = 2\pi.$$

Esto da como resultado $\quad x = -\dfrac{\pi}{4} \quad$ y $\quad x = \dfrac{3\pi}{4}$.

Así, el desfasamiento es $-\pi/4$, y una onda senoidal de amplitud 3 ocupa el intervalo $[-\pi/4, 3\pi/4]$. Si se traza esa onda y se repite luego a izquierda y derecha, se obtiene la gráfica de la Fig. 6.60.

FIGURA 6.60



EJEMPLO 9 ***Determinación de la amplitud, periodo y desplazamiento de fase***

Calcular la amplitud, periodo y desfasamiento, y trazar la gráfica de $y = 2 \cos (3x - pi)$.

SOLUCIÓN La ecuación tiene la forma $y = a \cos (bx + c)$, donde $a = 2$, $b = 3$ y $c = -\pi$. Por consiguiente, la amplitud es $|a| = 2$, y el periodo es $2\pi / |b| = 2\pi /3$.

Según la parte (2) del teorema sobre amplitudes, periodos y desplazamientos de fase, se pueden calcular el desfasamiento y el intervalo que contiene un ciclo si se resuelven las dos ecuaciones siguientes:

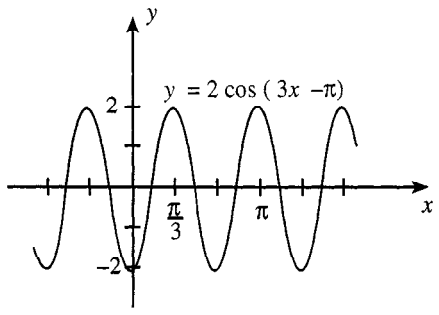
$$3x - \pi = 0 \qquad \text{y} \qquad 3x - \pi = 2\pi.$$

Y así se obtiene

$$x = \frac{\pi}{3} \qquad \text{y} \qquad x = \frac{3\pi}{3} = \pi.$$

Por lo tanto, el desplazamiento de fase es $\pi /3$, y transcurre un ciclo cosenoidal de amplitud 2 en el intervalo $[\pi/3, \pi]$. Al trazar esa parte de la gráfica y repetirla a derecha e izquierda se obtiene el esquema de la Fig. 6.61.

FIGURA 6.61



EJEMPLO 10 ***Determinar la ecuación de una onda senoidal***

Expresar la ecuación de la onda senoidal de la Fig. 6.62 en forma

$$y = a \operatorname{sen}(bx + c)$$

para $a > 0$, $b > 0$, y el número real positivo c mínimo.

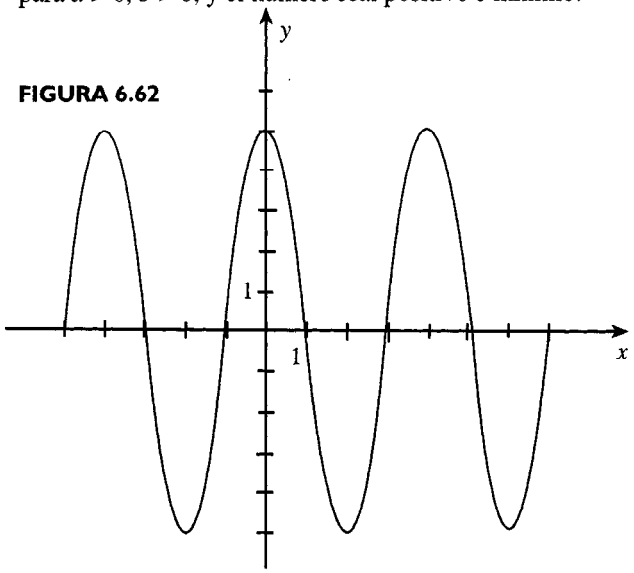


FIGURA 6.62

SOLUCIÓN Las ordenadas máxima y mínima de los puntos en la gráfica son 5 y –5, respectivamente. Por consiguiente, la amplitud es $a = 5$.

Como una onda ocupa el intervalo $[-1, 3]$, el periodo es $3 - (-1) = 4$. Entonces, de acuerdo con el teorema de amplitudes, periodos y desplazamientos de fase, para $b > 0$,

$$\frac{2\pi}{b} = 4, \quad \text{o sea} \quad b = \frac{\pi}{2}.$$

El desplazamiento de fase es $-c/b = -c/(\pi/2)$. Como c debe ser positivo, el desplazamiento de fase debe ser *negativo*; es decir, se debe obtener la gráfica de la Fig. 6.62 desplazando la gráfica de $y = 5 \operatorname{sen}[(\pi/2)x]$ hacia *la izquierda*. Como se desea que c sea lo más pequeña posible, se escoge un desplazamiento de fase igual a –1. Por lo tanto,

$$-\frac{c}{\pi/2} = -1, \quad \text{o bien} \quad c = \frac{\pi}{2}.$$

Entonces, la ecuación deseada es

$$y = 5 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Hay muchas otras ecuaciones para esa misma gráfica. Por ejemplo, se podrían emplear los desplazamientos de fase –5, –9, –13, y así sucesivamente, pero no producirían el valor positivo *mínimo* para c. Otras dos ecuaciones de la gráfica son

$$y = 5 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{3\pi}{2}\right) \quad \text{y} \quad y = -5 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{3\pi}{2}\right).$$

Sin embargo, ninguna de ellas satisface los criterios solicitados para a, b y c, ya que en la primera, $c < 0$, y en la segunda $a < 0$, y c no tiene su valor positivo mínimo.

Hay muchos fenómenos naturales que varían en forma cíclica o rítmica. A veces es posible representarlos mediante funciones trigonométricas, como se ve en los dos ejemplos siguientes.

EJEMPLO 11 *Análisis del proceso de respiración*

El proceso rítmico de la respiración consiste en periodos alternos de aspiración y espiración. Normalmente, un ciclo completo dura 5 segundos (s). Si $F(t)$ representa la corriente o flujo de aire en el momento t (en litros por segundo) y si el flujo máximo de aire es 0.6 L/s, establecer una fórmula que tenga la forma $F(t) = a \operatorname{sen} bt$ y que se ajuste a esta información.

SOLUCIÓN Si $F(t) = a \operatorname{sen} bt$ para determinada $b > 0$, entonces el periodo de F es $2\pi/b$. En esta aplicación, el periodo es 5 s, y por consiguiente,

$$\frac{2\pi}{b} = 5, \quad \text{o sea} \quad b = \frac{2\pi}{5}.$$

Puesto que el flujo máximo corresponde a la amplitud a de F, sea $a = 0.6$. Con ello se llega a la fórmula

$$F(t) = 0.6 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}t\right).$$

EJEMPLO 12 *Cálculo del número aproximado de horas de luz diurna*

El número de horas $D(t)$ de luz diurna en determinada época del año se puede calcular mediante

$$D(t) = \frac{K}{2} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{365}(t - 79) + 12$$

donde t está en días, y $t = 0$ corresponde al 1 de enero. La constante K determina la variación total de la duración de luz diurna y depende de la latitud de la localidad.
(a) Para Boston, $K \approx 6$. Trazar la gráfica de D, para $0 \leq t \leq 365$.
(b) ¿Cuándo se tiene la duración máxima de luz diurna? ¿Cuándo se tiene la duración menor?

SOLUCIÓN
(a) Si $K = 6$, entonces $K/2 = 3$, y se puede expresar $D(t)$ en la forma

$$D(t) = f(t) + 12,$$

donde

$$f(t) = 3 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{365}(t - 79).$$

Se traza la gráfica de f, y a continuación se aplica un desplazamiento vertical en una distancia de 12. Se expresa $f(t)$ en su forma equivalente

$$f(t) = 3 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{365}t - \frac{158\pi}{365}\right),$$

(continúa)

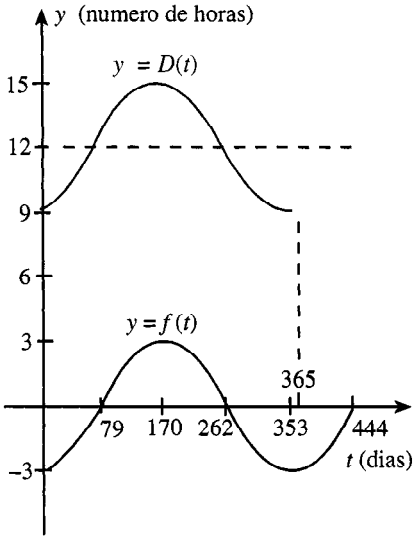
esa forma es la de $f(t) = a \operatorname{sen}(bt + c)$, donde $a = 3$, $b = 2\pi/365$, y $c = -158\pi/365$. Así, la amplitud es 3 y el periodo de f es

$$\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{2\pi/365} = 365 \text{ días.}$$

Como en la parte (2) del teorema sobre las amplitudes, periodos y desplazamientos de fase, se puede obtener un intervalo de t que contenga exactamente un ciclo si se resuelven las dos ecuaciones:

$$\frac{2\pi}{365}(t - 79) = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{2\pi}{365}(t - 79) = 2\pi.$$

FIGURA 6.63



Las soluciones son $t = 79$ y $t = 444$. Por consiguiente, una onda senoidal ocupa el intervalo [79, 444]. Dividiendo este intervalo en cuatro partes iguales, se llega la siguiente tabla de valores, que indica la forma común de la onda senoidal de amplitud 3.

t	79	170.25	261.5	352.75	444
$f(t)$	0	3	0	−3	0

Si $t = 0$,

$$f(0) = 3 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{365}(-79) \approx 3 \operatorname{sen}(-1.36) \approx -2.9.$$

Como el periodo de f es 365, esto significa que $f(365) \approx -2.9$.

En la Fig. 6.63 se presenta la gráfica de f para el intervalo [0, 444], con distintas escalas, y t redondeada con precisión de un día.

Aplicando un desplazamiento vertical de 12 unidades se tiene la gráfica de D para $0 \le t \le 365$ de la Fig. 6.63.

(b) El día con luz diurna más duradera, es decir, el valor máximo de $D(t)$, ocurre 170 días después del 1 de enero. Con excepción de los años bisiestos, esto corresponde al 20 de junio. El día más corto se presenta 353 días después del 1 de enero, o sea el 20 de diciembre.

En el siguiente ejemplo se usa una graficadora para aproximar la solución de una desigualdad donde intervienen expresiones trigonométricas.

EJEMPLO 13 ***Cálculo aproximado de las soluciones de una desigualdad trigonométrica***

Estime la solución de la desigualdad

$$\operatorname{sen} 3x < x + \operatorname{sen} x.$$

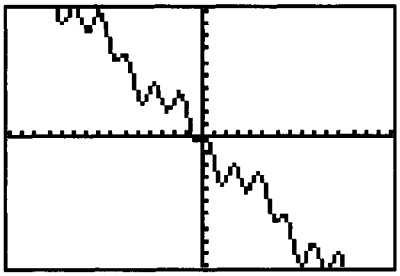
SOLUCIÓN La desigualdad anterior equivale a

$$\operatorname{sen} 3x - x - \operatorname{sen} x < 0.$$

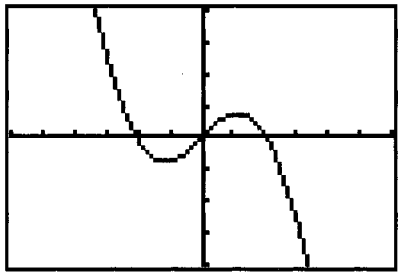
Si se asigna $\operatorname{sen} 3x - x - \operatorname{sen} x$ a Y_1, entonces el problema equivale a determinar dónde la gráfica de Y_1 queda bajo el eje x. Con el rectángulo visual normal se obtiene un esquema semejante al de la Fig. 6.64(a), en el cual se ve que la gráfica de Y_1 tiene abscisa en el origen c entre −1 y 0. Resulta que la gráfica está bajo el eje x en el intervalo $[c, \infty)$; sin embargo, esto no queda perfectamente claro debido a la escala pequeña inadecuada de los ejes.

FIGURA 6.64

(a) [–15, 15] por [–10, 10]



(b) [–1.5, 1.5] por [–1, 1]



Si se usa el rectángulo de visión [–1.5, 1.5] por [–1, 1], con Xscl y Yscl iguales ambos a 0.25, se obtiene algo parecido a la Fig. 6.64(b), en la cual se observa que las abscisas en el origen son, aproximadamente, – 0.5, 0 y 0.5. Con las funciones de rastreo y de ampliación se obtiene el valor positivo 0.51, más exacto. Como la función es impar, el valor negativo es, aproximadamente – 0.51. Por lo tanto, las soluciones de la desigualdad están en los intervalos aproximados.

EJEMPLO 14 ***Determinación de la corriente alterna en un circuito eléctrico***

La corriente I (en amperes) en un circuito de corriente alterna, cuando el tiempo en segundos es t, es

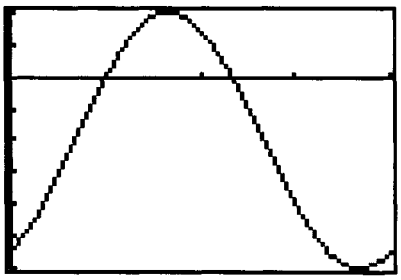
$$I = 30 \operatorname{sen}\left(50\pi t - \frac{7\pi}{3}\right).$$

Calcular el valor mínimo de t para el cual $I = 15$.

SOLUCIÓN Si $I = 15$ en la fórmula dada, se tiene

$$15 = 30 \operatorname{sen}\left(50\pi t - \frac{7\pi}{3}\right)$$

FIGURA 6.65 [0, 0.04] por [–1.5, 0.5]



o, lo que es lo mismo,

$$\operatorname{sen}\left(50\pi t - \frac{7\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} = 0.$$

Si se asigna sen $(50\pi x - 7\pi/3) - \frac{1}{2}$ a Y_1, entonces el problema equivale a aproximar la mínima abscisa en el origen de la gráfica.

Puesto que el periodo de Y_1 es

$$\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{50\pi} = \frac{1}{25} = 0.04$$

y como $-\frac{3}{2} \le Y_1 \le \frac{1}{2}$, se selecciona el rectángulo visual [0, 0.04] por [–1.5, 0.5] con Xscl = 0.01 y Yscl = 0.25, con lo que se tiene un esquema semejante al de la Fig. 6.65. Con las funciones de rastreo o trazo y ampliación se llega a $t \approx 0.01$ s.

En la Secc. 7.2 se resuelve nuevamente el ejemplo anterior, y se indica cómo calcular el valor exacto de t sin ayuda de una graficadora.

EJERCICIOS 6.6

1 Calcule la amplitud y periodo, y trace la gráfica de la ecuación:

(a) $y = 4 \operatorname{sen} x$ **(b)** $y = \operatorname{sen} 4x$

(c) $y = \frac{1}{4} \operatorname{sen} x$ **(d)** $y = \operatorname{sen} \frac{1}{4}x$

(e) $y = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{4}x$ **(f)** $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 4x$

(g) $y = -4 \operatorname{sen} x$ **(h)** $y = \operatorname{sen}(-4x)$

2 Trace las gráficas de las ecuaciones donde interviene el coseno, que sean análogas a las de (a) a (h) del Ejercicio 1.

3 Calcule la amplitud y el periodo, y trace la gráfica de la ecuación:

(a) $y = 3 \cos x$ **(b)** $y = \cos 3x$

(c) $y = \frac{1}{3} \cos x$ **(d)** $y = \cos \frac{1}{3}x$

(e) $y = 2 \cos \frac{1}{3}x$ **(f)** $y = \frac{1}{2} \cos 3x$

(g) $y = -3 \cos x$ **(h)** $y = \cos(-3x)$

4 Trace las gráficas de las ecuaciones en las que interviene la función seno y que son análogas a las de (a) a (h) del Ejercicio 3.

Ejercicios 5 – 40: Calcule la amplitud, periodo y desplazamiento de fase y trazar la gráfica de la ecuación.

5 $y = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ **6** $y = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

7 $y = 3 \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ **8** $y = 2 \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

9 $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ **10** $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

11 $y = 4 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ **12** $y = 3 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

13 $y = \operatorname{sen}(2x - \pi) + 1$ **14** $y = -\operatorname{sen}(3x + \pi) - 1$

15 $y = -\cos(3x + \pi) - 2$ **16** $y = \cos(2x - \pi) + 2$

17 $y = -2 \operatorname{sen}(3x - \pi)$ **18** $y = 3 \cos(3x - \pi)$

19 $y = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}\right)$ **20** $y = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$

21 $y = 6 \operatorname{sen} \pi x$ **22** $y = 3 \cos \frac{\pi}{2} x$

23 $y = 2 \cos \frac{\pi}{2} x$ **24** $y = 4 \operatorname{sen} 3\pi x$

25 $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\pi x$ **26** $y = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} x$

27 $y = 5 \operatorname{sen}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ **28** $y = -4 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

29 $y = 3 \cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$ **30** $y = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right)$

31 $y = -5 \cos\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{6}\right)$ **32** $y = 4 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{3}\right)$

33 $y = 3 \cos(\pi x + 4\pi)$ **34** $y = -2 \operatorname{sen}(2\pi x + \pi)$

35 $y = -\sqrt{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$ **36** $y = \sqrt{3} \cos\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{2}\right)$

37 $y = -2 \operatorname{sen}(2x - \pi) + 3$ **38** $y = 3 \cos(x + 3\pi) - 2$

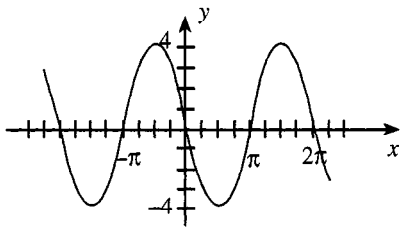
39 $y = 5 \cos(2x + 2\pi) + 2$ **40** $y = -4 \sin(3x - \pi) - 3$

Ejercicios 41 – 44: En la figura se muestra la gráfica de una ecuación.

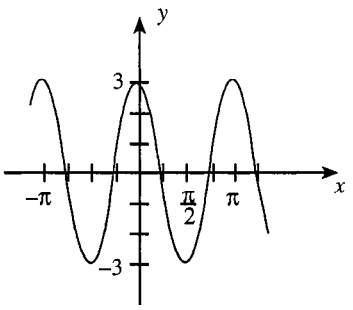
(a) Calcule la amplitud, periodo y desplazamiento de fase.

(b) Escriba la ecuación en la forma $y = a \operatorname{sen}(bx + c)$ para $a > 0$, $b > 0$, y el número real positivo c que sea mínimo.

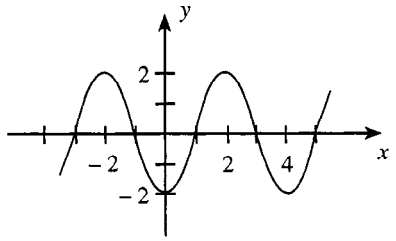
41



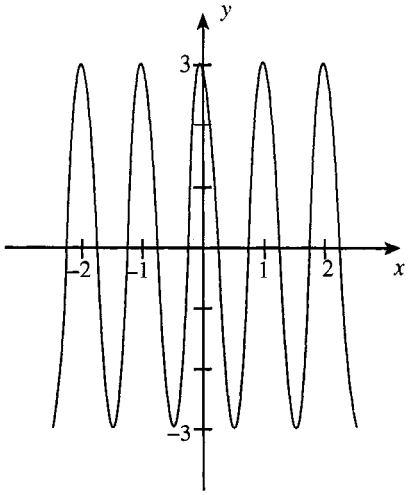
42



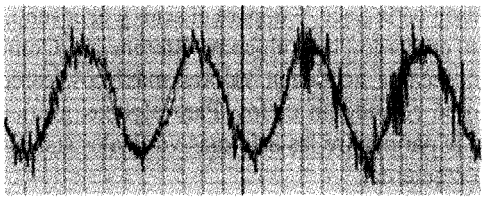
43



44



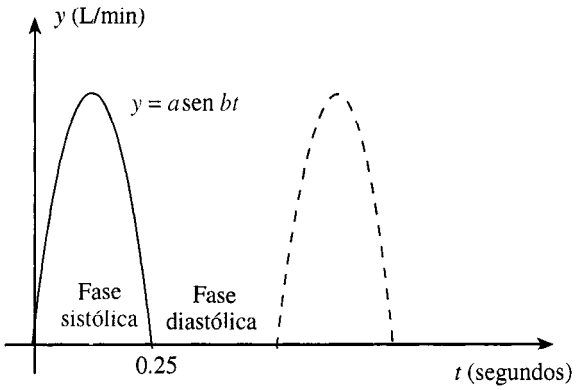
45 ***Electroencefalografía*** En la figura se muestra un electroencefalograma de ondas cerebrales de una persona durante el sueño profundo. Si para representar estas ondas se emplea $W = a \operatorname{sen}(bt + c)$, ¿cuál es el valor de b?



0 1 2 (sec)

46 ***Intensidad de la luz diurna*** En un día de primavera, con 12 horas de luz diurna, la intensidad solar I llega a su valor máximo de 510 cal/cm^2 a mediodía. Si $t = 0$ corresponde a la salida del Sol, deduzca una fórmula del tipo $I = a \operatorname{sen} bt$ que se ajuste a esta información.

47 ***Acción cardiaca*** La acción de bombeo del corazón consiste en una fase sistólica, en la cual la sangre pasa del ventrículo izquierdo a la aorta, y la fase diastólica, durante la cual se relaja el músculo cardiaco. A veces se usa la función cuya gráfica se ve en la figura para modelar un ciclo completo de este proceso. Para determinado individuo, la fase sistólica dura $\frac{1}{4}$ de segundo y tiene un flujo máximo de 8 litros por minuto. Calcule a y b.



48 ***Biorritmos*** En la teoría común del biorritmo se utilizan las gráficas de tres funciones senoidales simples para predecir el potencial físico, emocional e intelectual de un individuo en determinado día. Las gráficas están expresadas por $y = a \operatorname{sen} bt$, donde t está en días; $t = 0$ corresponde al nacimiento, y $a = 1$ indica potencial de 100%.

(a) Calcule el valor de b para el ciclo físico, el cual tiene un periodo de 23 días; para el ciclo emocional (con periodo de 28 días) y para el ciclo intelectual (periodo de 33 días).

(b) Evalúe los ciclos del biorritmo para una persona que apenas ha cumplido 21 años y tiene 7670 días de edad.

49 ***Componentes de la marea*** La altura de la marea en determinado punto en la playa se puede predecir empleando 7 funciones trigonométricas, (llamadas componentes de marea) de la forma $f(t) = a \cos(bt + c)$. El principal componente, el lunar, se puede calcular aproximadamente mediante

$$f(t) = a \cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{11\pi}{12}\right),$$

donde t está en horas, y $t = 0$ corresponde a la medianoche. Trace la gráfica de f si $a = 0.5$ m.

50 ***Componentes de la marea*** Refiérase al Ejercicio 49. El componente solar diurno principal se puede calcular en forma aproximada con la ecuación

$$f(t) = a \cos\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{7\pi}{12}\right).$$

Trace la gráfica de f si $a = 0.2$ m.

51 ***Horas de luz diurna en Fairbanks*** Si se aplica la fórmula de $D(t)$ del Ejemplo 12 para Fairbanks, Alaska, entonces $K \approx 12$. Grafique D en este caso para $0 \le t \le 365$.

52 ***Bajas temperaturas en Fairbanks*** Con base en años de registros climatológicos, la temperatura mínima esperada T (en °F) en Fairbanks, Alaska, se puede calcular aproximadamente con

$$T = 36 \operatorname{sen}\frac{2\pi}{365}(t - 101) + 14,$$

en la cual t está en días, y $t = 0$ corresponde al 1 de enero.

(a) Trace la gráfica de T para $0 \le t \le 365$.

(b) Prediga cuándo se tendrá el día más frío del año.

Ejercicios 53 – 56: A veces los investigadores recurren a la fórmula

$$f(t) = a \operatorname{sen}(bt + c) + d$$

para simular las variaciones de temperatura durante el día, donde el tiempo t está en horas, la temperatura $f(t)$ en °C y $t = 0$ corresponde a medianoche. Suponga que $f(t)$ es decreciente a medianoche.

(a) Calcule los valores de a, b, c y d que se se ajusten a la información.

(b) Trace la gráfica de f para $0 \le t \le 24$.

53 La temperatura máxima es 10 °C y la mínima –10 °C, esta última a las 4 A.M.

54 La temperatura a medianoche es 15 °C y las temperaturas máxima y mínima son 20 °C y 10 °C.

55 La temperatura varía entre 10 °C y 30 °C, y la temperatura media de 20 °C se da por primera vez a las 9 A.M.

56 La temperatura máxima de 28 °C se alcanza a las 2 P.M., y la temperatura media de 20 °C se tiene 6 horas después.

C **Ejercicios 57 – 60: Grafique la ecuación en el intervalo $[-2, 2]$ y describa el comportamiento de y cuando $x \to 0^-$ y cuando $x \to 0^+$.**

57 $y = \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$

58 $y = |x| \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$

59 $y = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x}$

60 $y = \dfrac{1 - \cos 3x}{x}$

C **Ejercicios 61 y 62: Grafique la ecuación en el intervalo $[-20, 20]$ y estime la asíntota horizontal.**

61 $y = x^2 \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{2}{x}\right)$

62 $y = \dfrac{1 - \cos^2(2/x)}{\operatorname{sen}(1/x)}$

C **Ejercicios 63 y 64: Con una gráfica resuelva la desigualdad en el intervalo $[-\pi, \pi]$.**

63 $\cos 3x \ge \frac{1}{2}x - \operatorname{sen} x$

64 $\frac{1}{4}\tan(\frac{1}{3}x^2) < \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{5}x^2$

6.7 OTRAS GRÁFICAS TRIGONOMÉTRICAS

Se pueden aplicar los métodos que se estudiaron en la Secc. 6.6, para el seno y el coseno, a las otras cuatro funciones trigonométricas; sin embargo, hay algunas diferencias. Como las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante no tienen valores máximos, carece de sentido la noción de amplitud. Además, no se consideran ciclos. Para algunas gráficas de tangente y cotangente, se empieza por trazar la parte entre las asíntotas verticales sucesivas y después se repite la figura a la derecha y a la izquierda.

La gráfica de $y = a \tan x$, para $a > 0$, se puede obtener ampliando o reduciendo la gráfica de $y = \tan x$. Si $a < 0$, también se usa una reflexión en el eje x. Como la función tangente tiene pe-

riodo π, es suficiente trazar su gráfica entre dos asíntotas verticales sucesivas, $x = -\pi/2$ y $x = \pi/2$. El mismo comportamiento se presenta a izquierda y derecha, como se ve en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 ***Trazo de la gráfica de una ecuación donde interviene*** $\tan x$

Trazar la gráfica de la ecuación:

(a) $y = 2 \tan x$ **(b)** $y = \frac{1}{2} \tan x$

SOLUCIÓN Se empieza por trazar la gráfica de $y = \tan x$, como se ve la Fig. 6.66, entre las asíntotas verticales $x = -\pi/2$ y $x = \pi/2$.

(a) Para $y = 2 \tan x$, se multiplica por 2 la ordenada de cada punto y, a continuación, se prolonga la gráfica resultante a derecha e izquierda, como se ve en la Fig. 6.66.

(b) Para $y = \frac{1}{2} \tan x$, se multiplica por $\frac{1}{2}$ las ordenadas, y se obtiene la gráfica de la Fig. 6.67.

FIGURA 6.66

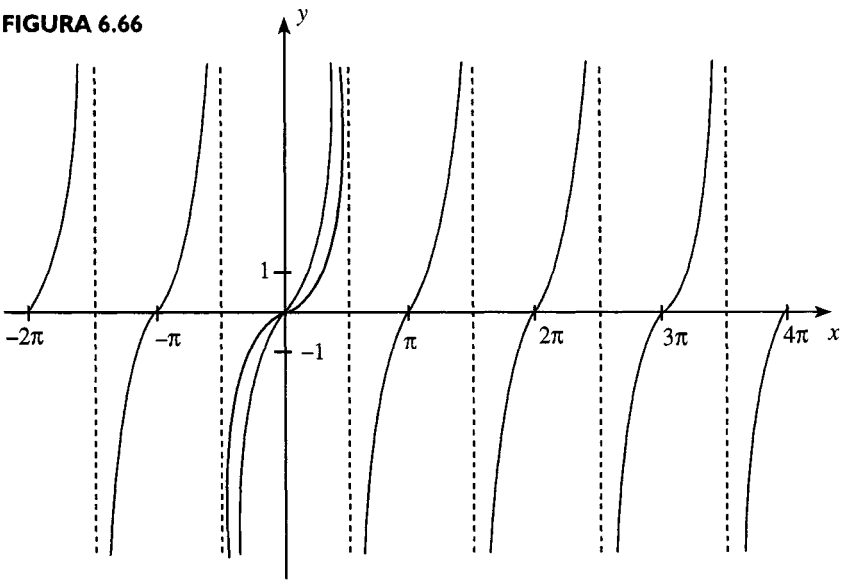
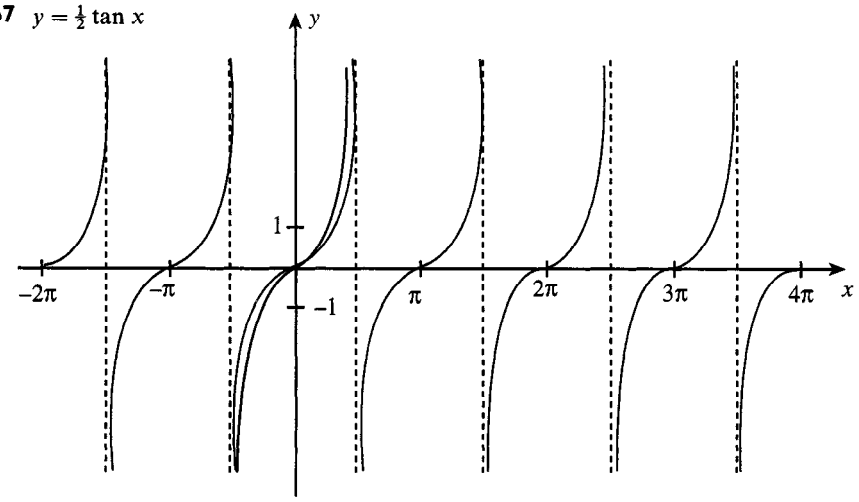


FIGURA 6.67 $y = \frac{1}{2} \tan x$



El método recién utilizado se puede aplicar a otras funciones. Así, para trazar la gráfica de $y = 3 \sec x$, se podría realizar primero la correspondiente a $y = \sec x$, y después multiplicar por 3 la ordenada de cada punto.

El teorema que sigue es análogo al enunciado en la Secc. 6.6 para las funciones seno y coseno.

Teorema de la gráfica de $y = a \tan(bx + c)$

Si $y = a \tan (bx + c)$ para números reales a y b distintos de cero, entonces

(1) el periodo es $\dfrac{\pi}{|b|}$;

(2) se pueden determinar las asíntotas verticales sucesivas en la gráfica resolviendo las ecuaciones

$$bx + c = -\frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad bx + c = \frac{\pi}{2};$$

(3) el desplazamiento de fase es $-\dfrac{c}{b}$.

EJEMPLO 2 ***Gráfica de una ecuación de la forma $y = a \tan (bx + c)$***

Calcular el periodo y trazar la gráfica de $y = \frac{1}{2} \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

SOLUCIÓN La ecuación tiene la forma que indica el teorema anterior, con $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$ y $c = \pi/4$. Por consiguiente, de acuerdo con la parte (1), el periodo es $\pi/|b| = \pi/1 = \pi$.

Según indica la parte (2), para determinar dos asíntotas sucesivas se resuelven las ecuaciones:

$$x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} \qquad \text{y} \qquad x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2},$$

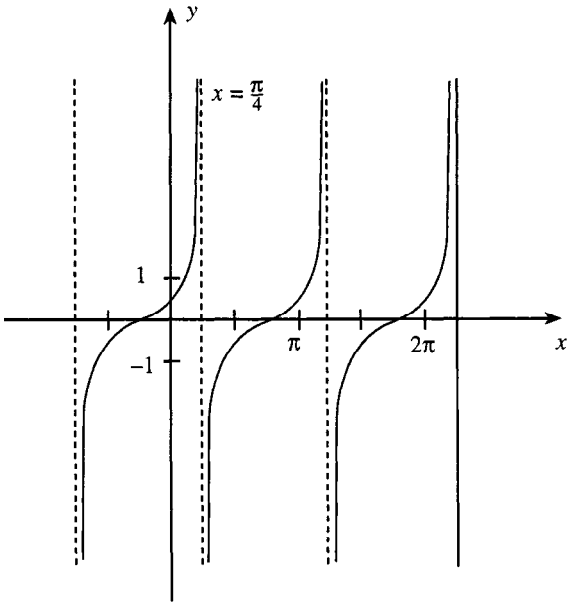
y se obtiene

$$x = -\frac{3\pi}{4} \qquad \text{y} \qquad x = \frac{\pi}{4}.$$

Como $a = \frac{1}{2}$, la gráfica de la ecuación en el intervalo $[-3\pi/4, \pi/4]$ tiene la forma de la gráfica de $y = \frac{1}{2} \tan x$ (véase Fig. 6.67). Si se traza esa parte de la gráfica, y se prolonga a la izquierda y a la derecha, se obtiene la Fig. 6.68.

Nótese que, como $c = \pi/4$, y $b = 1$, el desplazamiento de fase es $-c/b = -\pi/4$. Por consiguiente, también se puede obtener la gráfica desplazando la de $y = \frac{1}{2} \tan x$ de la Fig. 6.67 hacia la izquierda una distancia $\pi/4$.

FIGURA 6.68 $y = \frac{1}{2}\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$



Si $y = a \cot(bx + c)$ se tendrá una situación semejante a la que se enuncia en el teorema anterior. La única diferencia está en la parte (2). Como las asíntotas verticales sucesivas de la gráfica de $y = \cot x$, son $x = 0$ y $x = \pi$ (véase Fig. 6.48), se obtienen las asíntotas verticales sucesivas de la gráfica de $y = a \cot(bx + c)$ resolviendo las ecuaciones

$$bx + c = 0 \qquad \text{y} \qquad bx + c = \pi.$$

EJEMPLO 3 ***Trazo de la gráfica de una ecuación de la forma*** $y = a \cot(bx + c)$

Calcular el periodo y graficar $y = \cot\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$.

SOLUCIÓN Empleando la notación normal, se observa que $a = 1$, $b = 2$ y $c = -\pi/2$. El periodo es $\pi/|b| = \pi/2$. Por consiguiente, la gráfica se repite en intervalos de longitud $\pi/2$.

Como en la explicación que antecede a este ejemplo, para determinar dos asíntotas verticales sucesivas de la gráfica, se resuelven las ecuaciones

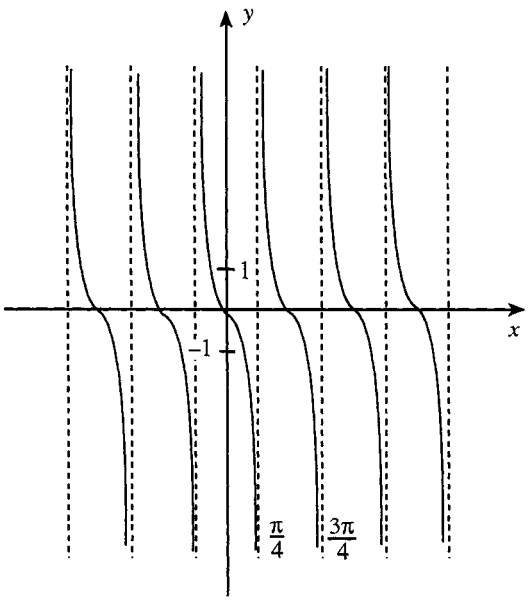
$$2x - \frac{\pi}{2} = 0 \qquad \text{y} \qquad 2x - \frac{\pi}{2} = \pi,$$

y se obtiene

$$x = \frac{\pi}{4} \qquad \text{y} \qquad x = \frac{3\pi}{4}.$$

Como a es positiva, se traza una gráfica con la forma de la cotangentoide, en el intervalo $[\pi/4, 3\pi/4]$, y se repite a derecha e izquierda en intervalos de longitud $\pi/2$, según se ve en la Fig. 6.69.

FIGURA 6.69 $y = \cot\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$



Las gráficas donde intervienen las funciones secante y cosecante pueden obtenerse mediante métodos semejantes a los aplicados para la tangente y la cotangente, o tomando recíprocos de las gráficas correspondientes, de las funciones coseno y seno, respectivamente.

EJEMPLO 4 ***Trazado de la gráfica de una ecuación de la forma*** $y = a \sec(bx + c)$

Trazar la gráfica de la ecuación:

(a) $y = \sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ **(b)** $y = 2\sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

SOLUCIÓN

(a) En la Fig. 6.70 se presenta el esquema de la gráfica de $y = \sec x$. Se puede obtener la gráfica de $y = \sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ desplazando la anterior hacia la derecha, una distancia $\pi/4$, como se ve en la Fig. 6.70.

(b) Se realiza la gráfica multiplicando por 2 las ordenadas de la gráfica de la parte (a). Con ello se llega a la Fig. 6.71.

FIGURA 6.70 $y = \sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

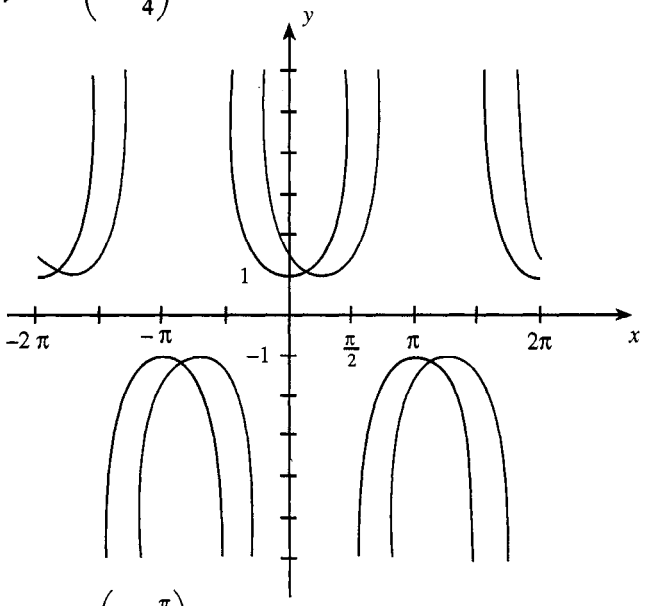
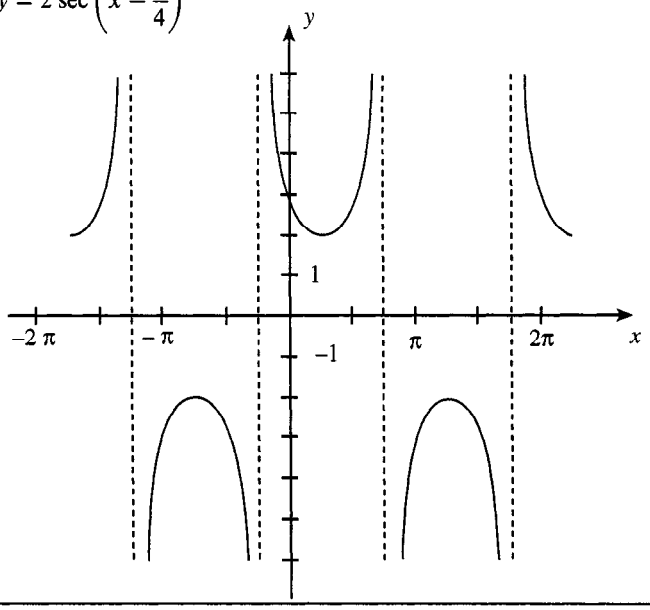


FIGURA 6.71 $y = 2\sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$



EJEMPLO 5 ***Trazo de la gráfica de una ecuación de la forma*** $y = a \csc(bx + c)$

Trazar la gráfica de $y = \csc(2x + \pi)$.

SOLUCIÓN Como $\csc\theta = 1/\operatorname{sen}\theta$,

$$y = \frac{1}{\operatorname{sen}(2x + \pi)}.$$

Por tanto, ya se puede obtener la gráfica de $y = \csc(2x + \pi)$ determinando la de $y = \text{sen}(2x + \pi)$, para después sacar el recíproco de la ordenada de cada uno de los puntos. Si $a = 1$, $b = 2$ y $c = \pi$, se observa que la amplitud de $y = \text{sen}(2x + \pi)$ es 1, y que el periodo es $2\pi/|b| = 2\pi/2 = \pi$. Para determinar un intervalo que contenga un ciclo, resolvemos las ecuaciones

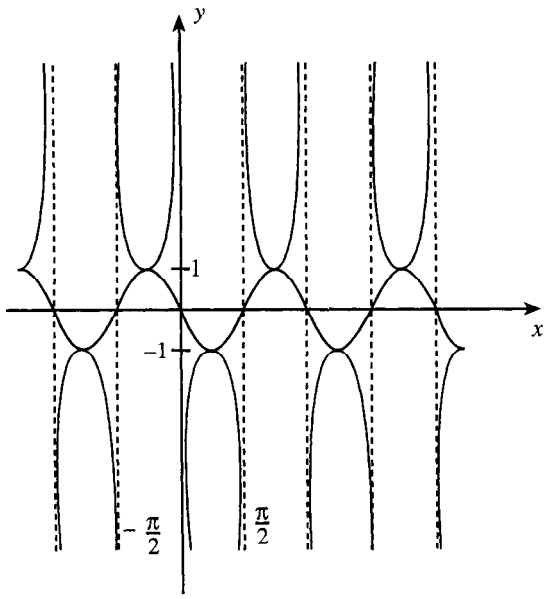
$$2x + \pi = 0 \qquad \text{y} \qquad 2x + \pi = 2\pi,$$

para obtener

$$x = -\frac{\pi}{2} \qquad \text{y} \qquad x = \frac{\pi}{2}.$$

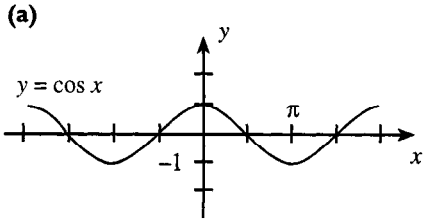
Con ello se llega a la gráfica de la Fig. 6.72. Tomando los recíprocos se obtiene la gráfica de $y = \csc(2x + \pi)$, que se ve en la figura.

FIGURA 6.72 $y = \csc(2x + \pi)$



En el ejemplo que sigue interviene el valor absoluto de una función trigonométrica.

FIGURA 6.73
(a)



EJEMPLO 6 ***Trazo de la gráfica de una ecuación donde interviene un valor absoluto***

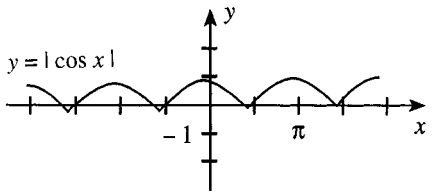
Trazar la gráfica de $y = |\cos x| + 1$.

SOLUCIÓN Esta gráfica se hace en 3 etapas. Primero se traza la gráfica de $y = \cos x$, como en la Fig. 6.73(a).

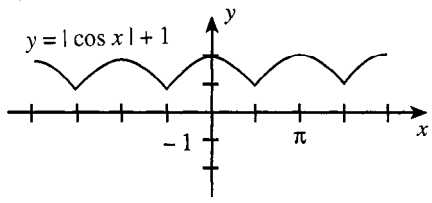
A continuación, se obtiene la gráfica de $y = |\cos x|$ reflejando en el eje,y las ordenadas negativas de la Fig. 6.73(a). Con ello se obtiene la Fig. 6.73(b).

Por último, se traslada verticalmente la gráfica que se obtuvo en (b), una unidad hacia arriba para obtener la Fig. 6.73(c).

(b)



(c)



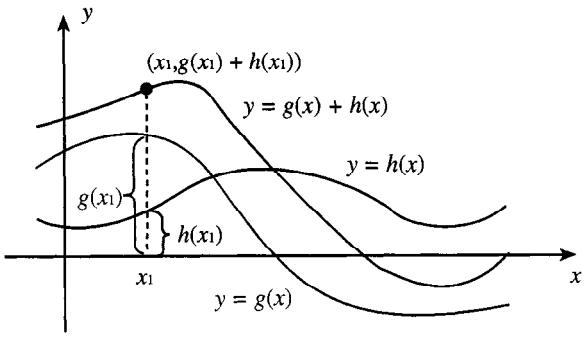
Hemos empleado tres gráficas para mayor claridad. En la práctica, se pueden trazar las gráficas, sucesivamente, en un plano de coordenadas.

Con frecuencia, en las aplicaciones matemáticas interviene una función f que es suma de otras dos o más funciones. Por ejemplo, supóngase que

$$f(x) = g(x) + h(x),$$

donde f, g y h tienen el mismo dominio D. Antes de que se inventaran las graficadoras electrónicas, se empleaba a veces una técnica llamada **suma de ordenadas** para trazar la gráfica de f. El método se ve en la Fig. 6.74, donde para cada x_1, la ordenada $f(x_1)$ de un punto en la gráfica de f es la *suma*, $g(x_1) + h(x_1)$ de ordenadas de puntos de las gráficas de g y f. La gráfica de f se obtiene *sumando gráficamente* un número suficiente de esas ordenadas, con regla y compás.

FIGURA 6.74



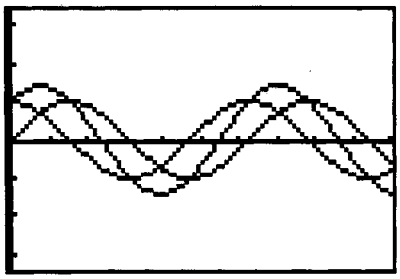
Este método tan tedioso ya no es necesario, porque se pueden trazar fácilmente las gráficas con ayuda de una graficadora. Sin embargo, a veces es útil comparar la gráfica de una suma de funciones con las funciones individuales, como se ve en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 7 ***Trazar la gráfica de una suma de dos funciones trigonométricas***

Trazar la gráfica de $y = \cos x$, $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x + \operatorname{sen} x$ en el mismo plano de coordenadas, para $0 \le x \le 3\pi$.

FIGURA 6.75 (a)

[0, 10] por [–3.33, 3.33]



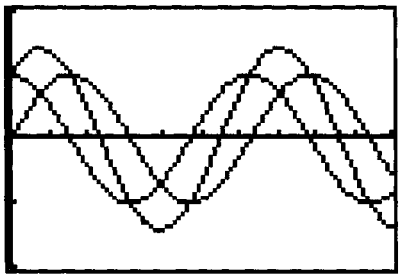
SOLUCIÓN Se hacen las asignaciones siguientes:

$$Y_1 = \cos x, \qquad Y_2 = \operatorname{sen} x \qquad \text{y} \qquad Y_3 = Y_1 + Y_2$$

Como $3\pi \approx 9.4$, y se desea una proporción 1:1, se selecciona el rectángulo visual [0, 10] por [–3.33, 3.33], y se obtiene una figura semejante a la de la Fig. 6.75(a). Puede mejorarse la claridad del diagrama cambiando el rectángulo a [0, 10] por [–2, 2], como en la Fig 75(b).

Nótese que la gráfica de Y_3 corta a la de Y_1 cuando $Y_2 = 0$, y a la gráfica de Y_2 cuando $Y_1 = 0$. Las abscisas en el origen de Y_3 corresponden a las soluciones de $Y_2 = -Y_1$. Por último, se observa que los valores máximo y mínimo de Y_3 se obtienen cuando $Y_1 = Y_2$ (es decir, cuando $x = \pi/4$,

FIGURA 6.75 (b)
[0, 10] por [–2, 2]



$5\pi/4$ y $9\pi/4$). Esos valores son $\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2 = \sqrt{2}$, y $-\sqrt{2}/2 + (-\sqrt{2}/2) = -\sqrt{2}$.

La gráfica de una ecuación de la forma

$$y = f(x) \operatorname{sen}(ax + b), \quad \text{o bien} \quad y = f(x) \cos(ax + b),$$

en las cuales f es una función, y a y b son números reales, se llama **onda senoidal amortiguada**, o bien **onda cosenoidal amortiguada**, respectivamente, y $f(x)$ es el **factor de amortiguamiento**. El ejemplo que sigue muestra un método para graficar esas ecuaciones.

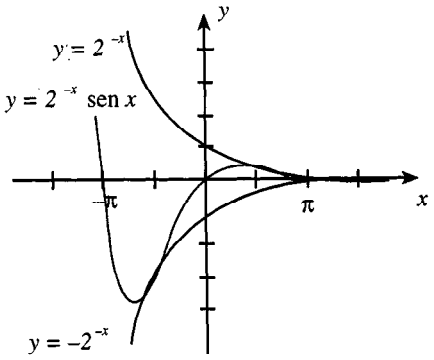
EJEMPLO 8 *Trazar la gráfica de una onda senoidal amortiguada*

Trazar la gráfica de f si $f(x) = 2^{-x}\operatorname{sen} x$.

SOLUCIÓN Aplicando las propiedades de los valores absolutos, se tiene

$$|f(x)| = |2^{-x}||\operatorname{sen} x|.$$

FIGURA 6.76



Como $|\operatorname{sen} x| \le 1$, y $2^{-x} > 0$, entonces $|f(x)| \le 2^{-x}$ y, por consiguiente,

$$-2^{-x} \le f(x) \le 2^{-x}.$$

La última desigualdad implica que la gráfica de f está entre las de las ecuaciones de $y = -2^{-x}$ y $y = 2^{-x}$. La gráfica de f coincidirá con una de esas gráficas si $|\operatorname{sen} x| = 1$; es decir, si $x = (\pi/2) + \pi n$ para un entero n. Como $2^{-x} > 0$, las abscisas en el origen de la gráfica de f se tienen cuando $\operatorname{sen} x = 0$, es decir, en $x = \pi n$. Con esta información se obtiene el diagrama de la Fig. 6.76.

El factor de amortiguamiento del Ejemplo 8 es 2^{-x}. Si se emplean distintos factores de amortiguación se obtienen otras variantes, reducidas o ampliadas, de las ondas senoidales. El análisis de esas gráficas es importante en física e ingeniería.

EJERCICIOS 6.7

Ejercicios 1– 52: Calcule el periodo y trace la gráfica de la ecuación. Indique las asíntotas.

1 $y = 4 \tan x$

2 $y = \frac{1}{4} \tan x$

3 $y = 3 \cot x$

4 $y = \frac{1}{3} \cot x$

5 $y = 2 \csc x$

6 $y = \frac{1}{2} \csc x$

7 $y = 3 \sec x$

8 $y = \frac{1}{4} \sec x$

9 $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

10 $y = \tan\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$

11 $y = \tan 2x$

12 $y = \tan \frac{1}{2}x$

13 $y = \tan \frac{1}{4}x$

14 $y = \tan 4x$

15 $y = 2 \tan\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

16 $y = \frac{1}{3} \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

17 $y = -\frac{1}{4}\tan\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$ **18** $y = -3\tan\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{3}\right)$

19 $y = \cot\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ **20** $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

21 $y = \cot 2x$ **22** $y = \cot \frac{1}{2}x$

23 $y = \cot \frac{1}{3}x$ **24** $y = \cot 3x$

25 $y = 2\cot\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ **26** $y = -\frac{1}{3}\cot(3x - \pi)$

27 $y = -\frac{1}{2}\cot\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$ **28** $y = 4\cot\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$

29 $y = \sec\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ **30** $y = \sec\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$

31 $y = \sec 2x$ **32** $y = \sec \frac{1}{2}x$

33 $y = \sec \frac{1}{3}x$ **34** $y = \sec 3x$

35 $y = 2\sec\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ **36** $y = \frac{1}{2}\sec\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$

37 $y = -\frac{1}{3}\sec\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$ **38** $y = -3\sec\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{3}\right)$

39 $y = \csc\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ **40** $y = \csc\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$

41 $y = \csc 2x$ **42** $y = \csc \frac{1}{2}x$

43 $y = \csc \frac{1}{3}x$ **44** $y = \csc 3x$

45 $y = 2\csc\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ **46** $y = -\frac{1}{2}\csc(2x - \pi)$

47 $y = -\frac{1}{4}\csc\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right)$ **48** $y = 4\csc\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$

49 $y = \tan\frac{\pi}{2}x$ **50** $y = \cot \pi x$

51 $y = \csc 2\pi x$ **52** $y = \sec\frac{\pi}{8}x$

53 Deduzca una ecuación, empleando la función cotangente, que tenga la misma gráfica que $y = \tan x$.

54 Deduzca una ecuación, empleando la función cosecante, que tenga la misma gráfica que $y = \sec x$.

Ejercicios 55 – 60: Use la gráfica de una función trigonométrica como auxiliar para trazar la gráfica de la ecuación dada, sin localizar los puntos.

55 $y = |\operatorname{sen} x|$ **56** $y = |\cos x|$

57 $y = |\operatorname{sen} x| + 2$ **58** $y = |\cos x| - 3$

59 $y = -|\cos x| + 1$ **60** $y = -|\operatorname{sen} x| - 2$

Ejercicios 61 – 66: Trace la gráfica de la ecuación.

61 $y = x + \cos x$ **62** $y = x - \operatorname{sen} x$

63 $y = 2^{-x}\cos x$ **64** $y = e^{x}\operatorname{sen} x$

65 $y = |x|\operatorname{sen} x$ **66** $y = |x|\cos x$

C **Ejercicios 67 y 68: Identifique el factor de amortiguamiento, $f(x)$, de la onda amortiguada. Trace las gráficas de la ecuación y de $y = \pm f(x)$ en el mismo plano de coordenadas para $-2\pi \le x \le 2\pi$.**

67 $y = e^{-x/4}\operatorname{sen} 4x$ **68** $y = 3^{-x/5}\cos 2x$

C **Ejercicios 69 y 70: Grafique la función f en $[-\pi, \pi]$, y estime los puntos máximo y mínimo.**

69 $f(x) = \cos 2x + 2\operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen} x$

70 $f(x) = \tan\frac{1}{4}x - 2\operatorname{sen} 2x$

C **Ejercicios 71 y 72: Con una gráfica estime el mayor intervalo, $[a, b]$, con $a < 0$ y $b > 0$, para el cual f sea biunívoca.**

71 $f(x) = \operatorname{sen}(2x + 2)\cos(1.5x - 1)$

72 $f(x) = 1.5\cos(\frac{1}{2}x - 0.3) + \operatorname{sen}(1.5x + 0.5)$

C **Ejercicios 73 y 74: Con una graficadora resuelva la desigualdad en el intervalo $[-\pi, \pi]$.**

73 $\cos(2x - 1) + \operatorname{sen} 3x \ge \operatorname{sen}\frac{1}{3}x + \cos x$

74 $\frac{1}{2}\cos 2x + 2\cos(x - 2) < 2\cos(1.5x + 1) + \operatorname{sen}(x - 1)$

75 ***El campo magnético terrestre*** La intensidad del campo magnético terrestre varía con la profundidad bajo la superficie. La intensidad a la profundidad z y el tiempo t se puede aproximar, en ocasiones, con la onda senoidal amortiguada $S = A_0e^{-\alpha z}\operatorname{sen}(kt - \alpha z)$, donde A_0, α y k son constantes.

(a) ¿Cuál es el factor de amortiguación?

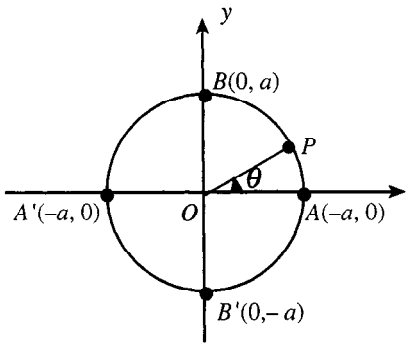
(b) Calcule el desplazamiento de fase a la profundidad z_0.

(c) ¿A qué profundidad la amplitud de la onda es la mitad del valor de la intensidad en la superficie?

6.8 MOVIMIENTO ARMÓNICO

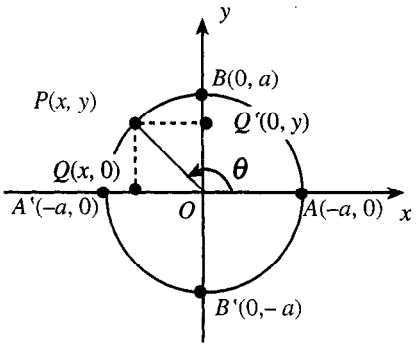
Las funciones trigonométricas son útiles para estudiar un movimiento vibratorio u oscilatorio, como puede ser el de una partícula de una cuerda de guitarra en vibración, o de un resorte que se ha comprimido o estirado, para luego soltarlo y dejarlo oscilando de un lado a otro. El tipo fundamental de desplazamiento de partículas en esos ejemplos se llama *movimiento armónico*.

FIGURA 6.77



Para ayudar en la descripción del movimiento armónico, imagínese un punto P que se mueve a velocidad constante en la circunferencia de radio a (con el sentido invariable), que aparece en la Fig. 6.77. Supóngase que la posición inicial de P es $A(a, 0)$, y que θ es el ángulo descrito por el segmento OP luego de haber transcurrido t unidades de tiempo. La *velocidad angular* ω de OP es la rapidez a la cual cambia el valor de θ por unidad de tiempo (Ejemplo 6 de la Secc. 6.1). Decir que P se mueve en la circunferencia con una rapidez invariable equivale a decir que la velocidad angular ω es constante. Si así es, entonces $\theta = \omega t$. Por ejemplo, si $\omega = \pi/6$ rad/s, entonces $\theta = (\pi/6)t$. En este caso, cuando $t = 1$ s, $\theta = (\pi/6)(1) = \pi/6$, y P está a la tercera parte de la distancia (circular) de $A(a, 0)$ a $B(0, a)$. Cuando $t = 2$ s, $\theta = (\pi/6)(2) = \pi/3$, y P se encuentra a dos tercios de la trayectoria de A a B. Cuando $t = 6$ s, $\theta = (\pi/6)(6) = \pi$, y P se encuentra en $A'(-a, 0)$, etc.

FIGURA 6.78



Si las coordenadas de P son (x, y), como se indica en la Fig. 6.78, entonces $\cos\theta = x/a$ y $\operatorname{sen}\theta = y/a$ y, por consiguiente,

$$x = a\cos\theta, \qquad y = a\operatorname{sen}\theta.$$

Se aplica el hecho de que $\theta = \omega t$, y se tiene así que

$$x = a\cos\omega t, \quad y = a\operatorname{sen}\omega t.$$

Las dos últimas ecuaciones especifican la posición (x, y) de P en cualquier momento, t.

A continuación se considera el punto $Q(x, 0)$, es decir, la **proyección de P sobre el eje x**. Ese punto se muestra en la Fig. 6.78. La posición de Q está expresada por $x = a\cos\omega t$. A medida que P describe varias revoluciones, el punto Q oscila de un lado a otro, entre $A(a, 0)$ y $A'(-a, 0)$. Igualmente, el punto $Q'(0, y)$ es la **proyección de P sobre el eje y**, y su posición está indicada por $y = a\operatorname{sen}\omega t$. Al moverse P en la circunferencia, Q' oscila entre $B'(0, -a)$ y $B(0, a)$. Los movimientos de Q y Q' son del tipo que se describe en la siguiente definición.

Definición de movimiento armónico simple

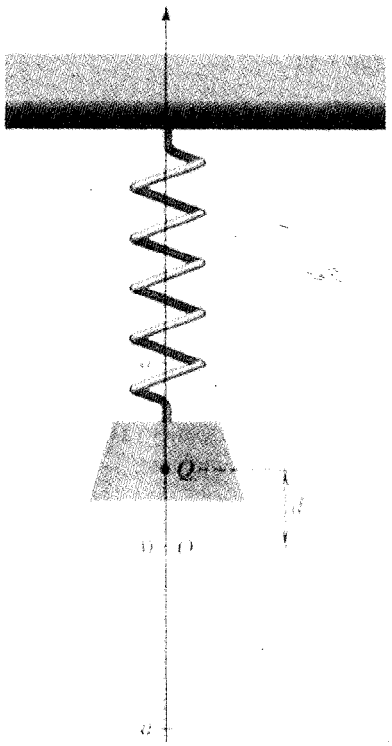
Un punto que se mueve en un eje de coordenadas tiene **movimiento armónico simple** si su distancia d desde el origen, cuando el tiempo es t, está determinada por

$$d = a\cos\omega t, \text{ o bien por } d = a\operatorname{sen}\omega t$$

para números reales, a y ω, distintos de cero.

En la definición anterior, la **amplitud** del movimiento es el desplazamiento máximo $|a|$ del punto con respecto al origen. El **periodo** es el tiempo $2\pi/\omega$ que requiere una oscilación completa. La **frecuencia** $\omega/2\pi$ es el número de oscilaciones por unidad de tiempo.

FIGURA 6.79



Se puede hacer una interpretación física del movimiento armónico simple si se imagina un resorte con un contrapeso fijo que oscila verticalmente a lo largo de un eje de coordenadas, como se ve en la Fig. 6.79. El número d representa la coordenada de un punto fijo Q en el contrapeso; se supone que la amplitud a del movimiento es constante. En este caso no hay fuerza de fricción que retarde el movimiento. Si hay fricción, entonces la amplitud disminuye en función del tiempo, y se dice que el movimiento es *amortiguado*.

EJEMPLO ***Descripción del movimiento armónico***

Supóngase que la oscilación del contrapeso mostrado en la Fig. 6.79 está expresada por

$$d = 10\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right),$$

donde t está en segundos y d en centímetros. Analice el movimiento del contrapeso.

SOLUCIÓN Por definición, el movimiento es armónico simple, con amplitud $a = 10$ cm. Como $\omega = \pi/6$, se obtiene lo siguiente:

$$\text{periodo} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi/6} = 12$$

Así, en 12 segundos el contrapeso realiza una oscilación completa. También se ve que

$$\text{frecuencia} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\pi/6}{2\pi} = \frac{1}{12},$$

lo cual quiere decir que cada segundo se efectúa una doceava parte de una oscilación. La tabla siguiente muestra la posición de Q en distintos momentos.

t	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{\pi}{6}t$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
d	10	$5\sqrt{3} \approx 8.7$	5	0	-5	$-5\sqrt{3} \approx -8.7$	-10

La posición inicial de Q es a 10 cm sobre el origen O. Se mueve hacia abajo ganando velocidad hasta que llega a O. Nótese que Q recorre, aproximadamente, $10 - 8.7 = 1.3$ cm durante el primer segundo, $8.7 - 5 = 3.7$ cm durante el siguiente segundo, y $5 - 0 = 5$ cm durante el tercer segundo. A continuación se desacelera hasta llegar a un punto a 10 cm abajo de O, al haber transcurrido 6 s. Luego, se invierte el sentido del movimiento y el contrapeso se mueve hacia arriba, ganando velocidad hasta que llega al punto O. Una vez alcanzado ese punto se

desacelera hasta regresar a su posición original al haber transcurrido 12 s. Entonces se invierte de nuevo el sentido del movimiento, y se repite lo mismo indefinidamente.

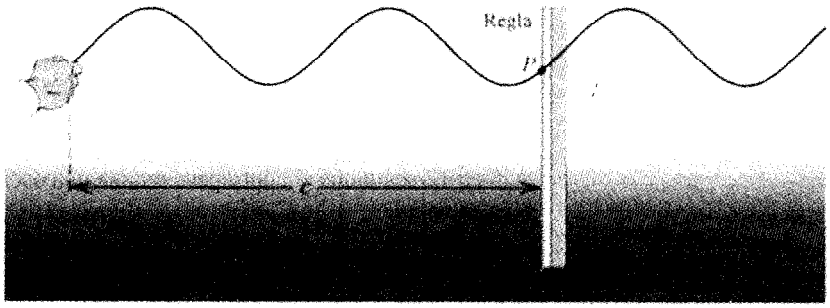
El ejemplo anterior es característico del movimiento armónico simple. Si el ángulo inicial AOP en la Fig. 6.78, es ϕ cuando $t = 0$, entonces la posición (x, y) de P, en la circunferencia, es

$$x = a \cos(\omega t + \phi), \qquad y = a \operatorname{sen}(\omega t + \phi).$$

Los puntos que oscilan en una recta coordenada de acuerdo con alguna de las fórmulas anteriores, se dice que están en movimiento armónico simple.

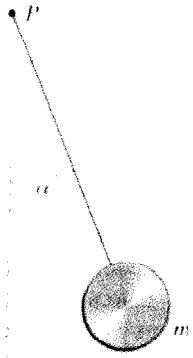
Ocurre también dicho movimiento en muchos fenómenos ondulatorios, como el de las olas en el agua, ondas sonoras, ondas de radio, ondas luminosas y ondas elásticas que se presentan en cuerpos en vibración. Se estudian, como ejemplo específico, las ondas formadas al sujetar un extremo de una cuerda larga, como en la Fig. 6.80, y se la hace ondular al elevar y bajar la mano en movimiento armónico simple. Se ve que las ondas se trasladan a lo largo de la cuerda, alejándose de la mano. Se puede usar una regla, colocada verticalmente a una distancia fija c de un extremo, como se ve en la figura, para estudiar el movimiento hacia arriba y hacia abajo de una partícula específica P en la cuerda. Si se escoge un eje vertical adecuado, puede demostrarse que P se encuentra en movimiento armónico simple, como si estuviera sujeto a un resorte. Con las ondas en el agua, en un gran estanque, se tiene un movimiento semejante.

FIGURA 6.80



La definición del movimiento armónico simple se generaliza, por lo general, para abarcar casos en los que d sea *cualquier* cantidad física o matemática, no necesariamente una distancia. En el siguiente ejemplo, d es un ángulo.

FIGURA 6.81



Según la historia, el primer tipo de movimiento armónico que se investigó científicamente fue el de los péndulos. En la Fig. 6.81 se ilustra un *péndulo simple*, formado por una lenteja de masa m fija a un extremo de una cuerda, y el otro extremo de ésta unido a un punto fijo P. En el caso ideal, se supone que la cuerda no tiene peso, que no hay resistencia del aire, y que la única fuerza que actúa sobre la lenteja es la de gravedad. Si la lenteja se desplaza lateralmente y se suelta, el péndulo oscila de uno a otro lado, en un plano vertical. Si α representa al *desplazamiento angular* en el instante t (véase la Fig. 6.81), y la lenteja se mueve describiendo un ángulo pequeño, por ejemplo $|\alpha| < 5°$), entonces se puede demostrar, aplicando leyes físicas, que

$$\alpha = \beta \cos(\omega t + \alpha_0),$$

donde α_0 es el desplazamiento inicial, ω la frecuencia de oscilación del ángulo α, y β la amplitud (angular) de la oscilación. Esto quiere decir que el *ángulo* α tiene movimiento armónico simple, y por ello se dice que se tiene un movimiento *angular* armónico simple.

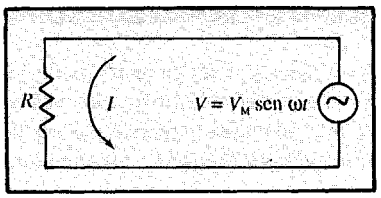
Como un último ejemplo, en los circuitos eléctricos pueden variar armónicamente una tensión aplicada *alterna*, así como la corriente. Por ejemplo, la tensión eléctrica V (medida en volts, V) cuando el tiempo es t, es

$$V = V_M \operatorname{sen} \omega t,$$

en la cual V_M es la tensión máxima. Si se aplica un voltaje de este tipo a un circuito que sólo tenga una resistencia de R ohms (Ω), entonces, de acuerdo con la ley de Ohm, la corriente I (en amperes, A) en el instante t es

$$I = \frac{V}{R} = \frac{V_M \operatorname{sen} \omega t}{R} = I_M \operatorname{sen} \omega t,$$

FIGURA 6.82



donde $I_M = V_M/R$ es la corriente máxima. En la Fig. 6.82 se muestra un diagrama eléctrico de este circuito.

La corriente máxima I_M se alcanza al mismo tiempo que la tensión máxima V_M. En otros casos, esos valores máximos se pueden presentar en diferentes momentos, y se dice entonces que hay una **diferencia de fase** entre V e I. Por ejemplo, si $V = V_M \operatorname{sen} \omega t$, se podría tener

$$\text{(a) } I = I_M \operatorname{sen}(\omega t - \phi) \quad \text{o bien} \quad \text{(b) } I = I_M \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

para algún $\phi > 0$. En el caso (a), se dice que la corriente **está atrasada** con respecto a la tensión, una cantidad igual a ϕ/ω, y se puede obtener la gráfica de I trasladando la de $I = I_M \operatorname{sen} \omega t$ una distancia ϕ/ω hacia la *derecha*. En el caso (b), se desplaza la gráfica hacia la *izquierda*, y se dice que la corriente **está adelantada** con respecto a la tensión, una cantidad ϕ/ω. El caso es análogo al que consideró al estudiar los desplazamientos de fase, o desfasamientos, en la Secc. 6.6.

En libros de física e ingeniería se pueden encontrar otros ejemplos de casos físicos en donde interviene el movimiento armónico simple.

EJERCICIOS 6.8

1 Una rueda de 40 cm de diámetro gira en su eje a 100 revoluciones por minuto (rpm). Si se introduce un sistema coordenado como el de la Fig. 6.78 de tal modo que P sea un punto en el borde de la rueda, calcule

(a) la velocidad angular de OP

(b) la posición (x, y) de P, a los t minutos.

2 Una rueda de 2 pies de radio gira sobre su eje, y la velocidad angular de un rayo que va del centro de la rueda a un punto P, en el borde, es $5\pi/6$ radianes por segundo.

(a) ¿Cuántas revoluciones efectúa la rueda en 10 minutos?

(b) Si se introduce un sistema de coordenadas como en la Fig. 6.78, determine la posición (x, y) de P, a los t segundos.

Ejemplos 3 – 6: La fórmula especifica la posición de un punto P que se mueve armónicamente sobre un eje vertical; t está en segundos y d en centímetros. Determine la amplitud, periodo y frecuencia, y represente el movimiento del punto durante una oscilación completa, partiendo de $t = 0$.

$$d = 10 \operatorname{sen} 6\pi t \qquad d = \frac{1}{3} \cos \frac{\pi}{4} t$$

5 $d = 4 \cos \frac{3\pi}{2} t$ **6** $d = 6 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} t$

7 Un punto P en movimiento armónico simple tiene un periodo de 3 s y 5 cm de amplitud. Exprese el movimiento de P mediante una ecuación de la forma $d = a \cos \omega t$.

8 Un punto P en movimiento armónico simple tiene una frecuencia de $\frac{1}{2}$ oscilación por minuto, y una amplitud de 4 pies. Exprese el movimiento de P con una ecuación de la forma $d = a \operatorname{sen} \omega t$.

Ejercicios 9 y 10: Las ecuaciones representan la tensión V y la corriente alterna I en un circuito eléctrico en el instante t. Trace las gráficas de ambas ecuaciones en el mismo plano coordenado, y determine el atraso o adelanto.

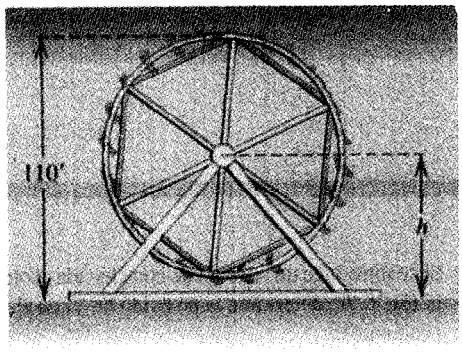
9 $V = 220 \operatorname{sen} 360\pi t$; $I = 20 \operatorname{sen} (360\pi t - \frac{1}{4}\pi)$

10 $V = 110 \operatorname{sen} 120\pi t$; $I = 15 \operatorname{sen} (120\pi t + \frac{1}{3}\pi)$

11 ***Giro de una rueda de la fortuna*** Una rueda de la fortuna grande tiene 100 pies de diámetro, y se eleva a 110 pies sobre el piso, como se ve en la figura. Cada revolución de la rueda dura 30 segundos.

(a) Calcule la velocidad angular de la rueda.

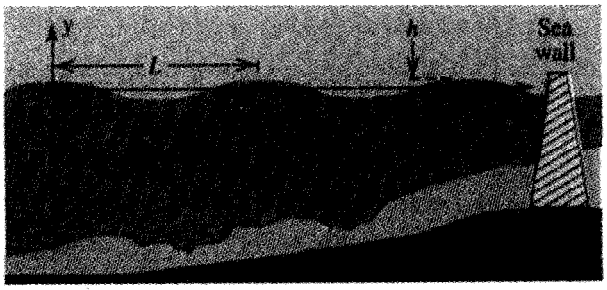
(b) Exprese la altura h, sobre el piso, de un pasajero, en función del tiempo t, en segundos, si $t = 0$ corresponde al momento en el cual el pasajero se a cuentra a la altura mínima.



12 ***Tsunamis*** Un tsunami es una onda de marea provocada por un sismo submarino. Estas olas pueden tener más de 100 pies de altura y viajan a grandes velocidades. A veces se representan esas ondas mediante fórmulas trigonométricas de la forma $y = a \cos bt$, que se emplean para estimar la eficacia de los rompeolas. Suponga que una onda tiene una altura $h = 50$ pies; un periodo de 30 min y que viaja a 180 pies por segundo.

(a) Sea (x, y) un punto de la onda que se representa en la figura. Exprese y como función de t si $y = 25$ pies cuando $t = 0$.

(b) La longitud de onda L es la distancia entre dos crestas sucesivas de la ola. Calcular la L aproximada, en pies.



13 ***Algunos tsunamis en Hawaii*** Para un intervalo de 45 min, los tsunamis cerca de Hawaii, provocados por el sismo de 1960 en Chile, se pudieron representar por la ecuación $y = 8 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} t$, donde y está en pies y t en minutos.

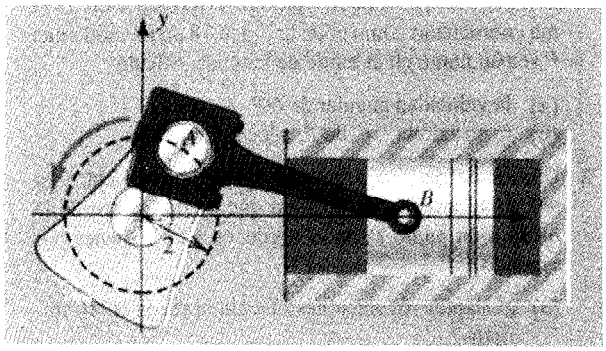
(a) Calcule la amplitud y el periodo de las olas.

(b) Si la distancia de una cresta de onda a la siguiente era de 21 km, ¿cuál era la velocidad de la onda? Las olas de marea pueden tener velocidades de más de 700 km/h en aguas profundas.

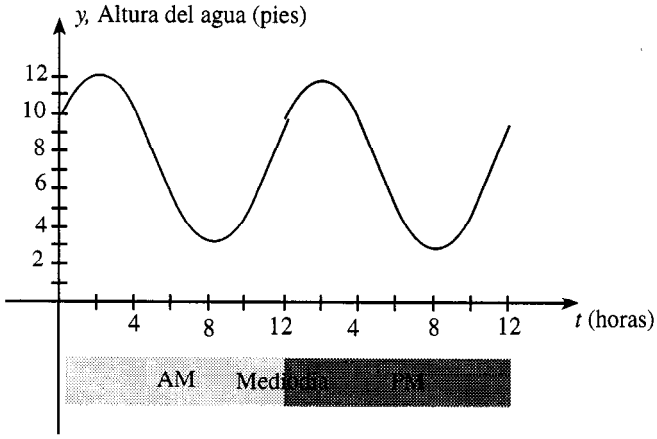
14 ***Cálculos para cigüeñales*** Un pistón está fijo a un cigüeñal, como se ve en la figura. La biela AB tiene una longitud de 6 pulg, y el radio del círculo que describe el cigüeñal es de 2 pulg.

(a) Si el cigüeñal gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj dos veces cada segundo, calcule las coordenadas del punto A al haber transcurrido t segundos después de que A tenía las coordenadas $(2, 0)$.

(b) Calcule las coordenadas del punto B cuando el tiempo es t.



15 ***Puerto de Boston*** La gráfica de la figura muestra el ascenso y descenso del nivel del agua en el puerto de Boston durante determinado periodo de 24 h. Calcule, aproximadamente, el nivel de agua, y, mediante una ecuación de la forma $y = a\,\text{sen}(bt + c) + d$, donde $t = 0$ corresponde a la medianoche.



EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 6

1 Calcule la medida, en radianes, que corresponde a cada una de las siguientes medidas en grados: 330°, 405°, −150°, 240°, 36°.

2 Determine la medida, en grados, que corresponde a cada una de las siguientes medidas en radianes: $\frac{9\pi}{2}$, $-\frac{2\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{4}$, 5π, $\frac{\pi}{5}$.

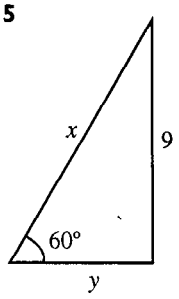
3 Un ángulo central θ está subtendido por un arco de 20 cm de longitud en una circunferencia de 2 m de radio.

(a) Calcule la dimensión de θ en radianes.
(b) Calcule el área del sector determinado por θ.

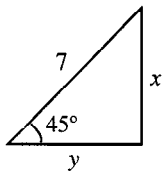
4 **(a)** Calcule la longitud de arco que subtiende un ángulo de 70° en un círculo de 15 cm de diámetro.
(b) Calcule el área del sector en el inciso (a).

Ejercicios 5 y 6: Calcular los valores exactos de x y y.

5



6



Ejercicios 7 y 8: Emplee las identidades fundamentales para escribir la primera expresión en términos de la segunda, para cualquier ángulo agudo θ.

7 $\tan\theta$, $\sec\theta$ **8** $\cot\theta$, $\csc\theta$

9 Si θ es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, y si el cateto adyacente y la hipotenusa tienen longitudes respectivas de 4 y 7, calcular los valores de las funciones trigonométricas de θ.

10 Calcule los valores exactos de las siguientes funciones trigonométricas si

(a) $\text{sen}\,t = -\frac{4}{5}$ y $\cos t = \frac{3}{5}$
(b) $\csc t = \frac{\sqrt{13}}{2}$ y $\cot t = -\frac{3}{2}$

11 Determine el cuadrante que contiene a θ si θ está en posición normal.

(a) $\sec\theta < 0$ y $\text{sen}\,\theta > 0$
(b) $\cot\theta > 0$ y $\csc\theta < 0$
(c) $\cos\theta > 0$ y $\tan\theta < 0$

12 **(a)** Calcule el ángulo de referencia para cada medida en radianes:
$\frac{5\pi}{4}$, $-\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{9\pi}{8}$.
(b) Determine el ángulo de referencia para cada medida en grados:
245°, 137°, 892°.

13 Sin emplear tablas ni calculadora, calcule los valores exactos de las funciones trigonométricas que corresponden a cada número real, cuando sea posible.

(a) $\frac{9\pi}{2}$ (b) $-\frac{5\pi}{4}$ (c) 0 (d) $\frac{11\pi}{6}$

14 Calcule el valor exacto:

(a) cos 225° (b) tan 150° (c) $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

d) $\sec\frac{4\pi}{3}$ (e) $\cot\frac{7\pi}{4}$ (f) csc 300°

15 Cuando sea posible, encuentre los valores exactos de las funciones trigonométricas de θ, si éste se encuentra en posición normal y satisface la condición que se menciona.

(a) El punto (30, – 40) está en el lado terminal de θ.
(b) El lado terminal de θ está en el cuadrante II y es paralelo a la recta $2x + 3y + 6 = 0$.
(c) El lado terminal de θ se encuentra en el eje negativo de y.

16 Si sen θ = – 0.7604, y sec θ es positiva, aproxime θ a un décimo de grado para $0° \le \theta < 360°$.

Ejercicios 17–20: Dadas las partes indicadas del triángulo *ABC*, y siendo γ = 90°, calcular aproximadamente las partes restantes.

17 $\beta = 60°$, $b = 40$ **18** $\alpha = 54°40'$, $b = 220$

19 $a = 62$, $b = 25$ **20** $a = 9.0$, $c = 41$

Ejercicios 21–30: Compruebe la identidad transformando el miembro izquierdo para obtener el miembro derecho.

21 $\operatorname{sen}\theta(\csc\theta - \operatorname{sen}\theta) = \cos^2\theta$

22 $\cos\theta(\tan\theta + \cot\theta) = \csc\theta$

23 $(\cos^2\theta - 1)(\tan^2\theta + 1) = 1 - \sec^2\theta$

24 $\dfrac{\sec\theta - \cos\theta}{\tan\theta} = \dfrac{\tan\theta}{\sec\theta}$ **25** $\dfrac{1 + \tan^2\theta}{\tan^2\theta} = \csc^2\theta$

26 $\dfrac{\sec\theta + \csc\theta}{\sec\theta - \csc\theta} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta}$

27 $\dfrac{\cot\theta - 1}{1 - \tan\theta} = \cot\theta$ **28** $\dfrac{1 + \sec\theta}{\tan\theta + \operatorname{sen}\theta} = \csc\theta$

29 $\dfrac{\tan(-\theta) + \cot(-\theta)}{\tan\theta} = -\csc^2\theta$

30 $-\dfrac{1}{\csc(-\theta)} - \dfrac{\cot(-\theta)}{\sec(-\theta)} = \csc\theta$

Ejercicios 31–38: Calcule la amplitud y el periodo, y trace la gráfica de la ecuación.

31 $y = 5\cos x$ **32** $y = \frac{2}{3}\operatorname{sen} x$

33 $y = \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x$ **34** $y = -\frac{1}{2}\cos\frac{1}{3}x$

35 $y = -3\cos\frac{1}{2}x$ **36** $y = 4\operatorname{sen} 2x$

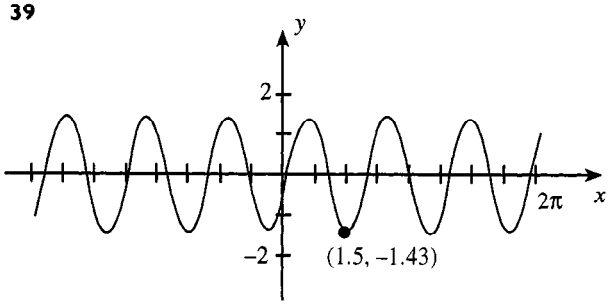
37 $y = 2\operatorname{sen}\pi x$ **38** $y = 4\cos\frac{\pi}{2}x - 2$

Ejercicios 39 – 42: La gráfica de la ecuación aparece en la figura.

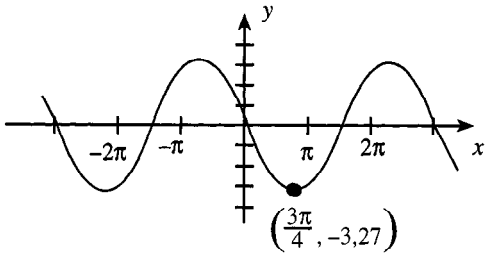
(a) Calcule la amplitud y el periodo.

(b) Exprese la ecuación en forma $y = a$ sen bx, o bien $y = a$ cos bx.

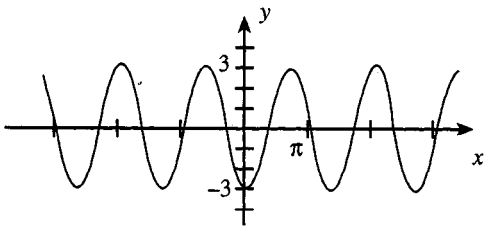
39



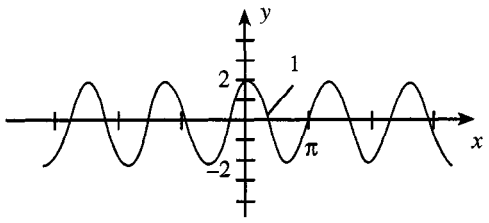
40



41



42



Ejercicios 43 – 54: Trace la gráfica de la ecuación.

43 $y = 2 \operatorname{sen}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$

44 $y = -3 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$

45 $y = -4 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

46 $y = 5 \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

47 $y = 2 \tan\left(\frac{1}{2}x - \pi\right)$

48 $y = -3 \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

49 $y = -4 \cot\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$

50 $y = 2 \cot\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$

51 $y = \sec\left(\frac{1}{2}x + \pi\right)$

52 $y = \sec\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$

53 $y = \csc\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

54 $y = \csc\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$

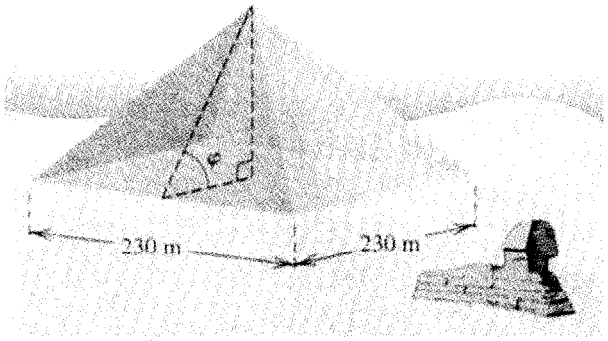
55 ***Hélice de un aeroplano*** La longitud de aspa de la mayor hélice de aeroplano construida alguna vez, fue de 22 pies 7.5 pulg. El avión estaba impulsado por 4 motores que la hacían girar a 545 rpm.

(a) ¿Cuál era la velocidad angular de la hélice, en radianes por segundo?

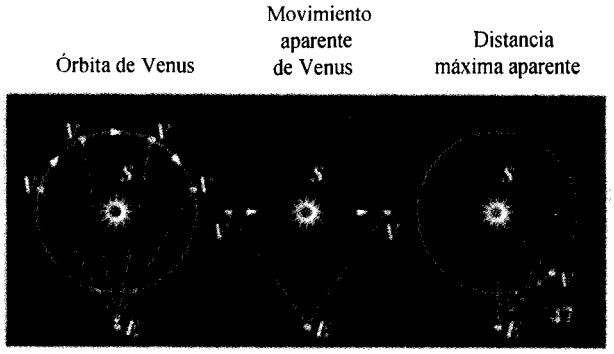
(b) Aproximadamente, ¿con qué velocidad, en mi/h, describía una circunferencia la punta del aspa de esa hélice?

56 ***La torre Eiffel*** Cuando se ve la cúspide de la torre Eiffel a una distancia de 200 pies del centro de la base, el ángulo de elevación es 79.2°. Calcule la altura de la torre.

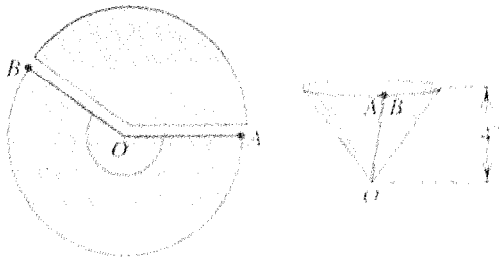
57 ***La Gran Pirámide*** La Gran Pirámide de Egipto tiene 147 m de altura; su base es cuadrada y mide 230 m por lado (véase la figura). Calcule, con aproximación al grado más cercano, el ángulo ϕ que se forma cuando un observador está de pie en el punto medio de uno de los lados y contempla el vértice de la pirámide.



58 ***Venus*** Cuando se le contempla desde la Tierra durante un intervalo de tiempo, parece que el planeta Venus se mueve de un lado a otro a lo largo de un segmento de recta en el cual el Sol está en el punto medio (véase la figura). A la distancia máxima aparente del Sol, el ángulo SEV es, aproximadamente, de 47°. Calcule la distancia de Venus al Sol, si ES = 92 900 000 mi.

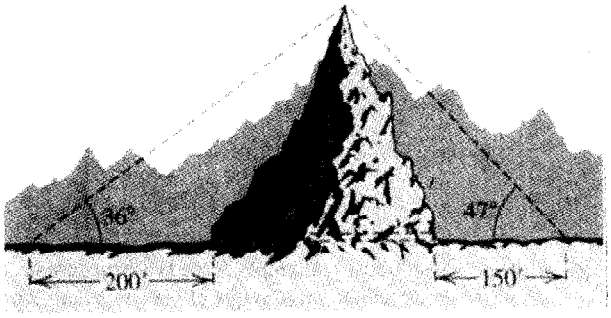


59 ***Fabricación de un vaso cónico*** Un vaso cónico de papel se fabrica quitando un sector a un círculo de 5 pulg de radio, y pegando la orilla OA con la orilla OB (véase la figura). Calcule el ángulo AOB para que el vaso tenga una profundidad de 4 pulg.



60 ***Longitud de un túnel*** Se desea abrir el túnel para una nueva carretera, atravesando una montaña de 260 pies de altura. A una distancia de 200 pies de la base de la montaña, el ángulo de elevación es de 36° (véase la

figura). Desde una distancia de 150 pies, al otro lado, el ángulo de elevación es 47°. Calcule la longitud del túnel aproximando al pie más cercano.



61 ***Altura de un rascacielos*** Cuando se ve determinado rascacielos desde la azotea de un edificio de 50 pies de altura, el ángulo de elevación es 59° (véase la figura). Cuando se le ve desde el nivel del suelo, junto al edificio más pequeño, el ángulo de elevación es 62°.

(a) ¿Qué distancia aproximada hay entre los dos edificios?

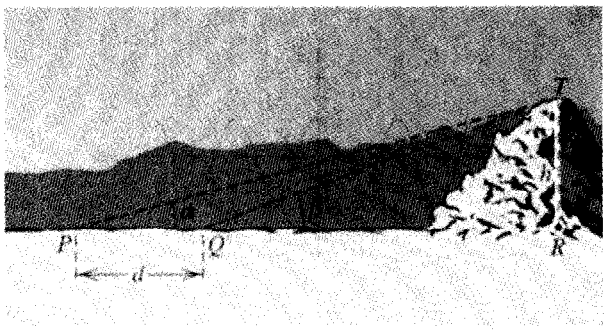
(b) Calcule aproximadamente la altura del rascacielos redondeando al décimo de pie.

62 ***Altura de una montaña*** Cuando se ve la cumbre de una montaña desde el punto P que se indica en la figura, el ángulo de elevación es α. Desde un punto Q, que está d millas más cerca de la montaña, el ángulo de elevación se incrementa a β.

(a) Demuestre que la altura h de la montaña es

$$h = \frac{d}{\cot \alpha - \cot \beta}.$$

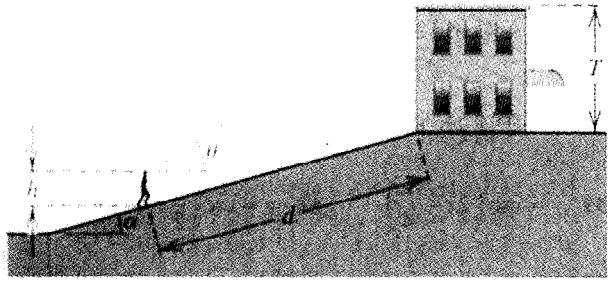
(b) Calcule la altura aproximada de la montaña si d = 2 mi, α = 15° y β = 20°.



63 ***Altura de un edificio*** Un observador de altura h está de pie en un terreno inclinado a una distancia d de la base de la construcción, cuya altura es T, como se ve en la figura. El ángulo de elevación desde el observador hasta la parte alta del edificio es θ, y el plano inclinado forma un ángulo α con la horizontal.

(a) Exprese T en términos de h, d, α y θ.

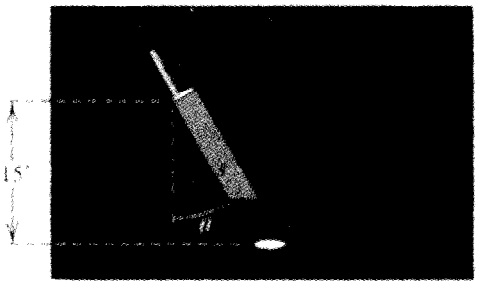
(b) Estime la altura de la construcción si h = 6 pies, d = 50 pies, α = 15° y θ = 31.4°.



64 ***Iluminación*** Un proyector de luz de 5000 bujías de intensidad está 15 pies arriba de un escenario. Si se hace girar ese reflector un ángulo θ, la iluminancia E, en pie-bujías, de la zona iluminada del escenario es

$$E = \frac{5\,000 \cos \theta}{s^2},$$

donde s es la distancia, en pies, que debe recorrer la luz.



(a) Calcule la iluminancia (o iluminación) si el reflector se hace girar un ángulo de 30°.

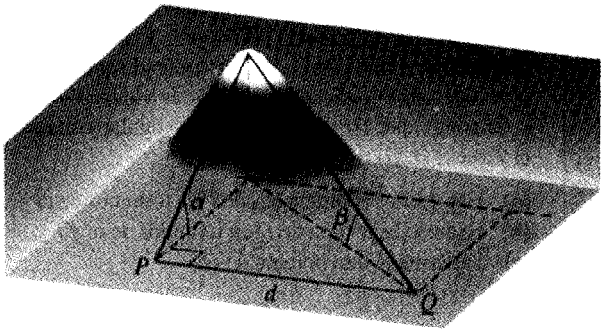
(b) La iluminancia máxima se tiene cuando $\theta = 0°$. ¿Para qué valor de θ tiene la iluminancia la mitad de su valor máximo?

65 ***Altura de una montaña*** Si se contempla la cima de una montaña desde un punto P al sur de ella, el ángulo de elevación es α (véase la figura). Si se le ve desde un punto Q que está d millas al este de P, el ángulo de elevación es β.

(a) Demuestre que la altura h de la montaña es

$$h = \frac{d \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta}}.$$

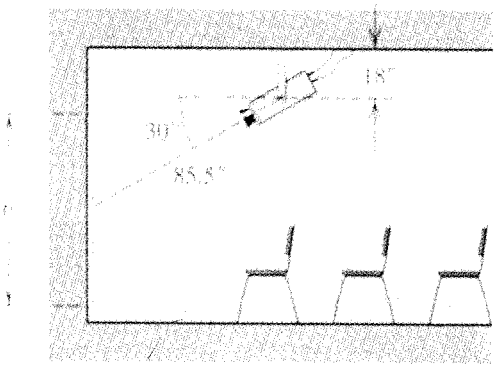
(b) Si $\alpha = 30°$, $\beta = 20°$ y $d = 10$ mi, aproxime h al centésimo de milla.



66 ***Montaje de un sistema de proyección*** El fabricante de un sistema computadorizado de proyección recomienda montar una unidad en el techo, como se ve en la figura. La distancia del extremo de la base de montaje hasta el centro de la pantalla es 85.5 pulg, y el ángulo de depresión es 30°.

(a) Si no se toma en cuenta el espesor de la pantalla, ¿a qué distancia de la pared debe colocarse el soporte?

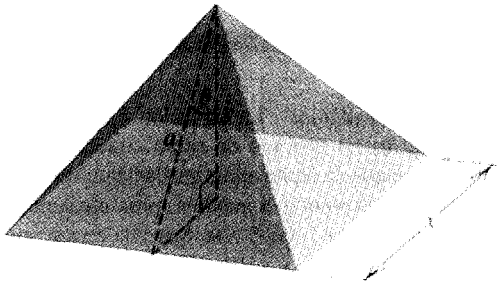
(b) Si el soporte tiene 18 pulg de longitud y la pantalla tiene 6 pies de altura, determine la distancia del techo al borde superior de la pantalla.



67 ***Relaciones de una pirámide*** Una pirámide tiene una base cuadrada y caras triangulares congruentes. Sea θ el ángulo que forma la altura a de una cara triangular con la altura y de la pirámide, y sea x la longitud de un lado (véase la figura).

(a) Exprese el área total, S, de la superficie de las cuatro caras en términos de a y θ.

(b) El volumen V de la pirámide es igual a un tercio del área de la base multiplicada por la altura. Exprese V en términos de a y θ.

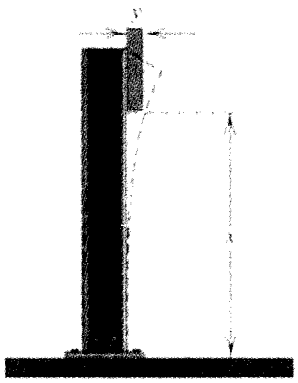


68 ***Levantamiento de un monte*** Un topógrafo, con su teodolito visa el borde B de un monte, como se ve en la primera figura, que no está a escala. Debido a la curvatura de la Tierra, la altura real h del monte es mayor que la que mide el topógrafo. En la segunda figura se ve el corte transversal de la Tierra con las dimensiones.

(a) Si s es la longitud del arco PQ, y R es la distancia de P al centro C de la Tierra, exprese h en términos de R y s.

(b) Si $R = 4\,000$ mi y $s = 50$ mi, estime la altura del monte en pies.

69 ***Efectos de un sismo*** Para simular los efectos de un sismo sobre una estructura, se debe escoger una forma para el desplazamiento inicial de las columnas de un edificio. Cuando una columna tiene L pies de longitud, y el desplazamiento máximo es a pies, los ingenieros usan la fórmula $y = a - a\cos(\frac{1}{2}\pi x/L)$ para estimar el desplazamiento y (véase la figura). Si $a = 1$ y $L = 10$, trace la gráfica de la ecuación para $0 \le x \le 10$.



70 ***Ritmos circadianos*** La variación de la temperatura corporal es un ejemplo de ritmo circadiano, proceso biológico que se repite aproximadamente cada 24 h. La temperatura corporal es máxima aproximadamente a las 5 P.M. y mínima a las 5 A.M. Sea y la temperatura del organismo (en °F) y sea $t = 0$ la medianoche. Si las temperaturas mínima y máxima del organismo son 98.3° y 98.9°, respectivamente, deduzca una ecuación de la forma $y = 98.6 + a \operatorname{sen}(bt + c)$ que se ajuste a esta información.

71 ***Variación de temperatura en Ottawa*** La variación anual de temperatura T (en °C) en Ottawa, Canadá, se puede calcular aproximadamente con

$$T(t) = 15.8 \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{6}(t - 3)\right] + 5,$$

donde t es el tiempo, en meses, y $t = 0$ corresponde al 1 de enero.

(a) Trace la gráfica de T, para $0 \le t \le 12$.
(b) Calcule la temperatura máxima en el año, y la fecha en la que se presenta.

72 ***Demanda de agua*** Un depósito suministra agua a una comunidad. Durante los meses de verano, la demanda $D(t)$ de agua, en pies^3/día, es

$$D(t) = 2000 \operatorname{sen}\frac{\pi}{90} t + 4000,$$

en la cual t es el tiempo, en días, y $t = 0$ corresponde al inicio del verano.

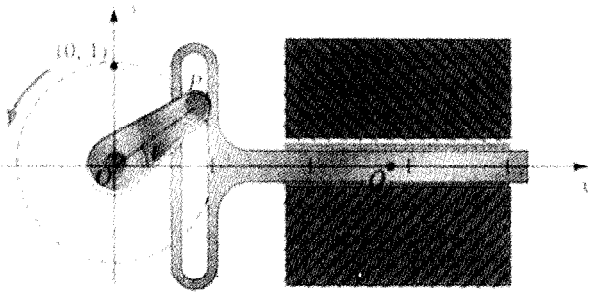
(a) Trace la gráfica de D para $0 \le t \le 90$.
(b) ¿Cuándo es máxima la demanda de agua?

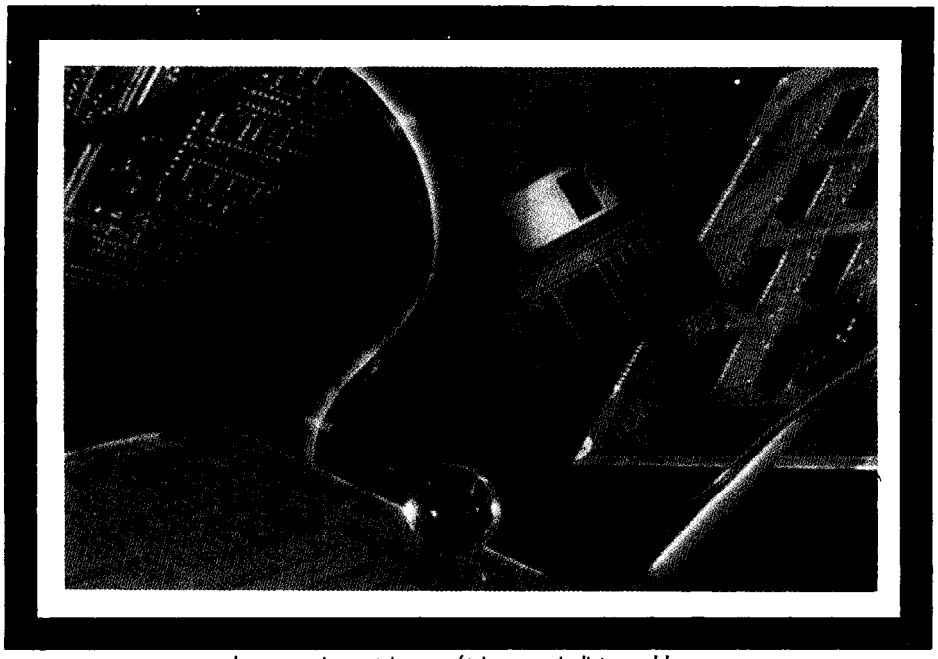
73 ***Corcho flotante*** Un flotador de corcho sube y baja en un lago. La distancia del fondo del lago al centro del flotador, cuando el tiempo $t \ge 0$, es $s(t) = 12 + \cos \pi t$, donde $s(t)$ en pies y t en segundos.

(a) Represente el movimiento del flotador cuando $0 \le t \le 2$.
(b) ¿Durante cuáles intervalos de tiempo sube el flotador?

74 ***Yugo escocés*** La figura muestra un esquema de un yugo escocés, mecanismo que convierte movimiento circular en movimiento lineal. El punto P se mueve en sentido contrario al de las manecillas del reloj describiendo una circunferencia de radio 1, y hacia arriba y hacia abajo dentro de la corredera, haciendo que el punto Q se mueva hacia adelante y hacia atrás a lo largo del eje x. Suponga que OP tiene velocidad angular constante ω y que $d(O, Q) = 3$ cuando $t = 0$.

(a) Exprese las coordenadas de P en términos de ω y t.
(b) Exprese la abscisa de Q en términos de ω y t.
(c) Describa el movimiento de Q.





Las ecuaciones trigonométricas son indispensables en el análisis de circuitos eléctricos.

7.1	**VERIFICACIÓN DE LAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS**
7.2	**ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS**
7.3	**FÓRMULAS DE ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN**
7.4	**FÓRMULAS PARA ÁNGULOS SIMPLES**
7.5	**FÓRMULAS DE PRODUCTO A SUMA Y DE SUMA A PRODUCTO**
7.6	**FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS**

CAPÍTULO 7

TRIGONOMETRÍA ANALÍTICA

■ *En matemáticas superiores, ciencias naturales e ingeniería, a veces es necesario simplificar expresiones trigonométricas complicadas, y resolver ecuaciones en las que intervienen funciones trigonométricas. Estos temas se explican en las primeras dos secciones de este capítulo. A continuación se deducen muchas fórmulas útiles para sumas, diferencias y productos. Para su fácil consulta se presentan en lista en la pasta interior trasera del libro. Además del manejo formal, hay también numerosas aplicaciones de las fórmulas. La última sección contiene las definiciones y propiedades de las funciones trigonométricas inversas.* ■

7.1 VERIFICACIÓN DE LAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

En una **expresión trigonométrica** intervienen símbolos de funciones trigonométricas.

EJEMPLO ILUSTRATIVO

Expresiones trigonométricas

- $x + \operatorname{sen} x$
- $\dfrac{\sqrt{\theta} + 2^{\operatorname{sen}\theta}}{\cot\theta}$
- $\dfrac{\cos(3t+1)}{t^2 + \tan^2(2-t^2)}$

Supóngase que el dominio de cada variable en una expresión trigonométrica es el conjunto de los números reales o de los ángulos para los cuales la expresión tiene significado. A fin de adquirir práctica en la simplificación de expresiones trigonométricas complicadas, se usan las identidades y manipulaciones algebraicas fundamentales (véase la página 334) como se hizo en los Ejemplos 4 y 5 de la Secc. 6.2. En los tres primeros, el método consiste en: dada una identidad, transformar el primer miembro en el segundo miembro, o viceversa. Se presenta de nuevo una nota precautoria de la Secc. 6.2.

☞ **Advertencia**

> Si una identidad (supuesta) contiene fracciones, no deben multiplicarse ambos miembros por el mínimo común divisor.

EJEMPLO 1 ***Verificación de una identidad***

Comprobar la identidad $\sec\alpha - \cos\alpha = \operatorname{sen}\alpha \tan\alpha$.

SOLUCIÓN Se transforma el lado izquierdo para obtener el derecho:

$$\begin{aligned}
\sec\alpha - \cos\alpha &= \frac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha && \text{identidad recíproca}\\
&= \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos\alpha} && \text{suma de expresiones}\\
&= \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha} && \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1\\
&= \operatorname{sen}\alpha\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right) && \text{expresión equivalente}\\
&= \operatorname{sen}\alpha\tan\alpha && \text{identidad de la tangente}
\end{aligned}$$

EJEMPLO 2 ***Comprobación de una identidad***

Comprobar la identidad $\sec\theta = \operatorname{sen}\theta(\tan\theta + \cot\theta)$.

SOLUCIÓN Puesto que la expresión del segundo miembro es más complicada que la del izquierdo, se transforma dicho miembro para obtener el primero (o lado izquierdo):

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\theta(\tan\theta+\cot\theta) &= \operatorname{sen}\theta\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right) && \text{identidades de tangente y cotangente}\\
&= \operatorname{sen}\theta\left(\frac{\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}\right) && \text{suma de fracciones}\\
&= \operatorname{sen}\theta\left(\frac{1}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}\right) && \text{identidad de Pitágoras}\\
&= \frac{1}{\cos\theta} && \text{se cancela sen } \theta\\
&= \sec\theta && \text{identidad recíproca}
\end{aligned}$$

EJEMPLO 3 ***Verificación de una identidad***

Verificar la identidad $\dfrac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}=\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x}$.

SOLUCIÓN De acuerdo con la nota precautoria, no se permite multiplicar ambos miembros por el mínimo común divisor $(1-\operatorname{sen} x)\cos x$. En lugar de ello, se cambia la forma de la fracción del primer miembro multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador.

$$\begin{aligned}
\frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x} &= \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}\cdot\frac{1+\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x} && \text{se multiplica numerador y denominador por } 1+\operatorname{sen} x\\
&= \frac{\cos x\,(1+\operatorname{sen} x)}{1-\operatorname{sen}^2 x} && \text{propiedad de los cocientes}\\
&= \frac{\cos x\,(1+\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} && \operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1\\
&= \frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x} && \text{se cancela } \cos x
\end{aligned}$$

Otra técnica para demostrar que una ecuación $p = q$ es identidad, es comenzar transformando el primer miembro p en otra expresión s, y asegurarse de que cada paso sea *reversible*; es decir, tener la certeza de que es posible transformar s de nuevo en p invirtiendo el procedimiento que se use en cada paso. En este caso, la ecuación $p = s$ es una identidad. A continuación, como ejercicio *separado*, se demuestra que el segundo miembro q también se puede transformar en la expresión s mediante pasos reversibles y, por lo tanto, que $q = s$ es una identidad. La conclusión es que $p = q$ es también una identidad. Este método se ilustra con el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 ***Verificación de una identidad***

Verificar la identidad $(\tan\theta-\sec\theta)^2=\dfrac{1-\operatorname{sen}\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}$.

(continúa)

SOLUCIÓN Se comprueba la identidad demostrando que cada miembro de la ecuación se puede transformar en la misma expresión. Primero, sólo se trabaja en el lado izquierdo:

$$
\begin{aligned}
(\tan\theta - \sec\theta)^2 &= \tan^2\theta - 2\tan\theta\sec\theta + \sec^2\theta && \text{desarrollo del cuadrado}\\
&= \left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)^2 - 2\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}\right) + && \text{identidades de la tangente y recíproca}\\
&= \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} - \frac{2\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\cos^2\theta} && \text{expresión equivalente}\\
&= \frac{\operatorname{sen}^2\theta - 2\operatorname{sen}\theta + 1}{\cos^2\theta} && \text{se suman fracciones}
\end{aligned}
$$

En este punto, puede no ser obvio cómo obtener el segundo miembro de la ecuación dada, partiendo de la última expresión. Así, a continuación sólo se trabaja en el lado derecho y se trata de obtener esa última expresión. Si se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador, se tiene

$$
\begin{aligned}
\frac{1-\operatorname{sen}\theta}{1+\operatorname{sen}\theta} &= \frac{1-\operatorname{sen}\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}\cdot\frac{1-\operatorname{sen}\theta}{1-\operatorname{sen}\theta} && \text{se multiplica numerador y denominador por } 1-\operatorname{sen}\theta\\
&= \frac{1-2\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}^2\theta}{1-\operatorname{sen}^2\theta} && \text{propiedad de los cocientes}\\
&= \frac{1-2\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}. && \operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta = 1
\end{aligned}
$$

La última expresión es la misma que se obtuvo a partir de $(\tan\theta - \sec\theta)^2$. Como todos los pasos son reversibles, la ecuación dada es identidad.

En Cálculo es conveniente, a veces, cambiar las formas de ciertas expresiones algebraicas mediante una **sustitución trigonométrica**, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 5 ***Sustitución trigonométrica***

Expresar $\sqrt{a^2 - x^2}$ en términos de una función trigonométrica de θ sin radicales, sustituyendo $x = a\operatorname{sen}\theta$, para $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$ y $a > 0$.

SOLUCIÓN Se procede como sigue:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - (a\operatorname{sen}\theta)^2} && \text{sea } x = a\operatorname{sen}\theta\\
&= \sqrt{a^2 - a^2\operatorname{sen}^2\theta} && \text{ley de los exponentes}\\
&= \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2\theta)} && \text{se saca } a^2 \text{ como factor común}\\
&= \sqrt{a^2\cos^2\theta} && \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1\\
&= a\cos\theta && \text{véase en seguida}
\end{aligned}
$$

La última igualdad es válida, porque (1) si $a > 0$, entonces $\sqrt{a^2} = a$, y (2) si $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$, entonces $\cos\theta \ge 0$ y, por consiguiente, $\sqrt{\cos^2\theta} = \cos\theta$.

EJERCICIOS 7.1

Ejercicios 1– 50: Verifique la identidad.

1 $\csc\theta - \operatorname{sen}\theta = \cot\theta\cos\theta$

2 $\operatorname{sen} x + \cos x \cot x = \csc x$

3 $\dfrac{\sec^2 u - 1}{\sec^2 u} = \operatorname{sen}^2 u$

4 $\tan t + 2\cos t \csc t = \sec t \csc t + \cot t$

5 $\dfrac{\csc^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \cot^2\theta$

6 $(\tan u + \cot u)(\cos u + \operatorname{sen} u) = \csc u + \sec u$

7 $\dfrac{1+\cos t}{\operatorname{sen} t} + \dfrac{\operatorname{sen} t}{1+\cos t} = 2\csc t$

8 $\tan^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \tan^2\alpha \operatorname{sen}^2\alpha$

9 $\dfrac{1}{1-\cos\gamma} + \dfrac{1}{1+\cos\gamma} = 2\csc^2\gamma$

10 $\dfrac{1+\csc\beta}{\sec\beta} - \cot\beta = \cos\beta$

11 $(\sec u - \tan u)(\csc u + 1) = \cot u$

12 $\dfrac{\cot\theta - \tan\theta}{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta} = \csc\theta - \sec\theta$

13 $\csc^4 t - \cot^4 t = \csc^2 t + \cot^2 t$

14 $\cos^4\theta + \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^4\theta$

15 $\dfrac{\cos\beta}{1-\operatorname{sen}\beta} = \sec\beta + \tan\beta$

16 $\dfrac{1}{\csc y - \cot y} = \csc y + \cot y$

17 $\dfrac{\tan^2 x}{\sec x + 1} = \dfrac{1-\cos x}{\cos x}$

18 $\dfrac{\cot x}{\csc x + 1} = \dfrac{\csc x - 1}{\cot x}$

19 $\dfrac{\cot u - 1}{\cot u + 1} = \dfrac{1-\tan u}{1+\tan u}$

20 $\dfrac{1+\sec x}{\operatorname{sen} x + \tan x} = \csc x$

21 $\operatorname{sen}^4 r - \cos^4 r = \operatorname{sen}^2 r - \cos^2 r$

22 $\operatorname{sen}^4\theta + 2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta + \cos^4\theta = 1$

23 $\tan^4 k - \sec^4 k = 1 - 2\sec^2 k$

24 $\sec^4 u - \sec^2 u = \tan^2 u + \tan^4 u$

25 $(\sec t + \tan t)^2 = \dfrac{1+\operatorname{sen} t}{1-\operatorname{sen} t}$

26 $\sec^2\gamma + \tan^2\gamma = (1 - \operatorname{sen}^4\gamma)\sec^4\gamma$

27 $(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)^3 = 1$

28 $\dfrac{\operatorname{sen} t}{1-\cos t} = \csc t + \cot t$

29 $\dfrac{1+\csc\beta}{\cot\beta + \cos\beta} = \sec\beta$

30 $\dfrac{\cos^3 x - \operatorname{sen}^3 x}{\cos x - \operatorname{sen} x} = 1 + \operatorname{sen} x \cos x$

31 $(\csc t - \cot t)^4(\csc t + \cot t)^4 = 1$

32 $(a\cos t - b\operatorname{sen} t)^2 + (a\operatorname{sen} t + b\cos t)^2 = a^2 + b^2$

33 $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta} = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

34 $\dfrac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v} = \dfrac{\cot v - \cot u}{\cot u \cot v + 1}$

35 $\dfrac{\tan\alpha}{1+\sec\alpha} + \dfrac{1+\sec\alpha}{\tan\alpha} = 2\csc\alpha$

36 $\dfrac{\csc x}{1+\csc x} - \dfrac{\csc x}{1-\csc x} = 2\sec^2 x$

37 $\dfrac{1}{\tan\beta + \cot\beta} = \operatorname{sen}\beta\cos\beta$

38 $\dfrac{\cot y - \tan y}{\operatorname{sen} y \cos y} = \csc^2 y - \sec^2 y$

39 $\sec\theta + \csc\theta - \cos\theta - \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta\tan\theta + \cos\theta\cot\theta$

40 $\operatorname{sen}^3 t + \cos^3 t = (1 - \operatorname{sen} t\cos t)(\operatorname{sen} t + \cos t)$

41 $(1 - \tan^2\phi)^2 = \sec^4\phi - 4\tan^2\phi$

42 $\cos^4 w + 1 - \operatorname{sen}^4 w = 2\cos^2 w$

43 $\dfrac{\cot(-t) + \tan(-t)}{\cot t} = -\sec^2 t$

44 $\dfrac{\csc(-t) - \operatorname{sen}(-t)}{\operatorname{sen}(-t)} = \cot^2 t$

45 $\log 10^{\tan t} = \tan t$ **46** $10^{\log|\operatorname{sen} t|} = |\operatorname{sen} t|$

47 $\ln \cot x = -\ln \tan x$ **48** $\ln \sec \theta = -\ln \cos \theta$

49 $\ln|\sec \theta + \tan \theta| = -\ln|\sec \theta - \tan \theta|$

50 $\ln|\csc x - \cot x| = -\ln|\csc x + \cot x|$

Ejercicios 51– 62: Demuestre que la ecuación *no es* una identidad. (*Sugerencia:* Determine un número en el dominio de t o de θ para el cual es falsa la ecuación.)

51 $\cos t = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t}$

52 $\sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t} = \operatorname{sen} t + \cos t$

53 $\sqrt{\operatorname{sen}^2 t} = \operatorname{sen} t$ **54** $\sec t = \sqrt{\tan^2 t + 1}$

55 $(\operatorname{sen} \theta + \cos \theta)^2 = \operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta$

56 $\log\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} t}\right) = \dfrac{1}{\log \operatorname{sen} t}$ **57** $\cos(-t) = -\cos t$

58 $\operatorname{sen}(t + \pi) = \operatorname{sen} t$ **59** $\cos(\sec t) = 1$

60 $\cot(\tan \theta) = 1$ **61** $\operatorname{sen}^2 t - 4 \operatorname{sen} t - 5 = 0$

62 $3 \cos^2 \theta + \cos \theta - 2 = 0$

Ejercicios 63 – 66: En el Ejemplo 5 haga la sustitución trigonométrica $x = a \operatorname{sen} \theta$ para $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, y además $a > 0$. Utilice identidades fundamentales para simplificar la expresión resultante.

63 $(a^2 - x^2)^{3/2}$ **64** $\dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$

65 $\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ **66** $\dfrac{1}{x\sqrt{a^2 - x^2}}$

Ejercicios 67–70: Efectúe la sustitución trigonométrica $x = a \tan \theta$, para $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ y además $a > 0$. Simplifique la expresión resultante.

67 $\sqrt{a^2 + x^2}$ **68** $\dfrac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

69 $\dfrac{1}{x^2 + a^2}$ **70** $\dfrac{(x^2 + a^2)^{3/2}}{x}$

Ejercicios 71–74: Efectúe la sustitución trigonométrica $x = a \sec \theta$ para $0 < \theta < \pi/2$ y además $a > 0$. Simplifique la expresión resultante.

71 $\sqrt{x^2 - a^2}$ **72** $\dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2 - a^2}}$

73 $x^3\sqrt{x^2 - a^2}$ **74** $\dfrac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^2}$

c **Ejercicios 75–78: Con la gráfica de f, determine la expresión más simple, $g(x)$, tal que la ecuación $f(x) = g(x)$ sea una identidad. Verifique esa identidad.**

75 $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^4 x}{(1 - \sec^2 x)\cos^4 x}$

76 $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x}{\cos^4 x + \cos^2 x \operatorname{sen}^2 x}$

77 $f(x) = \sec x(\operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x) - \operatorname{sen} x$

78 $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen} x \cos^2 x}{\csc x} + \dfrac{\cos^3 x + \cos x \operatorname{sen}^2 x}{\sec x}$

7.2 ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Una **ecuación trigonométrica** es aquella que contiene expresiones de trigonometría. Cada identidad que se vio en la sección anterior es un ejemplo de ecuación trigonométrica en la cual todo número (o ángulo) en el dominio de la variable es una solución. Si una ecuación de tal clase no es identidad, con frecuencia se determinan las soluciones mediante técnicas semejantes a las que se usan en las ecuaciones algebraicas. La diferencia principal radica en que primero se despejan sen x, cos θ, etc., de la ecuación trigonométrica y, a continuación, se determinan los valores de x o de θ que satisfagan la ecuación. Las soluciones se pueden expresar como nú-

meros reales o como ángulos. En este libro se usa la siguiente regla: *Si no se especifica valor en grados, entonces las soluciones de una ecuación trigonométrica se deben expresar en radianes, o como números reales.* Si se desean las soluciones en grados, tal cosa se especificará en el ejemplo o ejercicio.

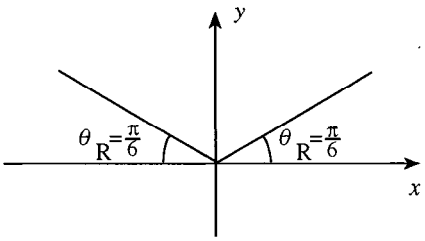
EJEMPLO 1 ***Resolver una ecuación trigonométrica en la que interviene la función seno***

Determinar las soluciones de la ecuación sen $\theta = \frac{1}{2}$ si

θ está en el intervalo $[0, 2\pi)$

θ es cualquier número real

FIGURA 7.1



SOLUCIÓN

(a) Si sen $\theta = \frac{1}{2}$, entonces el ángulo de referencia para θ es $\theta_R = \pi/6$. Si se considera que θ es un ángulo en su posición normal, entonces, como sen $\theta > 0$, el lado terminal está en el cuadrante I o en el II, como se ve en la Fig. 7.1. Por consiguiente, hay dos soluciones para $0 \le \theta < 2\pi$:

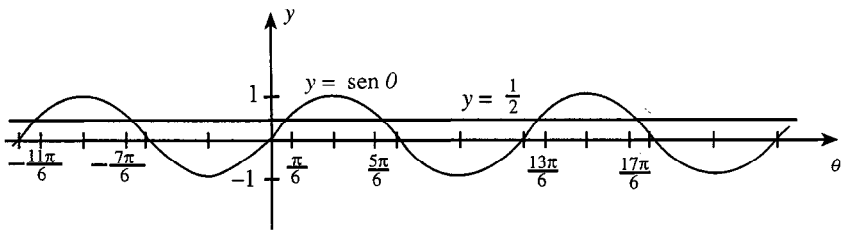
$$\theta = \frac{\pi}{6} \qquad \text{y} \qquad \theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

(b) Como la función seno tiene periodo 2π, se pueden obtener todas las soluciones sumando múltiplos de 2π a $\pi/6$ y $5\pi/6$. Con esto se obtiene

$$\theta = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \quad \text{y} \quad \theta = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \text{ para todo entero } n.$$

Otra solución alterna (gráfica) requiere la determinación del sitio en donde la gráfica $y =$ sen θ corta a la línea horizontal $y = \frac{1}{2}$, como se ve en la Fig. 7.2.

FIGURA 7.2



EJEMPLO 2 ***Resolver una ecuación trigonométrica en la que intervenga la función tangente***

Determinar las soluciones de la ecuación tan $u = -1$.

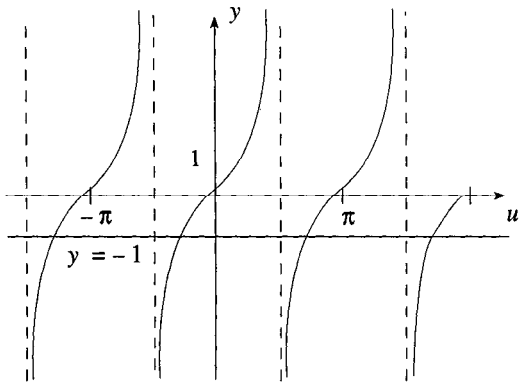
(continúa)

SOLUCIÓN Como la función tangente tiene periodo π, es suficiente determinar un número real u tal que $\tan u = -1$, para después sumar múltiplos de π.

En la Fig. 7.3 se tiene el dibujo de una parte de la gráfica de $y = \tan u$. Puesto que $\tan(3\pi/4) = -1$, una solución es $3\pi/4$. Por lo tanto,

$$\text{si } \tan u = -1, \text{ entonces } \qquad u = \frac{3\pi}{4} + \pi n \quad \text{para todo entero } n.$$

FIGURA 7.3 $y = \tan u$



También se habría podido escoger $-\pi/4$ (o algún otro número u tal que $\tan u = -1$) como solución inicial, y haber escrito

$$u = -\frac{\pi}{4} + \pi n \quad \text{para todo entero } n.$$

EJEMPLO 3 ***Resolver una ecuación trigonométrica en la que intervengan ángulos múltiples***

Resolver la ecuación $\cos 2x = 0$, y expresar las soluciones en radianes y en grados.

Determinar las soluciones que se encuentren en los intervalos $[0, 2\pi)$ y $[0°, 360°)$.

SOLUCIÓN

(a) Se procede como sigue; n representa cualquier entero:

$$\cos 2x = 0 \qquad \text{ecuación dada}$$

$$\cos \theta = 0 \qquad \text{sea } \theta = 2x$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \pi n \qquad \text{véase la gráfica de } y = \cos t \text{ (pág. 363)}$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi n \qquad \theta = 2x$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n \qquad \text{se divide entre 2}$$

En grados, se tiene que $x = 45° + 90°n$.

(b) Es posible determinar soluciones particulares de la ecuación introduciendo enteros en lugar de n en cualquiera de las fórmulas de x que se obtuvieron en el inciso (a). En la tabla siguiente se presentan algunas de esas soluciones.

n	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}$	$45° + 90° n$
-1	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(-1) = -\frac{\pi}{4}$	$45° + 90°(-1) = -45°$
0	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(0) = \frac{\pi}{4}$	$45° + 90°(0) = 45°$
1	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(1) = \frac{3\pi}{4}$	$45° + 90°(1) = 135°$
2	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(2) = \frac{5\pi}{4}$	$45° + 90°(2) = 225°$
3	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(3) = \frac{7\pi}{4}$	$45° + 90°(3) = 315°$
4	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(4) = \frac{9\pi}{4}$	$45° + 90°(4) = 405°$

Nótese que las soluciones en los intervalos $[0, 2\pi)$ y $[0°, 360°)$ se obtienen con $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$. Dichas soluciones son

$$\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \quad \text{o} \quad 45°, 135°, 225°, 315°.$$

EJEMPLO 4 ***Resolver, factorizando, una ecuación trigonométrica***

Resolver la ecuación $\operatorname{sen}\theta \tan\theta = \operatorname{sen}\theta$.

SOLUCIÓN

$$\operatorname{sen}\theta \tan\theta = \operatorname{sen}\theta \quad \text{ecuación dada}$$

$$\operatorname{sen}\theta \tan\theta - \operatorname{sen}\theta = 0 \quad \text{se resta sen } \theta$$

$$\operatorname{sen}\theta (\tan\theta - 1) = 0 \quad \text{se factoriza}$$

$$\operatorname{sen}\theta = 0, \tan\theta = 1 \quad \text{se iguala a 0 cada factor}$$

Las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen}\theta = 0$ son $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$. Así,

$$\text{si} \quad \operatorname{sen}\theta = 0, \quad \text{entonces} \quad \theta = \pi n \quad \text{para todo entero } n.$$

La función tangente tiene periodo π y, por lo tanto, se determinan las soluciones de la ecuación $\tan\theta = 1$ que estén en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ y, a continuación, se suman los múltiplos de π. Como la única solución de $\tan\theta = 1$ en $(-\pi/2, \pi/2)$ es $\pi/4$, se tiene que

$$\text{si} \quad \tan\theta = 0, \quad \text{entonces} \quad \theta = \frac{\pi}{4} + \pi n \quad \text{para todo entero } n.$$

De modo que las soluciones de sen θ tan θ = sen θ son

$$\pi n \quad \text{y} \quad \frac{\pi}{4} + \pi n \quad \text{para todo entero } n.$$

Algunas soluciones *particulares*, que se obtienen tomando $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ y $n = -1$ son

$$0, \frac{\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, 2\pi, \frac{9\pi}{4}, -\pi, -\frac{3\pi}{4}.$$

Con otros valores de n se obtienen otras soluciones.

En el Ejemplo 4, se cometería un error si se hubiera comenzado dividiendo ambos miembros entre sen θ , ya que se habrían perdido las soluciones para sen θ = 0.

EJEMPLO 5 ***Resolver una ecuación trigonométrica por factorización***

Resolver la ecuación $2 \operatorname{sen}^2 t - \cos t - 1 = 0$, y expresar las soluciones en radianes y en grados.

SOLUCIÓN Primero se expresa la ecuación en términos de cos t únicamente, y después se resuelve por factorización.

$2 \operatorname{sen}^2 t - \cos t - 1 = 0$	ecuación dada
$2(1 - \cos^2 t) - \cos t - 1 = 0$	$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$
$-2 \cos^2 t - \cos t + 1 = 0$	se simplifica
$2 \cos^2 t + \cos t - 1 = 0$	se multiplica por –1
$(2 \cos t - 1)(\cos t + 1) = 0$	factorización
$2 \cos t - 1 = 0, \quad \cos t + 1 = 0$	se iguala cada factor a 0
$\cos t = \frac{1}{2}, \qquad \cos t = -1$	se despeja cos t.

Como la función coseno tiene periodo 2π, pueden determinarse todas las soluciones de dichas ecuaciones sumando múltiplos de 2π a las soluciones que estén en el intervalo $[0, 2\pi)$.

Si $\cos t = \frac{1}{2}$, el ángulo de referencia es $\pi/3$ (o 60°). Como cos t es positivo, el ángulo t en radianes está en el cuadrante I o en el IV. Por consiguiente, se ve que en el intervalo $[0, 2\pi)$

$$\text{si} \quad \cos t = \frac{1}{2}, \quad \text{entonces} \quad t = \frac{\pi}{3}, \quad \text{o bien,} \quad t = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}.$$

Al consultar la gráfica de la función coseno, se observa que

$$\text{si} \quad \cos t = -1, \quad \text{entonces} \quad t = \pi.$$

Así, las soluciones de la ecuación dada son las siguientes, en las cuales n es cualquier entero:

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, \pi + 2\pi n$$

En grados,

$$60° + 360°n, 300° + 360°n, 180° + 360°n.$$

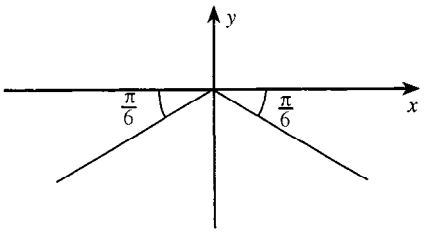
EJEMPLO 6 ***Resolver una ecuación trigonométrica por factorización***

Determinar las soluciones de $4\,\text{sen}^2 x \tan x - \tan x = 0$, que se encuentren en el intervalo $[0, 2\pi)$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
4\,\text{sen}^2 x \tan x - \tan x &= 0 && \text{ecuación dada}\\
\tan x\,(4\,\text{sen}^2 x - 1) &= 0 && \text{se saca tan } x \text{ como factor común}\\
\tan x = 0, \quad 4\,\text{sen}^2 x - 1 &= 0 && \text{se iguala a 0 cada factor}\\
\tan x = 0, \quad \text{sen}^2 x &= \tfrac{1}{4} && \text{se despejan tan } x, \text{ sen}^2 x\\
\tan x = 0, \quad \text{sen } x &= \pm\tfrac{1}{2} && \text{se despejan sen } x
\end{aligned}$$

FIGURA 7.4



En la Fig. 7.4 se muestra el ángulo de referencia, $\pi/6$, para el tercer y cuarto cuadrantes. Esos ángulos, $7\pi/6$ y $11\pi/6$, son las soluciones de la ecuación $\text{sen } x = -\frac{1}{2}$ para $0 \le x < 2\pi$. La tabla siguiente es la lista de las soluciones de las tres ecuaciones.

Ecuación	Soluciones en $[0, 2\pi)$	Véase
$\tan x = 0$	$0, \pi$	Fig. 7.3
$\text{sen } x = \frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$	Ejemplo 1
$\text{sen } x = -\frac{1}{2}$	$\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$	Fig. 7.4 (usar ángulo de referencia)

Así, la ecuación dada tiene las seis soluciones que se ven en la segunda columna de la tabla.

EJEMPLO 7 ***Resolver una ecuación trigonométrica en la que intervengan ángulos múltiples***

Determinar las soluciones de $\csc^4 2u - 4 = 0$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
\csc^4 2u - 4 &= 0 && \text{ecuación dada}\\
(\csc^2 2u - 2)(\csc^2 2u + 2) &= 0 && \text{se factoriza}\\
\csc^2 2u - 2 = 0, \quad \csc^2 2u + 2 &= 0 && \text{se iguala a 0 cada factor}\\
\csc^2 2u = 2, \quad \csc^2 2u &= -2 && \text{se despeja } \csc^2 2u\\
\csc 2u = \pm\sqrt{2}, \quad \csc 2u &= \pm\sqrt{-2} && \text{se toman raíces cuadradas}
\end{aligned}$$

La segunda ecuación no tiene solución, ya que $\sqrt{-2}$ no es número real. La primera ecuación equivale a

$$\text{sen } 2u = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ya que el ángulo de referencia para $2u$ es $\pi/4$, se tiene la siguiente tabla, en la cual n indica cualquier entero.

Ecuación	Solución para $2u$	Solución para u
$\operatorname{sen} 2u = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$2u = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$	$u = \frac{\pi}{8} + \pi n$
	$2u = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$	$u = \frac{3\pi}{8} + \pi n$
$\operatorname{sen} 2u = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$2u = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$	$u = \frac{5\pi}{8} + \pi n$
	$2u = \frac{7\pi}{4} + 2\pi n$	$u = \frac{7\pi}{8} + \pi n$

En la última columna se ven las soluciones de la ecuación. Nótese que *todas* se pueden expresar en la forma

$$u = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} n .$$

En el ejemplo que sigue se utiliza una calculadora para resolver una ecuación trigonométrica.

EJEMPLO 8 ***Calcular las soluciones aproximadas de una ecuación trigonométrica***

Calcular aproximadamente, al grado más cercano, las soluciones de la ecuación siguiente, en el intervalo $[0°, 360°)$:

$$5 \operatorname{sen}\theta \tan\theta - 10 \tan\theta + 3 \operatorname{sen}\theta - 6 = 0$$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
5 \operatorname{sen}\theta \tan\theta - 10 \tan\theta + 3 \operatorname{sen}\theta - 6 &= 0 && \text{ecuación dada}\\
(5 \operatorname{sen}\theta \tan\theta - 10 \tan\theta) + (3 \operatorname{sen}\theta - 6) &= 0 && \text{agrupación de términos}\\
5 \tan\theta (\operatorname{sen}\theta - 2) + 3(\operatorname{sen}\theta - 2) &= 0 && \text{se factoriza cada grupo}\\
(5 \tan\theta + 3)(\operatorname{sen}\theta - 2) &= 0 && \text{sen } \theta - 2 \text{ como factor común}\\
5 \tan\theta + 3 = 0, \quad \operatorname{sen}\theta - 2 &= 0 && \text{se iguala cada factor a 0}\\
\tan\theta = -\tfrac{3}{5}, \quad \operatorname{sen}\theta &= 2 && \text{se despejan tan } \theta \text{ y sen } \theta
\end{aligned}$$

La ecuación $\operatorname{sen}\theta = 2$ no tiene solución, ya que $\operatorname{sen}\theta \leq 1$ para toda θ. Para $\tan\theta = -\frac{3}{5}$, se aplica una calculadora en el modo de grados, con la cual se obtiene

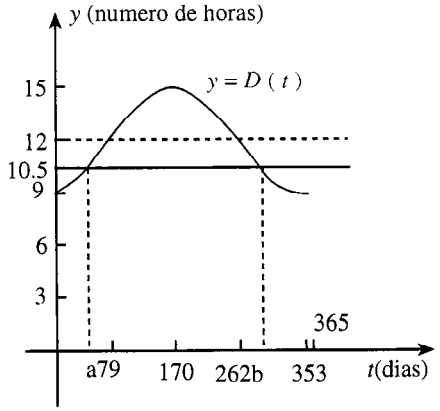
$$\theta = \tan^{-1}(-\tfrac{3}{5}) \approx -31°.$$

Por lo tanto, el ángulo de referencia es $\theta_R \approx 31°$. Como θ debe estar en el cuadrante II o en el IV, se tienen las soluciones siguientes:

$$\theta = 180° - \theta_R \approx 180° - 31° = 149°$$
$$\theta = 360° - \theta_R \approx 360° - 31° = 329°$$

EJEMPLO 9 ***Determinación del número de horas de luz diurna***

FIGURA 7.5



En Boston, Estados Unidos, el número de horas de luz diurna, $D(t)$, en determinado día del año, se puede aproximar mediante

$$D(t) = 3 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{365}(t - 79) + 12,$$

en la cual t está en días, y $t = 0$ corresponde al 1 de enero. ¿Cuántos días del año tienen más de 10.5 horas de luz diurna?

SOLUCIÓN En el Ejemplo 12 de la Secc. 6.6 se analizó la gráfica de D, y se vuelve a presentar en la Fig. 7.5. Como se ve en la figura, si es posible determinar dos números a y b para los que $D(a) = 10.5$, $D(b) = 10.5$, y $0 < a < b < 365$, entonces habrá más de 10.5 horas de luz diurna en el t–ésimo día del año, si $a < t < b$.

Ahora se resuelve como sigue la ecuación $D(t) = 10.5$:

$$3 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{365}(t - 79) + 12 = 10.5 \qquad \text{sea } D(t) = 10.5$$

$$3 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{365}(t - 79) = -1.5 \qquad \text{se restan 12}$$

$$\operatorname{sen} \frac{2\pi}{365}(t - 79) = -0.5 = -\frac{1}{2} \qquad \text{se divide entre 3}$$

Si $\operatorname{sen} \theta = -\frac{1}{2}$, entonces el ángulo de referencia es $\pi/6$, y el ángulo θ está en el cuadrante III o en el IV. Por lo tanto, se pueden determinar los números a y b resolviendo las ecuaciones

$$\frac{2\pi}{365}(t - 79) = \frac{7\pi}{6} \qquad \text{y} \qquad \frac{2\pi}{365}(t - 79) = \frac{11\pi}{6}.$$

De la primera de las ecuaciones se obtiene

$$t - 79 = \frac{7\pi}{6} \cdot \frac{365}{2\pi} = \frac{2555}{12} \approx 213,$$

y, por lo tanto, $\quad t \approx 213 + 79, \quad$ o bien, $\quad t \approx 292.$

De igual manera, la segunda ecuación da $t \approx 414$. Como el periodo de la función D es 365 días (Fig. 7.5) se tiene:

$$t \approx 414 - 365, \quad \text{o bien,} \quad t \approx 49.$$

Así, cuando menos habrá 10.5 horas de luz diurna de $t = 49$ a $t = 292$, es decir, durante 243 días del año.

En el Ejemplo 14, de la Secc. 6.6, se presentó una solución gráfica del ejemplo que sigue.

EJEMPLO 10 ***Cálculo de la corriente mínima en un circuito eléctrico***

La corriente I, en amperes, en un circuito de corriente alterna, en el tiempo t (en segundos) está dada por

$$I = 30 \operatorname{sen}\left(50\pi t - \frac{7\pi}{3}\right).$$

Calcular el valor exacto mínimo de t, para el cual $I = 15$.

SOLUCIÓN Sea $I = 15$ en la fórmula dada, entonces

$$15 = 30 \operatorname{sen}\left(50\pi t - \frac{7\pi}{3}\right),$$

o sea,

$$\operatorname{sen}\left(50\pi t - \frac{7\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

Así, el ángulo de referencia es $\pi/6$ y, en consecuencia,

$$50\pi t - \frac{7\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \qquad \text{o bien} \qquad 50\pi t - \frac{7\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,$$

en la cual n es cualquier entero. Despejando t se obtiene

$$t = \frac{(15/6) + 2n}{50} \quad \text{o bien} \quad t = \frac{(19/6) + 2n}{50}.$$

El valor positivo mínimo de t se presentará cuando uno de los numeradores de esas dos fracciones tenga su valor positivo mínimo. Como $\frac{15}{6} = 2.5$, $\frac{19}{6} \approx 3.17$, y $2(-1) = -2$, entonces el valor positivo mínimo de t se presenta cuando $n = -1$ en la primera fracción, es decir, cuando

$$t = \frac{(15/6) + 2(-1)}{50} = \frac{1}{100}.$$

En el ejemplo que sigue se ilustra cómo una graficadora puede ayudar a resolver una ecuación trigonométrica complicada.

EJEMPLO 11 ***Uso de una gráfica para determinar las soluciones de una ecuación trigonométrica***

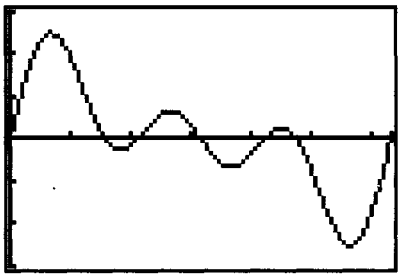
Determinar las soluciones de la ecuación siguiente que estén en el intervalo $[0, 2\pi)$:

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x = 0$$

SOLUCIÓN Se asigna $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x$ a Y_1. Como $2\pi \approx 6.3$, y $|\operatorname{sen}\theta| \leq 1$ para $\theta = x$, $2x$ y $3x$, se escoge el cuadro visual de dimensiones $[0, 6.3]$ por $[-3, 3]$. Se obtiene entonces una gráfica semejante a la de la Fig. 7.6. Con las funciones de ampliación y trazado, se tienen las aproximaciones siguientes de las abscisas, es decir, las soluciones aproximadas de la ecuación dada, en $[0, 2\pi)$:

$$0,\ 1.57,\ 2.09,\ 3.14,\ 4.19,\ 4.71$$

FIGURA 7.6 [0, 6.3] por [−3, 3]



Convirtiendo a grados, y redondeando al grado más cercano, se tiene

$$0°, 90°, 120°, 180°, 240°, 270°.$$

Transformando esas medidas en grados a radianes, resulta

$$0, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}.$$

Al comprobar esos valores en la ecuación dada, se observa que los seis son soluciones. La Fig. 7.6 parece indicar que la gráfica tiene periodo 2π. Después de estudiar la Secc. 7.4, el lector podrá cambiar la forma de Y_1 y *demostrar* que el periodo sí es 2π y que, por lo tanto, *todas* las soluciones de la ecuación dada se pueden obtener sumando múltiplos enteros de 2π.

En el ejemplo anterior se pudo haber usado una graficadora para calcular las soluciones *exactas* de la ecuación. Sin embargo, en muchas ecuaciones sólo se pueden determinar las soluciones aproximadas.

EJERCICIOS 7.2

Ejercicios 1–34: Determine todas las soluciones de la ecuación.

1 $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

2 $\cos t = -1$

3 $\tan \theta = \sqrt{3}$

4 $\cot \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

5 $\sec \beta = 2$

6 $\csc \gamma = \sqrt{2}$

7 $\operatorname{sen} x = \frac{\pi}{2}$

8 $\cos x = -\frac{\pi}{3}$

9 $\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}$

10 $\csc \theta \operatorname{sen} \theta = 1$

11 $2 \cos 2\theta - \sqrt{3} = 0$

12 $2 \operatorname{sen} 3\theta + \sqrt{2} = 0$

13 $\sqrt{3} \tan \frac{1}{3}t = 1$

14 $\cos \frac{1}{4}x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

15 $\operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

16 $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$

17 $\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

18 $\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

19 $2 \cos t + 1 = 0$

20 $\cot \theta + 1 = 0$

21 $\tan^2 x = 1$

22 $4 \cos \theta - 2 = 0$

23 $(\cos \theta - 1)(\operatorname{sen} \theta + 1) = 0$

24 $2 \cos x = \sqrt{3}$

25 $\sec^2 \alpha - 4 = 0$

26 $3 - \tan^2 \beta = 0$

27 $\sqrt{3} + 2 \operatorname{sen} \beta = 0$

28 $4 \operatorname{sen}^2 x - 3 = 0$

29 $\cot^2 x - 3 = 0$

30 $(\operatorname{sen} t - 1) \cos t = 0$

31 $(2 \operatorname{sen} \theta + 1)(2 \cos \theta + 3) = 0$

32 $(2 \operatorname{sen} u - 1)(\cos u - \sqrt{2}) = 0$

33 $\operatorname{sen} 2x \,(\csc 2x - 2) = 0$

34 $\tan \alpha + \tan^2 \alpha = 0$

Ejercicios 35 – 58: Determine las soluciones de la ecuación que estén en el intervalo $[0, 2\pi)$.

35 $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

36 $\operatorname{sen}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

37 $2 - 8\cos^2 t = 0$ **38** $\cot^2 \theta - \cot \theta = 0$

39 $2\,\text{sen}^2 u = 1 - \text{sen}\, u$

40 $2\cos^2 t + 3\cos t + 1 = 0$

41 $\tan^2 x \,\text{sen}\, x = \text{sen}\, x$ **42** $\sec \beta \csc \beta = 2\csc \beta$

43 $2\cos^2 \gamma + \cos \gamma = 0$ **44** $\text{sen}\, x - \cos x = 0$

45 $\text{sen}^2 \theta + \text{sen}\, \theta - 6 = 0$

46 $2\,\text{sen}^2 u + \text{sen}\, u - 6 = 0$

47 $1 - \text{sen}\, t = \sqrt{3}\cos t$ **48** $\cos \theta - \text{sen}\, \theta = 1$

49 $\cos \alpha + \text{sen}\, \alpha = 1$ **50** $\sqrt{3}\,\text{sen}\, t + \cos t = 1$

51 $2\tan t - \sec^2 t = 0$ **52** $\tan \theta + \sec \theta = 1$

53 $\cot \alpha + \tan \alpha = \csc \alpha \sec \alpha$

54 $\text{sen}\, x + \cos x \cot x = \csc x$

55 $2\,\text{sen}^3 x + \text{sen}^2 x - 2\,\text{sen}\, x - 1 = 0$

56 $\sec^5 \theta = 4\sec \theta$

57 $2\tan t \csc t + 2\csc t + \tan t + 1 = 0$

58 $2\,\text{sen}\, v \csc v - \csc v = 4\,\text{sen}\, v - 2$

Ejercicios 59 – 64: Calcule, redondeando a los 10′ más cercanos, las soluciones de la ecuación en el intervalo [0°, 360°).

59 $\text{sen}^2 t - 4\,\text{sen}\, t + 1 = 0$ **60** $\cos^2 t - 4\cos t + 2 = 0$

61 $\tan^2 \theta + 3\tan \theta + 2 = 0$

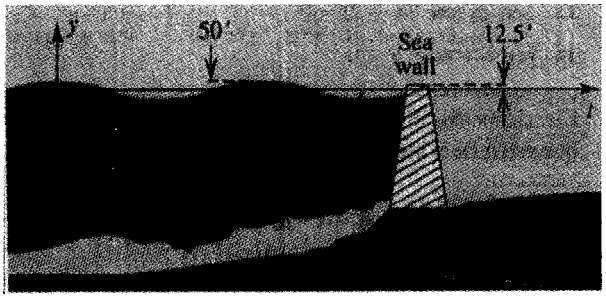
62 $2\tan^2 x - 3\tan x - 1 = 0$

63 $12\,\text{sen}^2 u - 5\,\text{sen}\, u - 2 = 0$

64 $5\cos^2 \alpha + 3\cos \alpha - 2 = 0$

65 *Marejadas* Una marejada, de 50 pies de altura y 30 min de periodo, se acerca a un rompeolas que está a 12.5 pies sobre el nivel del mar (véase la figura). Desde determinado punto en la orilla, la distancia y del nivel del mar a la cresta de la onda es

$$y = 25\cos\frac{\pi}{15}t,$$



donde t está en minutos. Calcule, aproximadamente, durante cuántos minutos de cada periodo de 30 min la superficie de la onda está sobre el nivel superior del rompeolas.

66 *Temperatura en Fairbanks* La temperatura mínima esperada T (en °F) en Fairbanks, Alaska, es, aproximadamente,

$$T = 36\,\text{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 101)\right] + 14,$$

en la cual t está en días, y $t = 0$ corresponde al 1 de enero. ¿Durante cuántos días del año la temperatura mínima esperada es menor que – 4 °F?

67 *Intensidad de la luz solar* En un día claro con D horas de luz diurna, la intensidad I de la luz solar (en cal/cm^2) se puede calcular aproximadamente con la fórmula

$$I = I_M\,\text{sen}^3\frac{\pi t}{D} \quad \text{para } 0 \le t \le D,$$

donde $t = 0$ corresponde a la aurora, e I_M es la intensidad máxima. Si $D = 12$, ¿aproximadamente cuántas horas después de la salida del Sol, $I = \frac{1}{2}I_M$?

68 *Intensidad de la luz solar* Véase el Ejercicio 67. En los días nublados, una mejor aproximación de la intensidad solar (o hélica) I está dada por

$$I = I_M\,\text{sen}^2\frac{\pi t}{D}.$$

Si $D = 12$, ¿aproximadamente cuántas horas después de la salida del Sol se cumple $I = \frac{1}{2}I_M$?

69 *Protección contra la luz solar* Véanse los Ejercicios 67 y 68. Un dermatólogo recomienda protegerse de la luz solar cuando la intensidad I es mayor que 75% de la intensidad máxima. Si $D = 12$ h, calcule el número aproximado de horas para las que se requiere protección en el caso de

(a) un día despejado **(b)** un día nublado.

70 *Ingeniería de carreteras* En el estudio de problemas de penetración de heladas en carreteras, la temperatura T a la hora t y profundidad de x pies, es

$$T = T_0 e^{-\lambda x}\,\text{sen}\,(\omega t - \lambda x),$$

donde T_0, ω y λ son constantes, y el periodo de T es de 24 h.

(a) Deduzca una fórmula para la temperatura en la superficie.

(b) ¿A qué horas la temperatura superficial es mínima?

(c) Si $\lambda = 2.5$, determine las horas a las cuales la temperatura sea mínima a 1 pie de profundidad.

71 *Población de conejos* Muchas poblaciones de animales, como la de conejos, fluctúan en ciclos decenales. Suponga que el número de conejos cuando el tiempo t (en años) está dado por

$$N(t) = 1000 \cos \frac{\pi}{5} t + 4\,000.$$

(a) Trace la gráfica de N para $0 \le t \le 10$.

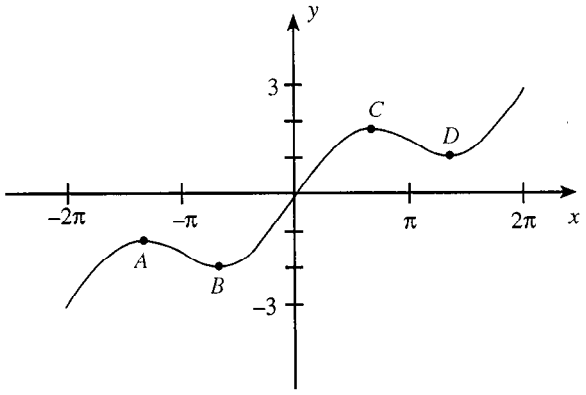
(b) ¿Para cuáles valores de t, en el inciso (a), la población de conejos es mayor que 4 500?

72 *Caudal de un río* El caudal (corriente o flujo de agua) en la desembocadura del río Orinoco, en Sudamérica, se puede calcular en forma aproximada mediante

$$F(t) = 26\,000 \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{6}(t - 5.5)\right] + 34\,000,$$

donde t es el tiempo en meses, y $F(t)$ es el caudal, en m^3/s. ¿Durante aproximadamente cuántos meses del año el flujo es superior a 55 000 m^3/s?

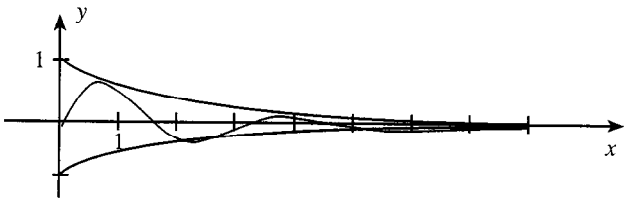
73 En la figura se muestra una gráfica de $y = \frac{1}{2}x + \operatorname{sen} x$ para $-2\pi \le x \le 2\pi$. Recurriendo al Cálculo, se puede demostrar que las abscisas de los puntos de cambio de dirección A, B, C y D de la gráfica, son soluciones de la ecuación $\frac{1}{2} + \cos x = 0$. Determine las coordenadas de esos puntos.



74 En la figura se tiene la gráfica de la ecuación

$$y = e^{-x/2} \operatorname{sen} 2x$$

Las abscisas de los puntos de cambio de dirección de la gráfica son soluciones de $4 \cos 2x - \operatorname{sen} 2x = 0$. Calcule, aproximadamente, las abscisas de esos puntos para $x > 0$.



Ejercicios 75 y 76: Si $I(t)$ es la corriente, en amperes, en un circuito de corriente alterna en el tiempo (en segundos) t, calcule el valor exacto mínimo de t para el cual $I(t) = k$.

75 $I(t) = 20 \operatorname{sen}(60\pi t - 6\pi)$; $k = -10$

76 $I(t) = 40 \operatorname{sen}(100\pi t - 4\pi)$; $k = 20$

C **Ejercicios 77 – 80: Evalúe aproximadamente cada desigualdad en el intervalo $[0, 2\pi]$.**

77 $\cos x \ge 0.3$

78 $\operatorname{sen} x < -0.6$

79 $\cos 3x < \operatorname{sen} x$

80 $\tan x \le \operatorname{sen} 2x$

C **Ejercicios 81 – 86: Estime las soluciones de la ecuación en el intervalo $[-\pi, \pi]$.**

81 $\operatorname{sen} 2x = 2 - x^2$

82 $\cos^3 x + \cos 3x - \operatorname{sen}^3 x = 0$

83 $\ln(1 + \operatorname{sen}^2 x) = \cos x$

84 $e^{\operatorname{sen} x} = \sec(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2})$

85 $3\cos^4 x - 2\cos^3 x + \cos x - 1 = 0$

86 $\cos 2x + \operatorname{sen} 3x - \tan \frac{1}{3}x = 0$

C **87** *Peso a varias latitudes* El peso W de una persona en la superficie terrestre es directamente proporcional a la aceleración gravitatoria g (en m/s^2). Debido a la rotación, la Tierra está achatada en los polos y, como consecuencia, el peso varía en distintas latitudes. Si θ es la latitud, entonces g se puede aproximar mediante la expresión

$$g = 9.8066(1 - 0.00264 \cos 2\theta).$$

(a) ¿A qué latitud $g = 9.8$?

(b) Si una persona pesa 150 lb en el ecuador ($\theta = 0°$), ¿en qué latitud pesará 150.5 lb?

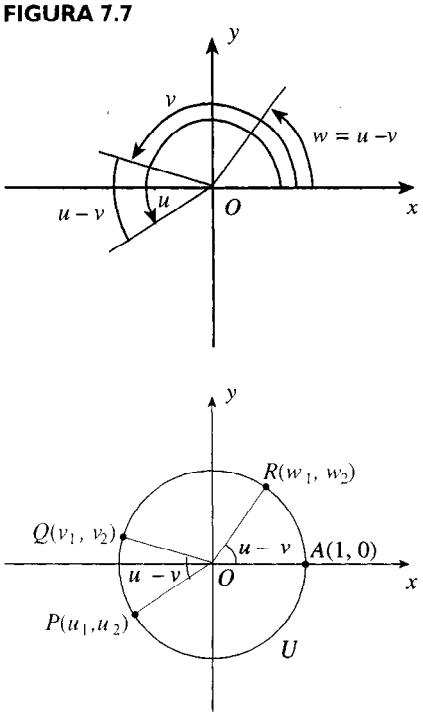
7.3 FÓRMULAS DE ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

En esta sección se deducen fórmulas que contienen funciones trigonométricas con $u + v$, o bien $u - v$ para cualquier número real o ángulo u y v. Esas fórmulas se llaman *fórmulas de adición y sustracción de ángulos*, respectivamente. La primera por estudiar se puede enunciar como sigue:

Fórmula de sustracción para el coseno

$$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$

FIGURA 7.7



DEMOSTRACIÓN Sean u y v números reales cualesquiera que indiquen medida de ángulos en radianes. Sea $w = u - v$. En la Fig. 7.7 se muestra una posibilidad si los ángulos están en posición normal. Por comodidad, se ha supuesto que tanto u como v son positivos, y que $0 \le u - v < v$.

Como en la Fig. 7.8, sean $P(u_1, u_2)$, $Q(v_1, v_2)$ y $R(w_1, w_2)$ los puntos en los lados terminales de los ángulos indicados que están a la distancia 1 del origen. En este caso, P, Q y R están en la circunferencia unitaria U que tiene centro en el origen. Según la definición de funciones trigonométricas de cualquier ángulo (con $r = 1$).

$$(*) \qquad \begin{array}{lll} \cos u = u_1 & \cos v = v_1 & \cos(u - v) = w_1 \\ \operatorname{sen} u = u_2 & \operatorname{sen} v = v_2 & \operatorname{sen}(u - v) = w_2 \end{array}$$

A continuación, se observa que la distancia entre $A(1, 0)$ y R debe ser igual a la distancia de Q a P, porque los ángulos AOR y QOP tienen la misma medida, $u - v$. Con la fórmula de la distancia se obtiene

$$d(A, R) = d(Q, P)$$

$$\sqrt{(w_1 - 1)^2 + (w_2 - 0)^2} = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}.$$

Luego de elevar ambos miembros al cuadrado y simplificar las expresiones bajo los radicales, se tiene

$$w_1^2 - 2w_1 + 1 + w_2^2 = u_1^2 - 2u_1v_1 + v_1^2 + u_2^2 - 2u_2v_2 + v_2^2.$$

Ya que los puntos (u_1, u_2), (v_1, v_2) y (w_1, w_2) están en la circunferencia unitaria U y como la ecuación de U es $x^2 + y^2 = 1$, se puede poner 1 en lugar de $u_1^2 + u_2^2$, $v_1^2 + v_2^2$, y $w_1^2 + w_2^2$. Al hacerlo y simplificar, se llega a

$$2 - 2w_1 = 2 - 2u_1v_1 - 2u_2v_2,$$

lo cual se reduce a

$$w_1 = u_1v_1 + u_2v_2.$$

Sustituyendo en las fórmulas marcadas con (*), se obtiene

$$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v,$$

que es lo que se deseaba demostrar. Es posible generalizar la demostración a todos los valores de u y v. ■

Con el ejemplo siguiente se ilustra el uso de esta fórmula, para calcular el valor exacto de cos 15°. Naturalmente, si sólo se deseara una aproximación, se podría usar una calculadora o una tabla.

EJEMPLO 1 ***Aplicación de la fórmula de sustracción de ángulos***

Calcular el valor exacto de cos 15° a partir del hecho de que 15° = 60° − 45°.

SOLUCIÓN Se usa la fórmula de diferencia de ángulos, con $u = 60°$ y $v = 45°$:

$$\begin{aligned}\cos 15° &= \cos(60° - 45°)\\ &= \cos 60° \cos 45° + \operatorname{sen} 60° \operatorname{sen} 45°\\ &= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

Es relativamente fácil obtener una fórmula para cos $(u + v)$. Se comienza por escribir $u + v$ como $u - (-v)$, para después aplicar la fórmula del coseno de la diferencia de ángulos:

$$\begin{aligned}\cos(u + v) &= \cos[u - (-v)]\\ &= \cos u \cos(-v) + \operatorname{sen} u \operatorname{sen}(-v)\end{aligned}$$

Con las fórmulas de ángulos negativos, $\cos(-v) = \cos v$, y $\operatorname{sen}(-v) = -\operatorname{sen} v$, se llega a lo siguiente.

Fórmula de adición para el coseno

$$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$

EJEMPLO 2 ***Uso de la fórmula de adición de ángulos***

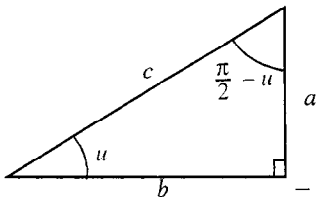
Calcular el valor exacto de $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ si se sabe que $\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}$.

SOLUCIÓN Se aplica la fórmula de cos $(u + v)$:

$$\begin{aligned}\cos\frac{7\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\\ &= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

Se dice que las funciones seno y coseno son cofunciones entre sí. **Igualmente, las funciones tangente y cotangente son cofunciones, y también la secante y la cosecante. Si** u es el valor de un ángulo agudo en radianes, entonces el ángulo cuya medida radiánica es $\pi/2 - u$ es complementario de u, y se puede trabajar con el triángulo rectángulo de la Fig. 7.9. Aplicando las relaciones, se observa que

FIGURA 7.9



$$\operatorname{sen} u = \frac{a}{c} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$$

$$\cos u = \frac{b}{c} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$$

$$\tan u = \frac{a}{b} = \cot\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$$

Esas tres fórmulas y sus análogas para sec u, csc u y cot u establecen que *el valor de la función* de u es igual a la cofunción del ángulo complementario, $\pi/2 - u$.

En las fórmulas siguientes se aplican las fórmulas de la diferencia para generalizar las relaciones a todo número real u.

Fórmulas de las cofunciones

Si u es un número real, o la medida en radianes de un ángulo , entonces

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \operatorname{sen} u \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos u$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cot u \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \tan u$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \csc u \qquad \csc\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sec u$$

DEMOSTRACIÓN Con la fórmula del coseno de una diferencia se tiene que

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos u + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen} u$$

$$= (0)\cos u + (1)\operatorname{sen} u = \operatorname{sen} u\,.$$

Con ello se obtiene la primera fórmula.

Al escribir $\pi/2 - v$ en lugar de u en la primera fórmula, se obtiene

$$\cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - v\right)\right] = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - v\right),$$

o sea

$$\cos v = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - v\right).$$

Como es arbitrario el símbolo v, esta ecuación equivale a la siguiente fórmula de cofunción:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos u$$

Aplicando la identidad de la tangente, las dos primeras fórmulas de cofunción y la identidad de la cotangente, se llega a

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-u\right)=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}=\frac{\cos u}{\operatorname{sen} u}=\cot u.$$

Las demostraciones de las restantes tres fórmulas son semejantes. ■

Una forma fácil de recordar las fórmulas de cofunción es ver el triángulo de la Fig. 7.9. Ahora ya se pueden demostrar las siguientes identidades:

Fórmulas para el seno y la tangente de sumas y restas de ángulos

(1) $\operatorname{sen}(u+v)=\operatorname{sen} u\cos v+\cos u\operatorname{sen} v$

(2) $\operatorname{sen}(u-v)=\operatorname{sen} u\cos v-\cos u\operatorname{sen} v$

(3) $\tan(u+v)=\dfrac{\tan u+\tan v}{1-\tan u\tan v}$

(4) $\tan(u-v)=\dfrac{\tan u-\tan v}{1+\tan u\tan v}$

DEMOSTRACIÓN Se demostrarán las fórmulas (1) y (3). Con las fórmulas de las cofunciones y la fórmula del coseno de una diferencia, se obtiene

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(u+v)&=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(u+v)\right]\\&=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-u\right)-v\right]\\&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\cos v+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\operatorname{sen} v\\&=\operatorname{sen} u\cos v+\cos u\operatorname{sen} v\end{aligned}$$

Para comprobar la fórmula (3) se comienza con:

$$\begin{aligned}\tan(u+v)&=\frac{\operatorname{sen}(u+v)}{\cos(u+v)}\\&=\frac{\operatorname{sen} u\cos v+\cos u\operatorname{sen} v}{\cos u\cos v-\operatorname{sen} u\operatorname{sen} v}\end{aligned}$$

Si $\cos u\cos v\neq 0$, se dividen entonces numerador y denominador entre $\cos u\cos v$, y

(continúa)

$$\tan(u+v) = \frac{\left(\frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}\right)\left(\frac{\cos v}{\cos v}\right) + \left(\frac{\cos u}{\cos u}\right)\left(\frac{\operatorname{sen} v}{\cos v}\right)}{\left(\frac{\cos u}{\cos u}\right)\left(\frac{\cos v}{\cos v}\right) - \left(\frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}\right)\left(\frac{\operatorname{sen} v}{\cos v}\right)} = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}.$$

Si $\cos u \cos v = 0$, entonces $\cos u = 0$, o bien, $\cos v = 0$. En este caso están indefinidas $\tan u$ o $\tan v$, respectivamente, y la fórmula no se aplica. ■

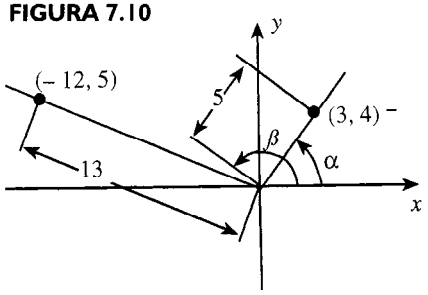
EJEMPLO 3 ***Aplicación de las fórmulas de suma para determinar el cuadrante donde está un ángulo***

Supóngase que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{5}$, y que $\cos\beta = -\frac{12}{13}$, donde α está en el cuadrante I y β en el cuadrante II.

(a) Calcular los valores exactos de $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ y $\tan(\alpha+\beta)$.

(b) Determinar el cuadrante que contiene a $\alpha+\beta$.

FIGURA 7.10



SOLUCIÓN En la Fig. 7.10 se ilustran los ángulos α y β. No se pierde generalidad si se considera que α y β son ángulos positivos entre 0 y 2π, como se observa en la figura. Como $\operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{5}$, se escoge el punto (3, 4) en el lado terminal de α. Igualmente, como $\cos\beta = -\frac{12}{13}$, el punto (–12, 5) está en el lado terminal de β. Al observar la Fig. 7.10 y aplicar la definición de funciones trigonométricas de cualquier ángulo, se tiene

$$\cos\alpha = \frac{3}{5}, \qquad \tan\alpha = \frac{4}{3}, \qquad \operatorname{sen}\beta = \frac{5}{13}, \qquad \tan\beta = -\frac{5}{12}.$$

(a) Con las fórmulas de adición se obtiene

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta = \left(\tfrac{4}{5}\right)\left(-\tfrac{12}{13}\right) + \left(\tfrac{3}{5}\right)\left(\tfrac{5}{13}\right) = -\tfrac{33}{65}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{4}{3} + \left(-\frac{5}{12}\right)}{1 - \left(\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{5}{12}\right)} = \frac{33}{56}.$$

(b) Ya que $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ es negativo, y $\tan(\alpha+\beta)$ es positivo, el ángulo $\alpha+\beta$ debe quedar en el cuadrante III.

En cálculo se presenta el tipo de simplificación que se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4 ***Fórmula utilizada en Cálculo***

Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, y $h \neq 0$, demostrar que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \operatorname{sen} x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x\left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right).$$

SOLUCION Se aplica la definición de f y la fórmula para el seno de una suma:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x (\cos h - 1) + \cos x \operatorname{sen} h}{h}$$

$$= \operatorname{sen} x \left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x \left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)$$

También se pueden aplicar las fórmulas de adición para deducir **fórmulas de reducción**. Estas últimas pueden utilizarse para cambiar expresiones como

$$\operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2} n\right) \quad \text{y} \quad \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2} n\right) \quad \text{para cualquier entero } n$$

en expresiones en las cuales sólo aparezca sen θ, o bien cos θ. Hay fórmulas semejantes válidas para las demás funciones trigonométricas. En lugar de deducir las fórmulas generales de reducción, se presentan dos casos especiales en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 *Obtención de fórmulas de reducción*

Expresar sólo en términos de θ:

(a) $\operatorname{sen}\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right)$ **(b)** $\cos(\theta + \pi)$

SOLUCIÓN Con las fórmulas de resta y suma se obtiene lo siguiente:

(a) $$\operatorname{sen}\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\theta \cos\frac{3\pi}{2} - \cos\theta \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}$$
$$= \operatorname{sen}\theta \cdot (0) - \theta \cdot (-1) = \cos\theta$$

(b) $$\cos(\theta + \pi) = \cos\theta \cos\pi - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\pi$$
$$= \cos\theta \cdot (-1) - \operatorname{sen}\theta \cdot (0) = -\cos\theta$$

EJEMPLO 6 *Combinación de una suma en la cual intervengan las funciones seno y coseno*

Sean a y b números reales, y sea $a > 0$. Demostrar que para toda x,

$$a \cos Bx + b \operatorname{sen} Bx = A \cos(Bx - C),$$

donde $A = \sqrt{a^2 + b^2}$, y $\tan C = \frac{b}{a}$, para $-\frac{\pi}{2} < C < \frac{\pi}{2}$.

SOLUCIÓN Dado $a \cos Bx + b \operatorname{sen} Bx$, considérese $\tan C = b/a$ para $-\pi/2 < C < \pi/2$. Así, $b = a \tan C$, y se puede escribir

(continúa)

$$a \cos Bx + b \operatorname{sen} Bx = a \cos Bx + (a \tan C) \operatorname{sen} Bx$$

$$= a \cos Bx + a \frac{\operatorname{sen} C}{\cos C} \operatorname{sen} Bx$$

$$= \frac{a}{\cos C} (\cos C \cos Bx + \operatorname{sen} C \operatorname{sen} Bx)$$

$$= (a \sec C) \cos (Bx - C).$$

Se termina la demostración demostrando que $a \sec C = \sqrt{a^2 + b^2}$. Como $-\pi/2 < C < \pi/2$, se concluye que sec C es positiva, y por lo tanto,

$$a \sec C = a\sqrt{1 + \tan^2 C}.$$

Con $\tan C = b/a$, y $a > 0$, se obtiene

$$a \sec C = a\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{a^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

EJEMPLO 7 ***Aplicación del Ejemplo 6***

Si $f(x) = \cos x + \operatorname{sen} x$, utilizar las fórmulas del Ejemplo 6 para expresar $f(x)$ en la forma $A \cos (Bx - C)$ y, a continuación, trazar la gráfica de f.

SOLUCIÓN Haciendo $a = 1$, $b = 1$ y $B = 1$ en las fórmulas del Ejemplo 6, se obtiene

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} \qquad \text{y} \qquad \tan C = \frac{b}{a} = \frac{1}{1} = 1.$$

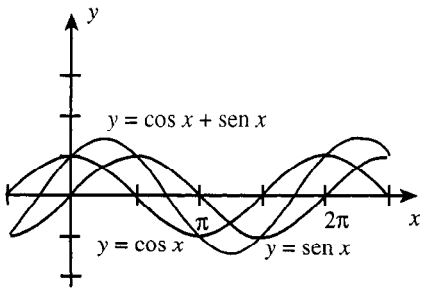
Como $\tan C = 1$ y además $-\pi/2 < C < \pi/2$, vemos que $C = \pi/4$. Sustituyendo a, b, A, B y C en la fórmula

$$a \cos Bx + b \operatorname{sen} Bx = A \cos (Bx - C).$$

se obtiene

$$f(x) = \cos x + \operatorname{sen} x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

FIGURA 7.11



Al comparar la última fórmula con la ecuación $y = a \cos (bx + c)$, que se estudió en la Secc. 6.6, se observa que la amplitud de la gráfica es $\sqrt{2}$, su periodo es 2π, y el desplazamiento de fase es $\pi/4$. En la Fig. 7.11 se muestra la gráfica de f, y en ella también están las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ y de $y = \cos x$. El esquema concuerda con el que se obtuvo en la Secc. 6.7, en la que se usó una graficadora. (Véase Fig. 6.75 en el Cap. 6.)

EJERCICIOS 7.3

Ejercicios 1– 4: Exprese lo indicado, como cofunción de un ángulo complementario.

1 **(a)** sen 46°37′ **(b)** cos 73°12′
(c) $\tan\frac{\pi}{6}$ **(d)** sec 17.28°

2 **(a)** tan 24°12′ **(b)** sen 89°41′
(c) $\cos\frac{\pi}{3}$ **(d)** cot 61.87°

3 **(a)** $\cos\frac{7\pi}{20}$ **(b)** $\operatorname{sen}\frac{1}{4}$
(c) tan 1 **(d)** csc 0.53

4 **(a)** $\operatorname{sen}\frac{1}{12}$ **(b)** cos 0.64
(c) $\tan\sqrt{2}$ **(d)** sec 1.2

Ejercicios 5 – 10: Determine los valores exactos.

5 **(a)** $\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{6}$
(b) $\cos\frac{5\pi}{12}$ $\left(\text{use } \frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$

6 **(a)** $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}+\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$
(b) $\operatorname{sen}\frac{11\pi}{12}$ $\left(\text{use } \frac{11\pi}{12}=\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$

7 **(a)** tan 60° + tan 225°
(b) tan 285° (use 285° = 60 ° + 225°)

8 **(a)** cos 135° – cos 60°
(b) cos 75° (use 75° = 135° – 60°)

9 **(a)** $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}-\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$
(b) $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12}$ $\left(\text{use } \frac{7\pi}{12}=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$

10 **(a)** $\tan\frac{3\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{6}$
(b) $\tan\frac{7\pi}{12}$ $\left(\text{use } \frac{7\pi}{12}=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$

Ejercicios 11–16: Exprese en forma de función trigonométrica de un ángulo.

11 cos 48° cos 23° + sen 48° sen 23°

12 cos 13° cos 50° – sen 13° sen 50°

13 cos 10° sen 5° – sen 10° cos 5°

14 sen 57° cos 4° + cos 57° sen 4°

15 cos 3 sen (– 2) – cos 2 sen 3

16 sen (– 5) cos 2 + cos 5 sen (–2)

17 Si α y β son ángulos agudos tales que $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ y $\tan\beta\ \frac{8}{15}$, determine
(a) sen $(\alpha+\beta)$ **(b)** cos $(\alpha+\beta)$
(c) el cuadrante que contiene a $\alpha+\beta$.

18 Si α y β son ángulos agudos tales que $\csc\alpha=\frac{13}{12}$ y $\cot\beta=\frac{4}{3}$, determine
(a) sen $(\alpha+\beta)$ **(b)** tan $(\alpha+\beta)$
(c) el cuadrante que contiene a $\alpha+\beta$.

19 Si $\operatorname{sen}\alpha=-\frac{4}{5}$ y $\sec\beta=\frac{5}{3}$, para un ángulo α en el tercer cuadrante y β en el primero, determine
(a) sen $(\alpha+\beta)$ **(b)** tan $(\alpha+\beta)$
(c) el cuadrante que contiene a $\alpha+\beta$.

20 Si $\tan\alpha=-\frac{7}{24}$ y $\cot\beta=\frac{3}{4}$, para α en el segundo cuadrante y β en el tercero, determine
(a) sen $(\alpha+\beta)$ **(b)** cos $(\alpha+\beta)$ **(c)** tan $(\alpha+\beta)$
(d) sen $(\alpha-\beta)$ **(e)** cos $(\alpha-\beta)$ **(f)** tan $(\alpha-\beta)$

21 Si α y β son ángulos en el tercer cuadrante tales que $\cos\alpha=-\frac{2}{5}$ y $\cos\beta=-\frac{3}{5}$, determine
(a) sen $(\alpha-\beta)$ **(b)** cos $(\alpha-\beta)$
(c) el cuadrante que contiene a $\alpha-\beta$.

22 Si α y β son ángulos en el segundo cuadrante tales que $\operatorname{sen}\alpha=\frac{2}{3}$ y $\cos\beta=-\frac{1}{3}$, determinar
(a) sen $(\alpha+\beta)$ **(b)** tan $(\alpha+\beta)$
(c) el cuadrante que contiene $\alpha+\beta$.

Ejercicios 23 – 34: Verifique la fórmula de reducción.

23 sen $(\theta+\pi)=-\operatorname{sen}\theta$ **24** $\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$

25 $\operatorname{sen}\left(x-\frac{5\pi}{2}\right)=-\cos x$ **26** $\operatorname{sen}\left(\theta-\frac{3\pi}{2}\right)=\cos\theta$

27 $\cos(\theta - \pi) = -\cos\theta$

28 $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} x$

29 $\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x$

30 $\cos\left(\theta - \frac{5\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\theta$

31 $\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cot x$

32 $\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$

33 $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot\theta$

34 $\tan(x + \pi) = \tan x$

Ejercicios 35 – 44: Compruebe la identidad.

35 $\operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)$

36 $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)$

37 $\tan\left(u + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + \tan u}{1 - \tan u}$

38 $\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan x - 1}{\tan x + 1}$

39 $\cos(u + v) + \cos(u - v) = 2\cos u \cos v$

40 $\operatorname{sen}(u + v) + \operatorname{sen}(u - v) = 2\operatorname{sen} u \cos v$

41 $\operatorname{sen}(u + v) \cdot \operatorname{sen}(u - v) = \operatorname{sen}^2 u - \operatorname{sen}^2 v$

42 $\cos(u + v) \cdot \cos(u - v) = \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 v$

43 $\frac{1}{\cot\alpha - \cot\beta} = \frac{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\beta - \alpha)}$

44 $\frac{1}{\tan\alpha + \tan\beta} = \frac{\cos\alpha \cos\beta}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}$

45 Exprese $\operatorname{sen}(u + v + w)$ en términos de las funciones trigonométricas de u, v y w. (*Sugerencia:* Escriba

$$\operatorname{sen}(u + v + w) \text{ en la forma } \operatorname{sen}[(u + v) + w]$$

y use las fórmulas de adición.)

46 Exprese $\tan(u + v + w)$ en términos de funciones trigonométricas de u, v y w.

47 Deduzca la fórmula $\cot(u + v) = \frac{\cot u \cot v - 1}{\cot u + \cot v}$.

48 Si α y β son ángulos complementarios, demuestre que

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\beta = 1.$$

49 Deduzca la fórmula del seno de una diferencia.

50 Deduzca la fórmula de la tangente de una diferencia.

51 Si $f(x) = \cos x$, demuestre que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \cos x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) - \operatorname{sen} x\left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)$$

52 Si $f(x) = \tan x$, demuestre que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sec^2 x\left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)\frac{1}{\cos h - \operatorname{sen} h \tan x}.$$

Ejercicios 53 – 58: Use una fórmula de suma o resta para determinar las soluciones de la ecuación que esté en el intervalo $[0, \pi)$.

53 $\operatorname{sen} 4t \cos t = \operatorname{sen} t \cos 4t$

54 $\cos 5t \cos 3t = \frac{1}{2} + \operatorname{sen}(-5t) \operatorname{sen} 3t$

55 $\cos 5t \cos 2t = -\operatorname{sen} 5t \operatorname{sen} 2t$

56 $\operatorname{sen} 3t \cos t + \cos 3t \operatorname{sen} t = -\frac{1}{2}$

57 $\tan 2t + \tan t = 1 - \tan 2t \tan t$

58 $\tan t - \tan 4t = 1 + \tan 4t \tan t$

Ejercicios 59 – 62:

(a) Use la fórmula del Ejemplo 6 para expresar f en términos de la función coseno.

(b) Determine la amplitud, periodo y desfasamiento de f.

(c) Grafique f.

59 $f(x) = \sqrt{3}\cos 2x + \operatorname{sen} 2x$

60 $f(x) = \cos 4x + \sqrt{3}\operatorname{sen} 4x$

61 $f(x) = 2\cos 3x - 2\operatorname{sen} 3x$

62 $f(x) = 5\cos 10x - 5\operatorname{sen} 10x$

Ejercicios 63 y 64: Para algunas aplicaciones en ingeniería eléctrica, la suma de varias señales de diferencia de potencial, o de radioondas de la misma frecuencia, se expresa en la forma compacta $y = A\cos(Bt - C)$. Exprese la señal dada en esta forma.

63 $y = 50\operatorname{sen} 60\pi t + 40\cos 60\pi t$

64 $y = 10\operatorname{sen}\left(120\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + 5\operatorname{sen} 120\pi t$

65 *Movimiento de una masa* Si una masa fija a un resorte se eleva y_0 pies, y se suelta con una velocidad inicial vertical de v_0 pies por segundo, entonces la posición siguiente y de la masa, es

$$y = y_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\operatorname{sen}\omega t$$

donde t es el tiempo, en segundos, y ω es una constante positiva.

(a) Si $\omega = 1$, $y_0 = 2$ pies y $v_0 = 3$ pies/s, exprese y en forma $A\cos(Bt - C)$, y calcule la amplitud y periodo del movimiento que resulta.

(b) Determine los momentos en los cuales $y = 0$, es decir, los tiempos en los cuales la masa pasa por la posición de equilibrio.

66 *Movimiento de una masa* Refiérase al Ejercicio 65. Si $y_0 = 1$, y $\omega = 2$, calcule las velocidades iniciales que produzcan una amplitud de 4 pies.

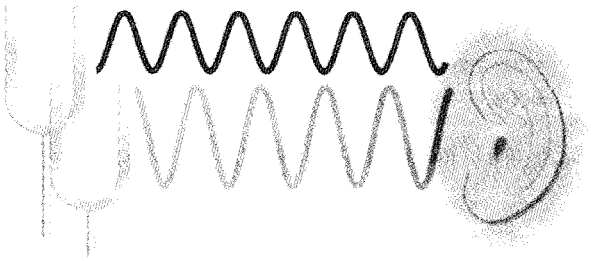
67 *Presión en el tímpano* Si se golpea un diapasón y, a continuación, se mantiene a cierta distancia del tímpano, la presión $p_1(t)$ en el exterior de éste, cuando el tiempo es t, se puede representar mediante $p_1(t) = A \operatorname{sen} \omega t$, donde A y ω son constantes positivas. Si un segundo diapasón idéntico se golpea con una fuerza distinta y se mantiene a una distancia diferente del tímpano (véase la figura), se puede representar su efecto mediante $p_2(t) = B \operatorname{sen}(\omega t + \tau)$ para $0 \le \tau \le 2\pi$, donde B es constante positiva. La presión total, $p(t)$ en el tímpano, es

$$p(t) = A \operatorname{sen} \omega t + B \operatorname{sen}(\omega t + \tau).$$

(a) Demuestre que $p(t) = a \cos \omega t + b \operatorname{sen} \omega t$, donde $a = B \operatorname{sen} \tau$ y $b = A + B \cos \tau$.

(b) Demuestre que la amplitud C de p es

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \tau.$$



68 *Interferencia destructiva* Refiérase al Ejercicio 67. Se tiene interferencia destructiva si la amplitud de la onda sonora resultante es menor que A. Suponga que los dos diapasones se golpean con la misma fuerza, es decir, que $A = B$.

(a) Cuando se presenta interferencia destructiva total, la amplitud de p es cero, y no se oye sonido alguno. Calcule el valor positivo mínimo de τ en el cual sucede esto.

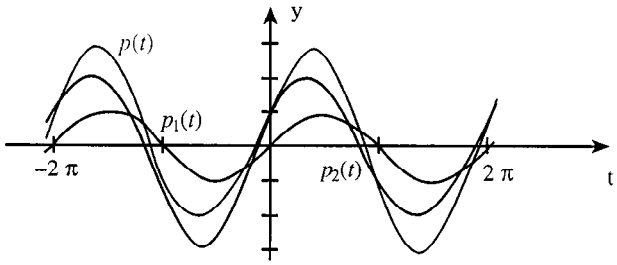
(b) Determine el intervalo de τ (a, b) para el cual se presenta interferencia destructiva, y para el cual a tenga su valor positivo mínimo.

69 *Interferencia constructiva* Véase el Ejercicio 67. Si se golpean dos diapasones, entonces se puede tener interferencia constructiva si la amplitud C de la onda sonora resultante, es mayor que A o B (véase la figura).

(a) Demuestre que $C \le A + B$.

(b) Determine los valores de τ para que $C = A + B$.

(c) Si $A \ge B$, determine la condición para que se presente interferencia constructiva.



c **70** *Presión sobre el tímpano* Véase el Ejercicio 67. Si se golpean simultáneamente dos diapasones de distinta altura o tono, con diferentes fuerzas, entonces la presión total, $p(t)$ sobre el tímpano, en el tiempo t, es

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t) = A \operatorname{sen} \omega_1 t + B \operatorname{sen}(\omega_2 t + \tau),$$

donde A, B, ω_1, ω_2 y τ son constantes.

(a) Grafique p para $-2\pi \le t \le 2\pi$, si $A = B = 2$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 20$ y $\tau = 3$.

(b) Use la gráfica para representar la variación del tono que se produce.

c **Ejercicios 71 y 72: Refiérase al Ejercicio 69. Grafique la ecuación para $-\pi \le t \le \pi$, y estime los intervalos en los cuales se presenta interferencia constructiva.**

71 $y = 3 \operatorname{sen} 2t + 2 \operatorname{sen}(4t + 1)$

72 $y = 2 \operatorname{sen} t + 2 \operatorname{sen}(3t + 3)$

7.4 FÓRMULAS PARA ÁNGULOS MÚLTIPLES

Las fórmulas que se estudian en esta sección se llaman **fórmulas para ángulos múltiples**, o de ángulos múltiples. En particular, las identidades siguientes son **fórmulas para el doble** (o **duplo**) **de un ángulo**, porque contienen la expresión $2u$.

Fórmulas para el doble de un ángulo

(1) $\operatorname{sen} 2u = 2 \operatorname{sen} u \cos u$

(2) $\cos 2u = \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u$
$= 1 - 2 \operatorname{sen}^2 u$
$= 2 \cos^2 u - 1$

(3) $\tan 2u = \dfrac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u}$

DEMOSTRACIÓN Se puede demostrar cada una de esas fórmulas haciendo $v = u$ en las fórmulas de suma adecuadas. Si se usa la fórmula de sen $(u + v)$, entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2u &= \operatorname{sen} (u + u) \\ &= \operatorname{sen} u \cos u + \cos u \operatorname{sen} u \\ &= 2 \operatorname{sen} u \cos u. \end{aligned}$$

Usando la fórmula cos $(u + v)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \cos 2u &= \cos (u + u) \\ &= \cos u \cos u - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} u \\ &= \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u. \end{aligned}$$

Para obtener las otras dos formas de cos $2u$, se usa la identidad fundamental $\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u = 1$. Así,

$$\begin{aligned} \cos 2u &= \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u \\ &= (1 - \operatorname{sen}^2 u) - \operatorname{sen}^2 u \\ &= 1 - 2 \operatorname{sen}^2 u. \end{aligned}$$

Igualmente, si se sustituye $\cos^2 u$ por $\operatorname{sen}^2 u$, se obtiene

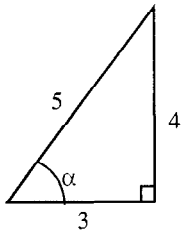
$$\begin{aligned} \cos 2u &= \cos^2 u - (1 - \cos^2 u) \\ &= 2 \cos^2 u - 1. \end{aligned}$$

La fórmula (3) de tan $2u$ se puede obtener igualando $v = u$ en la fórmula de tan $(u + v)$. ■

EJEMPLO 1 ***Uso de las fórmulas para el doble de un ángulo***

Si sen $\alpha = \frac{4}{5}$, y α es ángulo agudo, calcular los valores exactos de sen 2α y cos 2α.

FIGURA 7.12



SOLUCIÓN Si se considera que α es el ángulo agudo de un triángulo rectángulo, como se ve en la Fig. 7.12, entonces $\cos \alpha = \frac{3}{5}$. A continuación se sustituyen las fórmulas del doble de un ángulo:

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 2\left(\tfrac{4}{5}\right)\left(\tfrac{3}{5}\right) = \tfrac{24}{25}$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \tfrac{9}{25} - \tfrac{16}{25} = -\tfrac{7}{25}$$

EJEMPLO 2 ***Cambio de la forma de*** **cos 3θ**

Expresar cos 3θ en términos de cos θ.

SOLUCIÓN

$\cos 3\theta = \cos(2\theta + \theta)$	$3\theta = 2\theta + \theta$
$= \cos 2\theta \cos \theta - \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen} \theta$	fórmula de suma
$= (2\cos^2 \theta - 1)\cos \theta - (2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta) \operatorname{sen} \theta$	fórmulas para el doble de un ángulo
$= 2\cos^3 \theta - \cos \theta - 2 \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta$	se multiplica
$= 2\cos^3 \theta - \cos \theta - 2\cos \theta (1 - \cos^2 \theta)$	$\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
$= 4\cos^3 \theta - 3 \cos \theta$	se simplifica

A cada una de las siguientes fórmulas se le llama **identidad del semiángulo o mitad de un ángulo**, porque el número u es la mitad del número $2u$

Identidades de la mitad de un ángulo

$$\operatorname{sen}^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2} \qquad \cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2} \qquad \tan^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{1 + \cos 2u}$$

DEMOSTRACIÓN La primera identidad se puede comprobar como sigue:

$\cos 2u = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 u$	fórmula del doble de un ángulo
$2 \operatorname{sen}^2 u = 1 - \cos 2u$	se despeja $2 \operatorname{sen}^2 u$
$\operatorname{sen}^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}$	se divide entre 2

La segunda identidad se puede deducir en forma semejante, mediante

$$\cos 2u = 2\cos^2 u - 1.$$

La tercera se obtiene a partir de las dos primeras, aplicando

$$\tan^2 u = \left(\frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}\right)^2 = \frac{\operatorname{sen}^2 u}{\cos^2 u}.$$

Se pueden usar las identidades de semiángulo para expresar potencias pares de funciones trigonométricas en términos de funciones con exponente 1, como se ve en los dos ejemplos siguientes.

EJEMPLO 3 ***Aplicación de identidades de la mitad de un ángulo para comprobar una identidad***

Verificar la identidad $\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x = \frac{1}{8}(1 - \cos 4x)$.

SOLUCIÓN

$$\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) \quad \text{identidades de semiángulo}$$

$$= \tfrac{1}{4}(1 - \cos^2 2x) \quad \text{se multiplica}$$

$$= \tfrac{1}{4} \operatorname{sen}^2 2x \quad \operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$= \tfrac{1}{4}\left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right) \quad \text{identidad de semiángulo con } u = 2x$$

$$= \tfrac{1}{8}(1 - \cos 4x) \quad \text{se multiplica}$$

EJEMPLO 4 ***Uso de identidades de la mitad de un ángulo para reducir una potencia de*** **cos** ***t***

Expresar $\cos^4 t$ en términos de los valores de la función coseno con exponente 1.

SOLUCIÓN

$$\cos^4 t = (\cos^2 t)^2 \quad \text{ley de los exponentes}$$

$$= \left(\frac{1 + \cos 2t}{2}\right)^2 \quad \text{identidad de semiángulo}$$

$$= \tfrac{1}{4}(1 + 2\cos 2t + \cos^2 2t) \quad \text{se eleva al cuadrado}$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2t + \frac{1 + \cos 4t}{2}\right) \quad \text{identidad de semiángulo con } u = 2t$$

$$= \tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{2}\cos 2t + \tfrac{1}{8}\cos 4t \quad \text{se simplifica}$$

Escribiendo $v/2$ en lugar de u en las tres identidades de la mitad de un ángulo se tiene

$$\operatorname{sen}^2 \frac{v}{2} = \frac{1 - \cos v}{2} \qquad \cos^2 \frac{v}{2} = \frac{1 + \cos v}{2} \qquad \tan^2 \frac{v}{2} = \frac{1 - \cos v}{1 + \cos v}.$$

Al sacar raíz cuadrada en ambos miembros de estas ecuaciones, se obtienen las fórmulas siguientes, que se llaman *fórmulas de semiángulo* para distinguirlas de las identidades de la mitad de un ángulo.

Fórmulas de la mitad de un ángulo (o semiángulo)

$$\operatorname{sen} \frac{v}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos v}{2}} \qquad \cos \frac{v}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos v}{2}}$$

$$\tan \frac{v}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos v}{1 + \cos v}}$$

Al usar una fórmula de la mitad de un ángulo, se escoge el signo + o el signo –, dependiendo del cuadrante que contiene el ángulo cuya medida en radianes es v/2. Así, para sen (v/2) se usa + si v/2 es un ángulo en el cuadrante I o II, y se usa – si v/2 está en el III o el IV. Para cos (v/2), se utiliza + si v/2 está en el cuadrante I o en el cuadrante IV, y así sucesivamente.

EJEMPLO 5 ***Uso de las fórmulas para el seno y coseno de la mitad de un ángulo***

Calcular los valores exactos de sen 22.5° y cos 22.5°.

SOLUCIÓN Se usa la fórmula sen (v/2) y el hecho que 22.5° está en el cuadrante I:

$$\operatorname{sen} 22.5^\circ = \operatorname{sen} \frac{45^\circ}{2} \qquad 22.5^\circ = \frac{45^\circ}{2}$$

$$= \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{2}} \qquad \text{fórmula para el seno de semiángulo}$$

$$= \sqrt{\frac{1 - \sqrt{2}/2}{2}} \qquad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \qquad \text{se multiplica por } \frac{2}{2} \text{ el radicando y se simplifica}$$

De igual manera,

$$\cos 22.5^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos 45^\circ}{2}} \qquad \text{fórmula del coseno para semiángulo}$$

$$= \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}/2}{2}} \qquad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}. \qquad \text{se multiplica por } \frac{2}{2} \text{ el radicando y se simplifica}$$

Se puede obtener otra forma de tan (v/2). Multiplicando por 1 – cos v numerador y denominador del radicando de la tercera fórmula de la mitad de un ángulo, se obtiene

$$\tan \frac{v}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos v}{1 + \cos v} \cdot \frac{1 - \cos v}{1 - \cos v}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{(1 - \cos v)^2}{\operatorname{sen}^2 v}}$$

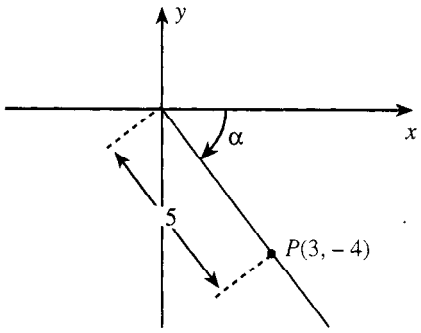
$$= \pm \frac{1 - \cos v}{\operatorname{sen} v}.$$

De esta fórmula se elimina el signo ±. Primero obsérvese que el numerador 1 – cos v nunca es negativo. Se puede demostrar que tan (v/2) y sen v siempre tienen el mismo signo. Por ejemplo, si $0 < v < \pi$, entonces $0 < v/2 < \pi/2$ y, por lo tanto, sen v y tan (v/2) son positivos. Si $\pi < v < 2\pi$, entonces $\pi/2 < v/2 < \pi$ y, por consiguiente, tanto sen v como tan (v/2) son negativos, con lo cual se obtiene la primera de las dos identidades siguientes. La segunda identidad de tan (v/2) se puede obtener multiplicando por 1 + cos v el numerador y denominador del radicando en la tercera fórmula de la mitad de un ángulo.

Fórmulas de la tangente de semiángulo

$$\tan\frac{v}{2}=\frac{1-\cos v}{\operatorname{sen} v} \qquad \tan\frac{v}{2}=\frac{\operatorname{sen} v}{1+\cos v}$$

FIGURA 7.13



EJEMPLO 6 ***Uso de la fórmula para la tangente de la mitad de un ángulo***

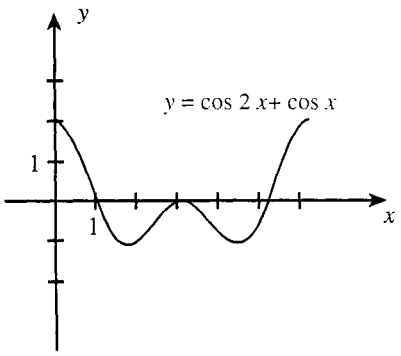
Si $\tan\alpha=-\frac{4}{3}$, y α está en el cuadrante IV, calcular $\tan\frac{\alpha}{2}$.

SOLUCIÓN Si se escoge el punto $(3, -4)$ en el lado terminal de α, como se ve en la Fig. 7.13, entonces $\operatorname{sen}\alpha=-\frac{4}{5}$ y $\cos\alpha=\frac{3}{5}$. Aplicando una fórmula para la la mitad de un ángulo, se tiene

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{1-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=-\frac{1}{2}.$$

EJEMPLO 7 ***Determinación de las intersecciones con el eje x de una gráfica***

FIGURA 7.14



En la Fig. 7.14 se ha trazado la gráfica de la ecuación $y=\cos 2x+\cos x$ para $0\le x\le 2\pi$. Las abscisas en el origen, o intercepciones x son aproximadamente 1.1, 3.1 y 5.2. Calcular los valores exactos y aproximaciones a tres decimales.

SOLUCIÓN Para determinar las abscisas en el origen se procede como sigue:

$\cos 2x+\cos x=0$	sea $y=0$
$(2\cos^2 x-1)+\cos x=0$	fórmula del doble de un ángulo
$2\cos^2 x+\cos x-1=0$	ecuación equivalente
$(2\cos x-1)(\cos x+1)=0$	se factoriza
$2\cos x-1=0, \quad \cos x+1=0$	se iguala a 0 cada factor
$\cos x=\frac{1}{2}, \qquad \cos x=-1$	se despeja cos x

Las soluciones de las dos últimas ecuaciones, en el intervalo $[0, 2\pi]$, dan las siguientes abscisas en el origen (o intercepciones x):

$$\frac{\pi}{3}\approx 1.047, \qquad \frac{5\pi}{3}\approx 5.236, \qquad \pi\approx 3.142$$

FIGURA 7.15

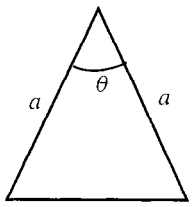
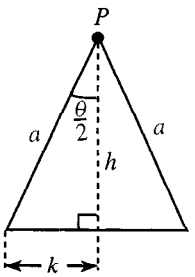


FIGURA 7.16



EJEMPLO 8 ***Deducción de una fórmula para el área de un triángulo isósceles***

Un triángulo isósceles tiene dos lados iguales de longitud a, y el ángulo entre ellos es θ (véase la Fig. 7.15). Expresar el área del triángulo A en términos de a y θ.

SOLUCIÓN Se observa en la Fig. 7.16 que la altura desde el punto P biseca θ, y que $A = \frac{1}{2}(2k)h = kh$. Por tanto, se tiene lo siguiente, donde $\theta/2$ es ángulo agudo:

$$\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{k}{a} \qquad \cos\frac{\theta}{2} = \frac{h}{a}$$ Figura 16

$$k = a\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \qquad h = a\cos\frac{\theta}{2}$$ se multiplica por a

A continuación calculamos el área:

$$A = a^2 \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$ se sustituye en $A = kh$

$$= a^2\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$ fórmulas de la mitad de un ángulo con $\theta/2$ en el cuadrante I

$$= a^2\sqrt{\frac{1-\cos^2\theta}{4}}$$ ley de los radicales

$$= a^2\sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{4}}$$ $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$= \tfrac{1}{2}a^2\,|\operatorname{sen}\theta|$$ se saca raíz cuadrada

$$= \tfrac{1}{2}a^2\operatorname{sen}\theta$$ $\operatorname{sen}\theta > 0$ para $0° < \theta < 180°$

Otro método es escribir la fórmula para el seno del doble de un ángulo, es decir $\operatorname{sen} 2u = 2\operatorname{sen} u\cos u$, como

(*) $$\operatorname{sen} u\cos u = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2u$$

y proceder como sigue:

$$A = a^2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$ se sustituye en $A = kh$

$$= a^2\cdot\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(2\cdot\frac{\theta}{2}\right)$$ sea $u = \frac{\theta}{2}$ en (*)

$$= \frac{1}{2}a^2\operatorname{sen}\theta$$ se simplifica

EJERCICIOS 7.4

Ejercicios 1 – 4: Calcule los valores exactos de sen 2θ, cos 2θ y tan 2θ para los valores dados de θ.

1 $\cos\theta = \frac{3}{5}$; $0° < \theta < 90°$

2 $\cot\theta = \frac{4}{3}$; $180° < \theta < 270°$

3 $\sec\theta = -3$; $90° < \theta < 180°$

4 $\operatorname{sen}\theta = -\frac{4}{5}$; $270° < \theta < 360°$

Ejercicios 5 – 8: Calcule los valores exactos de sen (θ /2), cos (θ /2) y tan (θ /2) para las condiciones dadas.

5 $\sec\theta = \frac{5}{4}$; $0° < \theta < 90°$

6 $\csc\theta = -\frac{5}{3}$; $-90° < \theta < 0°$

7 $\tan\theta = 1$; $-180° < \theta < -90°$

8 $\sec\theta = -4$; $180° < \theta < 270°$

Ejercicios 9 y 10: Emplee las fórmulas de la mitad de un ángulo para calcular los valores exactos.

9 **(a)** cos 67°30′ **(b)** sen 15° **(c)** $\tan\frac{3\pi}{8}$

10 **(a)** cos 165° **(b)** sen 157°30′ **(c)** $\tan\frac{\pi}{8}$

Ejercicios 11–28: Verifique la identidad.

11 $\operatorname{sen} 10\theta = 2\operatorname{sen} 5\theta\cos 5\theta$

12 $\cos^2 3x - \operatorname{sen}^2 3x = \cos 6x$

13 $4\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\operatorname{sen} x$

14 $\dfrac{\operatorname{sen}^2 2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} = 4 - 4\operatorname{sen}^2\alpha$

15 $(\operatorname{sen} t + \cos t)^2 = 1 + \operatorname{sen} 2t$

16 $\csc 2u = \frac{1}{2}\csc u \sec u$

17 $\operatorname{sen} 3u = \operatorname{sen} u\,(3 - 4\operatorname{sen}^2 u)$

18 $\operatorname{sen} 4t = 4\operatorname{sen} t\cos t\,(1 - 2\operatorname{sen}^2 t)$

19 $\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$

20 $\cos 6t = 32\cos^6 t - 48\cos^4 t + 18\cos^2 t - 1$

21 $\operatorname{sen}^4 t = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{8}\cos 4t$

22 $\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x = \cos 2x$

23 $\sec 2\theta = \dfrac{\sec^2\theta}{2 - \sec^2\theta}$

24 $\cot 2u = \dfrac{\cot^2 u - 1}{2\cot u}$

25 $2\operatorname{sen}^2 2t + \cos 4t = 1$

26 $\tan\theta + \cot\theta = 2\csc 2\theta$

27 $\tan 3u = \dfrac{\tan u\,(3 - \tan^2 u)}{1 - 3\tan^2 u}$

28 $\dfrac{1 + \operatorname{sen} 2v + \cos 2v}{1 + \operatorname{sen} 2v - \cos 2v} = \cot v$

Ejercicios 29 – 32: Exprese en términos de la función coseno con exponente 1.

29 $\cos^4\frac{\theta}{2}$

30 $\cos^4 2x$

31 $\operatorname{sen}^4 2x$

32 $\operatorname{sen}^4\frac{\theta}{2}$

Ejercicios 33 – 40: Determine las soluciones de la ecuación que estén en el intervalo [0, 2π).

33 $\operatorname{sen} 2t + \operatorname{sen} t = 0$

34 $\cos t - \operatorname{sen} 2t = 0$

35 $\cos u + \cos 2u = 0$

36 $\cos 2\theta - \tan\theta = 1$

37 $\tan 2x = \tan x$

38 $\tan 2t - 2\cos t = 0$

39 $\operatorname{sen}\frac{1}{2}u + \cos u = 1$

40 $2 - \cos^2 x = 4\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}x$

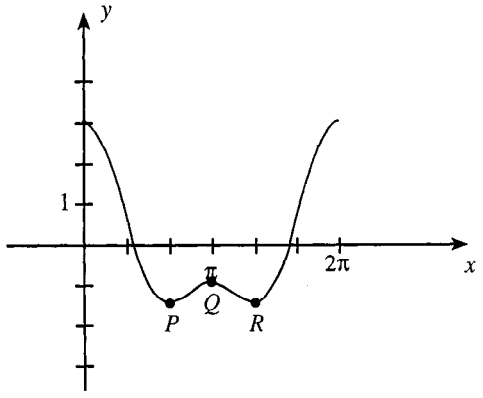
41 Si $a > 0$, $b > 0$ y $0 < u < \pi/2$, demuestre que

$$a\operatorname{sen} u + b\cos u = \sqrt{a^2 + b^2}\operatorname{sen}(u + v)$$

para $0 < v < \dfrac{\pi}{2}$, $\operatorname{sen} v = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, y $\cos v = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

42 Emplee el resultado del Ejercicio 41 para expresar $8\operatorname{sen} u + 15\cos u$ en forma $c\operatorname{sen}(u + v)$.

43 En la figura se muestra una gráfica de $y = \cos 2x + 2\cos x$, para $0 \le x \le 2\pi$.



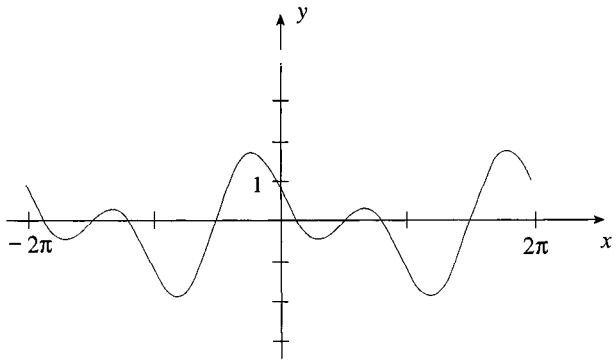
(a) Aproxime las abscisas en el origen a dos cifras decimales.

(b) Las abscisas de los puntos de cambio de dirección P, Q y R en la gráfica, son soluciones de la ecuación sen $2x$ + sen $x = 0$. Calcule las coordenadas de esos puntos.

44 En la figura se muestra una gráfica de $y = \cos x - \text{sen } 2x$ para $-2\pi \le x \le 2\pi$.

(a)

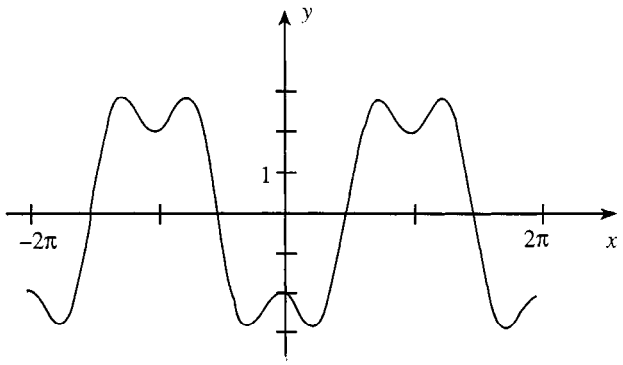
(b) Las abscisas de los ocho puntos de cambio de dirección en la gráfica son soluciones de sen x + 2 cos $2x = 0$. Aproxime esas abscisas a dos cifras decimales.



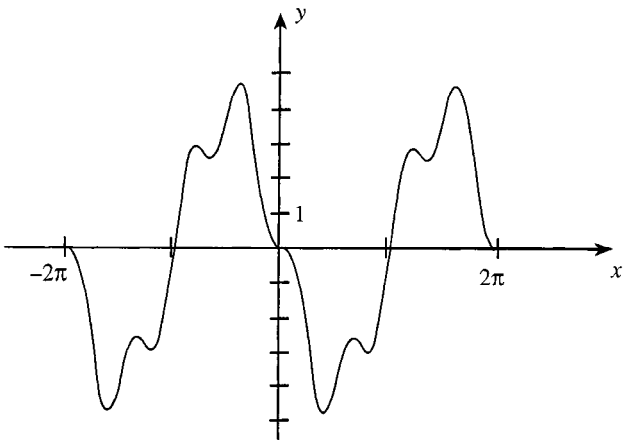
45 En la figura aparece una gráfica de $y = \cos 3x - 3 \cos x$, para $-2\pi \le x \le 2\pi$.

(a) Calcule las abscisas en el origen. (*Sugerencia:* Use la fórmula de cos 3θ que se vio en el Ejemplo 2).

(b) Las abscisas de los 13 puntos de cambio de dirección de la gráfica son las soluciones de la ecuación sen $3x$ − sen $x = 0$. Determine las abscisas. (*Sugerencia:* use la fórmula de sen $3u$ del Ejercicio 17).



46 En la figura aparece la gráfica de $y = \text{sen } 4x - 4 \text{ sen } x$ para $-2\pi \le x \le 2\pi$. Calcule las abscisas en el origen. (*Sugerencia:* Use la fórmula de sen $4t$ del Ejercicio 18).



47 ***Proyecto de una ruta de ferrocarril*** En la figura se ve la ruta propuesta de una vía férrea que pasa por tres poblaciones, ubicadas en los puntos A, B y C. La vía irá de B a C formando un ángulo θ.

(a) Demuestre que la distancia total d de A a C es $d = 20 \tan \frac{1}{2}\theta + 40$.

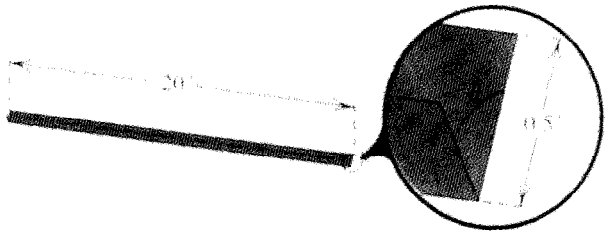
(b) Debido a las montañas entre A y C, el punto B debe quedar cuando menos a 20 millas de A. ¿Hay una ruta que evite las montañas y mida exactamente 50 millas?

48 ***Alcance de un proyectil*** Si se dispara un proyectil desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de v pies/s, a un ángulo de θ grados con la horizontal, el alcance R del proyectil es

$$R = \frac{v^2}{16} \text{ sen } \theta \cos \theta.$$

Si $v = 80$ pies/s, calcule, aproximadamente, los ángulos que hacen que el alcance sea igual a 150 pies.

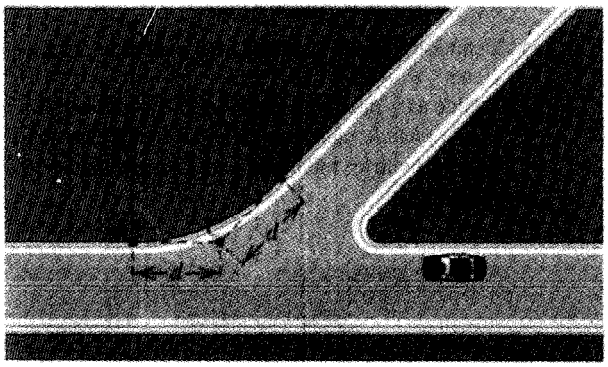
49 ***Construcción de un canalón pluvial*** En la figura se muestran las dimensiones de un canalón pluvial.



(a) Exprese el volumen V como función de θ. (*Sugerencia:* Vea el Ejemplo 8.)

(b) Calcule, aproximadamente, el ángulo agudo θ que haga que el volumen sea 2 pies^3.

50 ***Diseño de una curva*** Se está diseñando la curva para una calle en una intersección de dos carreteras, que se encuentran formando un ángulo ϕ, como se ve en la figura. El trazo entre los puntos A y B se construirá mediante una circunferencia que sea tangente a los ejes rectos de la calle en esos dos puntos.



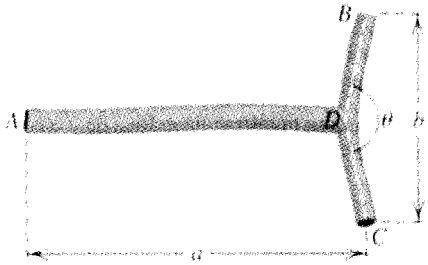
(a) Demuestre que la relación entre el radio R del círculo y la distancia d en la figura es $d = R\tan(\phi/2)$.

(b) Si $\phi = 45°$, y $d = 20$ pies, calcule R y la longitud de la curva.

51 ***Bifurcación arterial*** Una forma frecuente de ramificación cardiovascular es la bifurcación, en la cual una arteria se divide en dos vasos sanguíneos menores. El ángulo de bifurcación θ es el que forman las dos arterias más pequeñas. En la figura, la recta que pasa por A y D biseca a θ y es perpendicular a la que pasa por B y C.

(a) Demuestre que la longitud de la arteria l de A a B, es $l = a + \frac{b}{2}\tan\frac{\theta}{4}$.

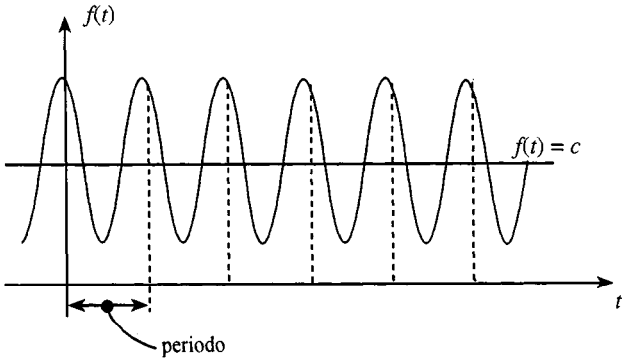
(b) Calcule l a partir de las dimensiones $a = 10$ mm, $b = 6$ mm y $\theta = 156°$.



52 ***Producción de calor en un circuito de CA*** Por definición, el valor medio de $f(t) = c + a\cos bt$ para uno o más ciclos completos, es c (véase la figura).

(a) Use la fórmula para el doble de un ángulo para calcular el valor medio de $f(t) = \text{sen}^2\,\omega t$ para $0 \le t \le 2\pi/\omega$, donde t está en segundos.

(b) En un circuito eléctrico de corriente alterna (CA) $I = I_0\,\text{sen}\,\omega t$, la rapidez r a la cual se produce calor, en cal/s en un resistor de R ohms es $r = RI^2$. Calcule la rapidez media a la cual se produce calor durante un ciclo completo.



C **Ejercicios 53 – 54: Use la gráfica de f para determinar la expresión más simple $g(x)$ tal que la ecuación $f(x) = g(x)$ sea una identidad. Compruebe la identidad.**

53 $f(x) = \dfrac{\text{sen}\,2x + \text{sen}\,x}{\cos 2x + \cos x + 1}$

54 $f(x) = \dfrac{\text{sen}\,x\,(1 + \cos 2x)}{\text{sen}\,2x}$

7.5 FÓRMULAS DE PRODUCTO A SUMA Y DE SUMA A PRODUCTO

Las fórmulas que siguen pueden emplearse para cambiar la forma de algunas expresiones trigonométricas de productos a sumas. Se les llama **fórmulas de producto a suma**, aun cuando dos de ellas expresen un producto como una diferencia, ya que cualquier diferencia $x - y$ de dos números rales, también es la suma $x + (-y)$.

Fórmulas de producto a suma

(1) $\operatorname{sen} u \cos v = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(u+v) + \operatorname{sen}(u-v)]$

(2) $\cos u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(u+v) - \operatorname{sen}(u-v)]$

(3) $\cos u \cos v = \frac{1}{2}[\cos(u+v) + \cos(u-v)]$

(4) $\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2}[\cos(u-v) - \cos(u+v)]$

DEMOSTRACIÓN Súmense los dos miembros de las fórmulas de adición y sustracción para la función seno, como sigue:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(u+v) &= \operatorname{sen} u \cos v + \cos v \operatorname{sen} v \\ \operatorname{sen}(u-v) &= \operatorname{sen} u \cos v - \cos v \operatorname{sen} v \\ \hline \operatorname{sen}(u+v) + \operatorname{sen}(u-v) &= 2 \operatorname{sen} u \cos v \end{aligned}$$

Dividiendo entre 2 ambos miembros de la última ecuación se llega a la fórmula (1).

La fórmula (2) se obtiene *restando* los miembros primero y segundo de las fórmulas de suma y resta de la función seno. Las fórmulas (3) y (4) se tratan en forma semejante, usando las fórmulas de adición y sustracción de la función coseno. ■

EJEMPLO 1 ***Uso de las fórmulas de producto a suma***

Expresar en forma de suma:

(a) $\operatorname{sen} 4\theta \cos 3\theta$ **(b)** $\operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} x$

SOLUCIÓN

(a) Se usa la fórmula (1) de producto a suma con $u = 4\theta$ y $v = 3\theta$:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 4\theta \cos 3\theta &= \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(4\theta + 3\theta) + \operatorname{sen}(4\theta - 3\theta)] \\ &= \tfrac{1}{2}(\operatorname{sen} 7\theta + \operatorname{sen} \theta) \end{aligned}$$

También se obtiene esta relación si se usa la fórmula (2) de producto a suma.

(b) Se utiliza la fórmula (4) de producto a suma con $u = 3x$ y $v = x$:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} x &= \tfrac{1}{2}[\cos(3x - x) - \cos(3x + x)] \\ &= \tfrac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) \end{aligned}$$

Es posible usar las fórmulas de producto a suma para expresar una suma o diferencia en forma de producto. Para obtener formas que se puedan aplicar con más facilidad, se cambia la notación como sigue: Si se hace

$$u + v = a \qquad \text{y} \qquad u - v = b,$$

entonces $(u + v) + (u - v) = a + b$, que se simplifica a

$$u = \frac{a + b}{2}.$$

Igualmente, como $(u + v) - (u - v) = a - b$,

$$v = \frac{a - b}{2}.$$

Ahora sustituimos $u + v$ y $u - v$ en el segundo miembro de las fórmulas de producto a suma, y u y v en el primer miembro. Si a continuación se multiplica por 2, se obtiene lo siguiente.

Fórmulas de suma a producto

(1) $\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen} \dfrac{a+b}{2} \cos \dfrac{a-b}{2}$

(2) $\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2 \cos \dfrac{a+b}{2} \operatorname{sen} \dfrac{a-b}{2}$

(3) $\cos a + \cos b = 2 \cos \dfrac{a+b}{2} \cos \dfrac{a-b}{2}$

(4) $\cos a - \cos b = -2 \operatorname{sen} \dfrac{a+b}{2} \operatorname{sen} \dfrac{a-b}{2}$

EJEMPLO 2 ***Uso de una fórmula de suma a producto***

Expresar $\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} 3x$ como producto.

SOLUCIÓN Se usa la fórmula (2) de suma a producto con $a = 5x$ y $b = 3x$:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} 3x &= 2 \cos \frac{5x + 3x}{2} \operatorname{sen} \frac{5x - 3x}{2} \\ &= 2 \cos 4x \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 ***Uso de fórmulas de suma a producto para comprobar una identidad***

Verificar la identidad $\dfrac{\operatorname{sen} 3t + \operatorname{sen} 5t}{\cos 3t - \cos 5t} = \cot t$.

SOLUCIÓN Primero se emplea una fórmula de suma a producto para el numerador y otra para el denominador:

$$\frac{\operatorname{sen} 3t + \operatorname{sen} 5t}{\cos 3t - \cos 5t} = \frac{2 \operatorname{sen} \dfrac{3t + 5t}{2} \cos \dfrac{3t - 5t}{2}}{-2 \operatorname{sen} \dfrac{3t + 5t}{2} \operatorname{sen} \dfrac{3t - 5t}{2}}$$

fórmulas (1) y (4) de suma a producto

$$= \frac{2 \operatorname{sen} 4t \cos(-t)}{-2 \operatorname{sen} 4t \operatorname{sen}(-t)}$$ se simplifica

$$= \frac{\cos(-t)}{-\operatorname{sen}(-t)}$$ se cancela $2 \operatorname{sen} 4t$

$$= \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}$$ fórmulas para ángulos negativos

$$= \cot t$$ identidad de cotangente

EJEMPLO 4 *Uso de una fórmula de suma a producto para resolver una ecuación*

Determinar las soluciones de $\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} x = 0$.

SOLUCIÓN

$$\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} x = 0$$ ecuación dada

$$2 \operatorname{sen} \frac{5x + x}{2} \cos \frac{5x - x}{2} = 0$$ fórmula (1) de suma a producto

$$\operatorname{sen} 3x \cos 2x = 0$$ se simplifica y se divide entre 2

$$\operatorname{sen} 3x = 0, \quad \cos 2x = 0$$ se iguala a cero cada factor

Las soluciones de las últimas dos ecuaciones son

$$3x = \pi n \quad \text{y} \quad 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \text{ para todo entero n.}$$

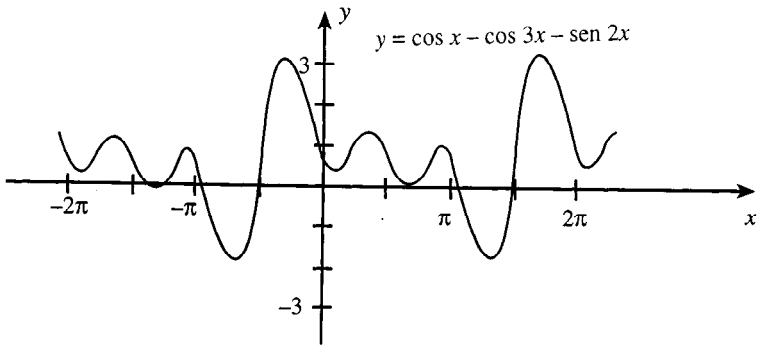
Dividiendo entre 3 y 2, respectivamente, se obtiene

$$\frac{\pi}{3} n \quad \text{y} \quad \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n, \text{ para todo entero } n.$$

EJEMPLO 5 *Cálculo de las abscisas en el origen de una gráfica*

En la Fig. 7.17 se muestra una gráfica de la ecuación $y = \cos x - \cos 3x - \operatorname{sen} 2x$. Calcular las 13 abscisas en el origen que están en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

FIGURA 7.17



SOLUCIÓN Para calcular las abscisas en el origen, se procederá como sigue:

$$\cos x - \cos 3x - \operatorname{sen} 2x = 0 \quad \text{sea } y = 0$$

$$(\cos x - \cos 3x) - \operatorname{sen} 2x = 0 \quad \text{se agrupan los dos primeros términos}$$

$$-2 \operatorname{sen} \frac{x + 3x}{2} \operatorname{sen} \frac{x - 3x}{2} - \operatorname{sen} 2x = 0 \quad \text{fórmula (4) de suma a producto}$$

$$-2 \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen}(-x) - \operatorname{sen} 2x = 0 \quad \text{se simplifica}$$

$$2 \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x = 0 \quad \text{fórmula para ángulos negativos}$$

$$\operatorname{sen} 2x\,(2 \operatorname{sen} x - 1) = 0 \quad \text{se saca sen } 2x \text{ como factor común}$$

$$\operatorname{sen} 2x = 0, \quad 2 \operatorname{sen} x - 1 = 0 \quad \text{se iguala a 0 cada factor}$$

$$\operatorname{sen} 2x = 0, \qquad \operatorname{sen} x = \tfrac{1}{2} \quad \text{se despeja sen } x$$

La ecuación sen $2x = 0$ tiene como soluciones $2x = \pi n$, o bien, dividiendo entre 2,

$$x = \frac{\pi}{2} n \text{ para todo entero } n.$$

Si se hace que $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ y ± 4, se obtienen 9 abscisas en el origen en $[-2\pi, 2\pi]$:

$$0, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm 2\pi$$

Las soluciones de la ecuación sen $x = \frac{1}{2}$ son

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad \text{y} \quad \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad \text{para todo entero } n.$$

Las cuatro soluciones en $[-2\pi, 2\pi]$ se obtienen haciendo $n = 0$ y $n = -1$:

$$\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, -\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}$$

EJERCICIOS 7.5

Ejercicios 1– 8: Exprese como suma o diferencia.

1 sen $7t$ sen $3t$

2 sen $(-4x)$ cos $8x$

3 cos $6u$ cos $(-4u)$

4 cos $4t$ sen $6t$

5 2 sen 9θ cos 3θ

6 2 sen 7θ sen 5θ

7 3 cos x sen $2x$

8 5 cos u cos $5u$

Ejercicios 9 –16: Exprese en forma de producto.

9 sen 6θ + sen 2θ

10 sen 4θ – sen 8θ

11 cos $5x$ – cos $3x$

12 cos $5t$ + cos $6t$

13 sen $3t$ – sen $7t$

14 cos θ – cos 5θ

15 cos x + cos $2x$

16 sen $8t$ + sen $2t$

Ejercicios 17–24: Compruebe la identidad.

17 $\dfrac{\operatorname{sen} 4t + \operatorname{sen} 6t}{\cos 4t - \cos 6t} = \cot t$

18 $\dfrac{\operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} 3\theta}{\cos \theta + \cos 3\theta} = \tan 2\theta$

19 $\dfrac{\operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v}{\cos u + \cos v} = \tan \dfrac{1}{2}(u + v)$

20 $\dfrac{\operatorname{sen} u - \operatorname{sen} v}{\cos u - \cos v} = -\cot \dfrac{1}{2}(u + v)$

21 $\dfrac{\operatorname{sen} u - \operatorname{sen} v}{\operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v} = \dfrac{\tan \frac{1}{2}(u - v)}{\tan \frac{1}{2}(u + v)}$

22 $\dfrac{\cos u - \cos v}{\cos u + \cos v} = -\tan \dfrac{1}{2}(u + v) \tan \dfrac{1}{2}(u - v)$

23 $4 \cos x \cos 2x \operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 6x$

24 $\dfrac{\cos t + \cos 4t + \cos 7t}{\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 4t + \operatorname{sen} 7t} = \cot 4t$

Ejercicios 25 y 26: Exprese en forma de suma.

25 $(\operatorname{sen} ax)(\cos bx)$ **26** $(\cos au)(\cos bu)$

Ejercicios 27–34: Use las fórmulas de suma a producto para determinar las soluciones de la ecuación.

27 $\operatorname{sen} 5t + \operatorname{sen} 3t$ **28** $\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 3t = \operatorname{sen} 2t$

29 $\cos x = \cos 3x$ **30** $\cos 4x - \cos 3x = 0$

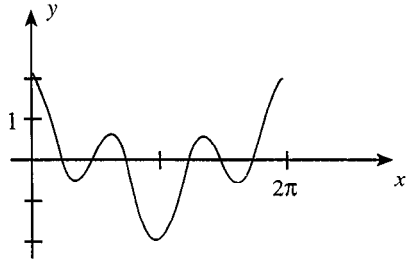
31 $\cos 3x + \cos 5x = \cos x$ **32** $\cos 3x = -\cos 6x$

33 $\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} 5x = 0$

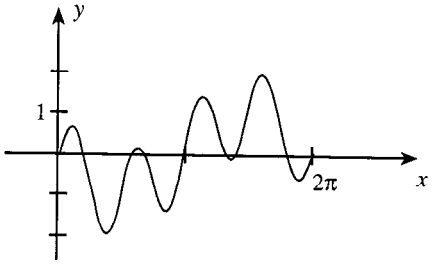
34 $\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} x = 2 \cos 3x$

Ejercicios 35 y 36: La figura es la gráfica de la función f para $0 \le x \le 2\pi$. Ayúdese con una fórmula de suma a producto para determinar las abscisas en el origen

35 $f(x) = \cos x + \cos 3x$



36 $f(x) = \operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen} x$



37 En el Ejercicio 45 de la Secc. 7.4 la gráfica de $y = \cos 3x - 3 \cos x$ tiene 13 puntos de cambio de dirección para $-2\pi \le x \le 2\pi$. Las abscisas de esos puntos son soluciones de la ecuación $\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x = 0$. Use una fórmula de suma a producto para determinar esas abscisas en el origen.

38 En el Ejercicio 46 de la Secc. 7.4 las abscisas de los puntos de cambio de dirección de la gráfica de $y = \operatorname{sen} 4x - 4 \operatorname{sen} x$ son soluciones de la ecuación $\cos 4x - \cos x = 0$. Use una fórmula de suma a producto para determinar esas abscisas para $-2\pi \le x \le 2\pi$.

39 ***Vibración de una cuerda de violín*** En el análsis matemático de una cuerda de violín de longitud l se usan funciones como

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \cos\left(\frac{k\pi n}{l} t\right),$$

en la cual n es un entero, k es una constante y t es el tiempo. Expresar f como suma de dos funciones seno.

40 ***Presión sobre el tímpano*** Si dos diapasones se golpean en forma simultánea con la misma fuerza y se mantienen a la misma distancia del tímpano, la presión sobre el exterior de éste, en el instante t, es

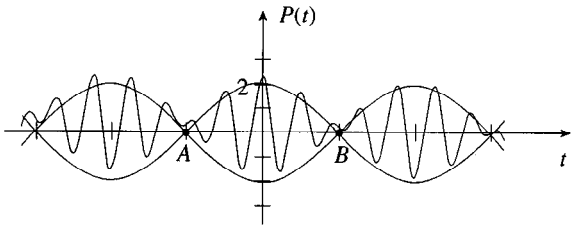
$$p(t) = a \cos \omega_1 t + a \cos \omega_2 t,$$

en la cual a, ω_1 y ω_2 son constantes. Si ω_1 y ω_2 son casi iguales, se produce un tono que alterna entre el sonido y el silencio virtual. A este fenómeno se le conoce como pulsación.

(a) Use una fórmula de suma a producto para expresar $p(t)$ como función de un producto.

(b) Demuestre que se puede considerar que $p(t)$ es una onda cosenoidal con periodo aproximado $2\pi/\omega_1$ y una amplitud variable $f(t) = 2a \cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t$. Determine la amplitud máxima.

(c) En la figura se tiene una gráfica de la ecuación $p(t) = \cos 4.5t + \cos 3.5t$. En los puntos A y B ocurre un silencio casi total, porque en ellos es cero la amplitud variable $f(t)$ del inciso (b). Determine las coordenadas de esos puntos, y calcule con qué frecuencia se presenta el silencio casi total.



(d) Use la gráfica para mostrar que la función p del inciso (c) tiene un periodo 4π. Concluya que la amplitud máxima de 2 se presenta cada 4π unidades de tiempo.

C **Ejercicios 41 y 42: Grafique f en el intervalo $[-\pi, \pi]$.**

(a) Estime las abscisas en el origen.

(b) Con fórmulas de suma a producto calcule los valores exactos de las abscisas en el origen.

41 $f(x) = \operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 2x$

C **42** $f(x) = \cos 3x - \cos 2x$

Ejercicios 43 y 44: Use la gráfica de f para determinar la expresión más simple $g(x)$ tal que la ecuación $f(x) = g(x)$ sea una identidad. Verifique esa identidad.

43 $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x}$

44 $f(x) = \dfrac{\cos x - \cos 2x + \cos 3x}{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x}$

7.6 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Recuérdese de la Secc. 3.8 que para definir la función inversa f^{-1}, de una función f, es esencial que f sea biunívoca. Es decir, si $a \neq b$ en el dominio de f, entonces $f(a) \neq f(b)$. La función inversa, f^{-1}, *invierte* la correspondencia definida por f. Es decir,

$$u = f(v) \quad \text{si y sólo si} \quad v = f^{-1}(u).$$

En la Secc. 3.8 se explicaron las siguientes relaciones generales donde intervienen f y f^{-1}.

Relaciones entre f^{-1} y f

(1) $y = f^{-1}(x)$ si y sólo si $x = f(y)$, en la cual x está en el dominio de f^{-1} y y está en el dominio de f.

(2) dominio de f^{-1} = contradominio de f

(3) contradominio de f^{-1} = dominio de f

(4) $f(f^{-1}(x)) = x$ para toda x en el dominio de f^{-1}

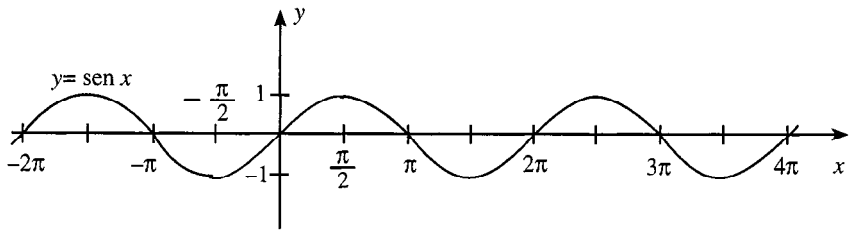
(5) $f^{-1}(f(y)) = y$ para toda y en el dominio de f

(6) Las gráficas de f^{-1} y f son reflexiones entre sí que pasan por la recta $y = x$.

Se usará la relación (1) para definir cada una de las funciones trigonométricas inversas.

La función seno no es biunívoca, ya que con distintos números, como $\pi/6$, $5\pi/6$ y $-7\pi/6$, la función produce el mismo valor $(\frac{1}{2})$. Si restringimos el dominio a $[-\pi/2, \pi/2]$, entonces, como se ve en la parte marcada de la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ en la Fig. 7.18, se obtiene una función biunívoca, creciente, que adopta cada valor de la función seno tan sólo una vez. Se usará esta función *nueva*, cuyo dominio es $[-\pi/2, \pi/2]$ y cuyo contradominio es $[-1, 1]$, para definir la *función inversa del seno*.

FIGURA 7.18



Definición de la función inversa del seno

La **función inversa del seno**, representada por sen^{-1}, se define mediante

$$y = \text{sen}^{-1}x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \text{sen } y$$

para $-1 \le x \le 1$, y también $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$.

El dominio de la función inversa del seno es $[-1, 1]$, y el contradominio es $[-\pi/2,\pi/2]$.

A veces, la notación $y = \text{sen}^{-1}x$ se lee "y es el seno inverso de x." La ecuación $x = \text{sen } y$ de la definición nos permite considerar que y es un ángulo, de modo que $y = \text{sen}^{-1}x$ se puede leer también "y es el ángulo cuyo seno es x", para $-\pi/2 \le y \le \pi/2$.

También, a la función inversa del seno se le llama **función arco seno**, y que se simboliza por arcsen x, o arc sen x, en lugar de $\text{sen}^{-1}x$. Si t = arc sen x, entonces sen $t = x$, y t se puede interpretar como una *longitud de arco* en la circunferencia unitaria U con centro en el origen. Se utilizarán ambas notaciones, sen^{-1} y arcsen, o arc sen, cuando sea necesario.

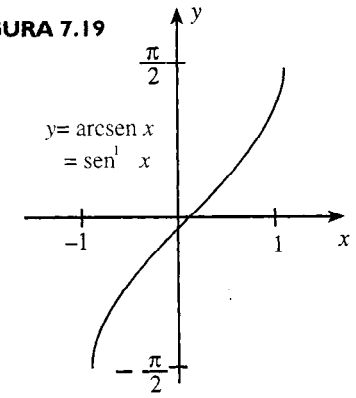
En el cuadro siguiente se presentan algunos valores de la función inversa del seno.

☞ Advertencia

Es *esencial* escoger el valor y entre los límites $[-\pi/2, \pi/2]$ de sen^{-1}. Así, aun cuando $\text{sen}(3\pi/4) = \sqrt{2}/2$, el número $y = 3\pi/4$ no es el valor de la función inversa $\text{sen}^{-1}(\sqrt{2}/2)$.

Ecuación	Enunciado equivalente		Solución
$y = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$	$\text{sen } y = \frac{1}{2}$	y $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$	$y = \frac{\pi}{6}$
$y = \text{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\text{sen } y = -\frac{1}{2}$	y $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$	$y = -\frac{\pi}{6}$
$y = \text{sen}^{-1}(1)$	$\text{sen } y = 1$	y $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$	$y = \frac{\pi}{2}$
$y = \text{arcsen}(0)$	$\text{sen } y = 0$	y $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$	$y = 0$
$y = \text{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\text{sen } y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	y $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$	$y = -\frac{\pi}{3}$

FIGURA 7.19



Así, queda justificado el método de resolver una ecuación de la forma sen $\theta = k$ como se explicó en el Cap. 6. Se observa que la tecla SIN^{-1}, o SEN^{-1}, de la calculadora, que sirve para obtener θ sen^{-1} k, produce el valor de la función inversa del seno.

La relación (6) para las gráficas de f y f^{-1} nos dice que se puede trazar la gráfica de $y = \text{sen}^{-1}x$ reflejando la parte marcada de la Fig. 7.18 en la recta $y = x$. También es posible emplear la ecuación $x = \text{sen } y$ con la restricción $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ para ubicar puntos de la gráfica. De este modo se obtiene la Fig. 7.19.

La relación (4), $f(f^{-1}(x)) = x$, y la (5), $f^{-1}(f(y)) = y$, que son válidas para toda función inversa, f^{-1}, producen las siguientes propiedades.

Propiedades de sen^{-1}

(1) $\text{sen}(\text{sen}^{-1}x) = \text{sen}(\text{arcsen } x) = x$, si $-1 \leq x \leq 1$

(2) $\text{sen}^{-1}(\text{sen } y) = \text{arcsen}(\text{sen } y) = y$, si $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

EJEMPLO 1 *Uso de las propiedades de* sen^{-1}

Calcular el valor exacto:

(a) $\text{sen}(\text{sen}^{-1}\frac{1}{2})$ **(b)** $\text{sen}^{-1}\left(\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$ **(c)** $\text{sen}^{-1}\left(\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$

SOLUCIÓN

(a) El método *difícil* para calcular el valor de esta expresión es determinar primero el ángulo $\text{sen}^{-1}\frac{1}{2}$, que es $\pi/6$, para después evaluar $\text{sen}(\pi/6)$, y obtener $\frac{1}{2}$. El método *fácil* es usar la propiedad (1) de sen^{-1} como sigue:

$$\text{sen}(\text{sen}^{-1}\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}, \text{ ya que } -1 < \tfrac{1}{2} < 1$$

(b) Como $-\pi/2 < \pi/4 \leq \pi/2$, se puede utilizar la propiedad (2) de sen^{-1} para obtener

$$\text{sen}^{-1}\left(\text{sen}\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

(c) ¡Cuidado! Como $2\pi/3$ *no está* entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, no se puede usar la propiedad (2) de sen^{-1}. En lugar de ello, primero se evalúa la expresión interior, $\text{sen}(2\pi/3)$, y después se usa la definición de sen^{-1}, como sigue:

$$\text{sen}^{-1}\left(\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

EJEMPLO 2 *Determinación de un valor de* sen^{-1}

Calcular el valor exacto de $\text{sen}^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$.

SOLUCIÓN No es posible usar la propiedad (2) de sen^{-1}, porque la expresión dada no tiene la forma $\text{sen}^{-1}(\text{sen } y)$. En vez de ello, primero se evalúa la expresión interior, $\tan(3\pi/4)$ y, a continuación, se calcula el seno inverso de ese número. Si

$$y = \text{sen}^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right),$$

entonces

$$y = \text{sen}^{-1}(-1).$$

Por definición,

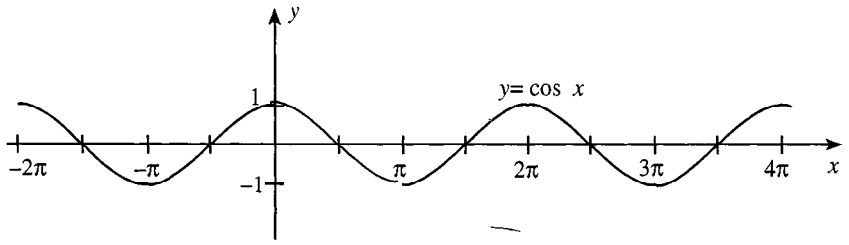
$$\text{sen } y = -1 \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}.$$

Se concluye que $y = -\pi/2$, y por consiguiente,

$$\text{sen}^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Las otras funciones trigonométricas también pueden servir para expresar lo que son sus inversas. El procedimiento es determinar primero un subconjunto conveniente del dominio para obtener una función biunívoca. Si el dominio de la función coseno se restringe al intervalo $[0, \pi]$, como se ve en la parte continua de la gráfica de $y = \cos x$ de la Fig. 7.20, se obtiene una función biunívoca, decreciente, que asume cada valor de la función coseno tan sólo una vez. Así que se usa esta función *nueva* con dominio $[0, \pi]$ y contradominio $[-1, 1]$ para definir la *función inversa del coseno*.

FIGURA 7.20



Definición de la función inversa del coseno

La **función inversa del coseno**, representada por $\cos^{-1}$, se define como

$$y = \cos^{-1}x \quad \text{si, y sólo si} \quad x = \cos y$$

para $-1 \le x \le 1$ y también $0 \le y \le \pi$.

El dominio de la función inversa del coseno es $[-1, 1]$, y el contradominio, $[0, \pi]$.

La notación $y = \cos^{-1}x$ se puede leer "y es el coseno inverso de x", o bien "y es el ángulo cuyo coseno es x", para $0 \le y \le \pi$.

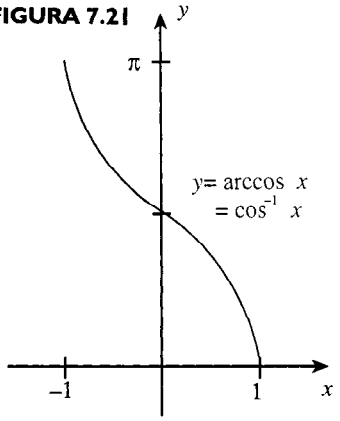
También, a la función inversa del coseno se le llama **función arco coseno**, y se usan de manera indistinta las notaciones arccos x, arc cos x, y $\cos^{-1}x$.

En el siguiente cuadro se da una lista de algunos valores de la función inversa del coseno.

☞ **Advertencia**

Es *esencial* escoger el valor y en el contradominio $[0, \pi]$ de $\cos^{-1}$.

FIGURA 7.21



Ecuación	Enunciado equivalente	Solución
$y = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$	$\cos y = \frac{1}{2}$ y $0 \le y \le \pi$	$y = \frac{\pi}{3}$
$y = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\cos y = -\frac{1}{2}$ y $0 \le y \le \pi$	$y = \frac{2\pi}{3}$
$y = \cos^{-1}(1)$	$\cos y = 1$ y $0 \le y \le \pi$	$y = 0$
$y = \arccos(0)$	$\cos y = 0$ y $0 \le y \le \pi$	$y = \frac{\pi}{2}$
$y = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\cos y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $0 \le y \le \pi$	$y = \frac{5\pi}{6}$

El trazo de la gráfica de $y = \cos^{-1}x$ se puede hacer reflejando la parte de línea continua de la Fig. 7.20 en la recta $y = x$. De esta manera se obtiene la Fig. 7.21. También se podría usar la ecuación $x = \cos y$, con $0 \le y \le \pi$ para determinar puntos en la gráfica. Como se ve, *los valores de la función inversa del coseno nunca son negativos.*

Con las relaciones (4) y (5) para las funciones inversas en general, f y f^{-1}, se obtienen las siguientes propiedades:

Propiedades de $\cos^{-1}$

(1) $\cos(\cos^{-1}x) = \cos(\arccos x) = x$ si $-1 \le x \le 1$

(2) $\cos^{-1}(\cos y) = \arccos(\cos y) = y$ si $0 \le y \le \pi$

EJEMPLO 3 ***Uso de las propiedades de*** $\cos^{-1}$

Calcular el valor exacto:

(a) $\cos[\cos^{-1}(-0.5)]$ **(b)** $\cos^{-1}(\cos 3.14)$ **(c)** $\cos^{-1}\left[\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

SOLUCIÓN Para los incisos (a) y (b) se pueden usar las propiedades de $\cos^{-1}$.

(a) $\cos[\cos^{-1}(-0.5)] = -0.5$, ya que $-1 < -0.5 < 1$.

(b) $\cos^{-1}(\cos 3.14) = 3.14$, puesto que $0 < 3.14 < \pi$.

(c) Primero se calcula $\operatorname{sen}(-\pi/6)$ y, a continuación, se usa la definición de $\cos^{-1}$, como sigue:

$$\cos^{-1}\left[\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

EJEMPLO 4 ***Cálculo del valor de una función trigonométrica***

Determinar el valor exacto de sen [arccos $(-\frac{2}{3})$].

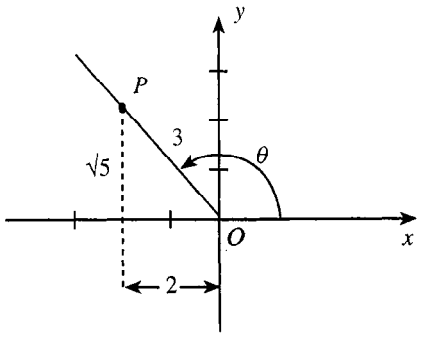
SOLUCIÓN No se puede usar la propiedad (1) de $\cos^{-1}$, porque la expresión dada no tiene la forma cos $(\cos^{-1} x)$. Sin embargo, si se hace

$$\theta = \arccos\left(-\tfrac{2}{3}\right),$$

entonces, usando la definición de la función inversa del coseno, se tiene que

$$\cos\theta = -\tfrac{2}{3} \quad \text{y} \quad 0 \le \theta \le \pi .$$

FIGURA 7.22



Por lo tanto, θ está en el cuadrante II, como se ve en la Fig. 7.22. Si se escoge el punto P en el lado terminal, con abscisa -2, la hipotenusa del triángulo en la figura debe tener longitud 3, ya que $\cos\theta = -\frac{2}{3}$. Así, según el teorema de Pitágoras, la ordenada de P es

$$\sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5},$$

y, por consiguiente,

$$\text{sen}\left[\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right] = \text{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

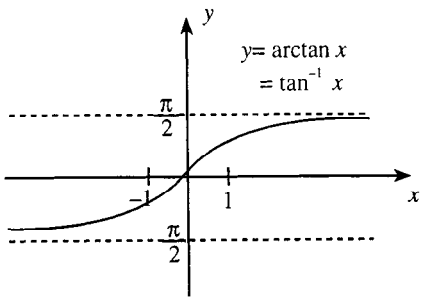
Si el dominio de la función tangente se restringe al intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$, se obtiene una función biunívoca, creciente (véase la Fig. 7.3 , Pág. 416). Se usa esta *nueva* función para definir la *función inversa de la tangente.*

Definición de la función inversa de la tangente

La **función inversa de la tangente, o sea la función arco tangente**, representada por $\tan^{-1}$, o por arctan (o bien arc tan), se define como

$$y = \tan^{-1} x = \arctan x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \tan y$$

para todo número real x, y para $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.



El dominio de la función arco tangente es $\mathbb{R}$, y el contradominio es el intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$.

La gráfica de $y = \tan^{-1} x$ en la Fig. 7.23 se obtiene al trazar la gráfica de $x = \tan y$, para $-\pi/2 < y < \pi/2$.

Como en el caso de sen^{-1} y $\cos^{-1}$, se tiene lo siguiente para $\tan^{-1}$.

Propiedades de $\tan^{-1}$

(1) $\tan(\tan^{-1}x) = \tan(\arctan x) = x$, para toda x

(2) $\tan^{-1}(\tan y) = \arctan(\tan y) = y$, si $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

EJEMPLO 5 ***Uso de las propiedades de $\tan^{-1}$***

Calcular el valor exacto de:

(a) $\tan(\tan^{-1} 1000)$ **(b)** $\tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)$ **(c)** $\arctan(\tan \pi)$

SOLUCIÓN

(a) Según la propiedad (1) de $\tan^{-1}$,

$$\tan(\tan^{-1} 1000) = 1000.$$

(b) Ya que $-\pi/2 < \pi/4 < \pi/2$, se tiene que, según la propiedad (2) de $\tan^{-1}$,

$$\tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

(c) Como $\pi > \pi/2$, no es posible usar la segunda propiedad de $\tan^{-1}$. Así, primero se determina $\tan \pi$ y después se evalúa como sigue:

$$\arctan(\tan \pi) = \arctan 0 = 0$$

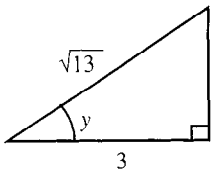
EJEMPLO 6 ***Cálculo del valor de una función trigonométrica***

Determinar el valor exacto de $\sec(\arctan\frac{2}{3})$.

SOLUCIÓN Si se hace $y = \arctan\frac{2}{3}$, entonces $\tan y = \frac{2}{3}$. El objetivo es determinar $\sec y$.

Como $-\pi/2 < \arctan x < \pi/2$ para toda x, y $\tan y > 0$, se concluye que $0 < y < \pi/2$. Así, podemos considerar que y es la medida en radianes de un ángulo de un triángulo rectángulo tal que $\tan y = \frac{2}{3}$, como se ve en la Fig. 7.24. Según el teorema de Pitágoras, se tiene que la hipotenusa es $\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$. En relación con el triángulo se obtiene

FIGURA 7.24



$$\sec\left(\arctan\frac{2}{3}\right) = \sec y = \frac{\sqrt{13}}{3}.$$

EJEMPLO 7 ***Cálculo del valor de una función trigonométrica***

Determinar el valor exacto de $\operatorname{sen}(\arctan\frac{1}{2} - \arccos\frac{4}{5})$.

SOLUCIÓN Si hacemos

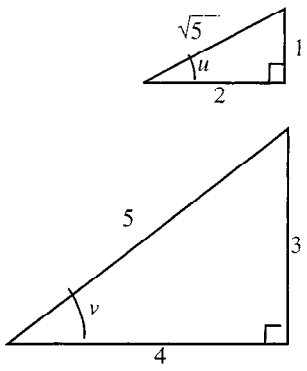
$$u = \arctan\tfrac{1}{2} \quad \text{y} \quad v = \arccos\tfrac{4}{5},$$

entonces

$$\tan u = \tfrac{1}{2} \quad \text{y} \quad \cos v = \tfrac{4}{5}.$$

La meta es calcular sen$(u - v)$. Como u y v están en el intervalo $(0, \pi/2)$, se pueden considerar como las medidas en radianes de ángulos agudos positivos, lo cual permite referirse a los triángulos rectángulos de la Fig. 7.25. Así, se obtiene

FIGURA 7 25



$$\operatorname{sen} u = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos u = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \operatorname{sen} v = \frac{3}{5}, \quad \cos v = \frac{4}{5}.$$

En consecuencia,

$$\operatorname{sen}(u - v) = \operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{4}{5} - \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{3}{5}$$

$$= \frac{-2}{5\sqrt{5}} = \frac{-2\sqrt{5}}{25}.$$

EJEMPLO 8 ***Transformación de una expresión donde interviene*** $\operatorname{sen}^{-1} x$ ***a una expresión algebraica***

Si $-1 \le x \le 1$, transformar $\cos(\operatorname{sen}^{-1} x)$ a una expresión algebraica en x.

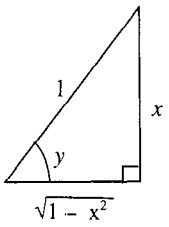
SOLUCIÓN Sea

$$y = \operatorname{sen}^{-1} x, \qquad \text{o bien, lo que es lo mismo,} \qquad \operatorname{sen} y = x.$$

Se trata de expresar $\cos y$ en términos de x. Como $-\pi/2 \le y \le \pi/2$, se ve que $\cos y \ge 0$ y, por consiguiente,

$$\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

FIGURA 7.26



Por lo tanto, $\cos(\operatorname{sen}^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$.

La última identidad también es evidente desde un punto de vista geométrico si $0 < x < 1$. En este caso, $0 < y < \pi/2$, y se puede considerar que y es la medida en radianes de un ángulo en un triángulo rectángulo tal que $\operatorname{sen} y = x$, como se ve en la Fig. 7.26. El lado de longitud $\sqrt{1 - x^2}$ se determina con el teorema de Pitágoras. En relación con este triángulo, se tiene que

$$\cos(\operatorname{sen}^{-1} x) = \cos y = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{1} = \sqrt{1 - x^2}.$$

La mayor parte de las ecuaciones trigonométricas estudiadas en la Secc. 6.2 tenían soluciones que eran múltiplos racionales de π, como $\pi/3$, $3\pi/4$, π, etc. Si las soluciones de las ecuaciones trigonométricas no son de ese tipo, a veces es posible emplear las funciones inversas para expresarlas en forma exacta, como se ve en el ejemplo que sigue.

EJEMPLO 9 ***Uso de las funciones trigonométricas inversas para resolver una ecuación***

Determinar las soluciones de la ecuación $5 \operatorname{sen}^2 t + 3 \operatorname{sen} t - 1 = 0$, que estén en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.

SOLUCIÓN Se puede considerar que la ecuación es cuadrática en sen t. Así que se usa la fórmula del discriminante, o fórmula cuadrática:

$$\operatorname{sen} t = \frac{-3 \pm \sqrt{9+20}}{10} = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{10}$$

Empleando la definición de la función inversa del seno, se obtienen las soluciones siguientes:

$$t = \operatorname{sen}^{-1} \tfrac{1}{10}(-3+\sqrt{29}) \approx 0.2408$$
$$t = \operatorname{sen}^{-1} \tfrac{1}{10}(-3-\sqrt{29}) \approx -0.9946$$

En el ejemplo que sigue veremos una de tantas identidades válidas para las funciones trigonométricas inversas.

EJEMPLO 10 ***Comprobación de una identidad que incluye funciones trigonométricas inversas***

Verificar la identidad $\operatorname{sen}^{-1} x + \cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$, para $-1 \le x \le 1$.

SOLUCIÓN Sean

$$\alpha = \operatorname{sen}^{-1} x \qquad \text{y} \qquad \beta = \cos^{-1} x.$$

Se quiere demostrar que $\alpha + \beta = \pi/2$. De acuerdo con las definiciones de sen^{-1} y $\cos^{-1}$,

$$\operatorname{sen} \alpha = x \quad \text{para} \quad -\tfrac{\pi}{2} \le \alpha \le \tfrac{\pi}{2}$$

y

$$\cos \beta = x \quad \text{para} \quad 0 \le \beta \le \pi.$$

Sumando las dos desigualdades de la derecha, se observa que

$$-\frac{\pi}{2} \le \alpha + \beta \le \frac{3\pi}{2}.$$

Asimismo nótese que

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \sqrt{1 - x^2}$$

y que

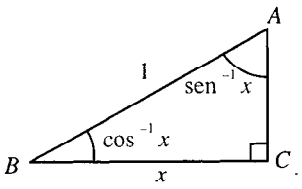
$$\operatorname{sen} \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Con una de las fórmulas de suma de ángulos, se obtiene

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta \\ &= x \cdot x + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2} \\ &= x^2 + (1 - x^2) = 1. \end{aligned}$$

Como $\alpha + \beta$ está en el intervalo $[-\pi/2, 3\pi/2]$, la ecuación $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = 1$ sólo tiene una solución, $\alpha + \beta = \pi/2$, lo cual completa la demostración.

FIGURA 7.27



Podemos interpretar geométricamente esa identidad si $0 < x < 1$. Si se construye un triángulo rectángulo que tenga un cateto de longitud x, y una hipotenusa de longitud 1, como en la Fig. 7.27, entonces el ángulo β en B tiene coseno igual a x; es decir, $\beta = \cos^{-1} x$. Igualmente, el ángulo α en A es uno cuyo seno es x, o sea, $\alpha = \operatorname{sen}^{-1} x$. Como los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios,

$$\operatorname{sen}^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}.$$

Cada una de las funciones trigonométricas inversas restantes se define del mismo modo que las primeras tres, seleccionando un dominio D en el cual la función trigonométrica correspondiente sea biunívoca; después se usa la técnica normal, en la cual y está en D:

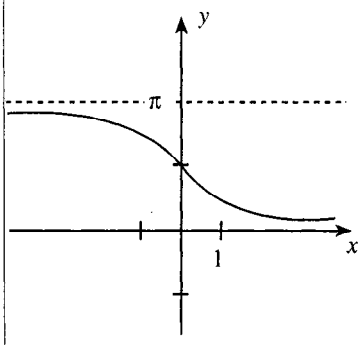
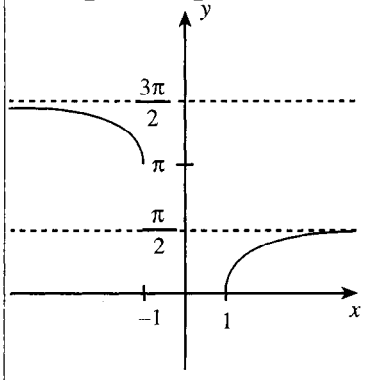
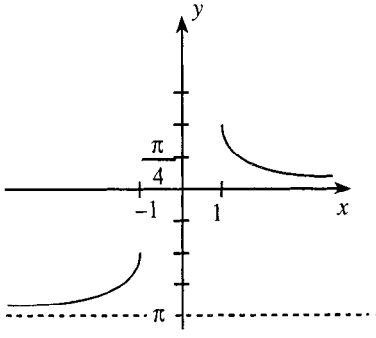
$$y = \cot^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \cot y$$

$$y = \sec^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \sec y$$

$$y = \csc^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \csc y$$

La función $\sec^{-1}$ se usa en Cálculo; sin embargo, casi nunca se emplean $\cot^{-1}$ ni $\csc^{-1}$. Debido a su aplicación limitada, no se verán ejemplos ni ejercicios relacionados con esas funciones. Tan sólo se presenta un resumen de sus dominios, contradominios y gráficas características en la tabla siguiente:

Resumen de propiedades de $\cot^{-1}$, $\sec^{-1}$ y $\csc^{-1}$

Característica	$y = \cot^{-1} x$	$y = \sec^{-1} x$	$y = \csc^{-1} x$
Dominio	$\mathbb{R}$	$\lvert x \rvert \geq 1$	$\lvert x \rvert \geq 1$
Contradominio	$(0, \pi)$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$
Gráfica			

EJERCICIOS 7.6

Ejercicios 1 – 22: Determine el valor exacto de la expresión en donde esté definida.

1 (a) $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ (c) $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$

2 (a) $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (c) $\tan^{-1}(-1)$

3 (a) $\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$ (c) $\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}$

4 (a) $\operatorname{arcsen} 0$ (b) $\arccos(-1)$ (c) $\arctan 0$

5 (a) $\operatorname{sen}^{-1}\frac{\pi}{3}$ (b) $\cos^{-1}\frac{\pi}{2}$ (c) $\tan^{-1} 1$

6 (a) $\operatorname{arcsen}\frac{\pi}{2}$ (b) $\arccos\frac{\pi}{3}$ (c) $\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

7 (a) $\operatorname{sen}\left[\operatorname{arcsen}\left(-\frac{3}{10}\right)\right]$ (b) $\cos\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$ (c) $\tan(\arctan 14)$

8 (a) $\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{2}{3}\right)$ (b) $\cos\left[\cos^{-1}\left(-\frac{1}{5}\right)\right]$ (c) $\tan\left[\tan^{-1}(-9)\right]$

9 (a) $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]$ (c) $\tan^{-1}\left[\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

10 (a) $\operatorname{arcsen}\left[\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$ (b) $\arccos(\cos 0)$ (c) $\arctan\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)$

11 (a) $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right)$ (b) $\arccos\left(\cos\frac{5\pi}{4}\right)$ (c) $\arctan\left(\tan\frac{7\pi}{4}\right)$

12 (a) $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right)$ (c) $\tan^{-1}\left(\tan\frac{7\pi}{6}\right)$

13 (a) $\operatorname{sen}\left[\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$ (b) $\cos(\tan^{-1} 1)$ (c) $\tan\left[\operatorname{sen}^{-1}(-1)\right]$

14 (a) $\operatorname{sen}(\tan^{-1}\sqrt{3})$ (b) $\cos(\operatorname{sen}^{-1} 1)$ (c) $\tan(\cos^{-1} 0)$

15 (a) $\cot\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{2}{3}\right)$ (b) $\sec\left[\tan^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$ (c) $\csc\left[\cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)\right]$

16 (a) $\cot\left[\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{2}{5}\right)\right]$ (b) $\sec\left(\tan^{-1}\frac{7}{4}\right)$ (c) $\csc\left(\cos^{-1}\frac{1}{5}\right)$

17 (a) $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\frac{1}{2} + \arccos 0\right)$
(b) $\cos\left[\arctan\left(-\frac{3}{4}\right) - \operatorname{arcsen}\frac{4}{5}\right]$
(c) $\tan\left(\arctan\frac{4}{3} + \arccos\frac{8}{17}\right)$

18 (a) $\operatorname{sen}\left[\operatorname{sen}^{-1}\frac{5}{13} - \cos^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$
(b) $\cos\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{4}{5} + \tan^{-1}\frac{3}{4}\right)$
(c) $\tan\left[\cos^{-1}\frac{1}{2} - \operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$

19 (a) $\operatorname{sen}\left[2\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$ (b) $\cos\left(2\operatorname{sen}^{-1}\frac{15}{17}\right)$ (c) $\tan\left(2\tan^{-1}\frac{3}{4}\right)$

20 (a) $\operatorname{sen}\left(2\tan^{-1}\frac{5}{12}\right)$ (b) $\cos\left(2\arccos\frac{9}{41}\right)$ (c) $\tan\left[2\operatorname{arcsen}\left(-\frac{8}{17}\right)\right]$

21 (a) $\operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{7}{25}\right)\right]$ (b) $\cos\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{8}{15}\right)$ (c) $\tan\left(\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{3}{5}\right)$

22 (a) $\operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$ (b) $\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{12}{13}\right)$ (c) $\tan\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{40}{9}\right)$

Ejercicios 23 – 30: Escriba en forma de expresión algebraica en x, para $x > 0$.

23 $\operatorname{sen}(\tan^{-1} x)$

24 $\tan(\arccos x)$

25 $\sec\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right)$

26 $\cot\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\right)$

27 $\operatorname{sen}(2\operatorname{sen}^{-1} x)$

28 $\cos(2\tan^{-1} x)$

29 $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)$

30 $\tan\left(\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1}{x}\right)$

Ejercicios 33 – 42: Trace la gráfica de la ecuación.

31 (a) Cuando $x \to -1^+$, $\operatorname{sen}^{-1} x \to$ _____
(b) Cuando $x \to 1^-$, $\cos^{-1} x \to$ _____
(c) Cuando $x \to \infty$, $\tan^{-1} x \to$ _____

32 (a) Cuando $x \to 1^-$, $\operatorname{sen}^{-1} x \to$ _____
(b) Cuando $x \to -1^+$, $\cos^{-1} x \to$ _____
(c) Cuando $x \to -\infty$, $\tan^{-1} x \to$ _____

Ejercicios 33–42: Trace la gráfica de la ecuación.

33 $y = \operatorname{sen}^{-1} 2x$

34 $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1} x$

35 $y = \operatorname{sen}^{-1}(x + 1)$

36 $y = \operatorname{sen}^{-1}(x - 2) + \frac{\pi}{2}$

37 $y = \cos^{-1} \frac{1}{2}x$

38 $y = 2\cos^{-1} x$

39 $y = 2 + \tan^{-1} x$

40 $y = \tan^{-1} 2x$

41 $y = \operatorname{sen}(\arccos x)$

42 $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x)$

Ejercicios 43 – 46: La ecuación dada tiene la forma $y = f(x)$. (a) Determine el dominio de f. **(b)** Determine el contradominio de f. **(c)** Despeje x en términos de y.

43 $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}(x - 3)$

44 $y = 3\tan^{-1}(2x + 1)$

45 $y = 4\cos^{-1}\frac{2}{3}x$

46 $y = 2\operatorname{sen}^{-1}(3x - 4)$

Ejercicios 47 – 50: Despeje x de la ecuación en términos de y si x está restringida al intervalo dado.

47 $y = -3 - \operatorname{sen} x; \quad \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

48 $y = 2 + 3\operatorname{sen} x; \quad \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

49 $y = 15 - 2\cos x; \quad [0, \pi]$

50 $y = 6 - 3\cos x; \quad [0, \pi]$

Ejercicios 51 y 52: Despeje x de la ecuación en términos de y si $0 < x < \pi$ y $0 < y < \pi$.

51 $\dfrac{\operatorname{sen} x}{3} = \dfrac{\operatorname{sen} y}{4}$

52 $\dfrac{4}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{7}{\operatorname{sen} y}$

Ejercicios 53 – 60: Emplee funciones trigonométricas inversas para determinar las soluciones de la ecuación que estén en el intervalo dado, y calcule aproximadamente las soluciones a cuatro cifras decimales.

53 $\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0; \quad [0, 2\pi)$

54 $\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0; \quad [0, 2\pi)$

55 $2\tan^2 t + 9\tan t + 3 = 0; \quad \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

56 $3\operatorname{sen}^2 t + 7\operatorname{sen} t + 3 = 0; \quad \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

57 $15\cos^4 x - 14\cos^2 x + 3 = 0; \quad [0, \pi]$

58 $3\tan^4 \theta - 19\tan^2 \theta + 2 = 0; \quad \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

59 $6\operatorname{sen}^3 \theta + 18\operatorname{sen}^2 \theta - 5\operatorname{sen} \theta - 15 = 0; \quad \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

60 $6\operatorname{sen} 2x - 8\cos x + 9\operatorname{sen} x - 6 = 0; \quad \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Ejercicios 61 y 62: Un sismo tiene un desplazamiento horizontal total de S metros a lo largo de su línea de falla. En ese caso, el movimiento horizontal M de un punto en la superficie terrestre a d kilómetros de la línea de falla se puede estimar con la fórmula

$$M = \frac{S}{2}\left(1 - \frac{2}{\pi}\tan^{-1}\frac{d}{D}\right),$$

en la cual D es la profundidad en kilómetros bajo la superficie terrestre del foco del sismo.

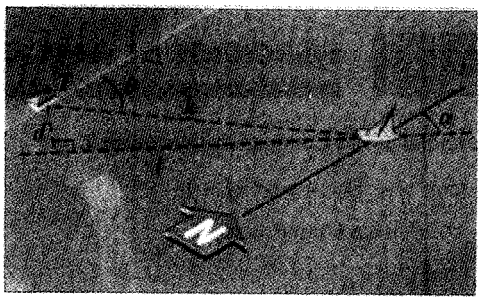
61 *Movimiento sísmico* Para el terremoto de San Francisco en 1906, S fue 4 m y D fue 3.5 km. Calcule aproximadamente M para los valores mencionados de d.

(a) 1 km **(b)** 4 km
(c) 10 km

62 *Movimiento sísmico* Calcule, aproximadamente, la profundidad D del foco de un sismo en el cual $S = 3$ m, si un punto en la superficie de la Tierra está a 5 km de la línea de falla, y se movió 0.6 m horizontalmente.

63 *Seguimiento de un bote de vela* Como se ve en la figura, un bote de vela sigue un rumbo l en línea recta. La distancia más corta de la trayectoria a una estación de rastreo T es d millas. Al navegar el bote, la estación rastreadora registra su distancia k desde T, y su dirección θ con respecto a T. El ángulo α especifica la dirección del velero.

(a) Exprese α en términos de d, k y θ.
(b) Calcule α con una precisión de un grado, si $d = 50$ mi, $k = 210$ mi y $\theta = 53.4°$.



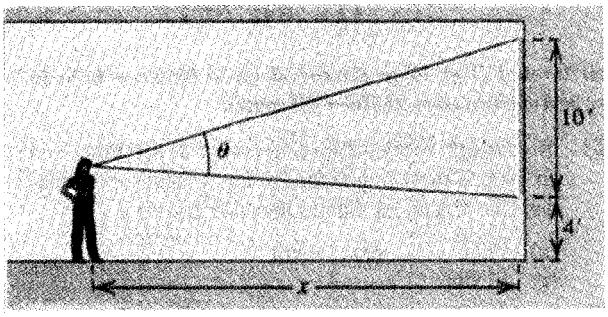
64 ***Cálculo de ángulos visuales*** Un crítico de arte cuyos ojos están a 6 pies sobre el piso contempla una pintura de 10 pies de altura, que está montada a 4 pies sobre el piso, como se ve en la figura.

(a) Si el crítico se para a x pies de distancia de la pared, exprese el ángulo visual θ en función de x.

(b) Con la fórmula de suma para la tangente demuestre que

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{10x}{x^2 - 16}\right).$$

(c) ¿Para qué valor de x es $\theta = 45°$?



Ejercicios 65 –70: Verifique la identidad.

65 $\operatorname{sen}^{-1} x = \tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

66 $\arccos x + \arccos\sqrt{1 - x^2} = \dfrac{\pi}{2},\ 0 \le x \le 1$

67 $\operatorname{arcsen}(-x) = -\operatorname{arcsen} x$

68 $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

69 $\arctan x + \arctan\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2},\ x > 0$

70 $2\cos^{-1} x = \cos^{-1}(2x^2 - 1),\ 0 \le x \le 1$

C **Ejercicios 71 y 72: Grafique f y determine su dominio y contradominio.**

71 $f(x) = 2\operatorname{sen}{-1}(x^{-1}) + \cos^{-1}\frac{1}{2}x$

72 $f(x) = \frac{1}{2}\tan^{-1}(1 - 2x) + 3\tan^{-1}\sqrt{x + 2}$

C **Ejercicios 73 y 74: Utilice una gráfica para estimar las soluciones de la ecuación.**

73 $\operatorname{sen}^{-1} 2x = \tan^{-1}(1 - x)$

74 $\cos^{-1}(x - \frac{1}{5}) = 2\operatorname{sen}^{-1}(\frac{1}{2} - x)$

C **75** ***Diseño de un colector solar*** Al diseñar un colector de energía solar, es importante determinar la cantidad de luz solar que se transmite a través del vidrio y que llega al agua que se está calentando. Si el ángulo de incidencia θ de los rayos del Sol se mide a partir de una línea perpendicular a la superficie del vidrio, entonces la fracción $f(\theta)$ de la luz solar reflejada y que sale de la superficie del vidrio, se puede calcular aproximadamente con

$$f(\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}^2(\theta - \gamma)}{\operatorname{sen}^2(\theta + \gamma)} + \frac{\tan^2(\theta - \gamma)}{\tan^2(\theta + \gamma)}\right),$$

en la cual $\gamma = \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}\theta/1.52)$. Trace la gráfica de f para $0 < \theta < \pi/2$, y estime θ cuando $f(\theta) = 0.2$.

C **76** ***Diseño de un colector solar*** La altura solar es el ángulo ϕ que forman los rayos solares con el horizonte en determinada hora y lugar. Es importante la determinación de ϕ para inclinar el colector y obtener su máximo rendimiento. El 21 de junio, a una latitud de 51.7°N, la altura del Sol se puede aproximar empleando la fórmula

$$\operatorname{sen}\phi = \operatorname{sen} 23.5° \operatorname{sen} 51.7° + \cos 23.5° \cos 51.7° \cos H,$$

donde H se llama ángulo horario; $H = -\pi/2$ a las 6 A.M.; $H = 0$ a mediodía y $H = \pi/2$ a las 6 P.M.

(a) Despeje ϕ de la fórmula y grafique la ecuación resultante para $-\pi/2 \le H \le \pi/2$.

(b) Estime las horas a las cuales $\phi = 45°$.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 7

Ejercicios 1–22: Compruebe la identidad.

1 $(\cot^2 x + 1)(1 - \cos^2 x) = 1$

2 $\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\tan\theta = \sec\theta$

3 $\dfrac{(\sec^2\theta - 1)\cot\theta}{\tan\theta\operatorname{sen}\theta + \cos\theta} = \operatorname{sen}\theta$

4 $(\tan x + \cot x)^2 = \sec^2 x \csc^2 x$

5 $\dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} t} = (\sec t - \tan t)\sec t$

6 $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

7 $\tan 2u = \dfrac{2\cot u}{\csc^2 u - 2}$ **8** $\cos^2 \dfrac{v}{2} = \dfrac{1 + \sec v}{2 \sec v}$

9 $\dfrac{\tan^3 \phi - \cot^3 \phi}{\tan^2 \phi + \csc^2 \phi} = \tan \phi - \cot \phi$

10 $\dfrac{\operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v}{\csc u + \csc v} = \dfrac{1 - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}{-1 + \csc u \csc v}$

11 $\left(\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\tan^4 x}\right)^3 \left(\dfrac{\csc^3 x}{\cot^6 x}\right)^2 = 1$

12 $\dfrac{\cos \gamma}{1 - \tan \gamma} + \dfrac{\operatorname{sen} \gamma}{1 - \cot \gamma} = \cos \gamma + \operatorname{sen} \gamma$

13 $\dfrac{\cos(-t)}{\sec(-t) + \tan(-t)} = 1 + \operatorname{sen} t$

14 $\dfrac{\cot(-t) + \csc(-t)}{\operatorname{sen}(-t)} = \dfrac{1}{1 - \cos t}$

15 $\sqrt{\dfrac{1 - \cos t}{1 + \cos t}} = \dfrac{1 - \cos t}{|\operatorname{sen} t|}$ **16** $\sqrt{\dfrac{1 - \operatorname{sen} \theta}{1 + \operatorname{sen} \theta}} = \dfrac{|\cos \theta|}{1 + \operatorname{sen} \theta}$

17 $\cos\left(x - \dfrac{5\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x$

18 $\tan\left(x + \dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan x - 1}{1 + \tan x}$

19 $\frac{1}{4} \operatorname{sen} 4\beta = \operatorname{sen} \beta \cos^3 \beta - \cos \beta \operatorname{sen}^3 \beta$

20 $\tan \frac{1}{2}\theta = \csc \theta - \cot \theta$

21 $\operatorname{sen} 8\theta = 8 \operatorname{sen} \theta \cos \theta (1 - 2\operatorname{sen}^2 \theta)(1 - 8\operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta)$

22 $\arctan x = \dfrac{1}{2} \arctan \dfrac{2x}{1 - x^2}, \quad -1 < x < 1$

Ejercicios 23 – 40: Determine las soluciones de la ecuación que estén en el intervalo $[0, 2\pi)$.

23 $2\cos^3 \theta - \cos \theta = 0$ **24** $2 \cos \alpha + \tan \alpha = \sec \alpha$

25 $\operatorname{sen} \theta = \tan \theta$ **26** $\csc^5 \theta - 4 \csc \theta = 0$

27 $2\cos^3 t + \cos^2 t - 2 \cos t - 1 = 0$

28 $\cos x \cot^2 x = \cos x$ **29** $\operatorname{sen} \beta + 2\cos^2 \beta = 1$

30 $\cos 2x + 3 \cos x + 2 = 0$

31 $2 \sec u \operatorname{sen} u + 2 = 4 \operatorname{sen} u + \sec u$

32 $\tan 2x \cos 2x = \operatorname{sen} 2x$

33 $2 \cos 3x \cos 2x = 1 - 2 \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 2x$

34 $\operatorname{sen} x \cos 2x + \cos x \operatorname{sen} 2x = 0$

35 $\cos \pi x + \operatorname{sen} \pi x = 0$ **36** $\operatorname{sen} 2u = \operatorname{sen} u$

37 $2\cos^2 \frac{1}{2}\theta - 3 \cos \theta = 0$ **38** $\sec 2x \csc 2x = 2 \csc 2x$

39 $\operatorname{sen} 5x = \operatorname{sen} 3x$ **40** $\cos 3x = -\cos 2x$

Ejercicios 41– 44: Calcule el valor exacto.

41 $\cos 75°$ **42** $\tan 285°$

43 $\operatorname{sen} 195°$ **44** $\csc \dfrac{\pi}{8}$

Ejercicios 45 – 56: Si θ y ϕ son ángulos agudos tales que $\csc \theta = \frac{5}{3}$ y $\cos \phi \frac{8}{17}$, calcule el valor exacto de las siguientes expresiones.

45 $\operatorname{sen}(\theta + \phi)$ **46** $\cos(\theta + \phi)$

47 $\tan(\phi + \theta)$ **48** $\tan(\theta - \phi)$

49 $\operatorname{sen}(\phi - \theta)$ **50** $\operatorname{sen}(\theta - \phi)$

51 $\operatorname{sen} 2\phi$ **52** $\cos 2\phi$

53 $\tan 2\theta$ **54** $\operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta$

55 $\tan \frac{1}{2}\theta$ **56** $\cos \frac{1}{2}\phi$

57 Exprese como una función de suma o diferencia:

(a) $\operatorname{sen} 7t \operatorname{sen} 4t$ **(b)** $\cos \frac{1}{4}u \cos(-\frac{1}{6}u)$

(c) $6 \cos 5x \operatorname{sen} 3x$ **(d)** $4 \operatorname{sen} 3\theta \cos 7\theta$

58 Exprese como función de un producto:

(a) $\operatorname{sen} 8u + \operatorname{sen} 2u$ **(b)** $\cos 3\theta - \cos 8\theta$

(c) $\operatorname{sen} \frac{1}{4}t - \operatorname{sen} \frac{1}{5}t$ **(d)** $3 \cos 2x + 3 \cos 6x$

Ejercicios 59–70: Determine el valor exacto de la expresión donde esté definida.

59 $\cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **60** $\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

61 $\arctan \sqrt{3}$ **62** $\arccos\left(\tan \dfrac{3\pi}{4}\right)$

63 $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen} \dfrac{5\pi}{4}\right)$ **64** $\cos^{-1}\left(\cos \dfrac{5\pi}{4}\right)$

65 $\operatorname{sen}\left[\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$ **66** $\tan(\tan^{-1} 2)$

67 $\sec(\operatorname{sen}^{-1} \frac{3}{2})$ **68** $\cos^{-1}(\operatorname{sen} 0)$

69 $\cos(\operatorname{sen}^{-1} \frac{15}{17} - \operatorname{sen}^{-1} \frac{8}{17})$ **70** $\cos(2 \operatorname{sen}^{-1} \frac{4}{5})$

Ejercicios 71–74: Trace la gráfica de la ecuación.

71 $y = \cos^{-1} 3x$ **72** $y = 4 \operatorname{sen}^{-1} x$

73 $y = 1 - \operatorname{sen}^{-1} x$ **74** $y = \operatorname{sen}(\frac{1}{2} \cos^{-1} x)$

75 Exprese $\cos(\alpha + \beta + \gamma)$ en términos de funciones trigonométricas de α, β y γ.

76 ***Fuerza de un pie*** Cuando una persona camina, la magnitud F de la fuerza vertical de un pie sobre el terreno (véase la figura) se puede representar mediante

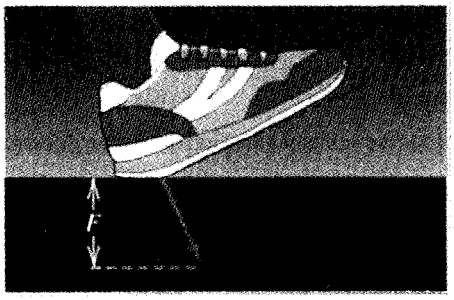
$$F = A(\cos bt - a \cos 3\,bt).$$

donde t es el tiempo, en segundos, $A > 0$, $b > 0$ y $0 < a < 1$.

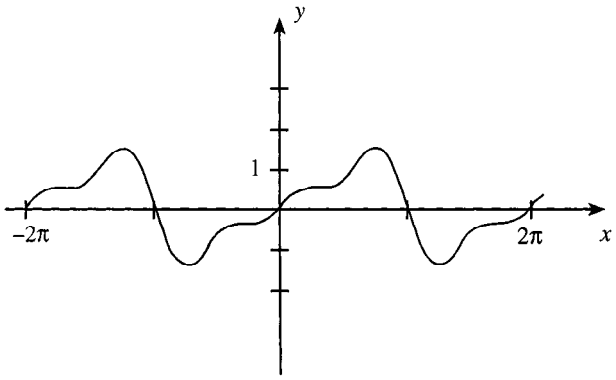
(a) Demuestre que $F = 0$ cuando $t = -\pi/(2b)$ y $t = \pi/(2b)$. (El tiempo $t = -\pi/(2b)$ es el momento en el cual el pie comienza a tocar al piso, y el peso del cuerpo está sostenido por el otro pie.)

(b) La fuerza máxima se presenta cuando $3a$ sen $3bt =$ sen bt. Si $a = \frac{1}{3}$, calcule las soluciones de esta ecuación para $-\pi/(2b) < t < \pi/(2b)$.

(c) Si $a = \frac{1}{3}$, exprese la fuerza máxima en función de A.



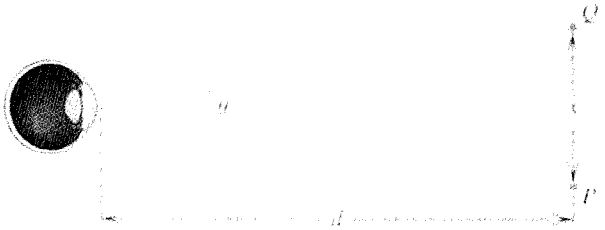
77 En la figura se presenta una gráfica de la ecuación $y =$ sen $x - \frac{1}{2}$ sen $2x + \frac{1}{3}$ sen $3x$. Las abscisas de los puntos de cambio de dirección son soluciones de la ecuación $\cos x - \cos 2x + \cos 3x = 0$. Con una fórmula de suma a producto determine las abscisas.



78 ***Separación visual*** El ojo humano puede distinguir dos puntos lejanos P y Q siempre y cuando el ángulo θ de resolución no sea muy pequeño. Suponga que P y Q estén separados x unidades de longitud, y que estén a d unidades de longitud del ojo, como se ve en la figura.

(a) Exprese x en función de d y θ.

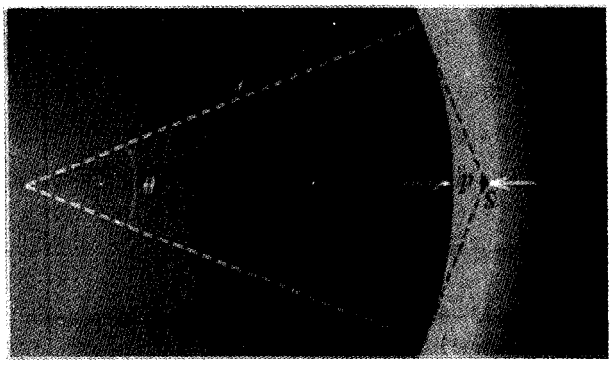
(b) Para una persona con visión normal, el ángulo mínimo de resolución es, aproximadamente, 0.0005 radianes. Si ese individuo ve un bolígrafo de 6 pulg de longitud a una distancia de d pies, ¿para qué valores de d se pueden distinguir los extremos de la pluma?



79 ***Satélites*** Un satélite S gira alrededor de un planeta a una distancia d, en millas, desde la superficie. La parte de la superficie del planeta que es visible desde el satélite está determinada por el ángulo θ, que se ve en la figura.

(a) Suponiendo que el planeta sea esférico, exprese d como función de θ y de r, el radio del planeta.

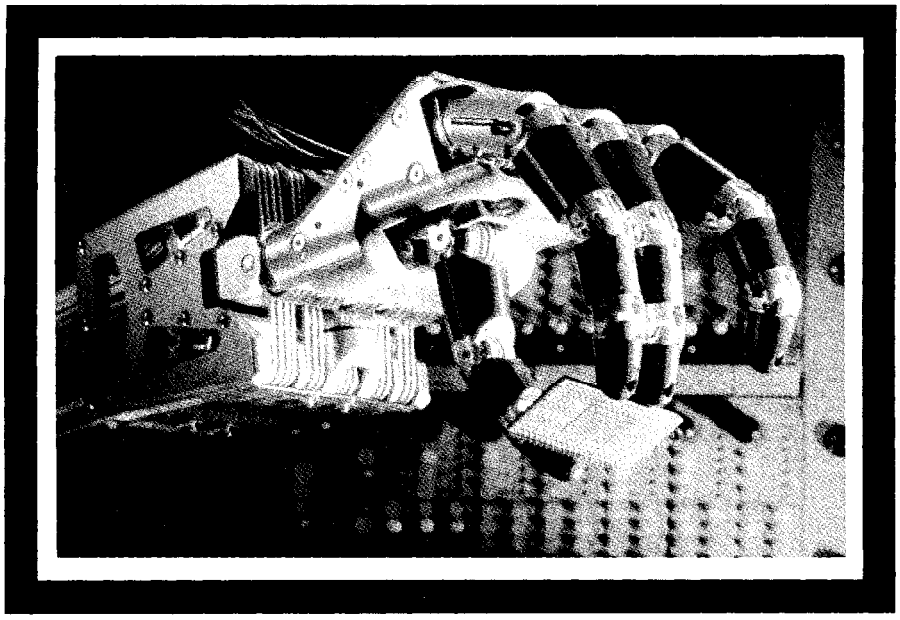
(b) Calcule θ, aproximadamente, para un satélite a 300 mi de la superficie terrestre, si $r = 4\,000$ mi.



80 ***"Barrancos" urbanos*** Como en el centro de algunas ciudades hay edificios altos y calles estrechas, es poca la luz solar que llega a esos "cañones". Si h es la altura promedio de los edificios y w es el ancho de la calle, se define la angostura de la vía mediante $N = h/w$. El ángulo del horizonte θ, se define mediante $\tan\theta = N$. (El valor $\theta = 63°$ puede ocasionar una pérdida de iluminación de 85%.) Calcule el ángulo aproximado del horizonte para los valores siguientes de h y w.

(a) $h = 400$ pies, $w = 80$ pies

(b) $h = 55$ m, $w = 30$ m.



Se emplean funciones trigonométricas y vectores para especificar la posición de las partes de brazos robóticos.

8.1	**LEY DE LOS SENOS**
8.2	**LEY DE LOS COSENOS**
8.3	**FORMA TRIGONOMÉTRICA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS**
8.4	**TEOREMA DE DE MOIVRE Y RAÍCES *n*-ÉSIMAS DE NÚMEROS COMPLEJOS**
8.5	**VECTORES Y CANTIDADES VECTORIALES**
8.6	**PRODUCTO ESCALAR (O PRODUCTO PUNTO)**

CAPÍTULO 8

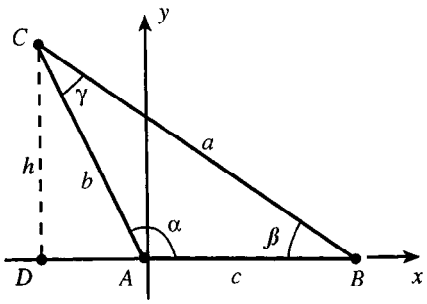
APLICACIONES DE LA TRIGONOMETRÍA

■ *En las dos primeras secciones de este capítulo se estudiarán métodos para resolver problemas con triángulos oblicuos empleando la ley de los senos y la ley de los cosenos. A continuación se presenta la forma trigonométrica para números complejos y se usará para calcular todas las soluciones de ecuaciones de la forma* $w^n = z$, *donde* n *es cualquier entero positivo, y* w *y* z *números complejos. El contenido de las dos últimas secciones es una introducción a los vectores, tema que tiene muchas aplicaciones en ingeniería, ciencias naturales y matemáticas superiores.* ■

8.1 LEY DE LOS SENOS

Un **triángulo oblicuángulo** es el que no tiene un ángulo recto. Se usarán las letras A, B, C, a, b, c, α, β, γ para simbolizar los elementos de los triángulos, como se hizo en el Cap. 6. Dado el triángulo ABC, se colocará el ángulo α en la posición normal, para que B esté en la parte positiva del eje x. En la Fig. 8.1 se ve el caso cuando el ángulo α es obtuso; sin embargo, el análisis que sigue es válido también en el caso de que el ángulo α sea agudo.

FIGURA 8.1



Considérese la recta que pasa por C paralela al eje y, y que corta al eje x en el punto D. Si $d(C, D) = h$, entonces la ordenada de C es h. Según las definiciones de funciones trigonométricas de cualquier ángulo.

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{b} \quad \text{y} \quad h = b \operatorname{sen}\alpha .$$

Para el triángulo BDC, se ve que

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{h}{a} \quad \text{y} \quad h = a \operatorname{sen}\beta .$$

En consecuencia,

$$b \operatorname{sen}\alpha = a \operatorname{sen}\beta$$

que se puede escribir en la forma

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b}.$$

Si α se coloca en posición normal con C en el eje x positivo entonces, con la misma deducción,

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}.$$

Las dos igualdades obtenidas nos dan el siguiente resultado.

Ley de los senos

> Si ABC es triángulo oblicuángulo, con la nomenclatura normal, entonces
>
> $$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}.$$

Nótese que la ley de los senos consiste en las tres fórmulas siguientes:

$$(1)\ \frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} \qquad (2)\ \frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} \qquad (3)\ \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$$

Para aplicar cualquiera de esas fórmulas a un triángulo específico, se deben conocer los valores de tres de las cuatro variables. Si se sustituyen esos valores en la fórmula adecuada, es posible despejar entonces el valor de la cuarta variable. En consecuencia, la ley de los senos se puede emplear para determinar las partes restantes de un triángulo oblicuo siempre que se conozca alguna de las alternativas siguientes (las tres letras en paréntesis indican nemotécnicamente las partes conocidas; L representa un lado y A un ángulo):

(1) dos lados y un ángulo *opuesto* a uno de ellos (LLA), o bien,
(2) dos ángulos y cualquier lado (AAL o ALA)

En la sección siguiente se explicará la ley de los cosenos y se indicará cómo puede servir para calcular las partes restantes de un triángulo oblicuángulo dado lo siguiente:

(1) dos lados y el ángulo *entre* ellos (LAL)
(2) tres lados (LLL).

La ley de los senos no se puede aplicar directamente a estos dos últimos casos.

La ley de los senos también se puede escribir en la siguiente forma:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

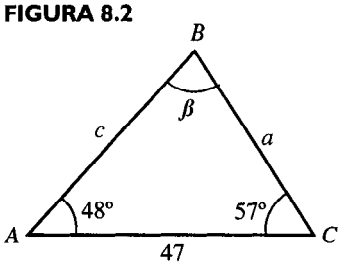
En vez de memorizar las tres fórmulas de la ley de los senos, será más conveniente recordar el siguiente enunciado, que las abarca a todas.

Ley de los senos (Forma general)

> En cualquier triángulo, la razón del seno de un ángulo a la longitud del lado opuesto a él, es igual a la razón del seno de otro ángulo a la longitud del lado opuesto a este último.

En los ejemplos y ejercicios sobre triángulos, se supone que las longitudes de los lados y los ángulos conocidos se han obtenido por medición directa y, por lo tanto, son aproximaciones a los valores exactos. A menos que se diga otra cosa, cuando se determinen partes de triángulos se redondearán las respuestas según la siguiente regla: *Si se establece cierta exactitud para los lados o ángulos conocidos, deben calcularse los lados o ángulos desconocidos con la misma exactitud.* Por ejemplo, si se dice que los lados conocidos tienen una exactitud de 0.1, entonces el lado desconocido se debe calcular al 0.1 más cercano. Si se mencionan los ángulos conocidos con aproximación de 10′, entonces el ángulo desconocido se debe calcular con aproximación de 10′. Para aproximaciones de 0.01, 0.1°, etc., se siguen las mismas observaciones.

FIGURA 8.2



EJEMPLO 1 ***Empleo de la ley de los senos (ALA)***

Dado el triángulo ABC, con $\alpha = 48°$, $\gamma = 57°$, $b = 47$, calcular las partes restantes.

SOLUCIÓN El triángulo aparece en la Fig. 8.2. Como la suma de los ángulos de un triángulo es 180°,

$$\beta = 180° - (57° + 48°) = 75°.$$

Como se conocen el lado b y los tres ángulos, se puede calcular a empleando la fórmula de la ley de los senos en la cual aparezcan a, α, b, β:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} \qquad \text{ley de los senos}$$

$$a = \frac{b \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} \qquad \text{se despeja } a$$

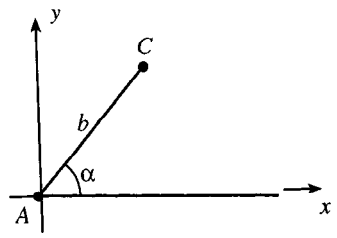
$$= \frac{47 \operatorname{sen} 48°}{\operatorname{sen} 75°} \qquad \text{se sustituyen los valores de } b, \alpha \text{ y } \beta$$

$$\approx 36 \qquad \text{se aproxima al entero más cercano}$$

Para calcular c, tan sólo se remplaza $\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}$ con $\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$ en la solución anterior de a y se obtiene

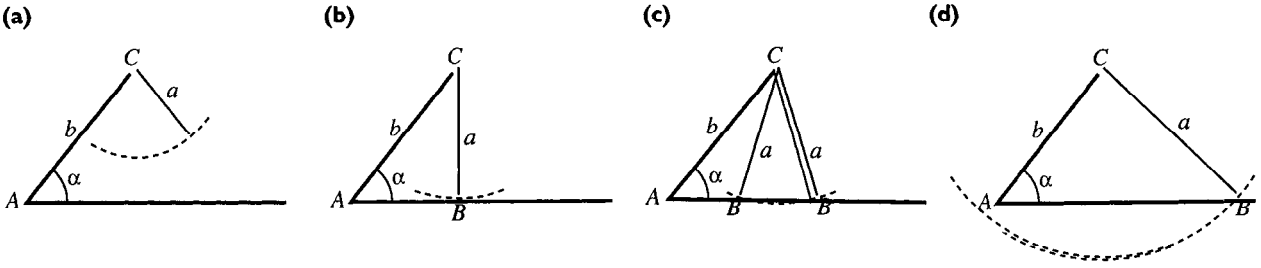
$$c = \frac{b \operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{47 \operatorname{sen} 57°}{\operatorname{sen} 75°} \approx 41 .$$

FIGURA 8.3



Datos como los del Ejemplo 1 conducen exactamente a un triángulo ABC. Sin embargo, si se dan dos lados y un ángulo *opuesto* a uno de ellos, no siempre se determina un solo triángulo. Por ejemplo, supóngase que a y b son longitudes de lados del triángulo ABC, y que un determinado ángulo α ha de ser opuesto al lado de longitud a. Se analizará el caso cuando α es agudo. Se coloca α en posición normal y se considera el segmento de recta AC de longitud b en el lado terminal de α, como se ve en la Fig. 8.3. El tercer vértice B debe estar en algún lugar del eje x. Como la longitud a del lado opuesto a α esta dada, se puede determinar B trazando un arco circular de longitud a con centro en C. En la Fig. 8.4 se ven los cuatro resultados posibles (sin los ejes coordenados).

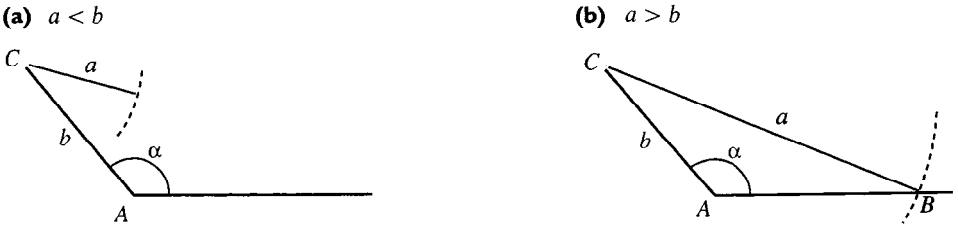
FIGURA 8.4



Podemos describir las cuatro posibilidades de la figura como sigue:

(a) El arco no corta al eje x y no se forma ningún triángulo.
(b) El arco es tangente al eje x y se forma un triángulo rectángulo.
(c) El arco corta al eje x positivo en dos puntos distintos y se forman dos triángulos.
(d) El arco corta las partes positiva y negativa del eje x y se forma un triángulo.

FIGURA 8.5



El caso particular que se presenta en determinado problema se hará evidente cuando se trate de resolver. Por ejemplo, si se resuelve la ecuación

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b}$$

y resulta que $\operatorname{sen}\beta > 1$, entonces no hay triángulo alguno y se trata del caso (a). Si se obtiene $\operatorname{sen}\beta = 1$, entonces $\beta = 90°$ y éste es el el caso (b). Si $\operatorname{sen}\beta < 1$, habrá dos posibilidades para el ángulo β. Examinando ambas posibilidades, se determinará si se trata del caso (c) o (d).

Si la medida de α es mayor que 90°, entonces existe un triángulo si y sólo si $a > b$ (véase Fig. 8.5). Como hay más de una posibilidad cuando se dan dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos, a este caso se le llama, a veces, **caso ambiguo**.

EJEMPLO 2 *Uso de la ley de los senos (LLA)*

Calcular las partes restantes del triángulo ABC si $\alpha = 67°$, $a = 100$ y $c = 125$.

SOLUCIÓN Como conocemos α, a y c, se puede calcular γ mediante la fórmula de la ley de los senos con a, α, c y γ como elementos:

$$\frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} \qquad \text{ley de los senos}$$

$$\operatorname{sen}\gamma = \frac{c\operatorname{sen}\alpha}{a} \qquad \text{se despeja sen } \gamma$$

$$= \frac{125\operatorname{sen}67°}{100} \qquad \text{se sustituyen } c, \alpha \text{ y } a$$

$$\approx 1.1506 \qquad \text{se calcula el resultado}$$

Como $\operatorname{sen}\gamma > 1$, no se puede formar triángulo alguno con las partes dadas.

EJEMPLO 3 *Empleo de la ley de los senos (LLA)*

Calcular las demás partes del triángulo ABC con $a = 12.4$, $b = 8.7$ y $\beta = 36.7°$.

SOLUCIÓN Para calcular α, se procederá como sigue:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} \qquad \text{ley de los senos}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a\operatorname{sen}\beta}{b} \qquad \text{se despeja sen } \alpha$$

$$= \frac{12.4\operatorname{sen}36.7°}{8.7} \qquad \text{se sustituye } a, \beta \text{ y } b$$

$$\approx 0.8518 \qquad \text{se calcula el resultado}$$

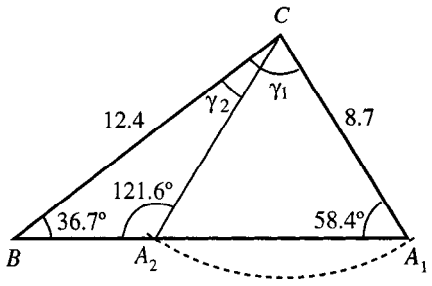
Hay dos ángulos α posibles entre 0° y 180° tales que $\operatorname{sen}\alpha \approx 0.8518$. El ángulo de referencia α_R es

$$\alpha_R \approx \operatorname{sen}^{-1}(0.8518) \approx 58.4°.$$

En consecuencia, las dos posibilidades para α son

$$\alpha_1 \approx 58.4^\circ \quad \text{y} \quad \alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1 \approx 121.6^\circ.$$

FIGURA 8.6



El ángulo $\alpha_1 \approx 58.4^\circ$ produce el triángulo A_1BC de la Fig. 8.6, y el ángulo $\alpha_2 \approx 121.6^\circ$, el triángulo A_2BC.

Si γ_1 y γ_2 representan los terceros ángulos en los triángulos A_1BC y A_2BC correspondientes a los ángulos α_1 y α_2, respectivamente, entonces

$$\gamma_1 = 180^\circ - (\alpha_1 + \beta) \approx 180^\circ - (58.4^\circ + 36.7^\circ) \approx 84.9^\circ$$

$$\gamma_2 = 180^\circ - (\alpha_2 + \beta) \approx 180^\circ - (121.6^\circ + 36.7^\circ) \approx 21.7^\circ.$$

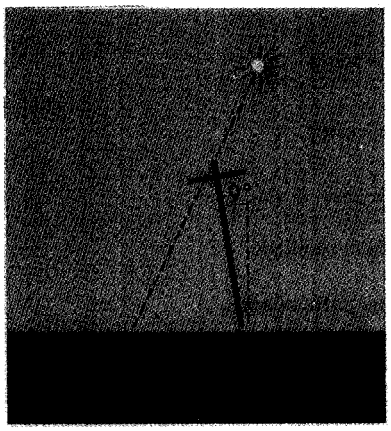
Si c_1 es el lado opuesto a γ_1 en el triángulo A_1BC, entonces

$$\frac{c_1}{\operatorname{sen}\gamma_1} = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha_1} \qquad \text{ley de los senos}$$

$$c_1 = \frac{a \operatorname{sen}\gamma_1}{\operatorname{sen}\alpha_1} \qquad \text{se despeja } c_1$$

$$\approx \frac{12.4 \operatorname{sen} 84.9^\circ}{\operatorname{sen} 58.4^\circ} \approx 14.5. \qquad \text{se sustituye y se obtiene el valor aproximado}$$

FIGURA 8.7



Así, las otras partes del triángulo A_1BC son

$$\alpha_1 \approx 58.4^\circ, \quad \gamma_1 \approx 84.9^\circ, \quad \text{y} \quad c_1 \approx 14.5.$$

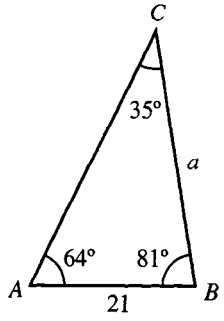
Igualmente, si c_2 es el lado opuesto a γ_2 en el triángulo A_2BC, entonces

$$c_2 = \frac{a \operatorname{sen}\gamma_2}{\operatorname{sen}\alpha_2} \approx \frac{12.4 \operatorname{sen} 21.7^\circ}{\operatorname{sen} 121.6^\circ} \approx 5.4,$$

y las demás partes del triángulo A_2BC son

$$\alpha_2 \approx 121.6^\circ, \quad \gamma_2 \approx 21.7^\circ, \quad \text{y} \quad c_2 \approx 5.4.$$

FIGURA 8.8



EJEMPLO 4 ***Empleo del ángulo de elevación***

Cuando el ángulo de elevación del Sol es 64°, un poste telefónico que está inclinado un ángulo de 9° directamente frente al Sol forma una sombra de 21 pies de longitud en terreno horizontal. Calcular la longitud aproximada del poste.

SOLUCIÓN El problema se ilustra en la Fig. 8.7 (no a escala). El triángulo ABC de la Fig. 8.8 también presenta los datos. Cualquiera de esas figuras es suficiente para nosotros. Nótese que en la Fig. 8.8 se han calculado los ángulos siguientes:

$$\beta = 90^\circ - 9^\circ = 81^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - (64^\circ + 81^\circ) = 35^\circ$$

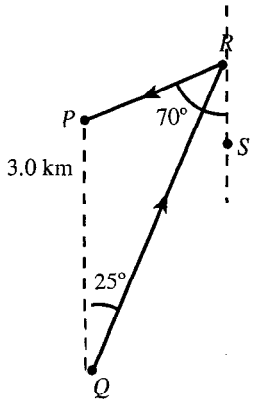
Para calcular la longitud del poste, es decir, el lado a del triángulo ABC, se procede como sigue:

$$\frac{a}{\text{sen } 64°} = \frac{21}{\text{sen } 35°} \qquad \text{ley de los senos}$$

$$a = \frac{21 \text{ sen } 64°}{\text{sen } 35°} \approx 33 \qquad \text{se despeja } a \text{ y se calcula en forma aproximada}$$

Por consiguiente, el poste de teléfono tiene una longitud aproximada de 33 pies.

FIGURA 8.9



EJEMPLO 5 *Uso de los rumbos*

Un punto P en suelo a nivel está a 3.0 km al norte de un punto Q. Un corredor sigue la dirección N25°E desde Q hasta un punto R, y después de R a P en dirección S70°W. Calcular la distancia aproximada que recorrió.

SOLUCIÓN La notación para especificar direcciones se presentó en la Secc. 6.3. Las flechas de la Fig. 8.9 muestran la ruta del corredor, junto con una línea punteada norte–sur de R a otro punto S.

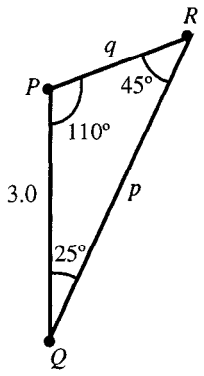
Como las rectas que pasan por PQ y RS son paralelas, según la geometría, los ángulos alternos internos PQR y QRS miden 25°. Por lo tanto,

$$\angle PRQ = 70° - 25° = 45°.$$

Con estas observaciones se obtiene el triángulo PQR de la Fig. 8.10, en el cual

$$\angle QPR = 180° - (25° + 45°) = 110°.$$

FIGURA 8.10



Se aplica dos veces la ley de los senos:

$$\frac{q}{\text{sen } 25°} = \frac{3.0}{\text{sen } 45°} \qquad \text{y} \qquad \frac{p}{\text{sen } 110°} = \frac{3.0}{\text{sen } 45°}$$

Por consiguiente,

$$q = \frac{3.0 \text{ sen } 25°}{\text{sen } 45°} \approx 1.8,$$

$$p = \frac{3.0 \text{ sen } 110°}{\text{sen } 45°} \approx 4.0$$

La distancia que recorrió, $p + q$, es $1.8 + 4.0 = 5.8$ km, aproximadamente.

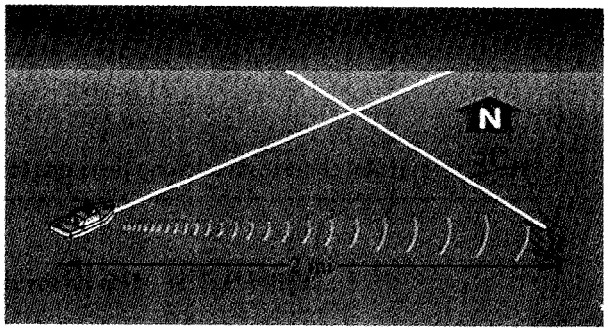
EJEMPLO 6 *Localización de un cardumen*

Un bote pesquero comercial emplea equipo de sonar para detectar un cardumen, a 2 mi al oriente; los peces van en dirección N51°W a una velocidad de 8 mi/h (véase Fig. 8.11).

Si el bote viaja a unas 20 mi/h, calcular, al 0.1°, la dirección que debería seguir para interceptar el cardumen.

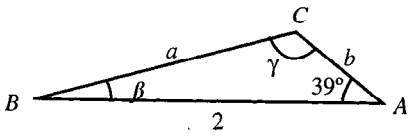
Calcule, con precisión de minutos, el tiempo que tarda el bote en alcanzar a los peces.

FIGURA 8.11



SOLUCIÓN

FIGURA 8.12



(a) El triángulo de la Fig. 8.12 presenta el problema. Ahí, el cardumen está en A, el bote en B y el punto de intercepción en C. Nótese que $\alpha = 90° - 51° = 39°$. Para obtener β, se comienza así:

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen} 39°}{a} \qquad \text{ley de los senos}$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{b}{a}\operatorname{sen} 39° \qquad \text{se despeja sen } \beta$$

A continuación se calcula b/a, y también t representa el instante en el cual se encuentran bote y peces en C:

$$a = 20t, \quad b = 8t \qquad \text{(distancia) = (velocidad)(tiempo)}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{8t}{20t} = \frac{2}{5} \qquad \text{se divide } b \text{ entre } a$$

$$\operatorname{sen}\beta = \tfrac{2}{5}\operatorname{sen} 39° \qquad \text{se sustituye } b/a$$

$$\beta = \operatorname{sen}^{-1}(\tfrac{2}{5}\operatorname{sen} 39°) \approx 14.6° \qquad \text{se calcula el valor aproximado}$$

Como $90° - 14.6° = 75.4°$, el bote debe viajar con el rumbo aproximado N75.4°E.

(b) Primero se calcula la distancia a de B a C. Comiéncese observando que

$$\gamma \approx 180° - (39° + 14.6°) = 126.4°.$$

A continuación,

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} \qquad \text{ley de los senos}$$

$$a = \frac{c\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\gamma} \qquad \text{se despeja } a$$

$$\approx \frac{2\operatorname{sen} 39°}{\operatorname{sen} 126.4°} \approx 1.56 \text{ mi.} \qquad \text{se sustituye y se calcula}$$

Con $a = 20t$, se determina el tiempo t que tarda el bote en llegar a C:

$$t = \frac{a}{20} \approx \frac{1.56}{20} \approx 0.08 \text{ hr} \approx 5 \text{ min}$$

EJERCICIOS 8.1

Ejercicios 1–16: Calcule, aproximadamente, las partes restantes del triángulo *ABC*.

1 $\alpha = 41°$, $\gamma = 77°$, $a = 10.5$

2 $\beta = 20°$, $\gamma = 31°$, $b = 210$

3 $\alpha = 27°40'$, $\beta = 52°10'$, $a = 32.4$

4 $\beta = 50°50'$, $\gamma = 70°30'$, $c = 537$

5 $\alpha = 42°10'$, $\gamma = 61°20'$, $b = 19.7$

6 $\alpha = 103.45°$, $\gamma = 27.19°$, $b = 38.84$

7 $\gamma = 81°$, $c = 11$, $b = 12$

8 $\alpha = 32.32°$, $c = 574.3$, $a = 263.6$

9 $\gamma = 53°20'$, $a = 140$, $c = 115$

10 $\alpha = 27°30'$, $c = 52.8$, $a = 28.1$

11 $\gamma = 47.74°$, $a = 131.08$, $c = 97.84$

12 $\alpha = 42.17°$, $a = 5.01$, $b = 6.12$

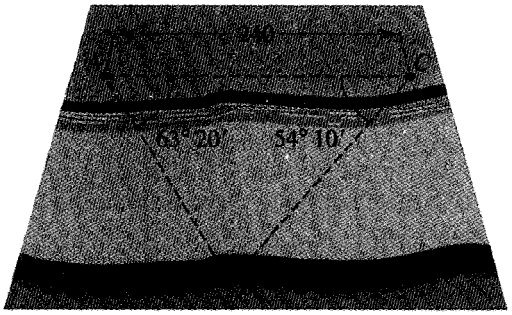
13 $\alpha = 65°10'$, $a = 21.3$, $b = 18.9$

14 $\beta = 113°10'$, $b = 248$, $c = 195$

15 $\beta = 121.624°$, $b = 0.283$, $c = 0.178$

16 $\gamma = 73.01°$, $a = 17.31$, $c = 20.24$

17 ***Topografía*** Para determinar la distancia entre dos puntos A y B que están en orillas opuestas de un río, un topógrafo determina un segmento AC de 240 yardas (yd) de longitud a lo largo de una orilla, y determina que las medidas de $\angle BAC$ y $\angle ACB$ son 63°20′ y 54°10′, respectivamente (véase la figura). Calcule la distancia de A a B.

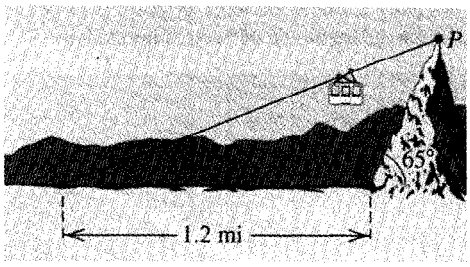


18 ***Topografía*** Para determinar la distancia entre dos puntos A y B un topógrafo escoge un punto C que se halla a 375 yd de A y a 530 yd de B. Si $\angle BAC$ mide 49°30′, calcule la distancia de A a B. (1 yd = 0.915 m.)

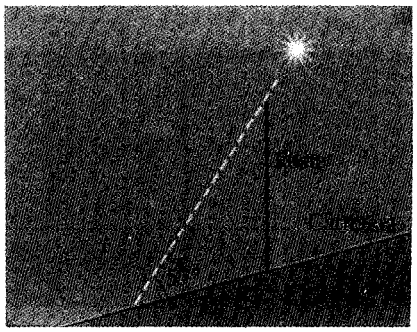
19 ***Ruta de un teleférico*** Como se ve en la figura, un teleférico transporta pasajeros del punto A, que se ubica a 1.2 mi de un punto B en la base de una montaña, y llega a la cumbre P de ésta. Los ángulos de elevación de P desde A y B son 21° y 65°, respectivamente.

(a) Determine la distancia aproximada de A a P.

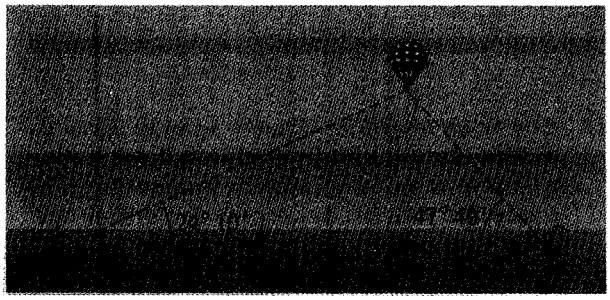
(b) Calcule la altura aproximada de la montaña.



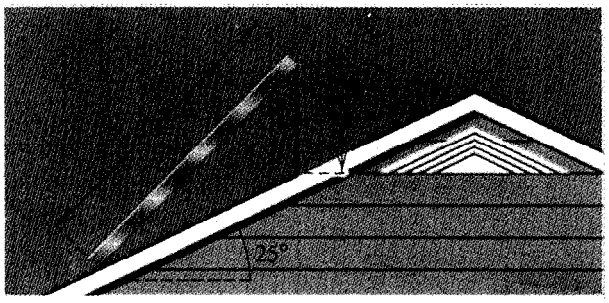
20 ***Longitud de una sombra*** Una carretera recta forma un ángulo de 15° con la horizontal. Cuando el ángulo de elevación del Sol es 57°, un poste vertical al lado de la carretera forma una sombra de 75 pies de longitud pendiente abajo, como se ve en la figura. Calcule la longitud del poste.



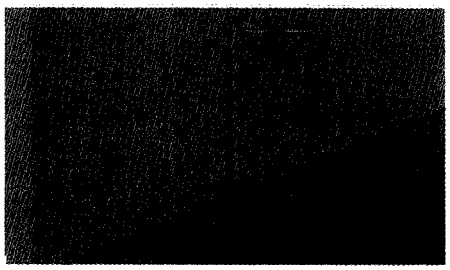
21 ***Altura de un globo aerostático*** Los ángulos de elevación de un globo visto desde dos puntos A y B en suelo a nivel, son 24°10′ y 47°40′, respectivamente. Como se ve en la figura, los puntos A y B están separados 8.4 mi, y el globo se encuentra entre ellos, en el mismo plano vertical. Calcule la altura del globo respecto al suelo.



22 ***Instalación de un panel solar*** En la figura se ve un panel solar de 10 pies de ancho, que se fijará a un techo que forma un ángulo de 25° con la horizontal. Calcule la longitud d que debe tener el poste para que el tablero forme un ángulo de 45° con la horizontal.



23 ***Distancia a un avión*** Una carretera recta forma un ángulo de 22° con la horizontal. Desde cierto punto P en ella, el ángulo de elevación del avión en el punto A es 57°. En el mismo instante, desde otro punto Q a 100 m adelante del primero, el ángulo de elevación es 63°. Como se ve en la figura, los puntos P, Q y A quedan en el mismo plano vertical. Calcule la distancia de P al avión.



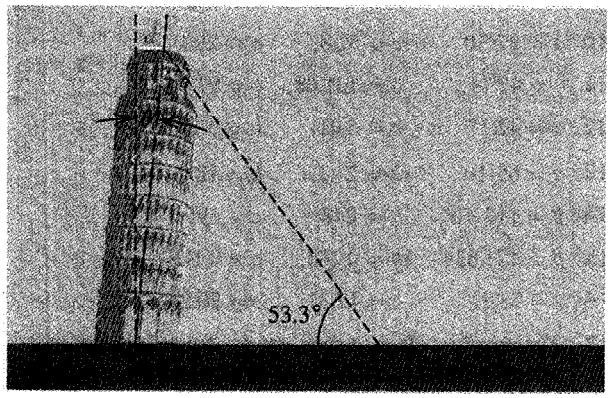
24 ***Topografía*** Un topógrafo ve que la dirección de un punto A a otro punto B es S63°W, y que la dirección de A a C es S38°W. La distancia de A a B es 239 yd, y la de B a C es 374 yd. Calcule la distancia aproximada de A a C.

25 ***Localización de un incendio forestal*** Un guardabosque en un punto de observación A ve un incendio en la dirección N27°10′ E. Otro guardabosque en un punto B a 6.0 mi al este de A ve el mismo incendio según N52°40′ W. Calcule la distancia de cada uno de los puntos de observación al incendio.

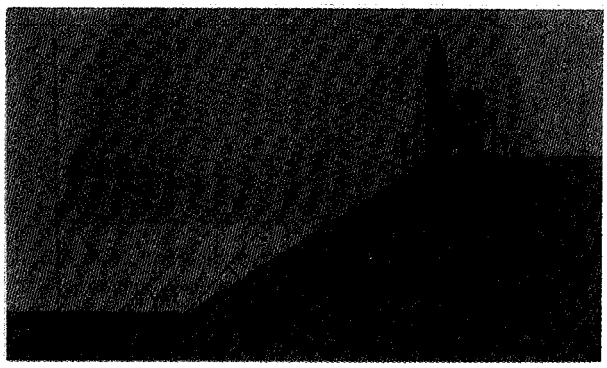
26 ***Torre inclinada de Pisa*** Este monumento notable inicialmente era perpendicular al terreno y su altura era 179 pies. A causa del asentamiento del terreno, hoy está desplomada cierto ángulo θ respecto a la perpendicular al suelo, como se ve en la figura. Cuando la parte superior de la torre se observa desde un punto a 150 pies del centro de su base, el ángulo de elevación es 53.3°.

(a) Determine el ángulo aproximado θ.

(b) Calcule la distancia aproximada d que se ha desplazado la parte superior de la torre respecto a la perpendicular.



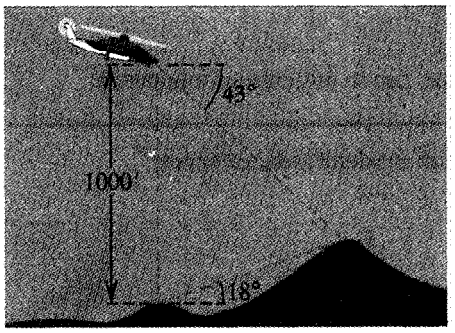
27 ***Altura de una catedral*** Una catedral está sobre una colina, como se ve en la figura. Cuando la punta de la torre se ve desde la base del cerro, el ángulo de observación es 48°. Cuando se ve a una distancia de 200 pies de la base de la colina, el ángulo de elevación es 41°. La pendiente de la colina forma un ángulo de 32° con la horizontal. Calcule la altura aproximada de la catedral, sobre la cumbre de la loma.



28 ***Vista desde un helicóptero*** Un helicóptero vuela a una altura de 1 000 pies sobre una cumbre de 5 210 pies de altura, como se indica en la figura. Un segundo pico, más alto, se ve desde la primera montaña y desde el helicóptero. Desde el aparato, el ángulo de depresión es 43°, y desde la primera cumbre, el ángulo de elevación es 18°.

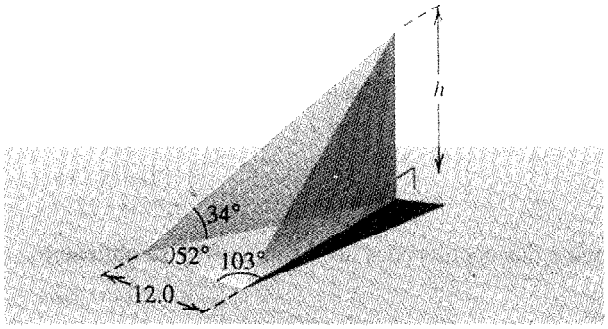
(a) Calcule la distancia de cima a cima.

(b) Evalúe la altura del pico más alto.



29 El volumen V del prisma triangular recto que se ve en la figura, es $\frac{1}{3}Bh$, donde B es el área de la base y h la altura del prisma. Calcule

(a) h **(b)** V

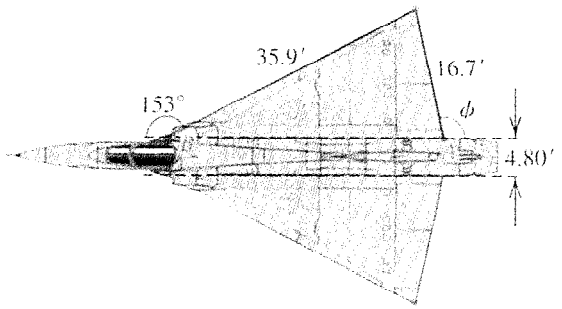


30 ***Diseño de un caza a reacción*** En la figura se ve el plano superior de un avión caza a reacción.

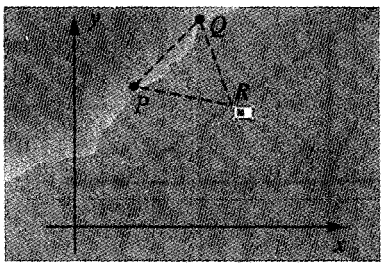
(a) Determine el ángulo ϕ.

(b) Si el fuselaje tiene 4.80 pies de ancho, calcule la envergadura CC'.

(c) Calcule el área del triángulo ABC.



31 ***Programa para topógrafos*** Un programa de computadora para topógrafos emplea sistemas de coordenadas para ubicar posiciones geográficas. Una plataforma marina de perforación (fuera de costa) en el punto R de la figura se ve desde los puntos P y Q, y resulta que los $\angle QPR$ y $\angle RQP$ son 55°50′ y 65°22′, respectivamente. Si las coordenadas de los puntos P y Q son (1487.7, 3452.8) y (3145.8, 5127.5), respectivamente, calcule las coordenadas aproximadas de R.



32 ***Fórmula de Mollweide*** La ecuación que sigue, llamada *fórmula de Mollweide*, se usa a veces para comprobar las soluciones de problemas de triángulos, porque en ella intervienen todos los ángulos y los lados:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\gamma}$$

(a) Use la ley de los senos para demostrar que

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma}$$

(b) Use una fórmula de suma a producto, y una de ángulo doble, para comprobar la fórmula de Mollweide.

8.2 LEY DE LOS COSENOS

En la sección anterior se mencionó que la ley de los senos no se puede aplicar en forma directa para calcular las partes restantes de un triángulo oblicuo cuando se da cualquiera de los dos casos siguientes:

(1) dos lados y el ángulo *entre* ellos (LAL)
(2) los tres lados (LLL).

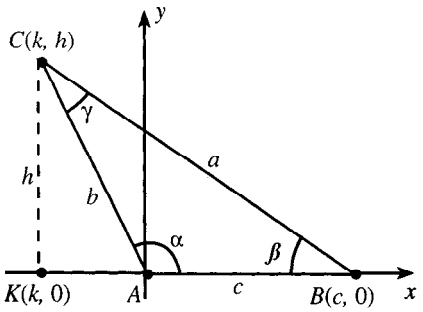
Para estos casos se aplica la *ley de los cosenos*, que se presenta a continuación.

Ley de los cosenos

Si ABC es un triángulo con la nomenclatura acostumbrada, entonces

(1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$
(2) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$
(3) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

FIGURA 8.13



DEMOSTRACIÓN Primero se demostrará la primera fórmula. Dado el triángulo ABC, se coloca α en su posición normal, como se ve en la Fig. 8.13. En la figura α es un ángulo obtuso; sin embargo, la explicación también es válida si α es agudo. Obsérvese la línea que pasa por C, paralela al eje y, que corta al eje x en el punto $K(k, 0)$. Si se tiene $d(C, K) = h$, entonces las coordenadas de C son (k, h). Según la definición de funciones trigonométricas de cualquier ángulo,

$$\cos \alpha = \frac{k}{b} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} \alpha = \frac{h}{b}$$

Despejando k y h,

$$k = b \cos \alpha \qquad \text{y} \qquad h = b \operatorname{sen} \alpha$$

Ya que el segmento AB tiene una longitud c, las coordenadas de B son $(c, 0)$ y se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} a^2 = [d(B, C)]^2 &= (k - c)^2 + (h - 0)^2 && \text{fórmula de la distancia} \\ &= (b \cos \alpha - c)^2 + (b \operatorname{sen} \alpha)^2 && \text{se sustituyen } k \text{ y } h \\ &= b^2 \cos^2 \alpha - 2bc \cos \alpha + c^2 + b^2 \operatorname{sen}^2 \alpha && \text{se eleva al cuadrado} \\ &= b^2 (\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha) + c^2 - 2bc \cos \alpha && \text{se factoriza el primero y el último términos} \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha && \text{por el teorema de Pitágoras} \end{aligned}$$

El resultado es la primera fórmula enunciada en la ley de los cosenos. La segunda fórmula y la tercera se pueden deducir poniendo β y γ, respectivamente, en posición normal en un sistema de coordenadas. ■

Nótese que si $\alpha = 90°$ en la Fig. 8.13, entonces $\cos \alpha = 0$ y la ley de los cosenos se reduce a $a^2 = b^2 + c^2$. Lo anterior muestra que el teorema de Pitágoras es un caso especial de la ley de los cosenos.

En vez de memorizar cada una de las tres fórmulas, es mejor recordar el siguiente enunciado de la ley de los cosenos, que abarca todos los casos.

Ley de los cosenos (Forma general)

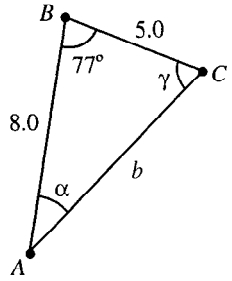
> El cuadrado de la longitud de cualquier lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, menos el doble producto de las longitudes de ellos por el coseno del ángulo que forman.

Dados dos lados y su ángulo incluido en un triángulo, se puede emplear la ley de los cosenos para calcular el tercer lado. Así es posible usar la ley de los senos para calcular otro ángulo del triángulo. Cuando se sigue este procedimiento, lo mejor es determinar el ángulo opuesto al lado más corto, porque ese ángulo siempre es agudo. De este modo se evita la posibilidad de obtener dos soluciones al resolver una ecuación trigonométrica que incluya ese ángulo, como se verá en el ejemplo siguiente. Naturalmente, también se puede usar la ley de los cosenos para calcular otro ángulo.

EJEMPLO 1 *Aplicación de la ley de los cosenos (LAL)*

Determinar las partes restantes del triángulo ABC si $a = 5.0$, $c = 8.0$ y $\beta = 77°$.

FIGURA 8.14



SOLUCIÓN El triángulo se ve en la Fig. 8.14. Como β es el ángulo *intermedio*, o incluido, entre los lados a y c, primero se calcula b, que es el lado opuesto a β, como sigue:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \qquad \text{ley de los cosenos}$$
$$= (5.0)^2 + (8.0)^2 - 2(5.0)(8.0)\cos 77° \qquad \text{se sustituyen } a, c \text{ y } \beta$$
$$= 89 - 80\cos 77° \approx 71.0 \qquad \text{se simplifica y se evalúa}$$
$$b \approx \sqrt{71.0} \approx 8.4 \qquad \text{se saca raíz cuadrada}$$

El otro de los ángulos se calcula mediante la ley de los senos. De acuerdo con lo mencionado antes de este ejemplo, se aplica la ley de los senos y se calcula α, ya que es el ángulo opuesto a a, el lado más corto.

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} \qquad \text{ley de los senos}$$
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a\operatorname{sen}\beta}{b} \qquad \text{se despeja sen } \alpha$$
$$= \frac{5.0\operatorname{sen}77°}{\sqrt{71.0}} \approx 0.5782 \qquad \text{se sustituye y se calcula}$$

Como α es agudo,

$$\alpha = \operatorname{sen}^{-1}(0.5782) \approx 35.3°.$$

Finalmente, como $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, se tiene que

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) \approx 180° - (35.3° + 77°) = 67.7°.$$

Cuando se dan los tres lados de un triángulo, puede emplearse la ley de los cosenos para determinar *cualquiera* de los tres ángulos. Siempre se calculará primero el mayor de los ángulos, es decir, *el ángulo opuesto al mayor de los lados*, ya que de esta manera se asegura que los ángulos restantes son agudos. Luego es posible calcular otro ángulo mediante la ley de los senos o la ley de los cosenos, indistintamente. Nótese que cuando se calcula un ángulo mediante la ley de los cosenos, no hay casos ambiguos, ya que siempre resulta un solo ángulo entre 0° y 180°.

EJEMPLO 2 *Uso de la ley de los cosenos (LLL)*

Si el triángulo ABC tiene lados $a = 90$, $b = 70$ y $c = 40$, calcular los ángulos α, β y γ redondeando a grados enteros.

SOLUCIÓN De acuerdo con lo expuesto antes, primero se calcula el ángulo opuesto al lado más largo, que es a. Así, se escoge la forma de la ley de los cosenos que incluye a α y se procede como sigue:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \qquad \text{ley de los cosenos}$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad \text{se despeja cos } \alpha$$

$$= \frac{70^2 + 40^2 - 90^2}{2(70)(40)} = -\frac{2}{7} \qquad \text{se sustituye y se simplifica}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(-\tfrac{2}{7}\right) \approx 106.6° \approx 107° \qquad \text{se calcula } \alpha$$

A continuación se puede usar la ley de los senos, o la de los cosenos, para determinar β. En este caso se usa la ley de los cosenos:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \qquad \text{ley de los cosenos}$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \qquad \text{se despeja cos } \beta$$

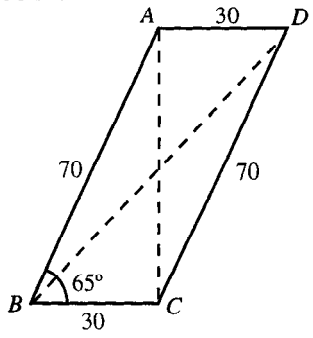
$$= \frac{90^2 + 40^2 - 70^2}{2(90)(40)} = \frac{2}{3} \qquad \text{se sustituye y se simplifica}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\tfrac{2}{3}\right) \approx 48.2° \approx 48° \qquad \text{se calcula } \beta$$

Por último, como $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, se tiene

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) \approx 180° - (107° + 48°) = 25°.$$

FIGURA 8.15



EJEMPLO 3 *Cálculo de las diagonales de un paralelogramo*

Un paralelogramo tiene lados de 30 cm y 70 cm de longitud, y uno de sus ángulos mide 65°. Calcular con redondeo a centímetros enteros la longitud de cada diagonal.

SOLUCIÓN El paralelogramo ABCD y sus diagonales AC y BD se ven en la Fig. 8.15. Empleando el triángulo ABC, con $\angle$ ABC = 65°, se puede calcular AC como sigue:

$$(AC)^2 = (30)^2 + (70)^2 - 2(30)(70)\cos 65° \qquad \text{ley de los cosenos}$$

$$\approx 900 + 4900 - 4200(0.4226) \approx 4025.1 \qquad \text{se calcula}$$

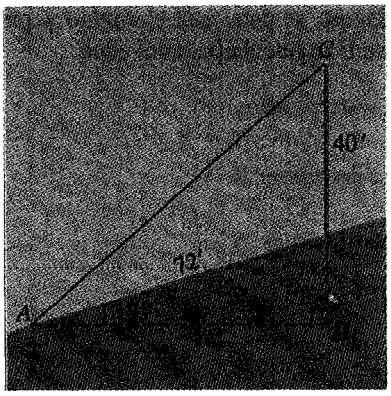
$$AC \approx \sqrt{4025.1} \approx 63 \text{ cm} \qquad \text{se saca raíz cuadrada}$$

De manera similar, usando el triángulo BAD y con $\angle BAD = 180° - 65° = 115°$, se puede calcular BD como sigue:

$$(BD)^2 = (30)^2 + (70)^2 - 2(30)(70)\cos 115° \approx 7575.0 \qquad \text{ley de los cosenos}$$

$$BD \approx \sqrt{7575.0} \approx 87 \text{ cm} \qquad \text{se saca raíz cuadrada}$$

FIGURA 8.16



EJEMPLO 4 ***Cálculo de la longitud de un cable***

Un poste vertical de 40 pies de altura se yergue en una pendiente que forma un ángulo de 17° con la horizontal. Calcular la longitud mínima del cable que llegue desde la punta del poste a un lugar a 72 pies cuesta abajo de la base.

SOLUCIÓN El esquema de la Fig. 8.16 muestra los datos. Se desea calcular AC. En la figura se ve que

$$\angle ABD = 90° - 17° = 73° \qquad \text{y} \qquad \angle ABC = 180° - 73° = 107°.$$

Usando el triángulo ABC se puede estimar AC como sigue:

$$(AC)^2 = (72)^2 + (40)^2 - 2(72)(40)\cos 107° \approx 8468 \qquad \text{ley de los cosenos}$$

$$AC \approx \sqrt{8468} \approx 92 \text{ pies} \qquad \text{se saca raíz cuadrada}$$

Puede emplearse la ley de los cosenos para deducir una fórmula que dé el área de un triángulo. Primero se demostrará un resultado preliminar.

Dado el triángulo ABC, se coloca el ángulo α en posición normal (véase Fig. 8.13). Como se ve en la demostración de la ley de los cosenos, la altura h desde el vértice C es $h = b \operatorname{sen} \alpha$. El área $\mathscr{A}$ de un triángulo es $\mathscr{A} = \frac{1}{2}ch$, se ve que

$$\mathscr{A} = \tfrac{1}{2} bc \operatorname{sen} \alpha$$

El argumento es independiente del ángulo específico que se coloque en la posición normal. Si β y γ se colocan en posición normal, se obtienen las fórmulas

$$\mathscr{A} = \tfrac{1}{2} ac \operatorname{sen} \beta \qquad \text{y} \qquad \mathscr{A} = \tfrac{1}{2} ab \operatorname{sen} \gamma$$

Las tres fórmulas se incluyen en el siguiente enunciado.

Área de un triángulo

> El área de un triángulo es igual al producto de la mitad de las longitudes de dos lados cualesquiera, por el seno del ángulo que forman.

En los dos ejemplos siguientes se usará este resultado.

EJEMPLO 5 ***Cálculo del área de un triángulo***

Calcular el área del triángulo ABC, con $a = 2.20$ cm, $b = 1.30$ cm y $\gamma = 43.2°$.

SOLUCIÓN Como el ángulo γ es el que forman los lados a y b, puede emplearse directamente el resultado anterior, como sigue:

$$\mathscr{A} = \tfrac{1}{2}ab \operatorname{sen}\gamma \qquad \text{fórmula del área de un triángulo}$$
$$= \tfrac{1}{2}(2.20)(1.30)\operatorname{sen} 43.2^\circ \approx 0.98 \text{ cm}^2 \qquad \text{se sustituye y se calcula}$$

EJEMPLO 6 ***Estimación del área de un triángulo***

Calcular el área del triángulo ABC si $a = 5.0$ cm, $b = 3.0$ cm y $\alpha = 37^\circ$.

SOLUCIÓN Para aplicar la fórmula del área de un triángulo, se debe usar el ángulo γ que forman los lados a y b. Ya que los datos son a, b y α, primero se calcula β como sigue:

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} \qquad \text{ley de los senos}$$
$$\operatorname{sen}\beta = \frac{b \operatorname{sen}\alpha}{a} \qquad \text{se despeja sen } \beta$$
$$= \frac{3.0 \operatorname{sen} 37^\circ}{5.0} \qquad \text{se sustituye } b, \alpha \text{ y } a$$
$$\beta_R = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{3.0 \operatorname{sen} 37^\circ}{5.0}\right) \approx 21^\circ \qquad \text{ángulo de referencia para } \beta$$
$$\beta \approx 21^\circ \text{ o bien } \beta \approx 159^\circ \qquad \beta_R \text{ o bien } 180^\circ - \beta_R$$

Se elimina $\beta \approx 159^\circ$, porque entonces $\alpha + \beta = 196^\circ \geq 180^\circ$. Por consiguiente, $\beta \approx 21^\circ$ y

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) \approx 180^\circ - (37^\circ + 21^\circ) = 122^\circ.$$

Finalmente, se calcula el área del triángulo como sigue:

$$\mathscr{A} = \tfrac{1}{2}ab \operatorname{sen}\gamma \qquad \text{fórmula del área de un triángulo}$$
$$\approx \tfrac{1}{2}(5.0)(3.0)\operatorname{sen} 122^\circ \approx 6.4 \text{ cm}^2 \qquad \text{se sustituye y se calcula}$$

Se usará el resultado anterior del área de un triángulo para deducir la *fórmula de Herón*, que expresa el área de un triángulo en función de las longitudes de sus lados.

Fórmula de Herón

El área $\mathscr{A}$ del triángulo cuyos lados son a, b y c, es

$$\mathscr{A} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

en la cual s es la mitad del perímetro; es decir, $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

DEMOSTRACIÓN Las ecuaciones que siguen son equivalentes:

$$\mathscr{A} = \tfrac{1}{2}bc \operatorname{sen}\alpha$$
$$= \sqrt{\tfrac{1}{4}b^2c^2 \operatorname{sen}^2\alpha}$$
$$= \sqrt{\tfrac{1}{4}b^2c^2(1 - \cos^2\alpha)}$$
$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}bc(1 + \cos\alpha) \cdot \tfrac{1}{2}bc(1 - \cos\alpha)}$$

La fórmula de Herón se obtiene remplazando las expresiones bajo el signo radical por otras en las que sólo aparezcan a, b y c. Se despeja cos α de (1) en la ley de los cosenos y se hace la sustitución como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}bc(1+\cos\alpha) &= \frac{1}{2}bc\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\\ &= \frac{1}{2}bc\left(\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\\ &= \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4}\\ &= \frac{(b+c)^2-a^2}{4} = \frac{(b+c)+a}{2}\cdot\frac{(b+c)-a}{2}\end{aligned}$$

Se usan las mismas operaciones en la segunda expresión bajo el signo radical:

$$\frac{1}{2}bc(1-\cos\alpha) = \frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{a+b+c}{2}$$

Si ahora se sustituye en las expresiones bajo dicho signo radical, se obtiene

$$\mathscr{A} = \sqrt{\frac{b+c+a}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}}.$$

Si $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, se ve que

$$s-a = \frac{b+c-a}{2}, \qquad s-b = \frac{a-b+c}{2}, \qquad s-c = \frac{a+b-c}{2}.$$

Al sustituir en la última fórmula de $\mathscr{A}$ se obtiene la fórmula de Herón. ■

EJEMPLO 7 ***Empleo de la ley de Herón***

Un campo triangular tiene lados de 125 yd, 160 yd y 225 yd. Calcular el número de acres que tiene de superficie. (Un acre equivale a 4 840 yd^2).

SOLUCIÓN Se obtendrá el área del campo mediante la fórmula de Herón, con $a = 125$, $b = 160$ y $c = 225$:

$$\begin{aligned}s &= \tfrac{1}{2}(125+160+225) = \tfrac{1}{2}(510) = 255\\ s-a &= 255-125 = 130\\ s-b &= 255-160 = 95\\ s-c &= 255-225 = 30\end{aligned}$$

Sustituyendo en la fórmula de Herón se obtiene

$$\mathscr{A} = \sqrt{(255)(130)(95)(30)} \approx 9720 \text{ yd}^2.$$

Como en un acre hay 4 840 yd^2, el número de acres es $\frac{9\,720}{4\,840}$, es decir, aproximadamente 2.

EJERCICIOS 8.2

Ejercicios 1–10: Calcule las partes restantes del triángulo *ABC*.

1 $\alpha = 60°, \quad b = 20, \quad c = 30$

2 $\gamma = 45°, \quad b = 10.0, \quad a = 15.0$

3 $\beta = 150°, \quad a = 150, \quad c = 30$

4 $\beta = 73°50', \quad c = 14.0, \quad a = 87.0$

5 $\gamma = 115°10', \quad a = 1.10, \quad b = 2.10$

6 $\alpha = 23°40', \quad c = 4.30, \quad b = 70.0$

7 $a = 2.0, \quad b = 3.0, \quad c = 4.0$

8 $a = 10, \quad b = 15, \quad c = 12$

9 $a = 25.0, \quad b = 80.0, \quad c = 60.0$

10 $a = 20.0, \quad b = 20.0, \quad c = 10.0$

11 ***Dimensiones de un terreno triangular*** El ángulo en una esquina de un terreno triangular es 73°40′, y los lados que se cortan en esa esquina tienen 175 pies y 150 pies de longitud. Calcule la longitud del tercer lado.

12 ***Topografía*** Para determinar la distancia entre los puntos A y B, un topógrafo escoge un punto C que está a 420 yd de A y 540 yd de B. Si el ángulo ACB mide 63°10′ calcule la distancia entre A y B.

13 ***Distancia entre automóviles*** Dos automóviles salen al mismo tiempo de una ciudad, y viajan por carreteras rectas que forman un ángulo de 84° entre sí. Las velocidades de los vehículos son 60 mi/h y 45 mi/h, respectivamente. ¿A qué distancia aproximadamente se encuentran 20 min después?

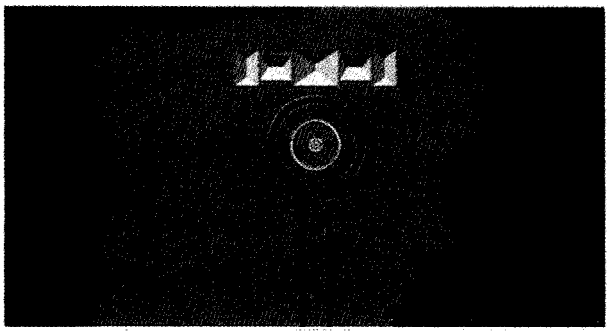
14 ***Ángulos de un terreno triangular*** Un terreno triangular tiene lados de 420 pies, 350 pies y 180 pies de longitud. Calcule el ángulo más pequeño del terreno.

15 ***Distancia entre buques*** Un barco sale de puerto a la 1:00 P.M., con rumbo S35°E a una velocidad de 24 mi/h. Otra nave sale del mismo puerto a la 1:30 P.M. y viaja al S20°W a 18 mi/h. Aproximadamente, ¿a qué distancia se encuentran a las 3:00 P.M?

16 ***Distancia de vuelo*** Un aeroplano vuela 165 mi desde el punto A en dirección 130°, y después 80 mi en dirección 245°. Aproximadamente, ¿a qué distancia se encuentra el avión de A?

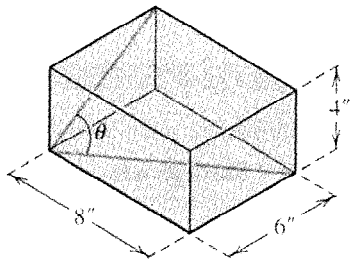
17 ***Ruta de un corredor*** Un corredor se mueve a una velocidad constante de una milla cada 8 minutos, en dirección S40°E durante 20 min, y a continuación en dirección N20°E durante los 16 min siguientes. Calcule, redondeando a la décima de milla más cercana, la distancia entre los puntos final e inicial de su camino.

18 ***Topografía*** En terreno plano se encuentran dos puntos P y Q en los lados opuestos de un edificio. Para calcular la distancia entre ellos, un topógrafo escoge un punto R a 300 pies de P y a 438 pies de Q, y a continuación determina que el ángulo PRQ mide 37°40′ (véase la figura). Calcule la distancia de P a Q.



19 ***Curso de una lancha de motor*** Una lancha de motor viaja por una pista triangular cuyos lados tienen 2 km, 4 km y 3 km de longitud, respectivamente. El primer lado se recorre en dirección N20°W, el segundo en dirección Sθ°W, donde $\theta°$ es el ángulo agudo, en grados. Calcule, al minuto más cercano, la dirección en la cual se recorrió el tercer lado.

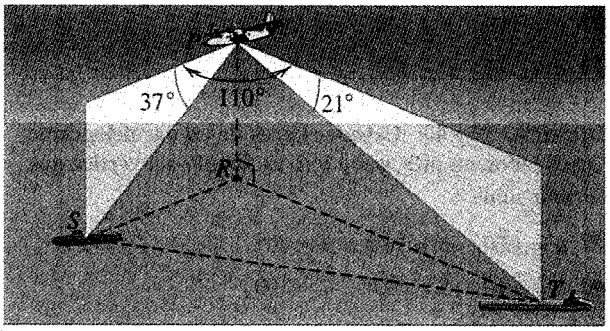
20 ***Ángulo de una caja*** La caja rectangular que se ve en la figura tiene las dimensiones (en pulgadas) $8 \times 6 \times 4$. Calcule el angulo θ que forma una diagonal de la base y una diagonal de la cara de 6×4.



21 ***Distancias en un diamante de béisbol*** Un diamante de béisbol tiene tres bases en tres esquinas de un cuadrado, y el *home* en la cuarta; la distancia de una base a otra es 90 pies; el montículo del lanzador se encuentra a 60.5 pies del plato de *home*. Calcule la distancia del montículo a cada una de las tres bases.

22 Un rombo tiene lados de 100 cm de longitud, y el ángulo en uno de los vértices es 70°. Calcule las longitudes de las diagonales al décimo de centímetro.

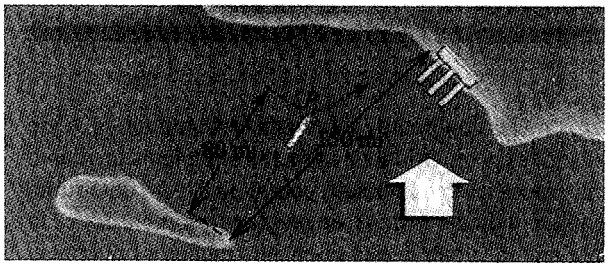
23 ***Reconocimiento*** Un avión de reconocimiento P que vuela a 10 000 pies sobre un punto R en la superficie del agua, ve un submarino S a un ángulo de depresión de 37° y a un buquetanque T a un ángulo de depresión de 21°, como se ve en la figura. Además, se mide $\angle SPT$ y resulta ser de 110°. Calcule la distancia entre el submarino y el buquetanque.



24 ***Corrección del rumbo de un barco*** Un crucero enfila al N47°E, desde una isla, a un puerto en el continente, a 150 mi de distancia. Después de moverse dentro de fuertes corrientes, se desvía de su ruta, y se encuentra en el lugar P, que está a N33°E y a 80 mi de la isla, como se ve en la figura.

(a) ¿A qué distancia aproximada del puerto se encuentra el crucero?

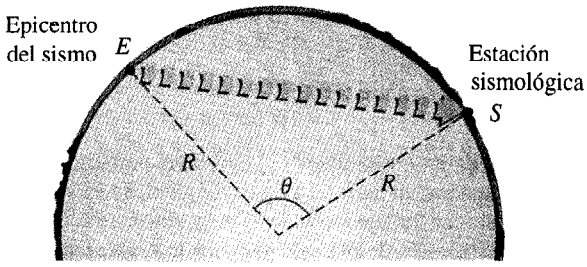
(b) ¿En qué dirección se debe dirigir el barco para corregir su ruta, suponiendo que ya no hay corrientes?



25 ***Sismología*** Los sismólogos investigan la estructura interna de la Tierra analizando las ondas sísmicas causadas por los terremotos. Si se supone que el interior de la Tierra es homogéneo, entonces esas ondas viajan en línea recta a velocidad constante v. La figura muestra un corte de la Tierra, un epicentro E y un punto de observación S. Emplee la ley de los cosenos para demostrar que el tiempo t para que una onda viaje por el interior de la Tierra de E a S es

$$t = \frac{2R}{v} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2},$$

en la cual R es el radio de la Tierra y θ es el ángulo indicado, con vértice en el centro de la Tierra.



26 ***Cálculo de distancias*** Se puede calcular la distancia a través del río que se ve en la figura, sin medir ángulos. Se escogen dos puntos B y C en la orilla opuesta y se prolongan las líneas AB y AC como se indica. Se localizan los puntos D y E, y a continuación se miden las distancias BC, BD, BE, CD y CE. Suponga que $BC = 184$ pies, $BD = 102$ pies, $BE = 218$ pies, $CD = 236$ pies, y $CE = 80$ pies.

(a) Determine las distancias AB y AC.

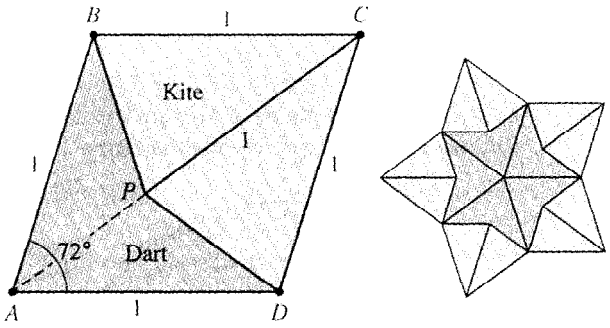
(b) Calcule la distancia mínima a través del río desde el punto A.

27 ***Losetas Penrose*** Las losetas Penrose se forman con un rombo, $ABCD$, cuyos lados tienen longitud 1, y un ángulo interno de 72°. Primero se determina un punto P que queda en la diagonal AC y está a la distancia 1 del vértice C, luego se trazan los segmentos PB y PD a los otros vértices, como se ve en la figura. Las dos partes que se forman se llaman dardo y cometa. En química molecular se han empleado versiones tridimensionales de esas losetas.

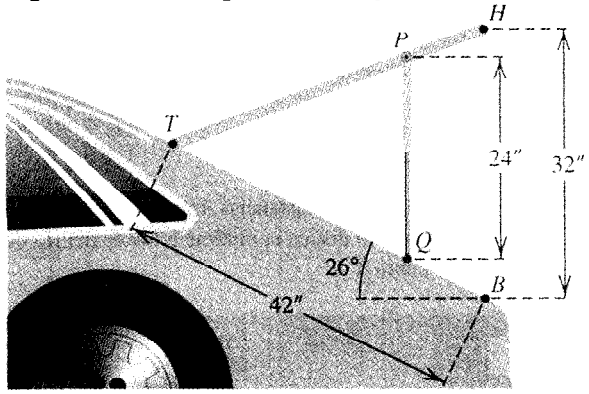
(a) Calcule, en grados, los ángulos $\angle BPC$, $\angle APB$ y $\angle ABP$.

(b) Evalúe, con precisión de 0.01, la longitud del segmento BP.

(c) Calcule, con precisión de 0.01, el área de una cometa y el área de un dardo.



28 ***Diseño de un automóvil*** La tapa del portaequipaje de un automóvil tiene 42 pulg de longitud. Se va a fijar un poste con longitud total de 24 pulg, que une a la tapa con la carrocería, de tal modo que cuando se abra totalmente la tapa, el poste quede vertical y la altura libre trasera, entre tapa y carrocería, sea 32 pulg, como se ve en la figura. Calcule las longitudes de los segmentos TQ y TP.



Ejercicios 29–36: Calcule el área del triángulo ABC.

29 $\alpha = 60°$, $b = 20$, $c = 30$

30 $\gamma = 45°$, $b = 10.0$, $a = 15.0$

31 $\alpha = 40.3°$, $\beta = 62.9°$, $b = 5.63$

32 $\alpha = 35.7°$, $\gamma = 105.2°$, $b = 17.2$

33 $\alpha = 80.1°$, $a = 8.0$, $b = 3.4$

34 $\gamma = 32.1°$, $a = 14.6$, $c = 15.8$

35 $a = 25.0$, $b = 80.0$, $c = 60.0$

36 $a = 20.0$, $b = 20.0$, $c = 10.0$

Ejercicios 37 y 38: Un terreno triangular tiene lados de longitud a, b y c, en yardas. Calcular la superficie del terreno, en acres (1 acre = 4 840 yardas cuadradas).

37 $a = 115$, $b = 140$, $c = 200$

38 $a = 320$, $b = 350$, $c = 500$

Ejercicios 39 y 40: Calcule el área de un paralelogramo cuyos lados, en pies, son a y b. El ángulo del vértice que forman mide θ.

39 $a = 12.0$, $b = 16.0$, $\theta = 40°$

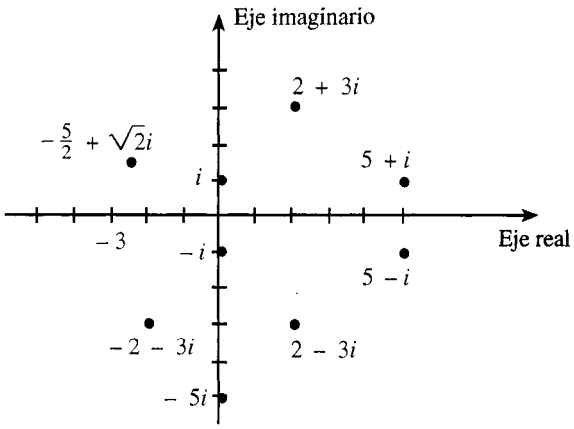
40 $a = 40.3$, $b = 52.6$, $\theta = 100°$

8.3 FORMA TRIGONOMÉTRICA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

En la Secc. 1.1 se representó a los números reales con puntos sobre una recta numérica, o eje coordenado. Se pueden obtener representaciones geométricas de números complejos mediante puntos en un plano coordenado. En forma específica cada número complejo $a + bi$, determina un par ordenado único (a, b). El punto correspondiente $P(a, b)$ en un plano coordenado, es la **representación geométrica** de $a + bi$. Para remarcar que se está asignando números complejos a puntos en un plano, se puede identificar al punto $P(a, b)$ como *punto* $a + bi$. A un plano de coordenadas con un número complejo asignado a cada punto se le denomina **plano complejo**, en lugar de plano xy. El eje x es el **eje real**, y el eje y es el **eje imaginario**. En la Fig. 8.17 se han

representado geométricamente varios números complejos. Nótese que para obtener el punto que corresponde al conjugado $a - bi$ de cualquier número complejo $a + bi$, tan sólo se refleja a éste en el eje real.

FIGURA 8.17



El valor absoluto $|a|$ de un número real a es la distancia del origen al punto en el eje x que corresponde a a. Así, resulta natural interpretar el valor absoluto $|a + bi|$ de un número complejo como la distancia $\sqrt{a^2 + b^2}$ del origen de un plano complejo al punto (a, b) que corresponde a $a + bi$.

Definición del valor absoluto de un número complejo

El **valor absoluto** $|a + bi|$ **de un número complejo** $a + bi$ es

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

EJEMPLO 1 ***Cálculo del valor absoluto de un número complejo***

Calcular

(a) $|2 - 6i|$ **(b)** $|3i|$

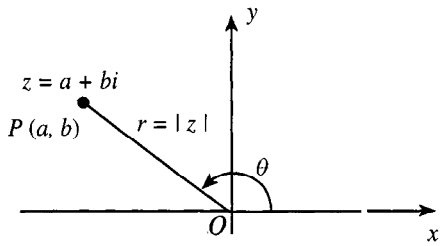
SOLUCIÓN Se utilizará la definición anterior:

(a) $|2 - 6i| = \sqrt{2^2 + (-6)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \approx 6.3$

(b) $|3i| = |0 + 3i| = \sqrt{0^2 + 3^2} = \sqrt{9} = 3$

Los puntos que corresponden a todos los números complejos que tienen un valor absoluto fijo k, se encuentran en una circunferencia de radio k con centro en el origen del plano complejo. Por ejemplo, los puntos que corresponden a los números complejos z que tienen $|z| = 1$ están en un circunferencia unitaria.

FIGURA 8.18
$z = a + bi = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$



Considérese un número complejo distinto de cero $z = a + bi$ y su representación geométrica $P(a, b)$ como se ve en la Fig. 8.18. Sea θ cualquier ángulo en su posición normal, cuyo lado terminal esté en el segmento OP, y sea $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Como $\cos\theta = a/r$, y $\operatorname{sen}\theta = b/r$, se observa que $a = r\cos\theta$ y $b = r\operatorname{sen}\theta$. Sustituyendo a y b en $z = a + bi$, resulta que

$$z = a + bi = (r\cos\theta) + (r\operatorname{sen}\theta)i = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta).$$

Esta expresión se llama **forma trigonométrica del número complejo** $a + bi$. Una forma abreviada usual es

$$r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = r\operatorname{cis}\theta.$$

La forma trigonométrica de $z = a + bi$ no es única, ya que hay un número ilimitado de opciones para el ángulo θ. Cuando se usa la forma trigonométrica, a veces se denomina **módulo** de z al valor absoluto r de z, y al ángulo θ asociado a z se le llama **argumento** (o **amplitud**) de z.

La descripción resumida es como sigue:

Forma trigonométrica de $a + bi$

Sea $z = a + bi$. Si $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, y si θ es un argumento de z, entonces

$$z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = r\operatorname{cis}\theta.$$

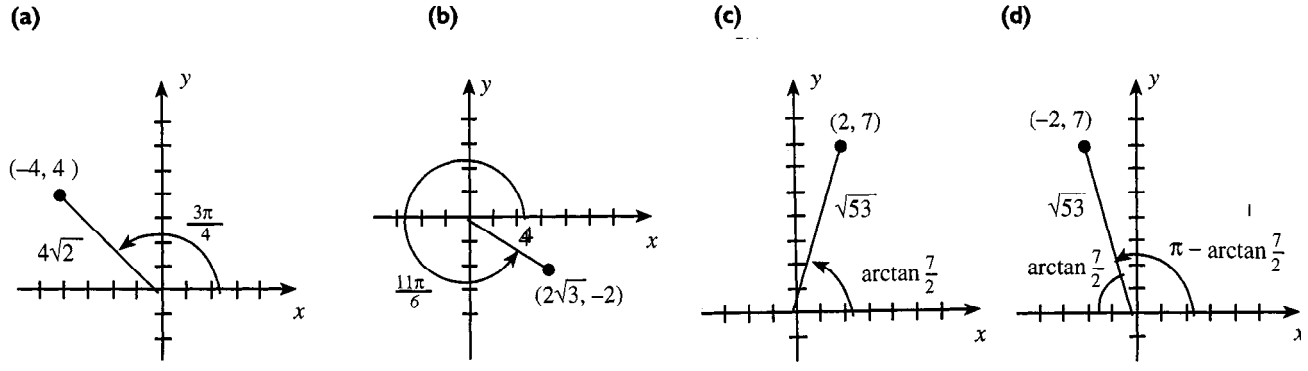
EJEMPLO 2 ***Expresar un número complejo en forma trigonométrica.***

Expresar el número complejo en forma trigonométrica, con $0 \le \theta < 2\pi$:

(a) $-4 + 4i$ **(b)** $2\sqrt{3} - 2i$ **(c)** $2 + 7i$ **(d)** $-2 + 7i$

SOLUCIÓN Primero se representa geométricamente cada número complejo, como en la Fig. 8.19.

FIGURA 8.19



A continuación se sustituye r y θ en la forma trigonométrica:

(a) $$-4 + 4i = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{3\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\,\text{cis}\frac{3\pi}{4}$$

(b) $$2\sqrt{3} - 2i = 4\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{11\pi}{6}\right) = 4\,\text{cis}\frac{11\pi}{6}$$

(c) $2 + 7i = \sqrt{53}[\cos(\arctan\frac{7}{2}) + i\,\text{sen}(\arctan\frac{7}{2})] = \sqrt{53}\,\text{cis}(\arctan\frac{7}{2})$

(d) $$-2 + 7i = \sqrt{53}[\cos(\pi - \arctan\tfrac{7}{2}) + i\,\text{sen}(\pi - \arctan\tfrac{7}{2})]$$
$$= \sqrt{53}\,\text{cis}(\pi - \arctan\tfrac{7}{2})$$

Si a θ se le dan valores cualesquiera, hay muchas otras formas trigonométricas para los números complejos del Ejemplo 2. Así, para $-4 + 4i$ en la parte (a) se podría usar

$$\theta = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \quad \text{para cualquier entero } n.$$

Si, por ejemplo, se hace $n = 1$ y $n = -1$, se obtiene

$$-4 + 4i = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{11\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\,\text{cis}\frac{11\pi}{4}$$

$$-4 + 4i = 4\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{5\pi}{4}\right)\right] = 4\sqrt{2}\,\text{cis}\left(-\frac{5\pi}{4}\right).$$

En general, *los argumentos para el mismo número complejo difieren siempre por un múltiplo de* 2π.

Si los números complejos se expresan en forma trigonométrica, entonces se pueden llevar a cabo la multiplicación y división como se indica en el siguiente teorema:

Teorema sobre productos y cocientes de números complejos

Si las formas trigonométricas de dos números complejos, z_1 y z_2, son

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1) \quad \text{y} \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2),$$

entonces

(1) $z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$

(2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)], \quad z_2 \neq 0$

DEMOSTRACIÓN Se hará la demostración de (1) en esta ocasión y se deja como ejercicio la demostración de (2). De manera que

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2) \\ &= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2) \\ &\qquad + i(\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2)]. \end{aligned}$$

Con las fórmulas de suma de ángulos aplicada a $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ y $\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)$ se llega a (1). ■

La parte (1) del teorema anterior dice que *el módulo de un producto de dos números complejos es el producto de sus módulos, y un argumento es la suma de sus argumentos*. Se puede llegar a una afirmación análoga para (2).

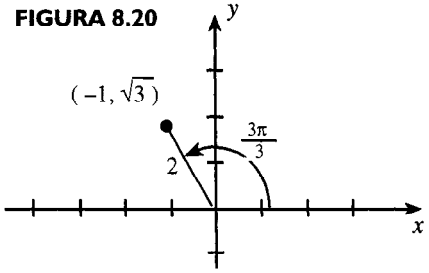
EJEMPLO 3 ***Uso de formas trigonométricas para calcular productos y cocientes***

Si $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$, y también $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$, usar formas trigonométricas para determinar **(a)** z_1z_2, y **(b)** z_1/z_2. Comprobar lo anterior empleando métodos algebraicos.

SOLUCIÓN En la Fig. 8.19(b) se representa geométricamente el número complejo $2\sqrt{3} - 2i$. Si se usa $\theta = -\pi/6$ en la forma trigonométrica, entonces

$$z_1 = 2\sqrt{3} - 2i = 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right].$$

FIGURA 8.20



En la Fig. 8.20 se representa el número complejo $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$. Una forma trigonométrica es

$$z_2 = -1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right).$$

(a) Se aplica la parte (1) del teorema sobre productos y cocientes de números complejos:

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= 4 \cdot 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)\right] \\ &= 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = 8(0 + i) = 8i \end{aligned}$$

Se efectúa el desarrollo algebraico para comprobar el resultado y se tiene que

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (2\sqrt{3} - 2i)(-1 + \sqrt{3}i) \\ &= (-2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) + (2 + 6)i = 0 + 8i = 8i. \end{aligned}$$

(b) Aplicando la parte (2) del teorema:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{4}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right)\right] \\ &= 2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right] \\ &= 2\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = -\sqrt{3} - i \end{aligned}$$

Con el desarrollo algebraico se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2\sqrt{3} - 2i}{-1 + \sqrt{3}i} \cdot \frac{-1 - \sqrt{3}i}{-1 - \sqrt{3}i} \\ &= \frac{(-2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}) + (2 - 6)i}{4} = -\sqrt{3} - i. \end{aligned}$$

EJERCICIOS 8.3

Ejercicios 1–10: Calcule el valor absoluto.

1 $|3-4i|$ **2** $|5+8i|$

3 $|-6-7i|$ **4** $|1-i|$

5 $|8i|$ **6** $|i^7|$

7 $|i^{500}|$ **8** $|-15i|$

$|0|$ **10** $|-15|$

Ejercicios 11–20: Represente geométricamente al número complejo.

11 $4+2i$ **12** $-5+3i$

13 $3-5i$ **14** $-2-6i$

15 $-(3-6i)$ **16** $(1+2i)^2$

17 $2i(2+3i)$ **18** $(-3i)(2-i)$

19 $(1+i)^2$ **20** $4(-1+2i)$

Ejercicios 21 – 46: Exprese el número complejo en forma trigonométrica con $0 \le \theta < 2\pi$.

21 $1-i$ **22** $\sqrt{3}+i$

23 $-4\sqrt{3}+4i$ **24** $-2-2i$

25 $2\sqrt{3}+2i$ **26** $3-3\sqrt{3}i$

27 $-4-4i$ **28** $-10+10i$

29 $-20i$ **30** $-6i$

31 12 **32** 15

33 -7 **34** -5

35 $6i$ **36** $4i$

37 $-5-5\sqrt{3}i$ **38** $\sqrt{3}-i$

39 $2+i$ **40** $3+2i$

41 $-3+i$ **42** $-4+2i$

43 $-5-3i$ **44** $-2-7i$

45 $4-3i$ **46** $1-3i$

Ejercicios 47–56: Exprese lo siguiente en forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

47 $4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$ **48** $8\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\,\text{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$

49 $6\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\,\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$ **50** $12\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\,\text{sen}\frac{4\pi}{3}\right)$

51 $5(\cos\pi+i\,\text{sen}\,\pi)$ **52** $3\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\,\text{sen}\frac{3\pi}{2}\right)$

53 $\sqrt{34}\,\text{cis}\,(\tan^{-1}\frac{3}{5})$ **54** $\sqrt{53}\,\text{cis}\,[\tan^{-1}(-\frac{2}{7})]$

55 $\sqrt{5}\,\text{cis}\,[\tan^{-1}(-\frac{1}{2})]$ **56** $\sqrt{10}\,\text{cis}\,(\tan^{-1}3)$

Ejercicios 57 – 64: Emplee formas trigonométricas para determinar z_1z_2 y z_1/z_2.

57 $z_1=-1+i$, $z_2=1+i$

58 $z_1=\sqrt{3}-i$, $z_2=-\sqrt{3}-i$

59 $z_1=-2-2\sqrt{3}i$, $z_2=5i$

60 $z_1=-5+5i$, $z_2=-3i$

61 $z_1=-10$, $z_2=-4$

62 $z_1=2i$, $z_2=-3i$

63 $z_1=4$, $z_2=2-i$

64 $z_1=-3$, $z_2=5+2i$

65 Demuestre la parte (2) del teorema sobre productos y cocientes de números complejos.

66 **(a)** Amplíe la parte (1) del teorema sobre productos y cocientes de números complejos, a tres números complejos.

(b) Generalice la parte (1) del teorema a n números complejos.

8.4 TEOREMA DE DE MOIVRE Y RAÍCES *n*-ÉSIMAS DE NÚMEROS COMPLEJOS

Si z es un número complejo y n es un entero positivo, entonces un número complejo w es una **raiz *n*-ésima** de z si $w^n = z$. Se demostrará que todo número complejo distinto de cero tiene n raíces n-ésimas distintas. Como $\mathbb{R}$ esta contenido en $\mathbb{C}$, se concluye también que todo número real distinto de cero tiene n raíces n-ésimas (complejas) distintas. Si a es un número real positivo y $n = 2$, ya se sabe que las raíces son $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$.

Si, en el teorema sobre productos y cocientes de números complejos, se hace que tanto z_1 como z_2 sean iguales al número complejo $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, se obtiene

$$z^2 = r \cdot r[\cos(\theta + \theta) + i \operatorname{sen}(\theta + \theta)]$$

$$= r^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta).$$

Aplicando el mismo teorema a z^2 y z se llega a

$$z^2 \cdot z = (r^2 \cdot r)[\cos(2\theta + \theta) + i \operatorname{sen}(2\theta + \theta)]$$

o bien $$z^3 = r^3(\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta).$$

La aplicación del teorema a z^3 y z da

$$z^4 = r^4(\cos 4\theta + i \operatorname{sen} 4\theta).$$

En general, se tiene el resultado siguiente, denominado en honor del matemático francés Abraham De Moivre (1667-1754):

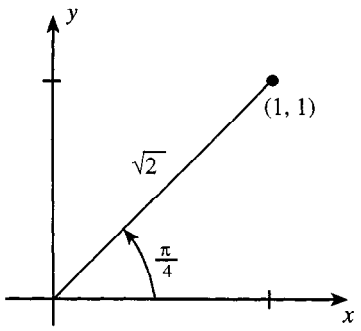
Teorema de De Moivre

> Para todo entero n,
>
> $$[r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta).$$

EJEMPLO 1 ***Uso del teorema de De Moivre***

Calcular $(1 + i)^{20}$.

FIGURA 8.21



SOLUCIÓN Sería tedioso determinar $(1 + i)^{20}$ mediante métodos algebraicos. Por consiguiente, se presentará una forma trigonométrica de $1 + i$. En la Fig. 8.21 se observa que

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right).$$

Aplicando luego el teorema de De Moivre:

$$(1 + i)^{20} = (2^{1/2})^{20}\left[\cos\left(20 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(20 \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 2^{10}(\cos 5\pi + i \operatorname{sen} 5\pi) = 2^{10}(-1) = -1\,024$$

Si un número complejo z distinto de cero tiene una raíz n-ésima w entonces $w^n = z$. Si las formas trigonométricas de w y z son

$$w = s(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) \qquad \text{y} \qquad z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta),$$

entonces, aplicando el teorema de De Moivre a $w^n = z$ se obtiene

$$s^n(\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha) = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta).$$

Si dos números complejos son iguales, también lo serán sus valores absolutos. En consecuencia, $s^n = r$, y como s y r son no negativos, $s = \sqrt[n]{r}$. Sustituyendo r por s^n en la última ecuación y dividiendo ambos miembros entre s^n, se obtiene

$$\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

Como los argumentos de números complejos iguales difieren en un múltiplo de 2π, hay un entero k tal que $n\alpha = \theta + 2\pi k$. Dividiendo entre n ambos miembros de la última ecuación, se ve que

$$\alpha = \frac{\theta + 2\pi k}{n} \quad \text{para cierto entero } k.$$

Sustituyendo en la forma trigonométrica de w se obtiene la fórmula

$$w = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right].$$

Al introducir $k = 0, 1, \ldots, n-1$ sucesivamente, el resultado son las n raíces n-ésimas distintas de z. Ningún otro valor de k producirá una nueva raíz n-ésima. Por ejemplo, si $k = n$, se obtiene el ángulo $(\theta + 2\pi n)/n$, o sea $(\theta/n) + 2\pi$, que da la misma raíz n-ésima que se calcula para $k = 0$. Igualmente, $k = n + 1$ produce la misma raíz n-ésima que $k = 1$, etc. Lo mismo sucede con valores negativos de k. Se ha demostrado el teorema siguiente.

Teorema sobre raíces n-ésimas

Si $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ es cualquier número complejo distinto de cero, y si n es cualquier entero positivo, entonces z tiene exactamente n raíces n-ésimas distintas, $w_0, w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$. Esas raíces, cuando θ está en radianes, son

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right]$$

o, en forma equivalente, para θ en grados,

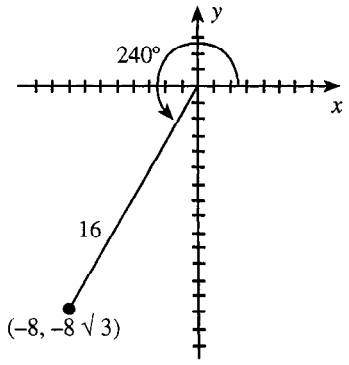
$$w_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 360°k}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 360°k}{n}\right)\right],$$

donde $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Las raíces n-ésimas de z de este teorema tienen valor absoluto $\sqrt[n]{r}$ y, por tanto, sus representaciones geométricas están en una circunferencia de radio $\sqrt[n]{r}$, con centro en O. Además, están repartidas uniformemente (equiespaciadas) en dicho círculo, ya que la diferencia entre los argumentos de las raíces n-ésimas sucesivas es $2\pi/n$.

EJEMPLO 2 ***Determinación de las raíces cuartas de un número complejo***

Calcular las cuatro raíces cuartas de $-8 - 8\sqrt{3}i$.



SOLUCIÓN En la Fig. 8.22 se observa la representación geométrica de $-8-8\sqrt{3}i$. Introduciendo la forma trigonométrica, se tiene

$$-8-8\sqrt{3}i = 16(\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°).$$

Aplicando el teorema sobre las raíces n-ésimas con $n = 4$, y teniendo en cuenta que $\sqrt[4]{16} = 2$, se encuentra que las raíces cuartas son

$$w_k = 2\left[\cos\left(\frac{240° + 360°k}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{240° + 360°k}{4}\right)\right]$$

para $k = 0, 1, 2, 3$. Esta fórmula se puede escribir como

$$w_k = 2[\cos(60° + 90°k) + i \operatorname{sen}(60° + 90°k)].$$

Sustituyendo 0, 1, 2 y 3 en lugar de k en $(60° + 90°k)$, se obtienen las cuatro raíces cuartas:

$$w_0 = 2(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°) = 1 + \sqrt{3}i$$
$$w_1 = 2(\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°) = -\sqrt{3} + i$$
$$w_2 = 2(\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°) = -1 - \sqrt{3}i$$
$$w_3 = 2(\cos 330° + i \operatorname{sen} 330°) = \sqrt{3} - i$$

EJEMPLO 3 *Determinación de las raíces sextas de un número real*

(a) Determinar las seis raíces sextas de -1.

(b) Representarlas geométricamente.

SOLUCIÓN

(a) Si se escribe $-1 = 1(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$ y se usa el teorema sobre raíces n-ésimas con $n = 6$, se ve que las raíces sextas de -1 están dadas por

$$w_k = \cos\left(\frac{\pi + 2\pi k}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi + 2\pi k}{6}\right)$$

para $k = 0, 1, 2, 3, 4$ y 5. También se puede escribir w_k en la forma

$$w_k = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k\right).$$

Sustituyendo k por 0, 1, 2, 3, 4 y 5 se obtienen las seis raíces sextas de -1:

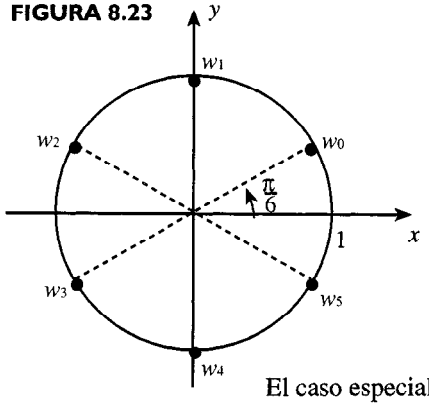
$$w_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$w_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = i$$

$$w_2 = \cos\frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$w_3 = \cos\frac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

FIGURA 8.23



$$w_4 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{3\pi}{2} = -i$$

$$w_5 = \cos\frac{11\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

(b) Como $|-1| = 1$, los puntos que representan las raíces de -1 quedan en la circunferencia unitaria que se ve en la Fig. 8.23. Además, están equiespaciados en esa curva.

El caso especial en que $z = 1$ es de interés particular. Las n raíces n-ésimas distintas de 1 se llaman **raíces n-ésimas de la unidad**. En especial, si $n = 3$, se denominan **raíces cúbicas de la unidad**.

EJEMPLO 4 *Determinación de las raíces cúbicas de la unidad*

Calcular las tres raíces cúbicas de la unidad.

SOLUCIÓN Expresando que $1 = \cos 0 + i\,\text{sen}\,0$, y usando el teorema sobre las raíces n-ésimas con $n = 3$ se obtiene

$$w_k = \cos\frac{2\pi k}{3} + i\,\text{sen}\frac{2\pi k}{3}$$

para $k = 0, 1, 2$. Sustituyendo k se obtienen las tres raíces cúbicas:

$$w_0 = \cos 0 + i\,\text{sen}\,0 = 1$$

$$w_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$w_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Nótese que el cálculo de las raíces n-ésimas de un número complejo c, como se hizo en los Ejemplos 2 a 4, equivale a determinar todas las soluciones de la ecuación

$$x^n = c, \quad \text{o bien} \quad x^n - c = 0.$$

(Véanse Ejercicios 23 – 30.)

EJERCICIOS 8.4

Ejercicios 1–12: Con el teorema de De Moivre cambie el número complejo dado a la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

1 $(3 + 3i)^5$

2 $(1 + i)^{12}$

3 $(1 - i)^{10}$

4 $(-1 + i)^8$

5 $(1 - \sqrt{3}i)^3$

6 $(1 - \sqrt{3}i)^5$

7 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{15}$ **8** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{25}$

9 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^{20}$ **10** $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^{50}$

11 $(\sqrt{3}+i)^7$ **12** $(-2-2i)^{10}$

13 Determine las dos raíces cuadradas de $1+\sqrt{3}i$.

14 Obtenga las dos raíces cuadradas de $-9i$.

15 Calcule las cuatro raíces cuartas de $-1-\sqrt{3}i$.

16 Encuentre las cuatro raíces cuartas de $-8+8\sqrt{3}i$.

17 Determine las tres raíces cúbicas de $-27i$.

18 Obtenga las tres raíces cúbicas de $64i$.

Ejercicios 19 – 22: Determine las raíces indicadas y represéntelas geométricamente.

19 Las seis raíces sextas de la unidad.

20 Las ocho raíces octavas de la unidad.

21 Las cinco raíces quintas de $1+i$

22 Las cinco raíces quintas de $-\sqrt{3}-i$

Ejercicios 23 – 30: Determine las soluciones de la ecuación

23 $x^4-16=0$ **24** $x^6-64=0$

25 $x^6+64=0$ **26** $x^5+1=0$

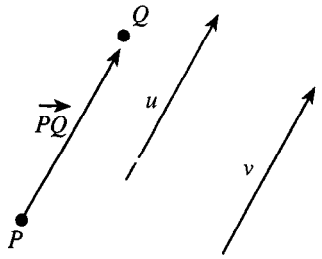
27 $x^3+8i=0$ **28** $x^3-64i=0$

29 $x^5-243=0$ **30** $x^4+81=0$

8.5 VECTORES Y CANTIDADES VECTORIALES

Cantidades que corresponden a longitud, área, volumen, temperatura y tiempo, sólo tienen magnitud y se pueden representar completamene mediante un sólo número real, con una unidad adecuada de medida como cm, cm^2, m^3, grado o segundo. Una cantidad de este tipo es una **cantidad escalar**, y al número real correspondiente se le llama **escalar**. Un concepto como velocidad o fuerza tiene magnitud y dirección, y con frecuencia se representa mediante un **segmento de recta dirigido**, es decir, un segmento al cual se le asigna una dirección*. A dicho segmento dirigido se le denomina **vector**.

FIGURA 8.24
Vectores iguales



Como se ve en la Fig. 8.24, se emplea $\overrightarrow{PQ}$ para indicar el vector con **punto inicial** P y **punto terminal** Q; el sentido directivo del vector se indica colocando la punta de la flecha en Q. La **magnitud** de $\overrightarrow{PQ}$ es la longitud del segmento PQ, y se denota por $\|\overrightarrow{PQ}\|$. Como en la figura, se usan letras en negrilla, como **u** y **v**, para indicar vectores cuyos puntos extremos no se especifiquen. En escritura manual, con frecuencia se usa $\tilde{u}$ o $\tilde{v}$.

Los vectores que tienen igual magnitud y dirección son **equivalentes**. En matemáticas, un vector está determinado sólo por su magnitud y dirección, y no por su ubicación. Así, a los vectores equivalentes, como los de la Fig. 8.24, se les considera **iguales** y se escribe

$$\mathbf{u}=\overrightarrow{PQ}, \qquad \mathbf{v}=\overrightarrow{PQ}, \qquad \text{y} \qquad \mathbf{u}=\mathbf{v}.$$

Por tanto, *un vector se puede trasladar de un lugar a otro, siempre que no cambien ni su magnitud ni su dirección.*

* (N. del R.) La dirección implica *orientación* según un sistema de referencia, y el *sentido* a lo largo de tal orientación. [F. P.]

Es posible representar con vectores muchas cantidades físicas. Para dar un ejemplo, supóngase que un avión desciende a una velocidad constante de 100 mi/h y que la trayectoria de vuelo forma un ángulo de 20° con la horizontal. Ambos hechos se representan mediante el vector **v** de magnitud 100 en la Fig. 8.25. El vector **v** es un **vector velocidad.**

FIGURA 8.25 Vector velocidad

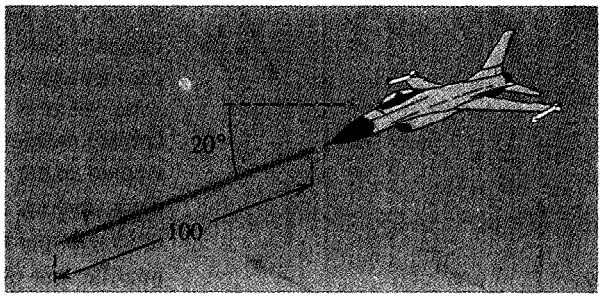
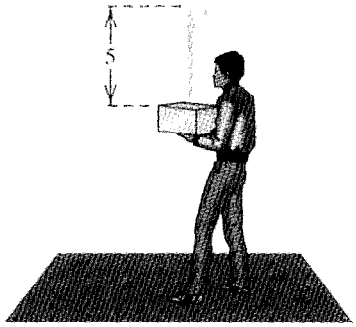


FIGURA 8.26
Vector fuerza

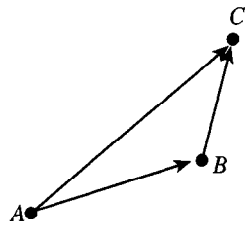


Un vector que representa una tracción o un empuje de cualquier tipo es un **vector fuerza**. La fuerza ejercida (peso) cuando una persona sostiene un cuerpo de 5 kg (o 5 lb) se representa con el vector **F** de magnitud 5 en la Fig. 8.26. Esta fuerza tiene la misma magnitud que la ejercida por la gravedad sobre el peso, pero actúa en dirección opuesta. Como resultado, no hay movimiento hacia arriba ni hacia abajo.

A veces se usa $\overrightarrow{AB}$ para representar la trayectoria de un punto o partícula, al moverse a lo largo del segmento de recta de A a B. Entonces, se hará referencia a $\overrightarrow{AB}$ como un **desplazamiento** del punto o partícula. Como en la Fig. 8.27, un desplazamiento $\overrightarrow{AB}$ seguido por otro $\overrightarrow{BC}$ lleva al mismo punto que el desplazamiento único $\overrightarrow{AC}$. Por definición, el vector $\overrightarrow{AC}$ es la **suma** de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$, y es posible escribir

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

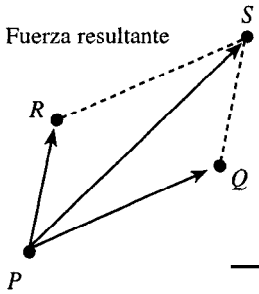
FIGURA 8.27
Suma de vectores



Como los vectores se pueden trasladar de un lugar a otro, para sumar dos vectores *cualesquiera* se coloca el punto inicial del segundo vector en el punto terminal del primero y, a continuación, se traza el segmento que va desde el punto inicial del primero hasta el punto terminal del segundo, como en la Fig. 8.27.

Otra manera de calcular la suma es escoger vectores, $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$, que sean iguales a $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$, respectivamente, y que tengan el mismo punto inicial P como se ve en la Fig. 8.28. Si se construye el paralelogramo $RPQS$, entonces, como $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$, se concluye que $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}$. Si $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son dos fuerzas que actúan en P, entonces $\overrightarrow{PS}$ es la **fuerza resultante** —es decir, la fuerza única que produce el mismo efecto que las dos fuerzas combinadas.

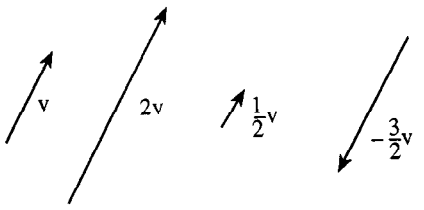
Fuerza resultante

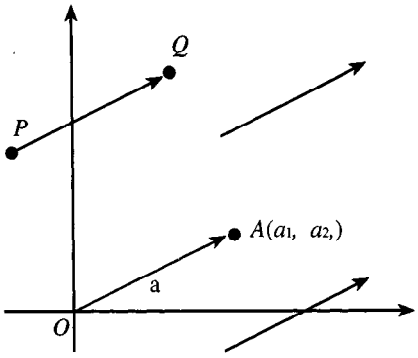


Si c es un escalar y **v** es un vector, entonces se define a c**v** como el vector cuya magnitud es $|c|$ veces la magnitud $\|\mathbf{v}\|$ de **v** y cuyo sentido es el mismo que el de **v** si $c > 0$, u opuesto al de **v** si $c < 0$. En la Fig. 8.29 se dan dos ejemplos. A c**v** se le denomina **múltiplo por escalar** de **v***.

* (N. del R.) Este nombre, que es más adecuado, puede evitar el de "múltiplo escalar", que resulta impropio. [F. P.]

FIGURA 8.29
Múltiplos escalares





En lo que resta de esta sección se restringirá la descripción a vectores que están en el plano xy. Si $\overrightarrow{PQ}$ es uno de ellos, entonces, como se indica en la Fig. 8.30, hay muchos vectores que equivalen a $\overrightarrow{PQ}$; sin embargo, hay exactamente *un* vector equivalente, $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ con un punto inicial en el origen. En este sentido, *cada vector determina un par ordenado único de números reales,* las coordenadas (a_1, a_2) del punto terminal A. Recíprocamente, todo par ordenado, (a_1, a_2) determina el vector $\overrightarrow{OA}$, en el cual las coordenadas de A son (a_1, a_2). Así, *hay una correspondencia biunívoca entre vectores del plano xy y pares ordenados de números reales.* Esta correspondencia permite interpretar un vector como un segmento dirigido y como un par ordenado. Para evitar confusiones con la notación de intervalos abiertos o puntos, se usará el símbolo $\langle a_1, a_2 \rangle$ para indicar un par ordenado que represente un vector, el cual se denotará con una letra en negrilla; por ejemplo, $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$. Los números a_1 y a_2 son los (o las) **componentes** del vector $\langle a_1, a_2 \rangle$. Si A es el punto (a_1, a_2), como en la Fig. 8.30, se dirá que $\overrightarrow{OA}$ es el **vector de posición** de $\langle a_1, a_2 \rangle$ o *del punto A*.

La explicación anterior muestra que los vectores tienen dos naturalezas, una geométrica y otra algebraica. Con frecuencia no se hará la distinción entre las dos. Siempre debe quedar claro en la explicación si se hace referencia a pares ordenados o a segmentos dirigidos.

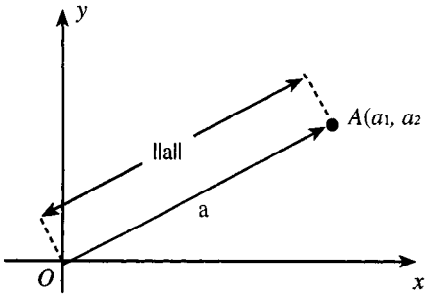
La **magnitud** $\| \mathbf{a} \|$ del vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ es, por definición, la longitud de su vector de posición OA, como se ve en la Fig. 8.31. La definición que sigue dice lo mismo de otra manera.

Definición de la magnitud de un vector

La magnitud $\| \mathbf{a} \|$ del vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ es

$$\| \mathbf{a} \| = \langle a_1, a_2 \rangle \| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

FIGURA 8.31
Magnitud $\| \mathbf{a} \|$



EJEMPLO 1 ***Cálculo de la magnitud de un vector***

Representar los vectores de

$$\mathbf{a} = \langle -3, 2 \rangle, \qquad \mathbf{b} = \langle 0, -2 \rangle, \qquad \mathbf{c} = \langle \tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5} \rangle$$

en un plano de coordenadas y calcular la magnitud de cada uno.

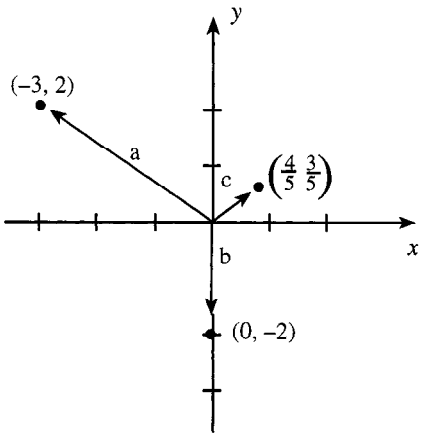
SOLUCIÓN En la Fig. 8.32 están representados los vectores. De acuerdo con la definición de la magnitud de un vector,

$$\| \mathbf{a} \| = \| \langle -3, 2 \rangle \| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$
$$\| \mathbf{b} \| = \| \langle 0, -2 \rangle \| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$
$$\| \mathbf{c} \| = \| \langle \tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5} \rangle \| = \sqrt{(\tfrac{4}{5})^2 + (\tfrac{3}{5})^2} = \sqrt{\tfrac{25}{25}} = 1.$$

Considérense los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ que corresponden a $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$, respectivamente, como se ve en la Fig. 8.33. Si $\overrightarrow{OC}$ corresponde a $\mathbf{c} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$, se puede demostrar, mediante las pendientes, que O, A, C y B son los vértices de un paralelogramo; es decir,

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}.$$

FIGURA 8.32



Expresando esta ecuación en términos de pares ordenados se obtiene lo siguiente.

Definición de adición de vectores

$$\langle a_1, a_2\rangle + \langle b_1, b_2\rangle = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2\rangle$$

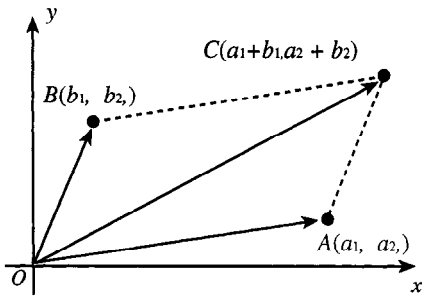
Nótese que para sumar dos vectores, se suman las componentes correspondientes.

EJEMPLO ILUSTRATIVO

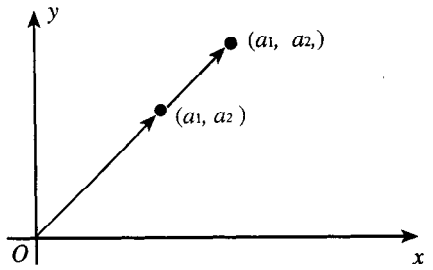
Adición de vectores

- $\langle 3, -4\rangle + \langle 2, 7\rangle = \langle 3 + 2, -4 + 7\rangle = \langle 5, 3\rangle$
- $\langle 5, 1\rangle + \langle -5, 1\rangle = \langle 5 + (-5), 1 + 1\rangle = \langle 0, 2\rangle$

FIGURA 8.33



También se puede demostrar que si c es un escalar y $\overrightarrow{OA}$ corresponde a $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$, entonces el par ordenado determinado por $c\overrightarrow{OA}$ es (ca_1, ca_2), como se ve en la Fig. 8.34 para $c > 0$. Esto lleva a la siguiente definición.



Definición de múltiplo por escalar de un vector

$$c\langle a_1, a_2\rangle = \langle ca_1, ca_2\rangle$$

Por tanto, para determinar un múltiplo por escalar de un vector, se multiplica cada componente por el escalar.

EJEMPLO ILUSTRATIVO

Múltiplo por escalar (multiplicación por escalar) de un vector

- $2\langle -3, 4\rangle = \langle 2(-3), 2(4)\rangle = \langle -6, 8\rangle$
- $-2\langle -3, 4\rangle = \langle (-2)(-3), (-2)(4)\rangle = \langle 6, -8\rangle$
- $1\langle 5, 2\rangle = \langle 1 \cdot 5, 1 \cdot 2\rangle = \langle 5, 2\rangle$

EJEMPLO 2 ***Determinación de un múltiplo por escalar de un vector***

Si $\mathbf{a} = \langle 2, 1 \rangle$, determinar $3\mathbf{a}$ y $-2\mathbf{a}$, y representar los tres vectores en un plano coordenado.

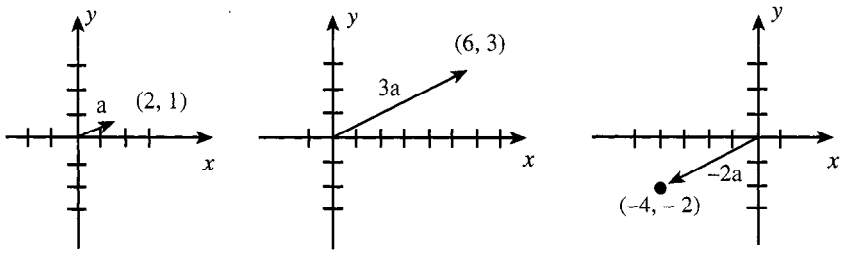
SOLUCIÓN Mediante la definición de múltiplos por escalar de vectores se obtiene

$$3\mathbf{a} = 3\langle 2, 1\rangle = \langle 3 \cdot 2, 3 \cdot 1\rangle = \langle 6, 3\rangle$$

$$-2\mathbf{a} = -2\langle 2, 1\rangle = \langle (-2) \cdot 2, (-2) \cdot 1\rangle = \langle -4, -2\rangle.$$

Los vectores se ven en la Fig. 8.35.

FIGURA 8.35



El **vector cero 0** y el **negativo – a** de un vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ se definen como sigue:

Definición de 0 y –a

$$\mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle \qquad \text{y} \qquad -\mathbf{a} = -\langle a_1, a_2 \rangle = \langle -a_1, -a_2 \rangle$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO

El vector cero y el negativo de un vector

- $\langle 3, 5\rangle + \mathbf{0} = \langle 3, 5\rangle + \langle 0, 0\rangle = \langle 3 + 0, 5 + 0\rangle = \langle 3, 5\rangle$
- $-\langle 3, -5\rangle = \langle -3, -(-5)\rangle = \langle -3, 5\rangle$
- $\langle 3, -5\rangle + \langle -3, 5\rangle = \langle 3 + (-3), -5 + 5\rangle = \langle 0, 0\rangle = \mathbf{0}$
- $0\langle 2, 3\rangle = \langle 0 \cdot 2, 0 \cdot 3\rangle = \langle 0, 0\rangle = \mathbf{0}$

  $5 \cdot \mathbf{0} = 5\langle 0, 0\rangle = \langle 5 \cdot 0, 5 \cdot 0\rangle = \langle 0, 0\rangle = \mathbf{0}$

A continuación se enuncian las propiedades de adición y multiplicación por escalar de vectores para el caso de vectores **a**, **b**, y escalares c, d, cualesquiera. El lector no debe tener dificultad en recordar esas propiedades, porque se asemejan a las de los números reales con las que está familiarizado.

Propiedades de adición y multiplicación por escalar de vectores

(1) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$	**(5)** $c(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = c\mathbf{a} + c\mathbf{b}$
(2) $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$	**(6)** $(c + d)\,\mathbf{a} = c\mathbf{a} + d\mathbf{a}$
(3) $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$	**(7)** $(cd)\,\mathbf{a} = c(d\,\mathbf{a}) = d\,(c\mathbf{a})$
(4) $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$	**(8)** $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$
	(9) $0\mathbf{a} = \mathbf{0} = c\,\mathbf{0}$

DEMOSTRACIÓN Sean $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$. Para demostrar (1), nótese que

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle = \langle b_1 + a_1, b_2 + a_2 \rangle = \mathbf{b} + \mathbf{a}.$$

La demostración de (5) es como sigue:

$$\begin{aligned} c(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= c\langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle && \text{definición de suma} \\ &= \langle ca_1 + cb_1, ca_2 + cb_2 \rangle && \text{definición de múltiplo por escalar} \\ &= \langle ca_1, ca_2 \rangle + \langle cb_1, cb_2 \rangle && \text{definición de suma} \\ &= c\mathbf{a} + c\mathbf{b} && \text{definición de múltiplo por escalar} \end{aligned}$$

Las demostraciones de las demás propiedades son parecidas. ■

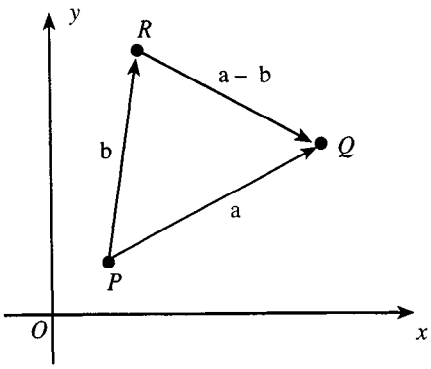
La **sustracción** de vectores, representada por el signo $-$, se define como $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$. Si se usa la notación de par ordenado para **a** y **b**, entonces $-\mathbf{b} = \langle -b_1, -b_2 \rangle$, y se obtiene lo siguiente.

Definición de sustracción de vectores

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1, a_2 \rangle - \langle b_1, b_2 \rangle = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$$

Así, para determinar $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, basta restar las componentes de **b** de las componentes correspondientes de **a**.

FIGURA 8.36



EJEMPLO ILUSTRATIVO

Sustracción de vectores si $\mathbf{a} = \langle 5, -4 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle -3, 2 \rangle$

❑ $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle 5, -4 \rangle - \langle -3, 2 \rangle$
$= \langle 5 - (-3), -4 - 2 \rangle = \langle 8, -6 \rangle$

❑ $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} = 2\langle 5, -4 \rangle - 3\langle -3, 2 \rangle$
$= \langle 10, -8 \rangle - \langle -9, 6 \rangle = \langle 19, -14 \rangle$

Si **a** y **b** son vectores cualesquiera, entonces

$$\mathbf{b} + (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a};$$

es decir, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ *es el vector que, cuando se suma a* **b**, *produce* **a**. Si **a** y **b** se representan por los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ *con el mismo punto inicial*, como en la Fig. 8.36, entonces $\overrightarrow{RQ}$ representa a $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

Los vectores especiales **i** y **j** se definen como sigue:

Definición de i y j

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle, \quad \mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$$

Un **vector unitario** es uno de magnitud 1. Los vectores **i** y **j** son vectores unitarios, al igual que el vector $\mathbf{c} = \langle \frac{4}{5}, \frac{3}{5} \rangle$ del Ejemplo 1.

Los vectores **i** y **j** se utilizan para tener otra forma de representar vectores. Específicamente, si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, entonces

$$\mathbf{a} = \langle a_1, 0 \rangle + \langle 0, a_2 \rangle = a_1\langle 1, 0 \rangle + a_2\langle 0, 1 \rangle.$$

Este resultado produce lo siguiente.

Forma vectorial con i, j

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO

Forma con i, j

- $\langle 5, 2 \rangle = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
- $\langle -3, 4 \rangle = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
- $\langle 0, -6 \rangle = 0\mathbf{i} + (-6)\mathbf{j} = -6\mathbf{j}$

Los vectores correspondientes a **i, j** y **a** se ven en la Fig. 8.37. Como **i** y **j** son vectores unitarios, $a_1\mathbf{i}$ y $a_2\mathbf{j}$ se pueden representar mediante vectores horizontales y verticales de magnitudes $\| a_1 \|$ y $\| a_2 \|$, respectivamente, como en la Fig. 8.38. Por esta razón, se dice que a_1 es el (o la) **componente horizontal** y que a_2 es el (o la) **componente vertical** del vector **a**.

FIGURA 8.37

$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$

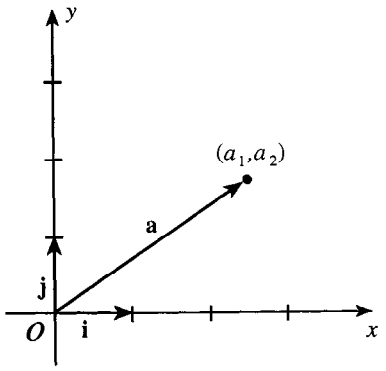
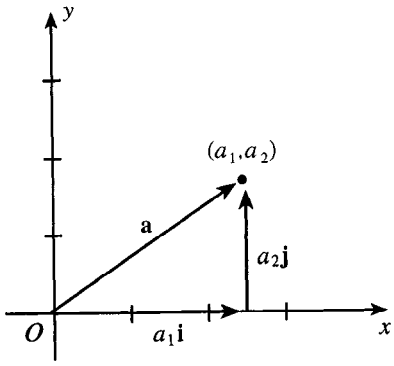


FIGURA 8.38



La suma vectorial $a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ es una **combinación lineal** de **i** y **j**. Las reglas para adición, sustracción y multiplicación por escalar se pueden escribir como sigue, si $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$:

$$(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) + (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}) = (a_1 + b_1)\mathbf{i} + (a_2 + b_2)\mathbf{j}$$
$$(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) - (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}) = (a_1 - b_1)\mathbf{i} + (a_2 - b_2)\mathbf{j}$$
$$c(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) = (ca_1)\mathbf{i} + (ca_2)\mathbf{j}$$

Esas fórmulas indican que es posible considerar que las combinaciones lineales de **i** y **j** son sumas algebraicas.

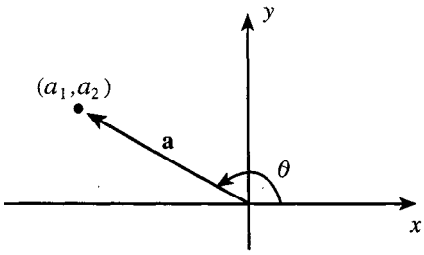
EJEMPLO 3 ***Expresar un vector como combinación lineal de i y j***

Si $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y, además, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$, expresar $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ como combinación lineal de **i** y **j**.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} &= 3(5\mathbf{i} + \mathbf{j}) - 2(4\mathbf{i} - 7\mathbf{j}) \\ &= (15\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) - (8\mathbf{i} - 14\mathbf{j}) \\ &= 7\mathbf{i} + 17\mathbf{j} \end{aligned}$$

FIGURA 8.39



Sea θ un ángulo en su posición normal, medio a partir del eje x positivo, al vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle = a_1\,\mathbf{i} + a_2\,\mathbf{j}$, como se ve en la Fig. 8.39. Puesto que

$$\cos\theta = \frac{a_1}{\|\mathbf{a}\|} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{a_2}{\|\mathbf{a}\|},$$

se obtienen las fórmulas siguientes:

Fórmulas para componentes horizontales y verticales de $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$

Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle = a_1\mathbf{i} + a_2\,\mathbf{j}$, entonces

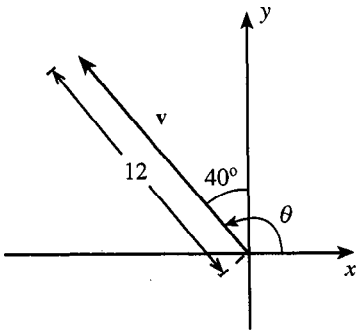
$$a_1 = \|\mathbf{a}\| \cos\theta, \qquad a_2 = \|\mathbf{a}\| \operatorname{sen}\theta.$$

Con esas fórmulas se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle &= \langle \|\mathbf{a}\| \cos\theta, \|\mathbf{a}\| \operatorname{sen}\theta \rangle \\ &= \|\mathbf{a}\| \cos\theta\mathbf{i} + \|\mathbf{a}\| \operatorname{sen}\theta\mathbf{j} \\ &= \|\mathbf{a}\|(\cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}). \end{aligned}$$

Esto es análogo a la forma trigonométrica de un número complejo.

FIGURA 8.40



EJEMPLO 4 ***Expresar la velocidad del viento como vector***

Si el viento sopla a 12 mi/h en dirección N40°W, exprese su velocidad como un vector **v**.

SOLUCIÓN En la Fig. 8.40 se muestra el vector **v**, en la cual $\theta = 90° + 40° = 130°$. Con las fórmulas para las componentes horizontal y vertical, y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$, se llega a

$$v_1 = \|\mathbf{v}\| \cos\theta = 12 \cos 130°, \qquad v_2 = \|\mathbf{v}\| \operatorname{sen}\theta = 12 \operatorname{sen} 130°.$$

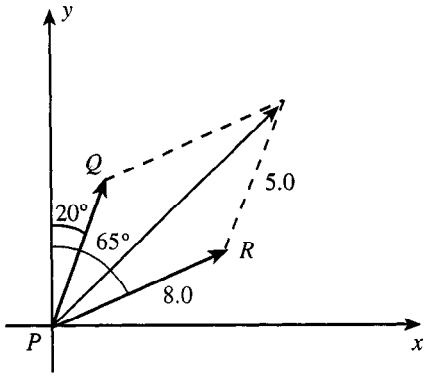
Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}\\ &= (12\cos 130°)\mathbf{i} + (12\operatorname{sen} 130°)\mathbf{j}\\ &\approx (-7.7)\mathbf{i} + (9.2)\mathbf{j}.\end{aligned}$$

EJEMPLO 5 *Determinación de un vector resultante*

Dos fuerzas, $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ tienen magnitudes (en newtons) de 5.0 N y 8.0 N, respectivamente, y actúan en un punto P. La dirección de $\overrightarrow{PQ}$ es N20°E, y la de $\overrightarrow{PR}$ es N65°E. Calcular la magnitud y la dirección del vector resultante, $\overrightarrow{PS}$.

FIGURA 8.41



SOLUCIÓN En la Fig. 8.41 se representan geométricamente las fuerzas. Nótese que los ángulos a partir del eje x positivo a $\overrightarrow{PQ}$ y a $\overrightarrow{PR}$ son de 70° y 25°, respectivamente. Con las fórmulas para componentes horizontales y verticales, se obtiene lo siguiente:

$$\overrightarrow{PQ} = (5\cos 70°)\mathbf{i} + (5\operatorname{sen} 70°)\mathbf{j}$$
$$\overrightarrow{PR} = (8\cos 25°)\mathbf{i} + (8\operatorname{sen} 25°)\mathbf{j}$$

Como $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}$,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PS} &= (5\cos 70° + 8\cos 25°)\mathbf{i} + (5\operatorname{sen} 70° + 8\operatorname{sen} 25°)\mathbf{j}\\ &\approx (9.0)\mathbf{i} + (8.1)\mathbf{j}.\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\|\overrightarrow{PS}\| \approx \sqrt{(9.0)^2 + (8.1)^2} \approx 12.1.$$

También se puede calcular $\|\overrightarrow{PS}\|$ mediante la ley de los cosenos (véase el Ejemplo 3 de la Secc. 8.2). Como $\angle QPR = 45°$, entonces $\angle PRS = 135°$ y, por lo tanto,

$$\|\overrightarrow{PS}\|^2 = (8.0)^2 + (5.0)^2 - 2(8.0)(5.0)\cos 135° \approx 145.6$$

y

$$\|\overrightarrow{PS}\| \approx \sqrt{145.6} \approx 12.1.$$

Si θ es el ángulo del eje x positivo a la resultante PS, entonces, con las coordenadas (aproximadas) (8.9606, 8.7094) de S, se obtiene lo siguiente:

$$\tan\theta \approx \frac{8.0794}{8.9606} \approx 0.9017$$

$$\theta \approx \tan^{-1}(0.9017) \approx 42°$$

Por consiguiente, la dirección de $\overrightarrow{PS}$ es, aproximadamente, N48°E.

EJERCICIOS 8.5

Ejercicios 1– 6: Determine a + b, a – b, 4a + 5b y 4a – 5b.

1 $\mathbf{a} = \langle 2, -3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 1, 4 \rangle$

2 $\mathbf{a} = \langle -2, 6 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 3 \rangle$

3 $\mathbf{a} = -\langle 7, -2 \rangle$, $\mathbf{b} = 4\langle -2, 1 \rangle$

4 $\mathbf{a} = 2\langle 5, -4 \rangle$, $\mathbf{b} = -\langle 6, 0 \rangle$

5 $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

6 $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j}$

Ejercicios 7–10: Trace los vectores que corresponden a a, b, a + b, 2a y –3b.

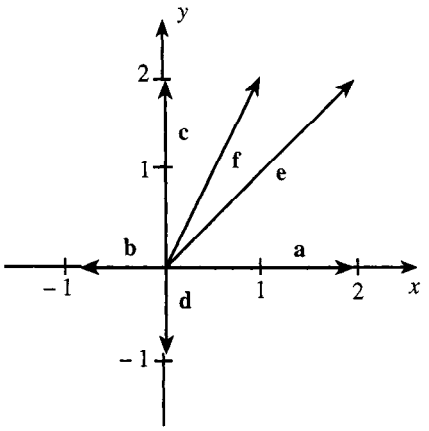
7 $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

8 $\mathbf{a} = -5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

9 $\mathbf{a} = \langle -4, 6 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -2, 3 \rangle$

10 $\mathbf{a} = \langle 2, 0 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -2, 0 \rangle$

Ejercicios 11–16: Mediante componentes, exprese la suma o diferencia en forma de múltiplo por escalar de uno de los vectores, a, b, c, d, e, f, que se ven en la figura.



11 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ **12** $\mathbf{c} - \mathbf{d}$

13 $\mathbf{b} + \mathbf{e}$ **14** $\mathbf{f} - \mathbf{b}$

15 $\mathbf{b} + \mathbf{d}$ **16** $\mathbf{e} + \mathbf{c}$

Ejercicios 17–26: Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$, $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2 \rangle$, y m y n son números reales, demuestre la propiedad que se indica.

17 $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$

18 $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ **19** $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$

20 $(m + n)\mathbf{a} = m\mathbf{a} + n\mathbf{a}$ **21** $(mn)\mathbf{a} = m(n\mathbf{a}) = n(m\mathbf{a})$

22 $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$ **23** $0\mathbf{a} = \mathbf{0} = m\mathbf{0}$

24 $(-m)\mathbf{a} = -m\mathbf{a}$ **25** $-(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = -\mathbf{a} - \mathbf{b}$

26 $m(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = m\mathbf{a} - m\mathbf{b}$

27 Si $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$, demuestre que la magnitud de $2\mathbf{v}$ es el doble de la magnitud de $\mathbf{v}$.

28 Si $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ y k es cualquier número real, demuestre que la magnitud de $k\mathbf{v}$ es $|k|$ multiplicada por la magnitud de $\mathbf{v}$.

Ejercicios 29–36: Calcule la magnitud de a y el menor ángulo positivo mínimo θ del eje x positivo al vector OP que corresponde a a.

29 $\mathbf{a} = \langle 3, -3 \rangle$ **30** $\mathbf{a} = \langle -2, -2\sqrt{3} \rangle$

31 $\mathbf{a} = \langle -5, 0 \rangle$ **32** $\mathbf{a} = \langle 0, 10 \rangle$

33 $\mathbf{a} = -4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ **34** $\mathbf{a} = 10\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$

35 $\mathbf{a} = -18\mathbf{j}$ **36** $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

Ejercicios 37– 40: Los vectores a y b representan dos fuerzas que actúan en el mismo punto; θ es el menor ángulo positivo entre a y b. Calcule la magnitud de la fuerza resultante.

37 $\mathbf{a} = 40$ lb, $\mathbf{b} = 70$ lb, $\theta = 45°$

38 $\mathbf{a} = 5.5$ lb, $\mathbf{b} = 6.2$ lb, $\theta = 60°$

39 $\mathbf{a} = 2.0$ kg, $\mathbf{b} = 8.0$ kg, $\theta = 120°$

40 $\mathbf{a} = 30$ kg, $\mathbf{b} = 50$ kg, $\theta = 150°$

Ejercicios 41– 44: En (a) y (b) se dan las magnitudes y direcciones de dos fuerzas que actúan sobre un punto P. Calcule la magnitud y dirección del vector resultante.

41 **(a)** 90 kg, N75°W **(b)** 60 kg, S5°E

42 **(a)** 20 kg, S17°W **(b)** 50 kg, N82°W

43 **(a)** 6.0 lb, 110° **(b)** 2.0 lb, 215°

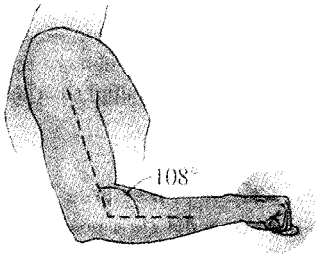
44 **(a)** 70 lb, 320° **(b)** 40 lb, 30°

Ejercicios 45 – 48: Calcule las componentes horizontal y vertical del vector que se describe.

45 Un *quarterback* lanza un balón con una velocidad de 50 pies/s a un ángulo de 35° respecto a la horizontal.

46 Un niño tira de un trineo sobre la nieve, ejerciendo una fuerza de 20 lb que forma un ángulo de 40° con la horizontal.

47 El bíceps, al sostener el antebrazo y un cuerpo sujeto en la mano, ejerce una fuerza de 20 lb. Como se ve en la figura, el músculo forma un ángulo de 108° con el antebrazo.



48 Un avión de reacción se aproxima a una pista a un ángulo de 7.5° con la horizontal, volando a una velocidad de 160 mi/h.

Ejercicios 49–52: Si las fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ actúan en un punto P, la fuerza neta F (o resultante) es la suma $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n$. Si F = 0, se dice que las fuerzas están en equilibrio. Las fuerzas dadas actúan en el origen O del plano xy.

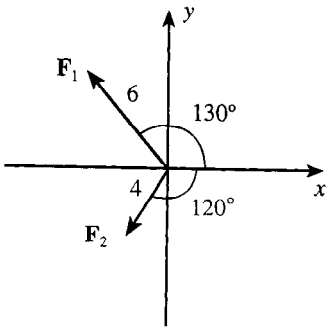
(a) Determine la fuerza neta F.

(b) Calcule una fuerza adicional G tal que se obtenga el equilibrio.

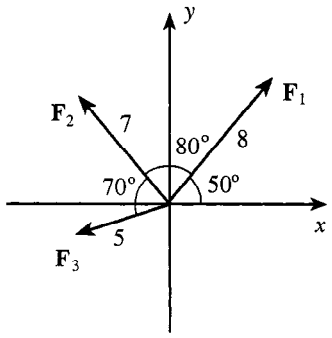
49 $\mathbf{F}_1 = \langle 4, 3 \rangle$, $\mathbf{F}_2 = \langle -2, -3 \rangle$, $\mathbf{F}_3 = \langle 5, 2 \rangle$

50 $\mathbf{F}_1 = \langle -3, -1 \rangle$, $\mathbf{F}_2 = \langle 0, -3 \rangle$, $\mathbf{F}_3 = \langle 3, 4 \rangle$

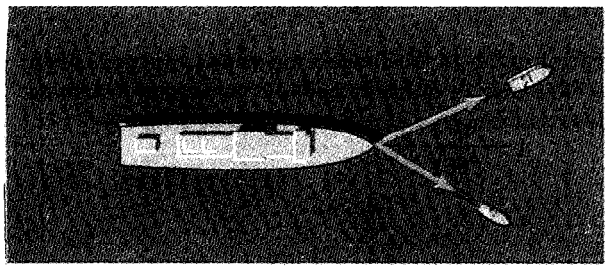
51



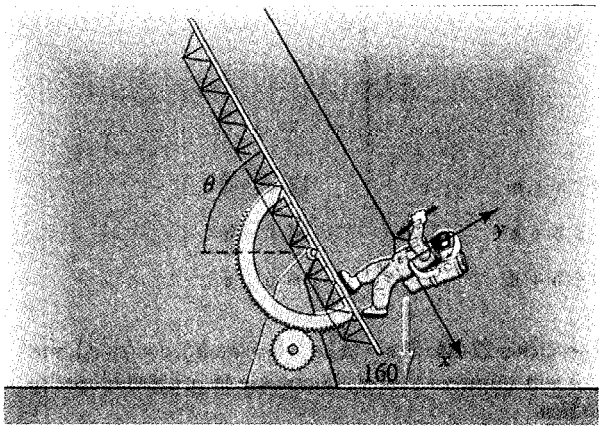
52



53 ***Fuerza de remolcadura*** Dos remolcadores tiran de un gran buque en un puerto, como se ve en la figura. El mayor de los dos ejerce una fuerza de 4 000 lb en su cable y el menor una de 3 200 lb. Si el buque debe moverse recorriendo el segmento rectilíneo l, calcule el ángulo θ que debe formar el remolcador más grande con el segmento l.



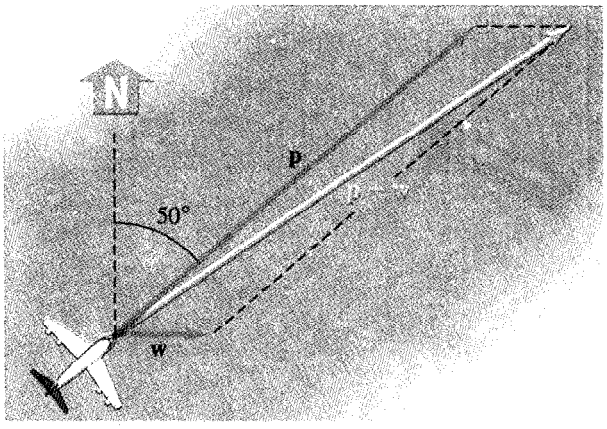
54 ***Simulación de la gravedad*** En la figura se ve un aparato sencillo que puede servir para simular las condiciones de gravedad en otros planetas. Se fija una cuerda a un astronauta, quien maniobra en un plano inclinado que forma un ángulo de θ grados con la horizontal.



(a) Si el astronauta pesa 160 lb, calcule las componentes x y y de la fuerza hacia abajo (véanse los ejes en la figura).

(b) La componente y del inciso (a) es el peso del astronauta en relación con el plano inclinado. El astronauta pesaría 27 lb en la Luna y 60 lb en Marte. Calcule los ángulos θ, con precisión de 0.01°, para que el aparato de plano inclinado simule una caminata en esas superficies.

55 ***Curso de un avión y velocidad respecto a tierra*** Un aeroplano vuela en dirección 50°, con una velocidad respecto al aire de 200 mi/h. En cierto momento, un viento de 40 mi/h sopla directamente desde el oeste. Como se ve en la figura, esto se puede representar mediante los vectores $\mathbf{p}$ y $\mathbf{w}$ cuyas magnitudes son 200 y 40, respectivamente. La dirección de la resultante $\mathbf{p} + \mathbf{w}$ expresa la dirección real del avión relativa a tierra, y la magnitud $\|\mathbf{p} + \mathbf{w}\|$ es la velocidad del avión respecto a tierra. Calcule la dirección verdadera y la velocidad respecto a tierra.



56 ***Curso de un avión y velocidad respecto a tierra*** Refiérase al Ejercicio 55. Un avión vuela en dirección 140°, a una velocidad respecto al aire de 500 mi/h y sopla un viento de 30 mi/h en dirección 65°. Calcule el curso (o rumbo) verdadero y la velocidad respecto a tierra.

57 ***Curso de un avión y velocidad respecto a tierra*** El piloto de un avión desea mantener un rumbo verdadero en dirección 250°, con velocidad respecto a tierra de 400 mi/h, cuando el viento sopla directamente desde el norte, a 50 mi/h. Calcular la velocidad necesaria en el aire y el rumbo que debe seguir según la brújula.

58 ***Velocidad y dirección del viento*** Un avión vuela en dirección 20° con una velocidad de 300 mi/h. Su velocidad respecto a tierra y su rumbo verdadero son 350 mi/h y 30°, respectivamente. Calcule la dirección y la velocidad (rapidez) del viento.

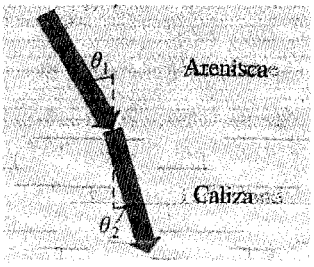
59 ***Navegación en bote de remos*** La corriente de un río fluye directamente hacia el este a una velocidad de 1.5 pies/s. Una persona que rema en un bote a una velocidad de 4 pies/s en agua inmóvil desea cruzar el río para llegar a un punto directamente hacia el norte de donde está ahora. Calcule, con precisión de 1°, la dirección en la que debe remar.

60 ***Navegación en lancha de motor*** Para que una lancha de motor que se mueve a una velocidad de 30 mi/h atraviese un río directamente hacia el norte, debe dirigirse hacia un punto que tenga la dirección N15°E. Si la corriente fluye directamente hacia el oeste, calcule la velocidad de ella.

61 ***Flujo del agua freática*** Los contaminantes del agua subterránea pueden llegar al agua potable de una población pasando a través de la roca porosa del acuífero. Si el agua subterránea se mueve con velocidad $\mathbf{v}_1$ por la superficie de contacto entre dos tipos de roca, su velocidad cambia a $\mathbf{v}_2$ y, en ese caso, se pueden calcular la dirección y la velocidad de flujo con la fórmula

$$\frac{\|\mathbf{v}_1\|}{\|\mathbf{v}_2\|} = \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2},$$

en la cual los ángulos θ_1 y θ_2 se definen como se ve en la figura. Para la arenisca $\|\mathbf{v}_1\| = 8.2$ cm/día; para la caliza $\|\mathbf{v}_2\| = 3.8$ cm/día. Si $\theta_1 = 30°$, calcule los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ en función de $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$.

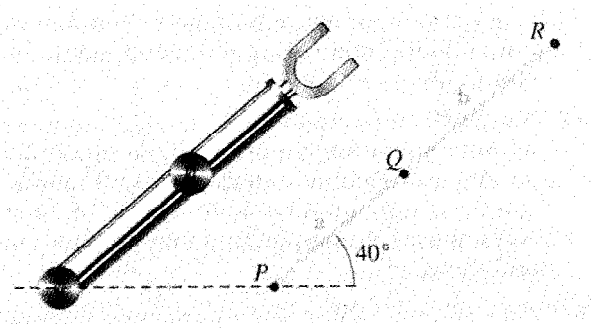


62 ***Flujo de agua subterránea*** Refiérase al Ejercicio 61; el agua freática contaminada fluye por arena limosa, con una dirección θ_1 y velocidad expresada por el vector $\mathbf{v}_1 = 20\mathbf{i} - 82\mathbf{j}$, en cm/día. Cuando el flujo llega a una región de arena limpia, su velocidad aumenta a 725 cm/día. Calcule la nueva dirección de flujo, aproximando θ_2.

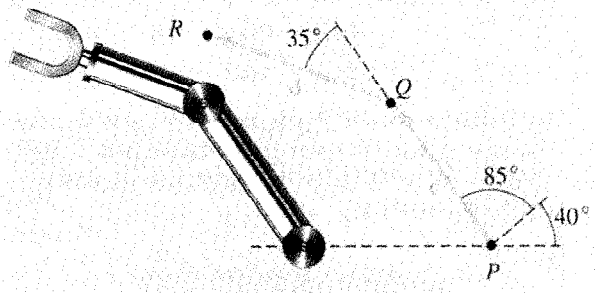
63 ***Movimiento de robot*** Para describir el movimiento de robot se emplean vectores.

(a) El brazo de robot que se ve en la primera figura puede girar en las articulaciones P y Q. El brazo superior, representado por $\mathbf{a}$ tiene 15 pulg de longitud,

y el antebrazo, incluyendo la mano, que se representa por **b** tiene 17 pulg de longitud. Calcule las coordenadas del punto R en la mano, empleando **a + b.**

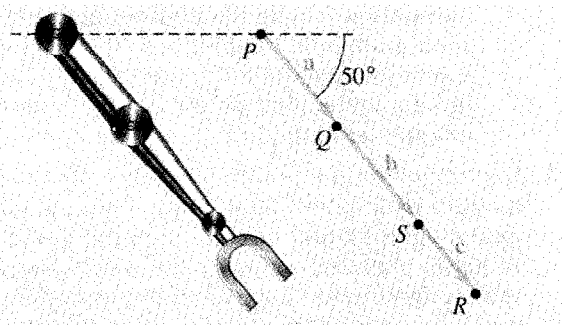


(b) Si el brazo gira 85° y el antebrazo gira otros 35°, como se ve en la segunda figura, calcule las nuevas coordenadas de R mediante **c + d.**

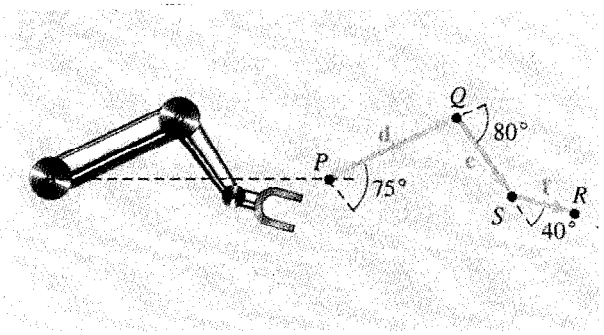


64 ***Movimiento de robot*** Refiérase al Ejercicio 63.

Suponga que la articulación de la muñeca del brazo del robot gira en la articulación S y el brazo se ubica como se ve en la primera figura. El brazo tiene una longitud de 15 pulg, el antebrazo, sin la mano, tiene una longitud de 10 pulg, y la mano, 7 pulg. Calcule las coorddenadas de R mediante **a + b + c.**



(b) Suponga que el brazo del robot gira 75° y a continuación el antebrazo gira − 80°. Finalmente, la mano gira otros 40°, como se ve en la segunda figura. Calcule las nuevas coordenadas de R mediante **d + e + f.**



8.6 PRODUCTO ESCALAR (O PRODUCTO PUNTO)

El *producto escalar* de dos vectores tiene muchas aplicaciones. Se comenzará con una definición algebraica

Definición del producto escalar (o producto punto)

Sea $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$, y también $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$. El **producto escalar** $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, de **a** y **b,** es

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \langle a_1, a_2 \rangle \cdot \langle b_1, b_2 \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 .$$

El símbolo $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ se lee "**a** punto **b**." También, se denominará al producto escalar de dos vectores, **producto punto**, o **producto interior**. *Nótese que* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ *es un número real y no un vector*, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 *Cálculo del producto escalar de dos vectores*

Determinar el valor de $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

(a) $\mathbf{a} = \langle -5, 3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 6 \rangle$ **(b)** $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$

SOLUCIÓN

(a) $\langle -5, 3 \rangle \cdot \langle 2, 6 \rangle = (-5)(2) + (3)(6) = -10 + 18 = 8$

(b) $(4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}) \cdot (3\mathbf{i} - 7\mathbf{j}) = (4)(3) + (6)(-7) = 12 - 42 = -30$

Propiedades del producto escalar

Si **a**, **b**, **c** son vectores y c es un número real, entonces

(1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \| \mathbf{a} \|^2$

(2) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$

(3) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$

(4) $(c\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = c(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (c\mathbf{b})$

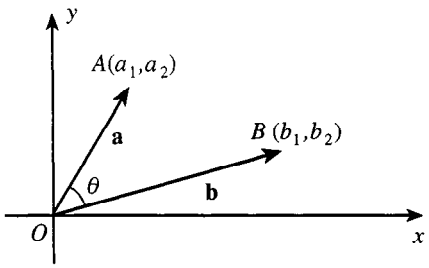
(5) $\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = 0$

DEMOSTRACIÓN La demostración de cada propiedad es consecuencia de la definición del producto escalar y de las propiedades de los números reales. De modo que si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$, y $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2 \rangle$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \langle a_1, a_2 \rangle \cdot \langle b_1 + c_1, b_2 + c_2 \rangle \\ &= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) \\ &= (a_1 b_1 + a_2 b_2) + (a_1 c_1 + a_2 c_2) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}, \end{aligned}$$

lo cual demuestra la propiedad (3). Las demostraciones de las demás propiedades se dejan como ejercicios. ■

FIGURA 8.42



Dos vectores cualesquiera diferentes de cero, $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ se pueden representar en un plano de coordenadas mediante segmentos dirigidos, del origen O a los puntos $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$, respectivamente. El **ángulo θ entre a y b** es, por definición, $\angle AOB$ (véase Fig. 8.42). Nótese que $0 \leq \theta \leq \pi$, y que $\theta = 0$, si **a** y **b** tienen la misma orientación (posición angular) y sentido, o bien $\theta = \pi$ si **a** y **b** tienen la misma orientación, pero sentido contrario.

Definición de vectores paralelos y ortogonales

Sea θ el ángulo entre dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ distintos de cero.

(1) $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son **paralelos** si $\theta = 0$ o bien $\theta = \pi$.

(2) $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son **ortogonales** si $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ de la Fig. 8.42 son paralelos si y sólo si están en la misma recta que pasa por el origen. En este caso, $\mathbf{b} = c\mathbf{a}$ para algún número real c. Los vectores son ortogonales si y sólo si quedan en líneas mutuamente perpendiculares que pasen por el origen. Se supone que el vector cero $\mathbf{0}$ es paralelo y ortogonal a *todo* vector $\mathbf{a}$.

El teorema siguiente indica la relación estrecha entre el ángulo formado por dos vectores y su producto escalar.

Teorema sobre el producto escalar

Si θ es el ángulo que forman dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ distintos de cero, entonces

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta.$$

DEMOSTRACIÓN Si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ no son paralelos, el caso es semejante al que se ve en la Fig. 8.42. Entonces se puede aplicar la ley de los cosenos al triángulo AOB. Como las longitudes de los tres lados del triángulo son $\|\mathbf{a}\|$, $\|\mathbf{b}\|$ y $d(A, B)$,

$$[d(A, B)]^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \cos \theta.$$

Con la fórmula de la distancia y la definición de la magnitud de un vector, se obtiene

$$(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \cos \theta,$$

que se reduce a

$$-2a_1b_1 - 2a_2b_2 = -2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \cos \theta.$$

Dividiendo entre – 2 ambos lados de esta ecuación, se obtiene

$$a_1b_1 + a_2b_2 = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \cos \theta,$$

que es lo que se quería demostrar.

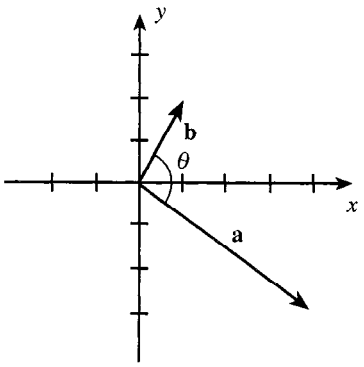
Si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son paralelos, entonces $\theta = 0$, o bien $\theta = \pi$ y, por consiguiente, $\mathbf{b} = c\mathbf{a}$ para algún número real c, con $c > 0$ si $\theta = 0$ y $c < 0$ si $\theta = \pi$. Se puede demostrar, mediante las propiedades del producto escalar, que $\mathbf{a} \cdot (c\mathbf{a}) = \|\mathbf{a}\| \|c\mathbf{a}\| \cos \theta$ y, por consiguiente, el teorema es válido para todos los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ distintos de cero. ■

Teorema del coseno del ángulo entre vectores

Si θ es el ángulo entre dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ distintos de cero, entonces

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}.$$

FIGURA 8.43



EJEMPLO 2 ***Cálculo del ángulo entre dos vectores***

Calcular el ángulo que forman $\mathbf{a} = \langle 4, -3\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 1, 2\rangle$.

SOLUCIÓN En la Fig. 8.43 se representan esos dos vectores. Se aplica el teorema anterior:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|} = \frac{(4)(1)+(-3)(2)}{\sqrt{16+9}\sqrt{1+4}} = \frac{-2}{5\sqrt{5}} = \frac{-2\sqrt{5}}{25}$$

Por lo tanto,

$$\theta = \arccos\left(\frac{-2\sqrt{5}}{25}\right) \approx 100.3°.$$

EJEMPLO 3 ***Demostración de que dos vectores son paralelos***

Sean $\mathbf{a} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, y $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$.

(a) Demostrar que **a** y **b** son paralelos.

(b) Determinar un escalar c tal que $\mathbf{b} = c\mathbf{a}$.

SOLUCIÓN

(a) Por definición, los vectores **a** y **b** son paraleos si y solo si el ángulo θ que forman es 0, o bien π. Como el coseno del ángulo es

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|} = \frac{(\frac{1}{2})(-2)+(-3)(12)}{\sqrt{\frac{1}{4}+9}\sqrt{4+144}} = \frac{-37}{37} = -1,$$

se observa que

$$\theta = \arccos(-1) = \pi.$$

(b) Como **a** y **b** son paralelos, *hay* un escalar c tal que $\mathbf{b} = c\mathbf{a}$; es decir,

$$-2\mathbf{i} + 12\mathbf{j} = c(\tfrac{1}{2}\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) = \tfrac{1}{2}c\mathbf{i} - 3c\mathbf{j}.$$

Igualando los componentes **i** y **j**, se obtiene

$$-2 = \tfrac{1}{2}c \qquad \text{y} \qquad 12 = -3c.$$

Así, $c = -4$; es decir, $\mathbf{b} = -4\mathbf{a}$. Nótese que **a** y **b** tienen sentidos opuestos, porque $c < 0$.

Con la fórmula $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta$ y el hecho que dos vectores son ortogonales si y sólo si el ángulo que forman es $\pi/2$, o si uno de los vectores es **0**, se obtiene el siguiente resultado.

Teorema sobre vectores ortogonales

> Dos vectores **a** y **b** son ortogonales si y sólo si $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$.

EJEMPLO 4 ***Prueba de que dos vectores son ortogonales***

Demostrar que el par de vectores es ortogonal:

(a) $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ **(b)** $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, 6\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

SOLUCIÓN Se puede emplear el teorema sobre vectores perpendiculares para demostrar la ortogonalidad, al probar que el producto punto de cada par es cero:

(a) $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \langle 1, 0 \rangle \cdot \langle 0, 1 \rangle = (1)(0) + (0)(1) = 0 + 0 = 0$

(b) $(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \cdot (6\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) = (2)(6) + (3)(-4) = 12 - 12 = 0$

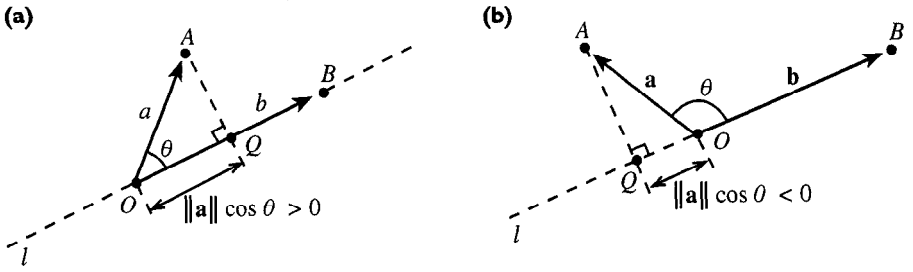
Definición de $\text{comp}_b\, \mathbf{a}$

Sea θ el ángulo que forman dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ distintos de cero. El (o la) **componente de a según b**, representada por $\text{comp}_b\, \mathbf{a}$, es

$$\text{comp}_b\, \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\| \cos \theta.$$

El significado geométrico de la anterior definición cuando θ es agudo u obtuso se ve en la Fig. 8.44, en la cual no aparecen los ejes x y y.

FIGURA 8.44 $\text{comp}_b\, \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\| \cos \theta$



Si θ es agudo, entonces, como en la Fig. 8.44(a), se puede construir un triángulo rectángulo trazando un segmento de recta AQ perpendicular a la recta l que pasa por O y B. Nótese que $\overrightarrow{OQ}$ tiene la misma dirección que la $\overrightarrow{OB}$. En el inciso (a) de la figura se observa que

$$\cos \theta = \frac{d(O, Q)}{\|\mathbf{a}\|} \quad \text{o, lo que es lo mismo,} \quad \|\mathbf{a}\| \cos \theta = d(O, Q).$$

Si θ es obtuso, entonces, como en la Fig. 8.44(b), de nuevo se traza AQ perpendicular a l. En este caso, el sentido de $\overrightarrow{OQ}$ es opuesto al de $\overrightarrow{OB}$, y como $\cos \theta$ es negativo,

$$\cos \theta = \frac{-d(O, Q)}{\|\mathbf{a}\|} \quad \text{o, equivalentemente,} \quad \|\mathbf{a}\| \cos \theta = -d(O, Q).$$

Si $\theta = \pi/2$, entonces $\mathbf{a}$ es ortogonal a $\mathbf{b}$ y $\text{comp}_b\, \mathbf{a} = 0$.
Si $\theta = 0$, entonces $\mathbf{a}$ tiene la misma orientación y sentido que $\mathbf{b}$ y $\text{comp}_b\, \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|$.
Si $\theta = \pi$, entonces $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ tienen igual orientación y sentidos opuestos, y $\text{comp}_b\, \mathbf{a} = -\|\mathbf{a}\|$.

La explicación anterior indica que la componente de **a** a lo largo de **b** se puede determinar *proyectando* el punto final de **a** sobre la línea l que contiene a **b**. Por esta razón, $\|\mathbf{a}\| \cos \theta$ se llama a veces **proyección de a sobre b** y se representa por $\text{proy}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$.

Fórmula para $\text{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$

Si **a** y **b** son dos vectores distintos de cero, entonces

$$\text{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|}.$$

DEMOSTRACIÓN Si θ es el ángulo que forman **a** y **b**, entonces, según el teorema del producto escalar,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \cos \theta.$$

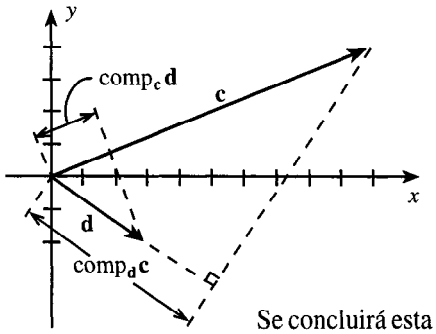
Dividiendo entre $\|\mathbf{b}\|$ ambos lados de esta ecuación, se obtiene

$$\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|} = \|\mathbf{a}\| \cos \theta = \text{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 5 ***Cálculo de las componentes de un vector a lo largo de otro***

Si $\mathbf{c} = 10\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, y también $\mathbf{d} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, determinar $\text{comp}_{\mathbf{d}}\,\mathbf{c}$ y $\text{comp}_{\mathbf{c}}\,\mathbf{d}$, y representar esos números en forma gráfica

FIGURA 8.45



SOLUCIÓN En la Fig. 8.45 se ven los vectores **c**, **d** y las componentes deseadas. Se usa como sigue la fórmula de $\text{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$:

$$\text{comp}_{\mathbf{d}}\,\mathbf{c} = \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}}{\|\mathbf{d}\|} = \frac{(10)(3) + (4)(-2)}{\sqrt{9 + 4}} = \frac{22}{\sqrt{13}} \approx 6.10$$

$$\text{comp}_{\mathbf{c}}\,\mathbf{d} = \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{c}}{\|\mathbf{c}\|} = \frac{(3)(10) + (-2)(4)}{\sqrt{100 + 16}} = \frac{22}{\sqrt{116}} \approx 2.04$$

Se concluirá esta sección con una aplicación física del producto escalar. Primero se explicará en forma breve el concepto científico de *trabajo*.

Se puede considerar que una **fuerza** es la entidad física que sirve para representar un empuje o una tracción sobre un objeto. Por ejemplo, se necesita una fuerza para empujar o tirar de un objeto en un plano horizontal, para levantar un objeto del piso, o para mover una partícula cargada a través de un campo electromagnético. Consideremos que las fuerzas se miden en libras. Si un objeto pesa 10 lb, entonces, por definición, la fuerza necesaria para levantarlo o mantenerlo separado del piso, es 10 lb*. Una fuerza de este tipo es una **fuerza constante**, porque su magnitud no cambia al aplicarla al objeto dado.

Al aplicar una fuerza constante F a un objeto que lo desplaza una distancia d en la dirección de la fuerza, entonces, por definición, el **trabajo** W efectuado, es

$$W = Fd.$$

Si F se mide en libras y d en pies, entonces las unidades de W son libras-pie. En el antiguo sistema cgs se usaba la **dina** como unidad de fuerza. Si F se expresa en dinas y d en centímetros,

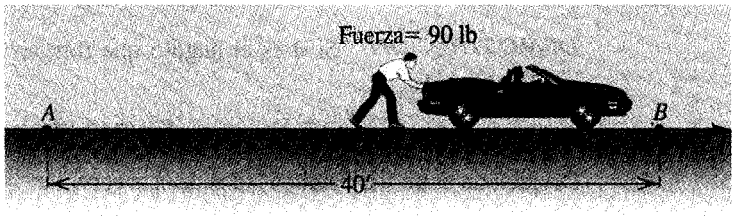
* (N. del R.) Se actualiza lo expuesto en el texto en inglés acerca de las unidades de medida. [F. P.]

entonces la unidad W es la dina-centímetro o **erg**. En el Sistema Internacional (SI) actual se usa el newton como unidad de fuerza. Si F está en newtons y d en metros, la unidad de W es el newton-metro o **joule**.

EJEMPLO 6 *Cálculo del trabajo efectuado por una fuerza constante*

Calcular el trabajo realizado al empujar un automóvil en una carretera a nivel desde el punto A hasta el punto B, a 40 pies del punto A, ejerciendo una fuerza constante de 90 lb.

FIGURA 8.46

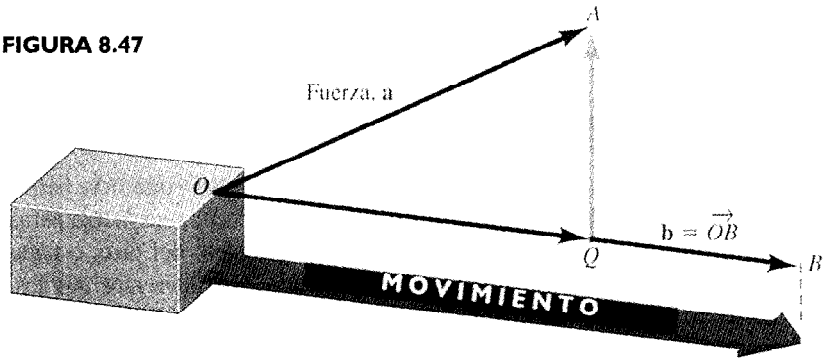


SOLUCIÓN El problema se ilustra en la Fig. 8.46, donde se representa la carretera como parte de una recta l. Puesto que la fuerza constante es $F = 90$ lb y la distancia que recorre el automóvil es $d = 40$ pies, el trabajo efectuado es

$$W = (90)(40) = 3600 \text{ libras-pie}^*$$

La fórmula $W = Fd$ es muy restrictiva, porque sólo se puede usar si la fuerza se aplica a lo largo de la línea del movimiento. En forma más general, supóngase que un vector **a** representa una fuerza y que su punto de aplicación se mueve a lo largo de un vector **b**. Esto se ilustra en la Fig. 8.47, en donde se ve que la fuerza **a** tira de un objeto a lo largo de una trayectoria horizontal desde O hasta B, y $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$.

FIGURA 8.47



El vector **a** es la suma de los vectores OQ y QA, donde $\overrightarrow{QA}$ es ortogonal a **b**. Como $\overrightarrow{QA}$ no contribuye al movimiento horizontal, se supone que el movimiento de O a B se debe sólo a $\overrightarrow{OQ}$ Aplicando $W = Fd$, se sabe que el trabajo es el producto de $\|\overrightarrow{OQ}\|$ por $\|\mathbf{b}\|$. Ya que $\|\overrightarrow{OQ}\| = \text{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$, se obtiene

$$W = (\text{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a})\|\mathbf{b}\| = (\|\mathbf{a}\| \cos\theta)\|\mathbf{b}\| = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b},$$

en la cual θ representa a $\angle AOQ$. Con ello se llega a la siguiente definición.

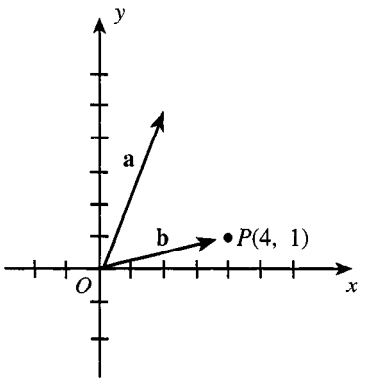
* (N. del R.) Según el sistema inglés, la unidad de trabajo se llama *pie-libra*, ft-lb. Se actualiza así el texto original. [F. P].

ICA DEL EJERC

Definición de trabajo

El **trabajo** W efectuado por una fuerza constante $\mathbf{a}$ a medida que su punto de aplicación se mueve a lo largo de un vector $\mathbf{b}$ es $W = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

FIGURA 8.48



EJEMPLO 7 *Cálculo del trabajo efectuado por una fuerza constante*

La magnitud y dirección de una fuerza constante están representadas por $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$. Calcular el trabajo efectuado si el punto de aplicación de la fuerza se mueve del origen al punto $P(4, 1)$.

SOLUCIÓN La fuerza $\mathbf{a}$ y el vector $\mathbf{b} = \overrightarrow{OP}$ se ven en la Fig. 8.48. Como $\mathbf{b} = \langle 4, 1 \rangle$, $1 = 4\mathbf{i} + \mathbf{j}$, de acuerdo con la definición anterior,

$$W = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) \cdot (4\mathbf{i} + \mathbf{j})$$
$$= (2)(4) + (5)(1) = 13.$$

Si, por ejemplo, la unidad de longitud es el pie y la magnitud de la fuerza se expresa en libras, entonces el trabajo efectuado es 13 libras-pie, o 13 ft-lb.

EJEMPLO 8 *Cálculo del trabajo efectuado contra la gravedad*

Un carro que pesa 100 lb es empujado por una mujer cuesta arriba en una superficie que forma un ángulo de 30° con la horizontal, como se ve en la Fig. 8.49. Calcular el trabajo efectuado contra la gravedad al empujarlo una distancia de 80 pies.

FIGURA 8.49

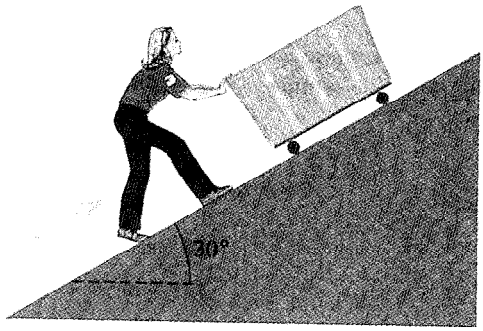
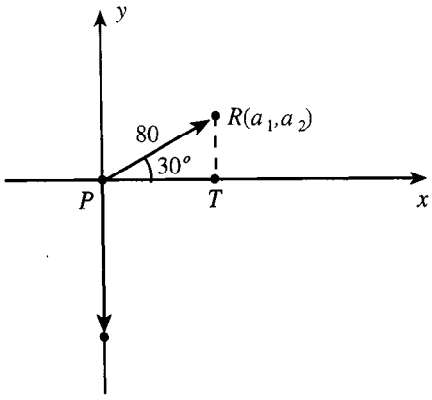


FIGURA 8.50



SOLUCIÓN Se introduce un sistema de coordenadas xy, como se ve en la Fig. 8.50. El vector PQ representa la fuerza de gravedad que actúa verticalmente hacia abajo con una magnitud de 100 lb. El vector $\mathbf{F}$ correspondiente es $0\mathbf{i} - 100\mathbf{j}$. El punto de aplicación de esta fuerza se desplaza a lo largo del vector PR, cuya magnitud es 80. Si $\overrightarrow{PR}$ corresponde a $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$, entonces, para el triángulo PTR, se tiene que

$$a_1 = 80 \cos 30° = 40\sqrt{3},$$

$$a_2 = 80 \operatorname{sen} 30° = 40,$$

y, por consiguiente, $\mathbf{a} = 40\sqrt{3}\mathbf{i} + 40\mathbf{j}$.

Aplicando la definición, se encuentra que el trabajo efectuado *por* la gravedad es

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{a} = (0\mathbf{i} - 100\mathbf{j}) \cdot (40\sqrt{3}\mathbf{i} + 40\mathbf{j}) = 0 - 4000 = -4000 \text{ ft-lb}.$$

El trabajo efectuado *contra* la gravedad es

$$-\mathbf{F} \cdot \mathbf{a} = 4000 \text{ ft-lb}.$$

EJERCICIOS 8.6

Ejercicios 1 – 8: Calcule (a) el producto escalar de los dos vectores y (b) el ángulo que forman dichos vectores.

1 $\langle -2, 5\rangle$, $\langle 3, 6\rangle$ **2** $\langle 4, -7\rangle$, $\langle -2, 3\rangle$

3 $4\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ **4** $8\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, $2\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$

5 $9\mathbf{i}$, $5\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ **6** $6\mathbf{j}$, $-4\mathbf{i}$

7 $\langle 10, 7\rangle$, $\langle -2, -\frac{7}{5}\rangle$ **8** $\langle -3, 6\rangle$, $\langle -1, 2\rangle$

Ejercicios 9 – 12: Demuestre que los vectores son ortogonales.

9 $\langle 4, -1\rangle$, $\langle 2, 8\rangle$ **10** $\langle 3, 6\rangle$, $\langle 4, -2\rangle$

11 $-4\mathbf{j}$, $-7\mathbf{i}$ **12** $8\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$, $-6\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$

Ejercicios 13 – 16: Demuestre que los vectores son paralelos y determine si tienen el mismo sentido o sentido contrario.

13 $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -\frac{12}{7}\mathbf{i} + \frac{20}{7}\mathbf{j}$

14 $\mathbf{a} = -\frac{5}{2}\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -10\mathbf{i} + 24\mathbf{j}$

15 $\mathbf{a} = \langle \frac{2}{3}, \frac{1}{2}\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 8, 6\rangle$

16 $\mathbf{a} = \langle 6, 18\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -4, -12\rangle$

Ejercicios 17–20: Determine una c tal que los dos vectores sean ortogonales

17 $3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, $4\mathbf{i} + 5c\mathbf{j}$ **18** $4c\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $9c\mathbf{i} - 25\mathbf{j}$

19 $9\mathbf{i} - 16c\mathbf{j}$, $\mathbf{i} + 4c\mathbf{j}$ **20** $5c\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $2\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

Ejercicios 21–28: Si $\mathbf{a} = \langle 2, -3\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 3, 4\rangle$ y $\mathbf{c} = \langle -1, 5\rangle$, calcule el número.

21 (a) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ (b) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$

22 (a) $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{c})$ (b) $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$

23 $(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (3\mathbf{c})$ **24** $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

25 $\text{comp}_{\mathbf{c}}\, \mathbf{b}$ **26** $\text{comp}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{c}$

27 $\text{comp}_{\mathbf{b}}\, (\mathbf{a} + \mathbf{c})$ **28** $\text{comp}_{\mathbf{c}}\, \mathbf{c}$

Ejercicios 29 – 32: Si c representa una fuerza constante, calcule el trabajo efectuado si el punto de aplicación de c se mueve a lo largo del segmento de recta de P a Q.

29 $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$; $P(0, 0)$, $Q(5, -2)$

30 $\mathbf{c} = -10\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$; $P(0, 0)$, $Q(4, 7)$

31 $\mathbf{c} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$; $P(2, -1)$, $Q(4, 3)$

32 $\mathbf{c} = -\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$; $P(-2, 5)$, $Q(6, 1)$

33 Una fuerza constante de magnitud 4 tiene la misma dirección que $\mathbf{j}$. Calcule el trabajo efectuado si su punto de aplicación se mueve de $P(0, 0)$ a $Q(8, 3)$.

34 Una fuerza constante de magnitud 10 tiene la misma dirección que $-\mathbf{i}$. Calcule el trabajo efectuado si su punto de aplicación se mueve de $P(0, 1)$ a $Q(1, 0)$.

Ejercicios 35 – 40: Demuestre la propiedad si a y b son vectores y c es un número real.

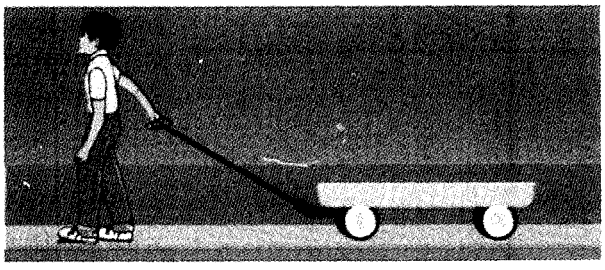
35 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2$ **36** $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$

37 $(c\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = c(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ **38** $c(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (c\mathbf{b})$

39 $\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = 0$

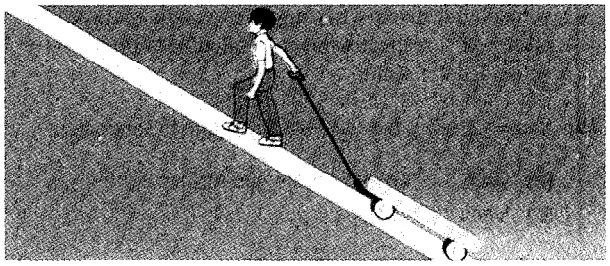
40 $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$

41 ***Remolque de un carro*** Un niño tira de un carrito en terreno plano, ejerciendo una fuerza de 20 lb sobre la

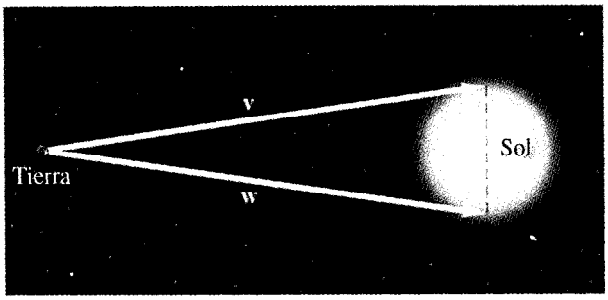


manija que forma un ángulo de 30° con la horizontal, como se ve en la figura. Calcule el trabajo efectuado al tirar del carrito a lo largo de 100 pies.

42 ***Remolque de un carro*** En el Ejercicio 41, calcule el trabajo efectuado si se tira del carrito, con la misma fuerza, durante 100 pies cuesta arriba de un terreno que forma un ángulo de 30° con la horizontal, como se ve en la figura.



43 ***Los rayos del Sol*** El Sol tiene un radio de 432 000 mi y su centro está a 93 000 000 mi del centro de la Tierra. Sean **v** y **w** los vectores que se muestran en la figura.

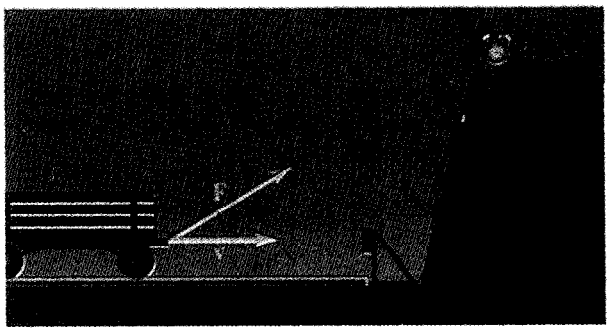


(a) Exprese **v** y **w** en función de **i** y **j**.

(b) Calcule el ángulo que forman **v** y **w**.

44 ***Luz solar en julio*** La intensidad I de la luz solar, en W/m^2, se puede calcular con la fórmula $I = ke^{-c/\operatorname{sen}\phi}$, en la cual k y c son consantes positivas, y ϕ es el ángulo que forman los rayos solares con el horizonte. La cantidad de luz solar que llega a una pared vertical de cara al Sol es igual a la componente de los rayos solares a lo largo de la horizontal. Si en julio $\phi = 30°$, $k = 978$ y $c = 0.136$, calcule aproximadamente la cantidad de luz solar que llega a una pared vertical que tiene un área de 160 m^2.

45 ***Cálculo de la potencia*** La potencia P en caballos (hp) que produce un motor, se puede determinar mediante la fórmula $P = \frac{1}{550}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{v})$, donde $\mathbf{F}$ es la fuerza en libras que ejerce el motor, y $\mathbf{v}$ la velocidad en pies por segundo de un objeto movido por el motor. Un motor tira de un cable con una fuerza de 2 200 lb; el cable forma un ángulo θ con la horizontal. De este modo mueve un remolque horizontalmente, como se ve en la figura. Calcule la potencia del motor, si la velocidad del remolque es 8 pies/s, cuando $\theta = 30°$.



EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 8

Ejercicios 1–4: Determine los valores exactos de las partes restantes del triángulo *ABC*.

1 $\alpha = 60°$, $b = 6$, $c = 7$

2 $\gamma = 30°$, $a = 2\sqrt{3}$, $c = 2$

3 $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$, $b = 100$

4 $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$

Ejercicios 5 – 8: Calcule las partes restantes del triángulo *ABC*.

5 $\beta = 67°$, $\gamma = 75°$, $b = 12$

6 $\alpha = 23°30'$, $c = 125$, $a = 152$

7 $\beta = 115°$, $a = 4.6$, $c = 7.3$

8 $a = 37$, $b = 55$, $c = 43$

Ejercicios 9 y 10: Calcule el área del triángulo *ABC* con redondeo de 0.1 unidad cuadrada.

9 $\alpha = 75°, \quad b = 20, \quad c = 30$

10 $a = 4, \quad b = 7, \quad c = 10$

Ejercicios 11–16: Exprese el número complejo en forma trigonométrica, con $0 \le \theta < 2\pi$.

11 $-10 + 10i$ **12** $2 - 2\sqrt{3}i$

13 -17 **14** $-12i$

15 $-5\sqrt{3} - 5i$ **16** $4 + 5i$

Ejercicios 17 y 18: Exprese lo siguiente en forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

17 $20\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{11\pi}{6}\right)$ **18** $13\cos(\tan^{-1}\frac{5}{12})$

Ejercicios 19 y 20: Emplee formas trigonométricas para determinar z_1z_2 y z_1/z_2.

19 $z_1 = -3\sqrt{3} - 3i, \quad z_2 = 2\sqrt{3} + 2i$

20 $z_1 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i, \quad z_2 = -1 - i$

Ejercicios 21–24: Emplee el teorema de De Moivre para pasar el número complejo dado a la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

21 $(-\sqrt{3} + i)^9$ **22** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{30}$

23 $(3 - 3i)^5$ **24** $(2 + 2\sqrt{3}i)^{10}$

25 Calcule las tres raíces cúbicas de -27.

26 Sea $z = 1 - \sqrt{3}i$.

(a) Determine z^{24}. **(b)** Halle las tres raíces cúbicas de z.

27 Determine las soluciones de la ecuación $x^5 - 32 = 0$.

28 Si $\mathbf{a} = \langle -4, 5\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 2, -8\rangle$, represente gráficamente los vectores que corresponden a

(a) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ **(b)** $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ **(c)** $2\mathbf{a}$ **(d)** $-\frac{1}{2}\mathbf{b}$

29 Si $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ y además $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$, determine el vector o número correspondiente a

(a) $4\mathbf{a} + \mathbf{b}$ **(b)** $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$

(c) $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$ **(d)** $\|\mathbf{a}\| - \|\mathbf{b}\|$

30 Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$, $\mathbf{r} = \langle x, y\rangle$ y $c > 0$, represente el conjunto de los puntos $P(x, y)$, tales que $\|\mathbf{r} - \mathbf{a}\| = c$.

31 Si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son vectores con el mismo punto inicial y el ángulo entre ellos es θ, demuestre que

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta.$$

32 ***Curso de un barco*** Un barco navega a una velocidad de 14 mi/h en dirección S50°E. Exprese su velocidad $\mathbf{v}$ como vector.

33 Las magnitudes y direcciones de dos fuerzas son 72 N, S60°E, y 46 N, N74°E, respectivamente. Calcular la magnitud y dirección de la fuerza resultante.

34 ***Velocidad y dirección del viento*** Un aeroplano vuela en dirección 80° con una velocidad de 400 mi/h. Su velocidad respecto a tierra, y su dirección real son 390 mi/h y 90°, respectivamente. Calcular la dirección y velocidad del viento.

35 Si $\mathbf{a} = \langle 2, -3\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle -1, -4\rangle$,determine lo siguiente:

(a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ **(b)** el ángulo que forman $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

(c) $\text{comp}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$.

36 Si $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, calcule lo siguiente:

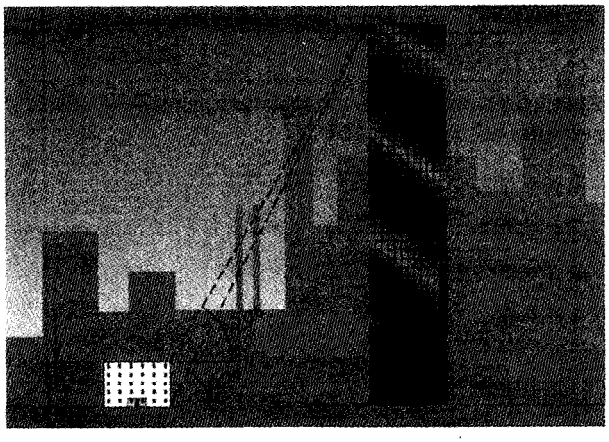
(a) $(2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}$ **(b)** El ángulo que forman $\mathbf{a}$ y $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

(c) $\text{comp}_{\mathbf{a}}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

37 Una fuerza constante tiene magnitud y dirección expresadas por $\mathbf{a} = 7\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$. Calcule el trabajo efectuado cuando el punto de aplicación de $\mathbf{a}$ se mueve a lo largo del eje x, desde $P(-5, 0)$ hasta $Q(3, 0)$.

38 ***Pista de trineo*** Una pista para carreras en trineo consiste en un tramo de 200 m cuesta abajo y un tramo horizontal de 150 m. El ángulo de elevación del punto de partida, visto desde la línea de meta, es 27.4°. ¿Qué ángulo forma la cuesta con la horizontal?

39 ***Altura de un rascacielos*** Al ver el punto más alto de un rascacielos desde la azotea de un edificio de 50 pies de altura, el ángulo de elevación es 59°. Si se ve desde el nivel de la calle, el ángulo de elevación es 62° (véase la figura).



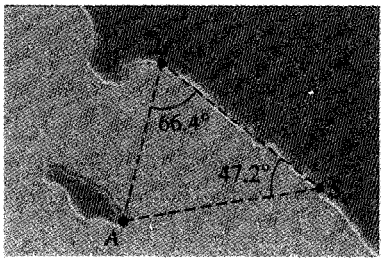
(a) Con la ley de los senos, calcule la distancia más corta entre las azoteas de las dos construcciones.

(b) Calcule la altura del rascacielos.

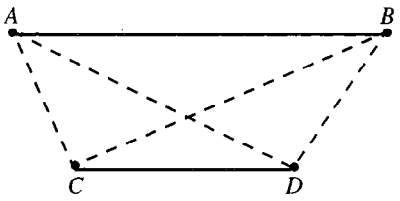
40 ***Distancias entre ciudades*** Las poblaciones San Clemente y Long Beach, en Estados Unidos, distan 41 mi a lo largo de un trecho recto de costa. En la figura se muestra el triángulo que forman las dos ciudades y el pueblo de Avalon, en la esquina sureste de la isla Santa Catalina. Se miden los ángulos *ALS* y *ASL*, que resultan ser de 66.4° y 47.2°, respectivamente.

(a) Calcule la distancia de Avalon a cada una de las ciudades.

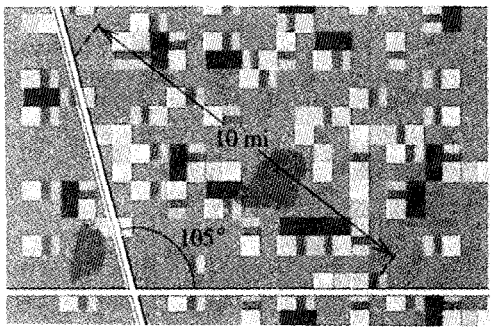
(b) Obtenga la distancia más corta de Avalon a la costa.



41 ***Topografía*** Un topógrafo desea determinar la distancia entre dos puntos inaccesibles *A* y *B*. Como se ve en la figura, selecciona dos puntos *C* y *D* a partir de los cuales se pueden ver *A* y *B* a la vez. Se mide entonces la distancia *CD* y los ángulos *ACD*, *ACB*, *BDC* y *BDA*. Si $CD = 120$ pies, $\angle ACD = 115°$, $\angle ACB = 92°$, $\angle BDC = 125°$ y $\angle BDA = 100°$, calcule la distancia *AB*.



42 ***Contacto por radio*** Dos muchachas, con sendos radioteléfonos portátiles se encuentran en el cruce de dos caminos vecinales que forman un ángulo de 105° (véase la figura). Una comienza a caminar hacia el norte a lo largo de una carretera a 5 mi/h. Al mismo tiempo, la otra camina hacia el este por la otra carretera a la misma velocidad. Si los aparatos tienen un alcance de 10 mi, ¿durante cuánto tiempo se podrán comunicar las muchachas?



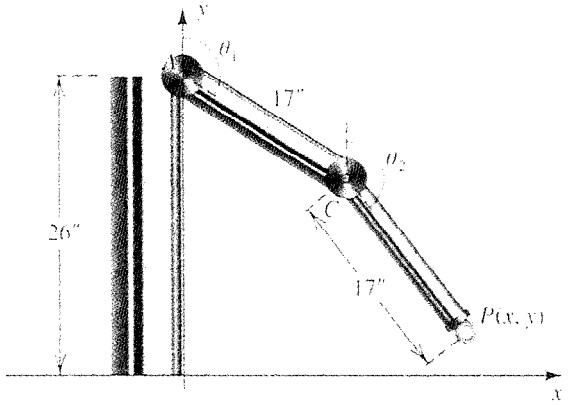
43 ***Diseño robótico*** En la figura se ve el esquema de un brazo de robot con dos partes móviles. Se escogen las dimensiones para simular un brazo humano. El brazo *AC* y el antebrazo *CP* giran en ángulos θ_1 y θ_2, respectivamente, para sujetar un objeto en el punto $P(x, y)$.

(a) Demuestre que $\angle ACP = 180° - (\theta_2 - \theta_1)$.

(b) Calcule $d(A,P)$, y a continuación haga uso del inciso (a) y de la ley de los cosenos para demostrar que

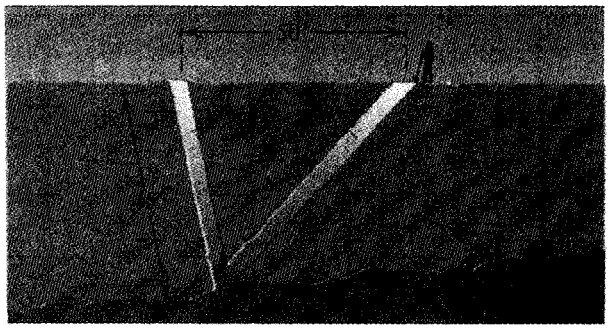
$$1 + \cos(\theta_2 - \theta_1) = \frac{x^2 + (y - 26)^2}{578}.$$

(c) Si $x = 25$, $y = 4$ y $\theta_1 = 135°$, calcule θ_2.



44 ***Rescate*** Un niño queda atrapado en un tiro de mina abandonado de 45 pies de longitud, que forma un ángulo de 78° con la horizontal. Se cavará un túnel de rescate a 50 pies de la bocamina (véase la figura).

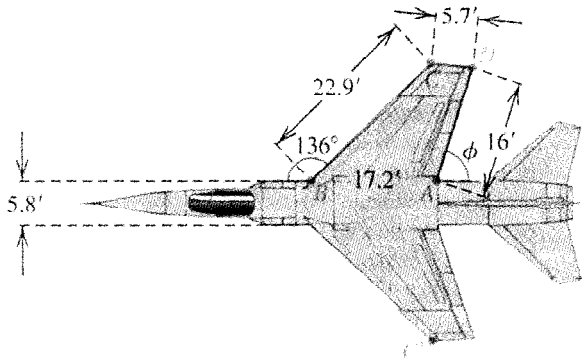
(a) ¿A qué ángulo θ se debe cavar el túnel?

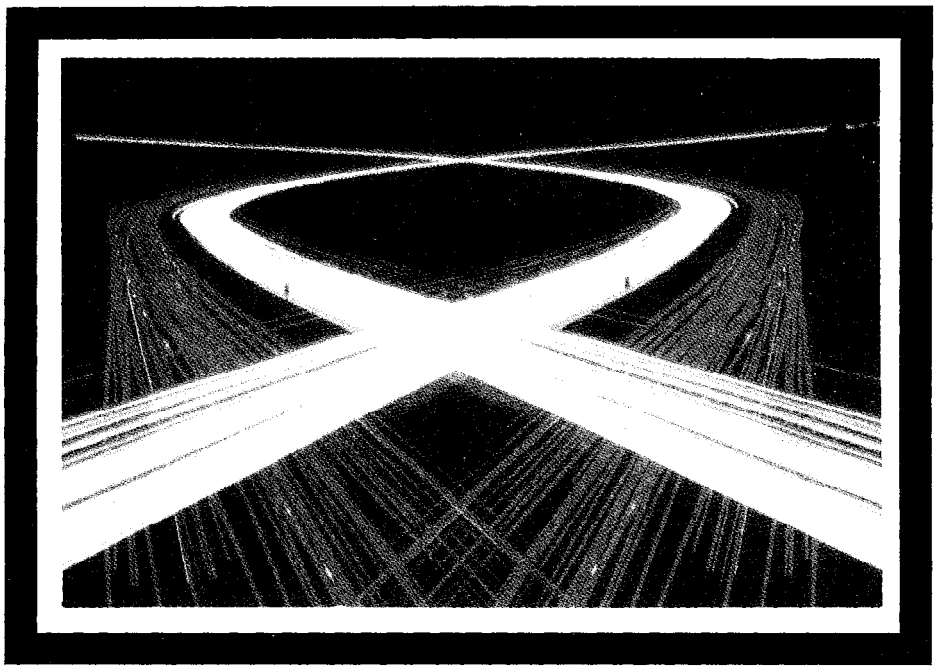


(b) Si dicho túnel se puede abrir a una velocidad de avance de 3 pies/h, ¿cuántas horas se tardará en llegar al niño?

45 ***Diseño de un avión de reacción*** En la figura se presenta la vista superior de un caza a reacción, con las dimensiones de un ala.

(a) Determine el ángulo ϕ.
(b) Calcule el área del cuadrilátero $ABCD$.
(c) Si el fuselaje tiene 5.8 pies de ancho, calcule la envergadura de las alas, CC'.





Mediante sistemas de ecuaciones se pueden localizar los puntos de intersección de muchas trayectorias curvas.

9.1	**SISTEMAS DE ECUACIONES**
9.2	**SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN DOS VARIABLES**
9.3	**SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN MÁS DE DOS VARIABLES**
9.4	**FRACCIONES PARCIALES**
9.5	**SISTEMAS DE DESIGUALDADES**
9.6	**PROGRAMACIÓN LINEAL**
9.7	**ÁLGEBRA DE MATRICES**
9.8	**INVERSA DE UNA MATRIZ**
9.9	**DETERMINANTES**
9.10	**PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES**

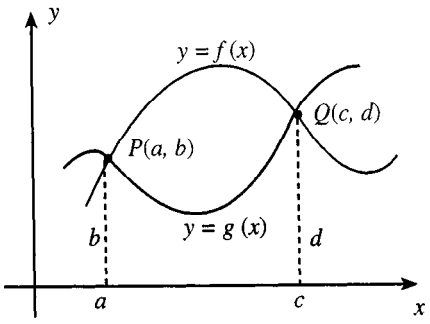
CAPÍTULO 9

SISTEMAS DE ECUACIONES Y DESIGUALDADES

■ *A veces, las aplicaciones en matemáticas requieren trabajar simultáneamente con más de una ecuación y con varias variables, es decir, con un sistema de ecuaciones. En este capítulo se estudian algunos métodos para encontrar soluciones comunes a todas las ecuaciones de un sistema. De importancia especial son las técnicas en las que se usan matrices, porque se adaptan convenientemente a programas de cómputo, y se pueden aplicar con facilidad a sistemas que contengan cualquier número de ecuaciones lineales, con cualquier número de variables. También se analizan sistemas de desigualdades y programación lineal, temas que son de gran importancia en aplicaciones a contabilidad y estadística. En las cuatro últimas secciones se presenta una introducción al álgebra de matrices y a los determinantes.* ■

9.1 SISTEMAS DE ECUACIONES

FIGURA 9.1



Considérense las gráficas de las dos funciones, f y g, en la Fig. 9.1. Con frecuencia, en las aplicaciones, es necesario determinar puntos como $P(a, b)$ y $Q(c, d)$ donde se intersecan las gráficas. Como $P(a, b)$ está en ambas gráficas, el par (a, b) es una solución de las ecuaciones $y = f(x)$ y $y = g(x)$ *al mismo tiempo*, es decir,

$$b = f(a) \quad \text{y} \quad b = g(a).$$

Se dice que (a, b) es solución del **sistema de ecuaciones**, o simplemente, **del sistema**

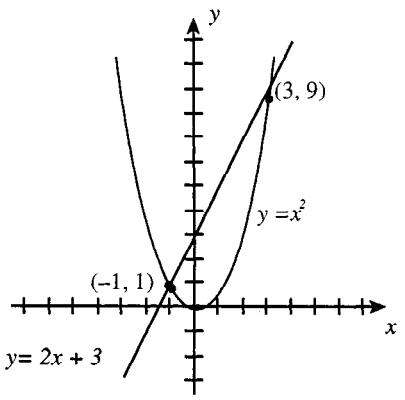
$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

en el que la llave se emplea para indicar que las ecuaciones se deben manejar en forma simultánea. Igualmente, el par (c, d) es una solución del sistema. **Resolver** un sistema de ecuaciones quiere decir calcular todas las soluciones.

Como caso especial se tiene el sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$$

FIGURA 9.2



Las gráficas de las ecuaciones son la parábola y la recta, que se ven en la Fig. 9.2. La tabla siguiente muestra que los puntos $(-1, 1)$ y $(3, 9)$ están en ambas gráficas.

(x, y)	$y = x^2$	$y = 2x + 3$
$(-1, 1)$	$1 = (-1)^2$, o $1 = 1$	$1 = 2(-1) + 3$, o $1 = 1$
$(3, 9)$	$9 = 3^2$, o $9 = 9$	$9 = 2(3) + 3$, o $9 = 9$

Por consiguiente, $(-1, 1)$ y $(3, 9)$ son soluciones del sistema.

El análisis anterior no permite conformar una estrategia para calcular realmente las soluciones. Los dos ejemplos a continuación muestran cómo calcular las soluciones del sistema empleando sólo métodos algebraicos.

EJEMPLO 1 ***Resolver un sistema de dos ecuaciones***

Resolver el sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Si (x, y) es una solución del sistema, entonces la variable y en la ecuación $y = 2x + 3$ debe satisfacer la condición $y = x^2$. Por tanto, *se sustituye* y por x^2 en $y = 2x + 3$:

$$x^2 = 2x + 3 \quad \text{se introduce } y = x^2 \text{ en } y = 2x + 3$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \text{se resta } 2x + 3$$
$$(x + 1)(x - 3) = 0 \quad \text{se factoriza}$$
$$x = -1, \quad x = 3 \quad \text{se iguala a 0 cada factor}$$

Así se obtienen los valores de x de las soluciones (x, y) del sistema. Para calcular los valores de y correspondientes, se emplea $y = x^2$, o bien $y = 2x + 3$. Si se aplica $y = x^2$, se ve que

$$\text{si} \quad x = -1, \text{ entonces } y = (-1)^2 = 1;$$

y que

$$\text{si} \quad x = 3, \text{ entonces } y = 3^2 = 9.$$

Entonces, las soluciones del sistema son $(-1, 1)$ y $(3, 9)$.

También se podría haber calculado las soluciones sustituyendo $y = 2x + 3$ en la *primera* ecuación, y se obtendría

$$2x + 3 = x^2.$$

El resto de la solución es igual.

Dado el sistema del Ejemplo 1, *se podría* haber despejado x de una de las ecuaciones para que quedara en función de y, y después, sustituir en la otra ecuación para obtener una ecuación donde sólo hubiera y. Al resolver la última ecuación se obtendrían los valores de y para las soluciones del sistema. A continuación, los valores de x se podrían haber calculado empleando una de las ecuaciones dadas. En general, se usan las siguientes reglas, en las cuales u y v representan dos variables cualesquiera (*quizá* x y y). A esta técnica se le llama **método de sustitución**.

Reglas para el método de sustitución para dos ecuaciones en dos variables

1. Despejar u (una de las variables) de una de las ecuaciones para que quede en función de la otra variable, v.
2. Sustituir la expresión que se determinó para u, en el Paso 1, en la otra ecuación, obteniendo así una ecuación en términos de v, únicamente.
3. Determinar las soluciones de la ecuación en v obtenida en el Paso 2.
4. Sustituir los valores de v encontrados en el Paso 3 en la ecuación obtenida en el Paso 1, para determinar los valores correspondientes de u.
5. Comprobar cada par (u, v) que se encontró en el Paso 4, para el sistema dado.

EJEMPLO 2 *Uso del método de sustitución*

Resolver el sistema siguiente y, a continuación, trazar la gráfica de cada ecuación, para que se vean los puntos de intersección:

SOLUCIÓN Se siguen los pasos haciendo $u = x$ y $v = y$.

Paso 1 Despejar x de la segunda ecuación para que quede en función de y:

$$x = 3 - 2y$$

Paso 2 Sustituir la expresión de x que se encontró en el Paso 1, en la primera ecuación del sistema:

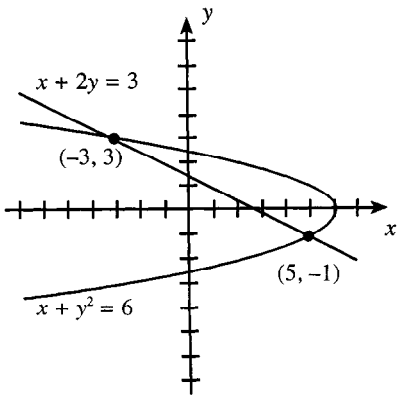
$$(3 - 2y) + y^2 = 6 \quad \text{se sustituye } x = 3 - 2y \text{ en } x + y^2 = 6$$
$$y^2 - 2y - 3 = 0 \quad \text{se simplifica}$$

Paso 3 Despejar y de la ecuación que se determinó en el Paso 2:

$$(y - 3)(y + 1) = 0 \quad \text{se factoriza } y^2 - 2y - 3$$
$$y - 3 = 0, \quad y + 1 = 0 \quad \text{se iguala a 0 cada factor}$$
$$y = 3, \qquad y = -1 \quad \text{se despeja } y$$

Son los únicos valores de y posibles como soluciones del sistema.

FIGURA 9.3



Paso 4 Emplear la ecuación $x = 3 - 2y$ del Paso 1 para calcular los valores correspondientes de x:

$$\text{si } y = 3, \text{ entonces } x = 3 - 2(3) = 3 - 6 = -3$$
$$\text{si } y = -1, \text{ entonces } x = 3 - 2(-1) = 3 + 2 = 5$$

Así, las soluciones posibles son $(-3, 3)$ y $(5, -1)$.

Paso 5 Al sustituir $x = -3$ y $y = 3$ en $x + y^2 = 6$, que es la primera ecuación del sistema, se obtiene $-3 + 9 = 6$, lo cual es cierto. Sustituyendo $x = -3$ y $y = 3$ en $x + 2y = 3$, que es la segunda ecuación del sistema, se obtiene $-3 + 6 = 3$, lo cual también es cierto. Por consiguiente, $(-3, 3)$ es una solución del sistema. De igual manera, se puede comprobar que $(5, -1)$ también es una solución.

En la Fig. 9.3 se presentan las gráficas de las dos ecuaciones, una parábola y una recta, y en ella se indican los dos puntos de intersección.

En los ejemplos siguientes ya no se indican los pasos específicos que se emplean para calcular las soluciones de los sistemas.

Para resolver algunos sistemas con el método de sustitución, conviene que u o v representen una *expresión* en la que intervenga otra variable. Esta técnica se presenta en el ejemplo siguiente, donde $u = x^2$.

EJEMPLO 3 *Uso del método de sustitución*

Resolver el siguiente sistema y, a continuación, graficar cada ecuación e indicar los puntos de intersección.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + y = 19 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Se procede como sigue:

$$x^2 = 19 - y \quad \text{se despeja } x^2 \text{ de } x^2 + y = 19$$

$$(19 - y) + y^2 = 25 \quad \text{se sustituye } x^2 = 19 - y, \text{ en } x^2 + y^2 = 25$$

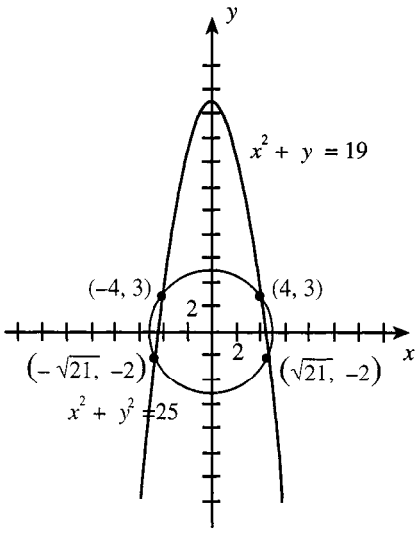
$$y^2 - y - 6 = 0 \quad \text{se simplifica}$$

$$(y - 3)(y + 2) = 0 \quad \text{factorización}$$

$$y - 3 = 0, \quad y + 2 = 0 \quad \text{se iguala a 0 cada factor}$$

$$y = 3, \qquad y = -2 \quad \text{se despeja } y$$

FIGURA 9.4



Son los únicos valores posibles de y como soluciones del sistema. Para calcular los valores correspondientes de x, se emplea $x^2 = 19 - y$:

$$\text{si } y = 3, \quad \text{entonces} \quad x^2 = 19 - 3 = 16, \quad \text{y} \quad x = \pm 4$$

$$\text{si } y = -2, \quad \text{entonces} \quad x^2 = 19 - (-2) = 21, \quad \text{y} \quad x = \pm\sqrt{21}$$

Así, las únicas soluciones posibles del sistema son

$$(4, 3), (-4, 3), (\sqrt{21}, -2) \text{ y } (-\sqrt{21}, -2).$$

Se puede comprobar, por sustitución en las ecuaciones dadas, que los cuatro pares son soluciones.

La gráfica de $x^2 + y^2 = 25$ es una circunferencia de radio 5 con centro en el origen, y la gráfica de $y = 19 - x^2$ es una parábola con eje vertical. En la Fig. 9.4 se muestran las gráficas. Los puntos de intersección corresponden a las soluciones del sistema.

Naturalmente, hay otras maneras de determinar las soluciones. Se podría despejar x^2 de la primera ecuación, obteniendo $x^2 = 25 - y^2$, y luego sustituirla en la segunda para obtener $25 - y^2 + y = 19$. Otro método sería despejar y de la segunda ecuación, y se obtendría $y = 19 - x^2$, y sustituir esto en la primera.

También se estudia el caso de ecuaciones con tres variables x, y y z, como la siguiente:

$$x^2y + xz + 3^y = 4z^3.$$

Esa ecuación tiene una solución (a, b, c) si al sustituir a, b, c en lugar de x, y, z, respectivamente, se obtiene una aseveración cierta. Se designa (a, b, c) como una **terna ordenada** de números reales. Las ecuaciones equivalentes tienen las mismas soluciones. Un sistema de ecuaciones en tres variables y sus soluciones se definen como en el caso de dos variables. Igualmente, es posible manejar sistemas de *cualquier* número de ecuaciones con *cualquier* número de variables.

El método de sustitución se puede generalizar a sistemas más complicados. Por ejemplo, dadas tres ecuaciones en tres variables, supóngase que es posible despejar una variable de una de las ecuaciones; si se sustituye esa expresión en cada una de las demás ecuaciones, se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos variables. Las soluciones del sistema de dos variables se pueden usar entonces para calcular las soluciones del sistema original.

EJEMPLO 4 ***Resolver un sistema de tres ecuaciones***

Resolver el sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ xyz = 0 \\ 2y + z = 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Se procede como sigue:

$$z = 1 - 2y \qquad \text{se despeja } z \text{ de } 2y + z = 1$$

$$\begin{cases} x - y + (1 - 2y) = 2 \\ xy(1 - 2y) = 0 \end{cases} \qquad \text{se sustituye } z = 1 - 2y \text{ en las dos primeras ecuaciones}$$

$$\begin{cases} x - 3y - 1 = 0 \\ xy(1 - 2y) = 0 \end{cases} \qquad \text{sistema equivalente}$$

Ahora se calculan las soluciones del último sistema

$$x = 3y + 1 \qquad \text{se despeja } x \text{ de } x - 3y - 1 = 0$$

$$(3y + 1)y(1 - 2y) = 0 \qquad \text{se sustituye } x = 3y + 1 \text{ en } xy(1 - 2y) = 0$$

$$3y + 1 = 0, \quad y = 0, \quad 1 - 2y = 0 \qquad \text{se iguala cada factor a 0}$$

$$y = -\tfrac{1}{3}, \quad y = 0, \quad y = \tfrac{1}{2} \qquad \text{se despeja } y$$

Estos son los únicos valores de y posibles como soluciones del sistema.

Para obtener los valores correspondientes de x, se sustituye y en la ecuación $x = 3y + 1$, para obtener

$$x = 0, \quad x = 1, \quad \text{y} \quad x = \tfrac{5}{2}.$$

Con $z = 1 - 2y$ se obtienen los valores correspondientes de z:

$$z = \tfrac{5}{3}, \quad z = 1, \quad \text{y} \quad z = 0.$$

Así, las soluciones (x, y, z) del sistema original deben estar entre las ternas ordenadas

$$(0, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{5}{3}), \quad (1, 0, 1), \quad \text{y} \quad (\tfrac{5}{2}, \tfrac{1}{2}, 0).$$

Al comprobar cada una se observa que las tres ternas ordenadas son soluciones del sistema.

EJEMPLO 5 ***Aplicación de un sistema de ecuaciones***

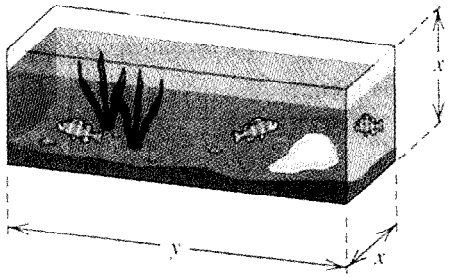
¿Es posible fabricar un acuario prismático con tapa de vidrio y dos extremos cuadrados, que contenga 16 pies^3 de agua y se construya con 40 pies^2 de cristal? Ignorar el espesor del vidrio.

SOLUCIÓN Se empieza por hacer un esquema de un acuario característico, e identificar sus medidas x y y (en pies) en la Fig. 9.5. Viendo la figura, y con fórmulas para volumen y área, se ve que

$$\text{volumen del acuario} = x^2y \qquad \text{longitud} \times \text{ancho} \times \text{altura}$$

$$\text{área necesaria de vidrio} = 2x^2 + 4xy \qquad \text{2 extremos, más 2 frentes, tapa y fondo}$$

FIGURA 9.5



Como el volumen debe ser 16 pies^3, y el área necesaria de vidrio es 40 pies^2, se forma el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} x^2y = 16 \\ 2x^2 + 4xy = 40 \end{cases}$$

Se llega a las soluciones como sigue:

$$y = \frac{16}{x^2} \quad \text{se despeja } y \text{ de } x^2y = 16$$

$$2x^2 + 4x\left(\frac{16}{x^2}\right) = 40 \quad \text{sustitución de } y = 16/x^2 \text{ en } 2x^2 + 4xy = 40$$

$$x^2 + \frac{32}{x} = 20 \quad \text{se cancela la } x \text{ y se divide entre 2}$$

$$x^3 + 32 = 20x \quad \text{se multiplica por } x$$

$$x^3 - 20x + 32 = 0 \quad \text{se resta } 20x$$

A continuación se buscan soluciones racionales para la última ecuación. Dividiendo entre $x - 2$ sintéticamente el polinomio $x^3 - 20x + 32$, se obtiene

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 0 & -20 & 32 \\ & & 2 & 4 & -32 \\ \hline & 1 & 2 & -16 & 0 \end{array}$$

De este modo, una solución de $x^3 - 20x + 32 = 0$ es 2, y las dos restantes son raíces (o ceros) del cociente $x^2 + 2x - 16$, es decir, raíces de la ecuación

$$x^2 + 2x - 16 = 0.$$

Aplicando la fórmula cuadrática,

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 64}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{17}}{2} = -1 \pm \sqrt{17}.$$

Como x es positiva, se elimina $-1 - \sqrt{17}$. Por consiguiente, los únicos valores de x son

$$x = 2 \quad \text{y} \quad x = -1 + \sqrt{17} \approx 3.12.$$

Los valores correspondientes de y se pueden calcular sustituyendo x en la ecuación $y = 16/x^2$. Haciendo $x = 2$ se obtiene $y = \frac{16}{4} = 4$. Con esos valores, se llega a las dimensiones 2 pies por 2 pies por 4 pies del acuario.

Si $x = -1 + \sqrt{17}$ en $y = 16/x^2$, se tiene entonces $y = 16/(-1 + 17)^2$, que al simplificarse da $y = \frac{1}{8}(9 + \sqrt{17}) \approx 1.64$. Así, las dimensiones aproximadas de otro acuario son 3.12 pies por 3.12 pies por 1.64 pies.

EJERCICIOS 9.1

Ejercicios 1 – 30: Emplee el método de sustitución para resolver el sistema.

1 $\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

2 $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$

3 $\begin{cases} y^2 = 1 - x \\ x + 2y = 1 \end{cases}$

4 $\begin{cases} y^2 = x \\ x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$

5 $\begin{cases} 2y = x^2 \\ y = 4x^3 \end{cases}$

6 $\begin{cases} x - y^3 = 1 \\ 2x = 9y^2 + 2 \end{cases}$

7 $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 2x - 3y = 12 \end{cases}$

8 $\begin{cases} 3x - 4y + 20 = 0 \\ 3x + 2y + 8 = 0 \end{cases}$

9 $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -6x + 9y = 4 \end{cases}$

10 $\begin{cases} 4x - 5y = 2 \\ 8x - 10y = -5 \end{cases}$

11 $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

12 $\begin{cases} 3x - 4y = 25 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

13 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ y - x = 4 \end{cases}$

14 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 3x + 4y = -25 \end{cases}$

15 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y - 3x = 2 \end{cases}$

16 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y + 2x = -1 \end{cases}$

17 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ 2y - x = 4 \end{cases}$

18 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y + 2x = -3 \end{cases}$

19 $\begin{cases} (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 10 \\ x + y = 1 \end{cases}$

20 $\begin{cases} xy = 2 \\ 3x - y + 5 = 0 \end{cases}$

21 $\begin{cases} y = 20/x^2 \\ y = 9 - x^2 \end{cases}$

22 $\begin{cases} x = y^2 - 4y + 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$

23 $\begin{cases} y^2 - 4x^2 = 4 \\ 9y^2 + 16x^2 = 140 \end{cases}$

24 $\begin{cases} 25y^2 - 16x^2 = 400 \\ 9y^2 - 4x^2 = 36 \end{cases}$

25 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 12 \end{cases}$

26 $\begin{cases} 6x^3 - y^3 = 1 \\ 3x^3 + 4y^3 = 5 \end{cases}$

27 $\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 2x - y + z = 9 \\ x + 3y + 3z = 6 \end{cases}$

28 $\begin{cases} 2x - 3y - z^2 = 0 \\ x - y - z^2 = -1 \\ x^2 - xy = 0 \end{cases}$

29 $\begin{cases} x^2 + z^2 = 5 \\ 2x + y = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$

30 $\begin{cases} x + 2z = 1 \\ 2y - z = 4 \\ xyz = 0 \end{cases}$

31 El perímetro de un rectángulo es 40 pulg, y su área es 96 pulg^2. Calcule su longitud y ancho.

32 Calcule los valores de b tales que el sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x + b \end{cases}$$

tenga **(a)** una solución **(b)** dos soluciones **(c)** no tenga solución

Interprete gráficamente estas posibilidades.

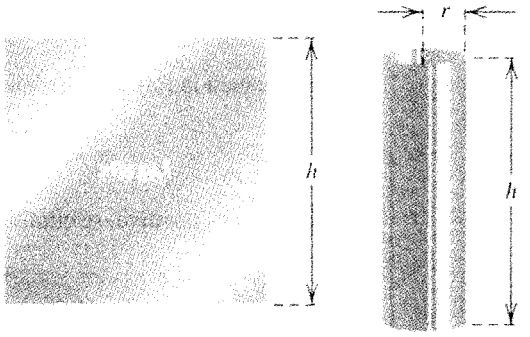
33 ¿Hay algún número real x tal que $x = 2^{-x}$? Tome la decisión representando gráficamente al sistema

$$\begin{cases} y - x = 0 \\ y - 2^{-x} = 0 \end{cases}$$

34 ¿Hay un número real x tal que $x = \log x$? Tome la decisión representando gráficamente al sistema

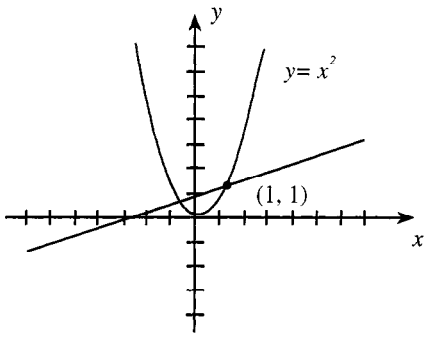
$$\begin{cases} y - x = 0 \\ y - \log x = 0 \end{cases}$$

35 ***Fabricación de un tubo*** Se desea fabricar tramos de tubo cilíndrico a partir de láminas rectangulares que tienen un área de 200 pulg^2 (véase la figura). ¿Es posible formar un tubo que tenga un volumen de 200 pulg^3? En caso afirmativo, calcule las dimensiones de la lámina rectangular.



36 En la figura se ve la gráfica de $y = x^2$ y una recta de pendiente m que pasa por el punto $(1, 1)$. Calcule el valor

de m tal que la recta corte a la gráfica sólo en (1,1) e interprete el resultado gráficamente.



37 ***Población de peces*** En piscicultura se usan funciones de fertilización-reclutamiento para predecir el número R de peces adultos durante la fertilización del año siguiente, a partir de una estimación S del número de peces que se aparean en este año.

(a) Para cierta especie de peces, $R = aS/(S + b)$. Estime a y b a partir de los datos de la tabla siguiente:

Año	1987	1988	1989
Número de los que se aparean	40 000	60 000	72 000

(b) Prediga la población que se aparea el año 1990.

38 ***Población de peces*** Refiérase al Ejercicio 37. La función de fertilización-reclutamiento de Ricker es

$$R = aSe^{-bS}$$

donde a y b son constantes positivas. Esta relación predice reclutamiento bajo a partir de poblaciones muy altas, y se ve que es adecuada para muchas especies, por ejemplo, el hipogloso del ártico. Vuelva a hacer el Ejercicio 37 empleando la función de fertilización-reclutamiento de Ricker.

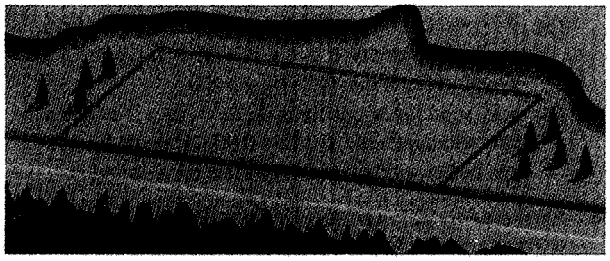
39 ***Competencia alimenticia*** Un *modelo de competencia* es una serie de ecuaciones que especifica cómo interactúan dos o más especies en la competencia por recursos alimenticios de un ecosistema. Sean x y y los números, en cientos, de dos especies en competencia, y supóngase que las tasas respectivas de crecimiento R_1 y R_2 son

$$R_1 = 0.01x(50 - x - y),$$
$$R_2 = 0.02y(100 - y - 0.5x).$$

Calcule los niveles de población (x, y) a los cuales ambas tasas de crecimiento sean cero. (A esos niveles se les llama *puntos estacionarios.*)

40 ***Cercado de un terreno*** Un agricultor tiene 2 420 pies de cerca para demarcar un terreno rectangular al lado de un río recto. Si no se usa cerca a lo largo del río (véase la figura), ¿es posible demarcar 10 acres de terreno?

Recuerde que 1 acre = 43 560 pies^2



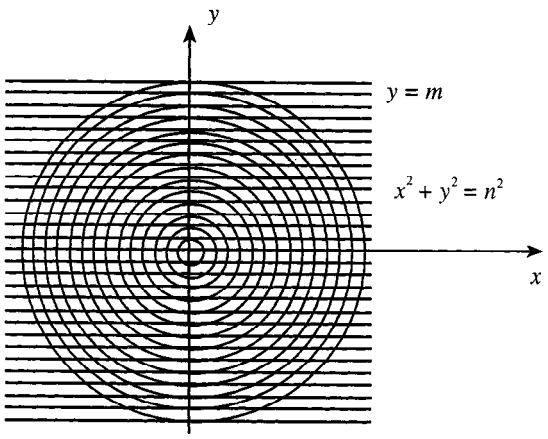
41 ***Construcción de un acuario*** Refiérase al Ejemplo 5. ¿Es posible formar un pequeño acuario *sin tapa* que tenga dos extremos cuadrados, que contenga 2 pies^3 de agua y que requiera 8 pies^2 de vidrio? En caso afirmativo, calcule las dimensiones, sin tener en cuenta el espesor del vidrio.

42 ***Problema isoperimétrico*** El problema isoperimétrico consiste en demostrar que de todas las figuras geométricas planas que tienen el mismo perímetro (figuras isoperimétricas), el círculo tiene el área mayor. Demuestre que no hay rectángulo que tenga al mismo tiempo la misma área y el mismo perímetro que un círculo dado.

43 ***Diagrama de Moiré*** Un diagrama de Moiré se forma cuando se sobreponen dos diagramas geométricamente regulares. En la figura se muestra un diagrama obtenido a partir de la familia de circunferencias $x^2 + y^2 = n^2$ con la familia de rectas horizontales $y = m$ para m y n enteros.

(a) Demuestre que los puntos de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 = n^2$ con la recta $y = n - 1$ quedan en una parábola.

(b) Resuelva de nuevo el inciso (a) para la recta $y = n - 2$.



44 ***Dimensiones de una píldora*** Una píldora esférica tiene 1 cm de diámetro. Otra píldora tiene la forma de un cilindro circular recto, y se desea fabricar con el mismo volumen y el doble de área superficial que la píldora esférica.

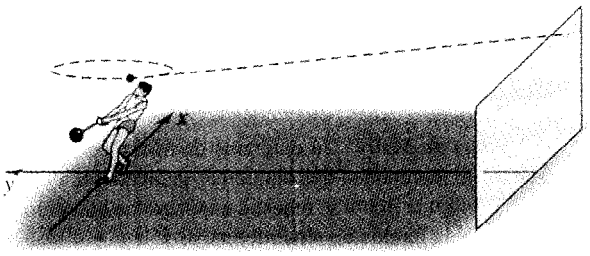
(a) Si r es el radio y h es la altura de la píldora cilíndrica, demuestre que $6r^2h = 1$ y $r^2 + rh = 1$. Llegue a la conclusión de que $6r^3 - 6r + 1 = 0$.

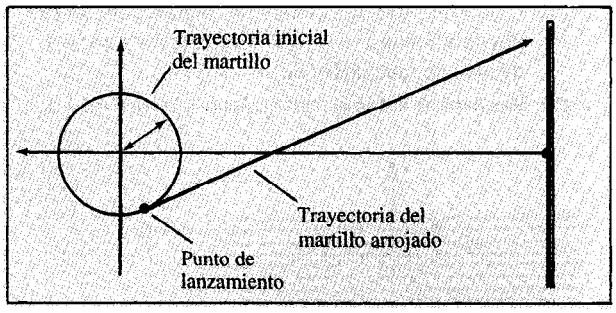
(b) Las soluciones positivas de $6r^3 - 6r + 1 = 0$ son, aproximadamente, 0.172 y 0.903. Calcule las alturas correspondientes e interprete los resultados.

45 ***Lanzamiento del martillo*** Un lanzador de martillo entrena en un terreno pequeño. El martillo gira generando una circunferencia de 5 pies de radio y, cuando se suelta, choca con un tablero alto a 50 pies del centro del punto de lanzamiento. Sean los ejes coordenados como los que se ven en la figura (que no está a escala).

(a) Si se suelta el martillo en $(-4, -3)$, y vuela en dirección tangente, ¿dónde pegará con el muro?

(b) Si el martillo debe golpear al tablero en $(0, -50)$, ¿en qué punto de la circunferencia se debe soltar?

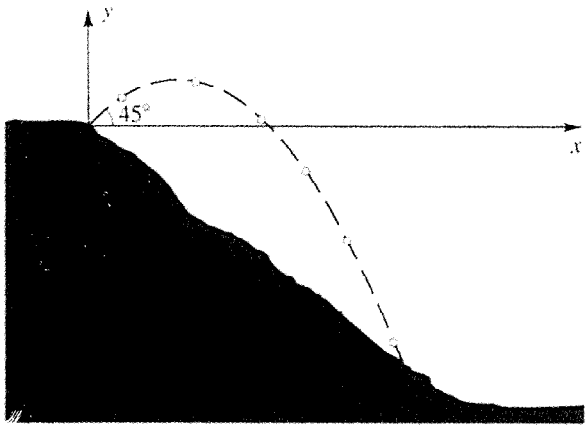




46 ***Trayectoria de una pelota lanzada*** Una persona arroja una pelota desde lo alto de una colina, a un ángulo de 45° con la horizontal, como se ve en la figura. La pelota aterriza a 50 pies cuesta abajo, y la pendiente es $-\frac{3}{4}$. Mediante Cálculo se puede demostrar que la trayectoria de la pelota es $y = ax^2 + x + c$, para a y c constantes.

(a) Sin tener en cuenta la altura de la persona, deduzca una ecuación de la trayectoria.

(b) ¿Cuál es la altura máxima de la pelota *respecto al terreno*?



Ejercicios 47 – 50: Grafique las dos ecuaciones en el mismo plano de coordenadas, y calcule las coordenadas de los puntos de intersección.

47 $y = x^3 + x$; $\quad x^2 + y^2 = 1$

48 $y = 3x^4 - \frac{3}{2}$; $\quad x^2 + y^2 = 1$

49 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$; $\quad (x - \frac{5}{4})^2 + y^2 = 1$

50 $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{4}$; $\quad (x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = 1$

9.2 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS VARIABLES

Una ecuación $ax + by = c$ (o, lo que es lo mismo, $ax + by - c = 0$) con a y b distintas de cero es una ecuación lineal en dos variables x, y. Igualmente, $ax + by + cz = d$ es una ecuación lineal en tres variables, x, y, z. También hay ecuaciones lineales con cuatro, cinco, o *cualquier* número de variables. Los sistemas de ecuaciones más comunes son aquellos en los cuales cada una de las ecuaciones es lineal. En esta sección sólo se analizan los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables. Los sistemas donde intervienen más de dos variables se estudian en la siguiente sección.

Dos sistemas de ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones. Para encontrar las soluciones de un sistema, se trabajan las ecuaciones hasta obtener un sistema equivalente con ecuaciones sencillas para que se puedan calcular con facilidad las soluciones. Algunas manipulaciones, o *transformaciones*, que conducen a sistemas equivalentes, se establecen sin demostración en el siguiente teorema.

Teorema de sistemas equivalentes

Dado un sistema de ecuaciones, se obtiene un sistema equivalente si:

(1) se intercambian dos ecuaciones.

(2) una ecuación se multiplica por o divide entre una constante distinta de cero.

(3) se suma un múltiplo constante de una ecuación a otra.

Se obtiene un *múltiplo constante* de una ecuación multiplicando *cada uno* de sus términos por la misma constante k, distinta de cero. Al aplicar la parte (3) del teorema, con frecuencia se usa la frase *sumar a una ecuación k veces otra ecuación*. *Sumar* dos ecuaciones quiere decir sumar sus miembros correspondientes.

Con el ejemplo siguiente se muestra cómo se puede usar el teorema de sistemas equivalentes para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

EJEMPLO 1 ***Uso del teorema de sistemas equivalentes***

Resolver el sistema

$$\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

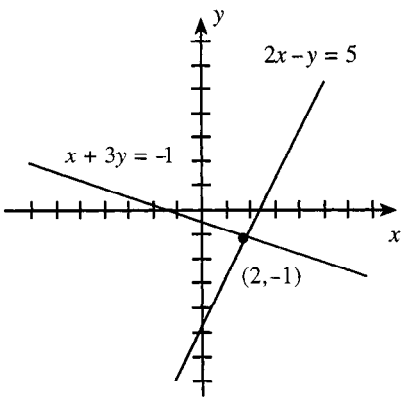
SOLUCIÓN Aplicando el teorema anterior, se obtienen los sistemas equivalentes a continuación:

$$\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$ sistema dado

$$\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 6x - 3y = 15 \end{cases}$$ se multiplica por 3 la segunda ecuación

$$\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 7x = 14 \end{cases}$$ se suma la primera ecuación a la segunda

FIGURA 9.6



Se observa en el último sistema que $7x = 14$ y, por consiguiente, $x = \frac{14}{7} = 2$. Para calcular el valor correspondiente de y, se sustituye 2 en lugar de x, en $x + 3y = -1$, y se obtiene $y = -1$. Así, $(2,-1)$ es la única solución del sistema.

Hay muchos otros modos de emplear el teorema de sistemas equivalentes para llegar a la solución. Uno de ellos es proceder como sigue:

$$\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$ sistema dado

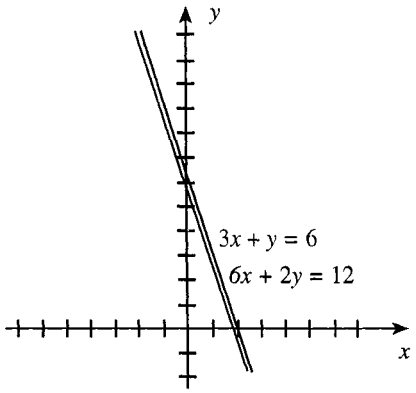
$$\begin{cases} -2x - 6y = 2 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$ se multiplica por -2 la primera ecuación

$$\begin{cases} -2x - 6y = 2 \\ -7y = 7 \end{cases}$$ se suma la primera ecuación a la segunda

En el último sistema se ve que $-7y = 7$, o sea, $y = -1$. Para calcular el valor correspondiente de x, se podría sustituir -1 en lugar de y, en $x + 3y = -1$, y obtener $x = 2$. Por consiguiente, la solución es $(2, -1)$.

En la Fig. 9.6 se muestran las gráficas de las dos ecuaciones que son rectas que se intersecan en el punto $(2, -1)$.

FIGURA 9.7



La técnica que se usa en el Ejemplo 1 se llama **método de eliminación**, porque se elimina una variable en una de las ecuaciones. El método de eliminación, por lo general, lleva a las soluciones en menos etapas que el método de sustitución que se estudió en la sección anterior.

EJEMPLO 2 ***Sistema de ecuaciones lineales con número infinito de soluciones***

Resolver el sistema

$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 6x + 2y = 12 \end{cases}$$

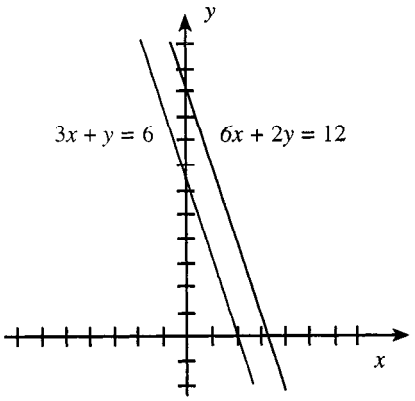
SOLUCIÓN Multiplicando la segunda ecuación por $\frac{1}{2}$ se tiene

$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$$

Así, (a, b) es solución si y sólo si $3a + b = 6$, es decir, $b = 6 - 3a$. Se ve que las soluciones consisten en todos los pares ordenados de la forma $(a, 6 - 3a)$, donde a es un número real. Si se desea llegar a soluciones particulares, se sustituyen diversos valores en lugar de a. Algunas soluciones son $(0, 6)$, $(1, 3)$, $(3, -3)$, $(-2, 12)$ y $(\sqrt{2}, 6 - 3\sqrt{2})$.

La gráfica de cada ecuación es la misma recta, como se ve en la Fig. 9.7.

FIGURA 9.8



EJEMPLO 3 ***Sistema de ecuaciones lineales sin solución***

Resolver el sistema

$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 6x + 2y = 20 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Si se suma a la segunda ecuación la primera ecuación multiplicada por –2, se tiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 0 = 8 \end{cases}$$

La última ecuación se puede escribir como $0x + 0y = 8$, que es falsa para todo par ordenado (x, y). Por lo tanto, el sistema no tiene solución.

Las gráficas de las dos ecuaciones en el sistema dado son rectas que tienen la misma pendiente, y por lo tanto, son paralelas (véase Fig. 9.8). La conclusión que el sistema no tiene solución corresponde al hecho que esas rectas no se intersecan.

Los tres ejemplos anteriores muestran situaciones características al resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables: hay exactamente una solución, o bien, hay un número infinito de soluciones, o bien, no existe solución. Un sistema es consistente si tiene al menos una solución. Un sistema con un número infinito de soluciones es dependiente y consistente. Un sistema es inconsistente si no tiene solución.

Como la gráfica de toda ecuación lineal $ax + by = c$ es una recta, *se da exactamente uno* de los tres casos que aparecen en la tabla siguiente en cualquier sistema de dos ecuaciones de ese tipo.

Características de un sistema de dos ecuaciones lineales en dos variables

Gráficas	Número de soluciones	Clasificación
Rectas no paralelas	Una solución	Sistema consistente
Rectas idénticas	Número infinito de soluciones	Sistema dependiente y consistente
Rectas paralelas	Ninguna solución	Sistema inconsistente

En la práctica no debe haber dificultad para determinar cuál de los tres casos se está manejando. El caso de solución única es evidente al aplicar transformaciones adecuadas al sistema, como en el Ejemplo 1. El caso de un número infinito de soluciones es semejante al del Ejemplo 2, en el cual una de las ecuaciones se puede transformar en la otra. El caso sin solución se presenta como una contradicción, como cuando se obtuvo $0 = 8$ en el Ejemplo 3.

Se pueden resolver algunos problemas aplicados mediante sistemas de dos ecuaciones lineales simultáneas, como se verá en los dos ejemplos siguientes.

EJEMPLO 4 ***Aplicación de un sistema de ecuaciones lineales***

Una empresa agrícola tiene una granja de 100 acres en la que cultiva lechuga y col. Cada acre de col necesita 600 horas de trabajo, y cada acre de lechuga, 400 horas. Si se dispone de un total

de 45 000 horas, y si se deben usar todos los recursos de terreno y mano de obra, calcule el número de acres que se deben cultivar de cada verdura.

SOLUCIÓN Defínanse las variables como sigue, para que representen las incógnitas:

x = número de acres de col
y = número de acres de lechuga

Así, el número de horas de trabajo necesarias para cada cultivo se puede expresar como sigue:

$600x$ = número de horas necesarias para la col
$400y$ = número de horas necesarias para la lechuga

Como se sabe que el número total de acres es 100, y que el número total de horas disponibles es 45 000, entonces se tiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 600x + 400y = 45{,}000 \end{cases}$$

En seguida empleamos el método de eliminación:

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 6x + 4y = 450 \end{cases}$$ se divide entre 100 la segunda ecuación

$$\begin{cases} -6x - 6y = -600 \\ 6x + 4y = 450 \end{cases}$$ se multiplica por – 6 la primera ecuación

$$\begin{cases} -6x - 6y = -600 \\ -2y = -150 \end{cases}$$ se suma la primera ecuación a la segunda

Se ve en la últma ecuación que $-2y = -150$, o sea, $y = 75$. Escribiendo 75 en lugar de y, en $x + y = 100$, se obtiene $x = 25$. Por consiguiente, la empresa debe sembrar 25 acres de col y 75 de lechuga.

EJEMPLO 5 *Cálculo de la velocidad de la corriente en un río*

Un bote de motor, trabajando con el acelerador a fondo, hizo un viaje de 4 mi corriente arriba (contra una corriente constante) en 15 min. El viaje de regreso, con la misma corriente y con el acelerador a fondo, tardo 12 min. Calcular la velocidad de la corriente y la velocidad equivalente del bote en agua tranquila.

SOLUCIÓN Se empieza por definir las variables que representen las cantidades desconocidas. Así, sean

x = velocidad del bote, en mi/h
y = velocidad de la corriente, en mi/h

Pensamos usar la fórmula $d = rt$, en la cual d representa la distancia recorrida, r la velocidad y t el tiempo. Como la corriente se opone al bote cuando viaja río arriba, pero se suma a su velocidad al viajar corriente abajo, se tiene

$$\text{velocidad río arriba} = x - y \text{ mi/h}$$
$$\text{velocidad río abajo} = x + y \text{ mi/h}$$

El tiempo transcurrido en el viaje, en horas, en cada dirección, es

$$\text{tiempo río arriba} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4} \text{ h}$$
$$\text{tiempo río abajo} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5} \text{ h}.$$

La distancia es 4 mi en cada viaje. Sustituyendo en $d = rt$, se obtiene el sistema

$$\begin{cases} 4 = (x - y)(\frac{1}{4}) \\ 4 = (x + y)(\frac{1}{5}) \end{cases}$$

Se aplica el teorema de sistemas equivalentes y se tiene

$$\begin{cases} x - y = 16 \\ x + y = 20 \end{cases}$$ se multiplica la primera ecuación por 4 y la segunda por 5

$$\begin{cases} x - y = 16 \\ 2x \quad = 36 \end{cases}$$ se suma la primera ecuación a la segunda

Se observa en la última ecuación que $2x = 36$, o sea, $x = 18$. Sustituyendo 18 en lugar de x, en $x + y = 20$, se tiene $y = 2$. Por consiguiente, la velocidad del bote en agua tranquila es 18 mi/h, y la velocidad de la corriente es 2 mi/h.

EJERCICIOS 9.2

Ejercicios 1 – 20: Resuelva el sistema de ecuaciones.

1 $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x - 2y = 8 \end{cases}$

2 $\begin{cases} 4x + 5y = 13 \\ 3x + y = -4 \end{cases}$

3 $\begin{cases} 2x + 5y = 16 \\ 3x - 7y = 24 \end{cases}$

4 $\begin{cases} 7x - 8y = 9 \\ 4x + 3y = -10 \end{cases}$

5 $\begin{cases} 3r + 4s = 3 \\ r - 2s = -4 \end{cases}$

6 $\begin{cases} 9u + 2v = 0 \\ 3u - 5v = 17 \end{cases}$

7 $\begin{cases} 5x - 6y = 4 \\ 3x + 7y = 8 \end{cases}$

8 $\begin{cases} 2x + 8y = 7 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$

9 $\begin{cases} \frac{1}{3}c + \frac{1}{2}d = 5 \\ c - \frac{2}{3}d = -1 \end{cases}$

10 $\begin{cases} \frac{1}{2}t - \frac{1}{5}v = \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3}t + \frac{1}{4}v = \frac{5}{12} \end{cases}$

11 $\begin{cases} \sqrt{3}x - \sqrt{2}y = 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = \sqrt{2} \end{cases}$

12 $\begin{cases} 0.11x - 0.03y = 0.25 \\ 0.12x + 0.05y = 0.70 \end{cases}$

13 $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -6x + 9y = 12 \end{cases}$

14 $\begin{cases} 3p - q = 7 \\ -12p + 4q = 3 \end{cases}$

15 $\begin{cases} 3m - 4n = 2 \\ -6m + 8n = -4 \end{cases}$

16 $\begin{cases} x - 5y = 2 \\ 3x - 15y = 6 \end{cases}$

17 $\begin{cases} 2y - 5x = 0 \\ 3y + 4x = 0 \end{cases}$

18 $\begin{cases} 3x + 7y = 9 \\ y = 5 \end{cases}$

19 $\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = -2 \\ \frac{4}{x} - \frac{5}{y} = 1 \end{cases}$ (*Sugerencia:* Sea $u = \frac{1}{x}$ y $v = \frac{1}{y}$.)

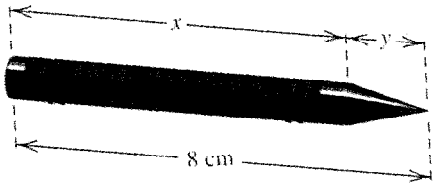
20 $\begin{cases} \frac{3}{x-1} + \frac{4}{y+2} = 2 \\ \frac{6}{x-1} - \frac{7}{y+2} = -3 \end{cases}$

21 ***Venta de boletos*** El boleto de admisión a un encuentro entre secundarias era \$1.50 para estudiantes y \$2.25 para público en general. Si se vendió un total de 450 boletos, y se obtuvo un ingreso total de \$777.75, ¿cuántos boletos de cada tipo se vendieron?

22 ***Viaje aéreo*** Una aerolínea que vuela de Los Angeles a Albuquerque, con escala Phoenix, cobra \$45 por el pasaje a Phoenix, y \$60 de Los Angeles a Albuquerque.

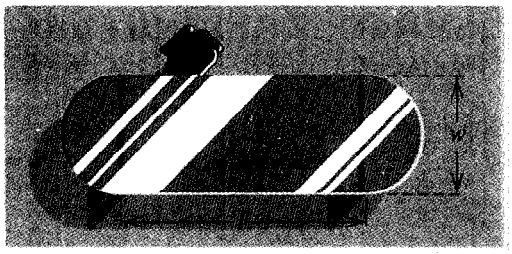
En Los Angeles abordó un total de 185 pasajeros, y los ingresos totales fueron $10 500. ¿Cuántos pasajeros bajaron del avión en Phoenix? ($ = dólares)

23 ***Dimensiones de un crayón*** Un crayón de 8 cm de longitud y 1 cm de diámetro se fabricará con 5 cm^3 de cera de color. El crayón debe tener la forma de un cilindro rematado en una punta cónica pequeña (véase la figura). Calcule la longitud x del cilindro, y la altura y del cono.



24 ***Remando en lancha*** Un hombre rema en un bote 500 pies contra una corriente constante y tarda 10 min. A continuación, rema 300 pies corriente abajo, con la misma corriente, durante 5 min. Calcule la velocidad de la corriente y la velocidad equivalente a la que se puede remar en agua tranquila.

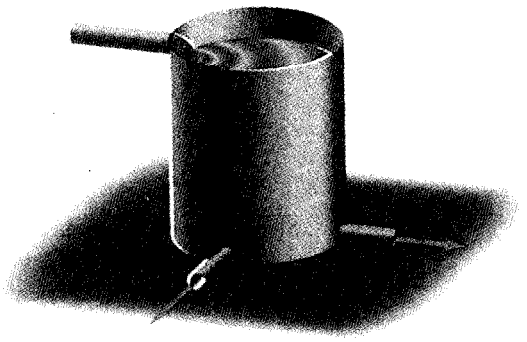
25 ***Dimensiones de una mesa*** Se desea fabricar una gran mesa de conferencias que tenga forma rectangular con dos semicírculos en los extremos (véase la figura). La mesa debe tener un perímetro de 40 pies, y el área de la parte rectangular debe ser el doble de la suma de las áreas de ambos extremos. Calcule la longitud l y el ancho w de la parte rectangular.



26 ***Rendimiento de inversiones*** Una mujer tiene disponibles $15 000 para invertir en dos fondos que pagan interés simple a tasas de 6% y 8%. Los intereses del fondo de 6% están exentos de impuestos; sin embargo, por el interés del fondo de 8% se debe pagar impuesto. Como está en una clasificación de tarifa alta de impuesto, la mujer no desea invertir el total en la cuenta al 8%. ¿Hay alguna manera de invertir el dinero para que reciba $1 000 de intereses después de un año?

27 ***Población de gato montés*** Se clasificó una población de gatos salvajes en cachorros (menores de 1 año de edad) y en adultos (mínimo 1 año). Todas las hembras adultas, incluyendo las nacidas en el año anterior, tienen una camada cada junio, con una prole promedio de 3 gatitos. Se estima que, en cierta zona, la población de gatos monteses en primavera es 6 000, y que la relación macho a hembra es 1. Calcule el número de adultos y gatitos en la población.

28 ***Flujos volumétricos*** Un depósito de agua de 300 gal de capacidad se llena con un solo tubo de entrada, y se pueden emplear dos tubos idénticos de salida para suministrar agua a los campos vecinos (véase la figura). Se necesitan 5 h para llenar un tanque vacío cuando están abiertos ambos tubos de salida. Cuando se cierra uno, se necesitan 3 h para llenarlo. Calcule los caudales o flujos, en galones por hora, que entran y salen por los tubos.



29 ***Preparación de una aleación de plata*** Un platero tiene 2 aleaciones, una con 35% de plata y la otra con 60%. ¿Cuánto de cada una debe fundir y combinar para obtener 100 g de una aleación que contenga 50% de plata?

30 ***Mezcla de nueces*** Un comerciante desea mezclar cacahuates, que cuestan $3 por libra, con nuez moscada, que cuesta $8 por libra para obtener 60 libras de una mezcla que cueste $5 por libra. ¿Cuántas libras de cada variedad debe mezclar?

31 ***Viaje aéreo*** Un avión que vuela con viento de cola, recorre 1 200 mi en 2 h. El viaje de regreso, contra el viento, le toma $2\frac{1}{2}$ horas. Calcule la velocidad de travesía del avión, y la velocidad del viento. Supoṇga que ambas velocidades son constantes.

32 ***Surtido de pedidos*** Una compañía papelera vende al mayoreo dos tipos de cuadernos de notas a las librerías, la primera en 50¢ y la segunda en 70¢. La empresa recibe un pedido de 500 cuadernos, junto con un cheque de $286. Si el pedido no menciona el número de cada tipo, ¿cómo debe surtir el pedido la papelería?

33 ***Aceleración*** Cuando una pelota rueda pendiente abajo en un plano inclinado, su velocidad $v(t)$ en cm/s, en el instante t es $v(t) = v_0 + at$, para una velocidad inicial v_0 y

una aceleración a en cm/s^2. Si $v(2) = 16$ y $v(5) = 25$, calcule v_0 y a.

34 ***Tiro vertical*** Si un objeto se lanza verticalmente hacia arriba desde una altura de s_0 pies, y una velocidad inicial de v_0 pies/s, entonces, su distancia al piso $s(t)$ a los t segundos es

$$s(t) = -16t^2 + v_0t + s_0.$$

Si $s(1) = 84$ y $s(2) = 116$, ¿cuánto valen v_0 y s_0?

35 ***Planeación de la producción*** Una pequeña mueblería fabrica sofás y divanes. Cada sofá requiere 8 horas de trabajo y \$60 de materiales, mientras que un diván se puede fabricar con \$35 de materiales en 6 horas. La empresa dispone 340 horas de mano de obra cada semana, y puede adquirir \$2 250 en materiales. ¿Cuántos divanes y sofás se pueden producir si se debe emplear la totalidad de los materiales y la mano de obra disponibles?

36 ***Dieta de ganado*** Un granjero prepara una mezcla de avena y maíz como alimento para su ganado. Cada onza (28 g) de avena produce 4 g de proteína y 18 g de carbohidratos, y cada onza de maíz produce 3 g de proteína y 24 de carbohidratos. ¿Cuántas onzas de cada grano se pueden usar para cumplir las necesidades nutritivas de 200 g de proteína y 1320 g de carbohidratos por ración?

37 ***Intercambio de servicios*** Un plomero y un electricista hacen reparaciones a sus talleres, y convienen en intercambiar servicios. En la tabla siguiente se ve el número de horas que se necesitaron en cada reparación.

	Taller del plomero	**Taller del electricista**
Horas del plomero	6	4
Horas del electricista	5	6

Preferirían darse por satisfechos, pero por los impuestos, deben cobrar todo trabajo que hagan. Convienen en seleccionar tarifas horarias tales que la cuenta de cada trabajo coincida con el ingreso que cada persona recibiría normalmente en un trabajo semejante.

(a) Si x y y representan las tarifas horarias del plomero y del electricista, respectivamente, demuestre que

$$6x + 5y = 10x \text{ y que } 4x + 6y = 11y.$$

Describa las soluciones a este sistema.

(b) Si el plomero gana normalmente \$20 por hora, ¿cuánto debe cobrar el electricista?

38 Deduzca las ecuaciones de las alturas del triángulo cuyos vértices están en $A(-3, 2)$, $B(5, 4)$ y $C(3, -8)$, y determine el punto en el cual se intersecan las tres.

39 ***Tendencia al calentamiento en París*** Como resultado de la urbanización, ha aumentado la temperatura en París. En 1891, las temperaturas diarias, mínimas y máximas promedio, fueron 5.8 °C y 15.1 °C, respectivamente. Entre 1891 y 1968, estas temperaturas medias subieron 0.019 °C/año y 0.011 °C/año, respectivamente. Suponiendo que los aumentos fueron lineales, determine el año en el cual la diferencia entre las temperaturas máxima y mínima fue, en promedio, 9 °C, y determine la temperatura máxima correspondiente.

40 ***Tarifas telefónicas de larga distancia*** Una compañía telefónica cobra cierta cantidad a sus clientes por el primer minuto de llamada de larga distancia, y una cantidad distinta por cada minuto adicional. Un cliente hace dos llamadas a la misma ciudad, una de 36 minutos, que le cuesta \$7.27, y otra de 13 minutos, que le cuesta \$2.67.

(a) Calcule el costo del primer minuto y el costo de cada minuto adicional.

(b) Si el impuesto federal es 3.2% y el estatal es 7.2% para las llamadas a larga distancia, calcule, aproximando al minuto más cercano, la llamada de más duración a esa misma ciudad, cuyo costo no sea mayor que \$5.00.

41 ***Precio y demanda*** Suponga que habrá clientes para comprar 1 000 000 de camisetas a un precio de \$10, pero que por cada \$1 de aumento, habrá 100 000 compradores menos. Además, suponga que los vendedores pedirán 2 000 000 de camisetas si el precio de venta es \$15, y que por cada \$1 de aumento, en ese precio, pedirán 150 000 camisetas adicionales.

(a) Exprese el número Q de camisetas compradas por los consumidores si el precio de venta es p dólares.

(b) Exprese el número K que pedirán los proveedores si el precio de venta es p dólares.

(c) Calcule el precio del mercado, es decir, el precio para el que $Q = K$.

9.3 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN MÁS DE DOS VARIABLES

Para sistemas de ecuaciones lineales en más de dos variables, se puede usar tanto el método de sustitución, que se explicó en la Secc. 9.1, como el método de eliminación, de la Secc. 9.2. El método de eliminación es el más corto y directo para llegar a las soluciones. Además, nos lleva a las técnicas matriciales que se estudian en esta sección.

EJEMPLO 1 ***Uso del método de eliminación para resolver un sistema de ecuaciones lineales***

Resolver el sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - 4z = 3 \\ -3x + 4y - z = -2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 5y - 10z = -5 \\ -3x + 4y - z = -2 \end{cases}$$

se multiplica por -2 la primera ecuación y se suma a la segunda

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 5y - 10z = -5 \\ -2y + 8z = 10 \end{cases}$$

se multiplica por 3 la primera ecuación y se suma a la tercera

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ y - 2z = -1 \\ -2y + 8z = 10 \end{cases}$$

se multiplica la segunda ecuación por $\frac{1}{5}$

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ y - 2z = -1 \\ 4z = 8 \end{cases}$$

se multiplica por 2 la segunda ecuación y se suma a la tercera

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ y - 2z = -1 \\ z = 2 \end{cases}$$

se multiplica por $\frac{1}{4}$ la tercera ecuación

Las soluciones del último sistema se pueden calcular con facilidad mediante **sustitución inversa**, o **retrosustitución**. Se observa que en la tercera ecuación, $z = 2$. Poniendo 2 en lugar de z en la segunda ecuación, $y - 2z = -1$, se obtiene $y = 3$. Por último, se calcula el valor de x sustituyendo $y = 3$ y $z = 2$ en la primera ecuación, $x - 2y + 3z = 4$, y se obtiene $x = 4$. Por consiguiente, hay una solución, que es (4, 3, 2).

Todo sistema de tres ecuaciones lineales en tres variables tiene *solución única*, un *número infinito de soluciones*, o *no tiene solución*. Como en el caso de un sistema de dos ecuaciones en dos variables, la terminología que se emplea para designarlo es *consistente, dependiente y consistente*, o *inconsistente*, respectivamente.

Si se analiza el método de solución del Ejemplo 1, se ve que los símbolos que se usan para representar a las variables no tienen importancia. Lo que se debe tener en cuenta son los *coeficientes* de las variables. Por tanto, si para indicar las variables se usan símbolos diferentes, como r, s y t, se obtiene el sistema

$$\begin{cases} r - 2s + 3t = 4 \\ 2r + s - 4t = 3 \\ -3r + 4s - t = -2 \end{cases}$$

Así, el método de eliminación puede proseguir exactamente como en el ejemplo. Como esto es válido, es posible simplificar el proceso. Específicamente se introduce un esquema para mantener el registro de los coeficientes, de modo que no se tengan que escribir las variables. En relación con el sistema anterior, primero se comprueba que las variables aparezcan en el mismo orden en cada ecuación, y que los términos donde no intervienen las variables están a la derecha del signo igual. A continuación se enlistan o tabulan los números que intervienen en las ecuaciones, como sigue:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Un conjunto de números en esta forma se llama **matriz**. Los **renglones** de la matriz son los números que aparecen uno a continuación de otro *en dirección horizontal.*

$$\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array}$$

primer renglón, R_1
segundo renglón, R_2
tercer renglón, R_3

Las **columnas** de la matriz son los números que aparecen uno junto a otro *en dirección vertical*:

primera columna, C_1	segunda columna, C_2	tercera columna, C_3	cuarta columna, C_4
1	−2	3	4
2	1	−4	3
−3	4	−1	−2

La matriz que se obtiene a partir de un sistema de ecuaciones lineales en la forma que se acaba de mostrar, se llama **matriz del sistema**. Si omitimos la última columna de esa matriz, el conjunto remanente de números es la **matriz de coeficientes**. Como la matriz del sistema se puede obtener de la matriz de coeficientes adjuntando una columna, se la llama **matriz aumentada de coeficientes**, o simplemente, **matriz aumentada**. Después, al emplear matrices para determinar las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales, se introduce un segmento vertical de recta en la matriz aumentada para indicar dónde estarían los signos igual en el sistema correspondiente de ecuaciones, como en el ejemplo que sigue:

EJEMPLO ILUSTRATIVO

Matriz de coeficientes y matriz aumentada

sistema	matriz de coeficientes	matriz aumentada
$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - 4z = 3 \\ -3x + 4y - z = -2 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array}\right]$

Antes de explicar un método matricial para resolver un sistema de ecuaciones lineales, se da la definición general de una matriz. Se emplea la **notación de doble subíndice**, que indica que el número que aparece en el renglón i y la columna j es a_{ij}. El **subíndice de renglón** en a_{ij} es i, y el **subíndice de columna** es j.

Definición de una matriz

Sean m y n enteros positivos. Una **matriz $m \times n$** es una disposición que tiene la siguiente forma, donde todo elemento a_{ij} es un número real:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

La notación $m \times n$ en la definición se lee "*m por n*." Con frecuencia se dice que la matriz es $m \times n$, y se dice que $m \times n$ es el **tamaño** de la matriz. Es posible tener matrices en las cuales los símbolos a_{ij} representen números complejos, polinomios u otros objetos matemáticos; sin embargo, en este libro no se estudian. Los renglones y columnas de una matriz se definen como antes se dijo. Así, la matriz de la definición tiene m renglones y n columnas. Nótese que a_{23} está en el renglón 2 y en la columna 3, y que a_{32} está en el renglón 3 y en la columna 2. Cada a_{ij} es un **elemento** de la matriz. Los elementos a_{11}, a_{22}, a_{33},... son los **elementos de la diagonal principal**. Si $m = n$, se tiene la **matriz cuadrada de orden n**.

EJEMPLO ILUSTRATIVO

Matrices $m \times n$

2×3

❑ $\begin{bmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

2×2

❑ $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

1×3

❑ $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

3×2

❑ $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$

3×1

❑ $\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$

Para calcular las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales, se comienza con la matriz aumentada. Si una variable no aparece en una ecuación, se supone que el coeficiente es cero. A continuación trabajaremos con los renglones de la matriz *como si fueran ecuaciones*. Lo único que falta son los símbolos de las variables, los signos de suma que se usan entre los términos y los signos de igualdad. Simplemente se tiene en mente que los números de la primera columna son los coeficientes de la primera variable, los de la segunda columna son los coeficientes de la segunda, y así sucesivamente. Las reglas de transformación de una matriz se formulan de tal forma que produzcan siempre una matriz de un sistema equivalente de ecuaciones.

El siguiente teorema es otro enunciado, en términos de matrices, del teorema sobre sistemas equivalentes de la Secc. 9.2. En la parte (2) del teorema, la terminología *un renglón se multiplica por una constante distinta de cero* quiere decir que cada elemento del renglón se multiplica por la constante. Para *sumar* dos renglones de una matriz, como en la parte (3), se suman los elementos correspondientes de cada renglón.

Teorema de transformación de renglones de una matriz

Dada una matriz de un sistema de ecuaciones lineales, se obtiene una matriz de un sistema equivalente si

(1) se intercambian dos renglones.
(2) se multiplica un renglón por una constante distinta de cero.
(3) se suma un múltiplo constante de un renglón a otro renglón.

A los pasos 1 a 3 se les llama **transformaciones elementales de renglón** de una matriz. Si se obtiene una matriz de otra mediante una o más transformaciones elementales de renglón, se dice que las dos matrices son **equivalentes**, o más exactamente, **equivalentes de renglón**. Se usan los símbolos de la tabla siguiente para indicar transformaciones elementales de renglón. La flecha $\rightarrow$ quiere decir "remplaza." Así, para la transformación $k\mathrm{R}_i \rightarrow \mathrm{R}_i$, el múltiplo constante $k\mathrm{R}_i$ *remplaza* a R_i. Igualmente, para $k\mathrm{R}_i + \mathrm{R}_j \rightarrow \mathrm{R}_j$, la suma $k\mathrm{Ri} + \mathrm{Rj}$ *remplaza* a R_j. Por comodidad, se representa $(-1)\mathrm{R}_i$ como $-\mathrm{R}_i$.

Transformaciones elementales de renglón de una matriz

Símbolo	Significado
$\mathrm{R}_i \leftrightarrow \mathrm{R}_j$	Intercambiar los renglones R_i y R_j
$k\mathrm{R}_i \rightarrow \mathrm{R}_i$	Multiplicar por k el renglón R_i
$k\mathrm{R}_i + \mathrm{R}_j \rightarrow \mathrm{R}_j$	Sumar $k\mathrm{R}_i$ al renglón R_j

A continuación se resuelve de nuevo el Ejemplo 1 empleando matrices. El lector debe comparar las dos soluciones, porque en ambos casos se utilizan pasos análogos.

EJEMPLO 2 ***Aplicación de matrices para resolver un sistema de ecuaciones lineales***

Resolver el sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - 4z = 3 \\ -3x + 4y - z = -2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Se empieza por escribir la matriz del sistema; es decir, la matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

A continuación se aplican transformaciones de renglón para obtener otra matriz, más simple, de un sistema equivalente de ecuaciones. Estas transformaciones corresponden a las operaciones que se usan para las ecuaciones del Ejemplo 1. Se colocarán los símbolos adecuados entre las matrices equivalentes.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{r} \\ -2\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 \to \mathbf{R}_2 \\ 3\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_3 \to \mathbf{R}_3 \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -10 & -5 \\ 0 & -2 & 8 & 10 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \text{se suma } -2\mathrm{R}_1 \text{ a } \mathrm{R}_2 \\ \text{se suma } 3\mathrm{R}_1 \text{ a } \mathrm{R}_3 \end{array}$$

$$\frac{1}{5}\mathbf{R}_2 \to \mathbf{R}_2 \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 8 & 10 \end{array}\right] \quad \text{se multiplica } \mathrm{R}_2 \text{ por } \frac{1}{5}$$

$$2\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 \to \mathbf{R}_3 \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right] \quad \text{se suma } 2\mathrm{R}_2 \text{ a } \mathrm{R}_3$$

$$\frac{1}{4}\mathbf{R}_3 \to \mathbf{R}_3 \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad \text{se multiplica } \mathrm{R}_3 \text{ por } \frac{1}{4}$$

Con esta matriz final se regresa al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ y - 2z = -1 \\ z = 2 \end{cases}$$

que equivale al sistema original. La solución $x = 4$, $y = 3$ y $z = 2$ se puede determinar por sustitución inversa, como en el Ejemplo 1.

La última matriz de la solución del Ejemplo 2 está en **forma escalonada**. En general, una matriz tiene la forma escalonada, o de escalón, si satisface las siguientes condiciones:

Forma escalonada de una matriz

(1) El primer número distinto de cero de cada renglón, de izquierda a derecha, es 1.
(2) La columna que contiene al primer número distinto de cero, de cualquier renglón, está a la izquierda de la columna que contiene al primer número distinto de cero en el renglón inmediato inferior.
(3) Pueden aparecer renglones formados únicamente por ceros en la parte inferior de la matriz.

A continuación se ilustra un ejemplo de una matriz 6×7 en forma escalonada. Los símbolos a_{ij} representan números reales.

EJEMPLO ILUSTRATIVO
Forma escalonada

❑
$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_{47} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se pueden emplear las siguientes reglas para pasar a la forma de escalón.

Reglas para pasar una matriz a su forma de escalón

1. Localizar la *primera* columna que tenga elementos distintos de cero, y aplicar transformaciones elementales de renglón para obtener 1 en el primer renglón de esa columna.
2. Aplicar transformaciones elementales de renglón del tipo $k\,R_1 + R_j \rightarrow R_j$ para $j > 1$, a fin de obtener 0 bajo el 1 que se obtuvo en el punto anterior, en cada uno de los renglones restantes.
3. *No considerar el primer renglón.* Localizar la siguiente columna que contenga elementos distintos de cero, y aplicar transformaciones elementales de renglón para obtener el número 1 en el *segundo* renglón de esa columna.
4. Aplicar transformaciones elementales de renglón, del tipo $k\,R_2 + R_j \rightarrow R_j$ para $j > 2$, a fin de obtener 0 bajo el 1 que se obtuvo en el punto 3, en cada uno de los renglones restantes.
5. *No considerar el primero y segundo renglones.* Localizar la siguiente columna que contenga elementos distintos de cero y repetir el procedimiento.
6. Continuar el proceso hasta que se obtenga la forma escalonada.

No todas las formas escalonadas contienen renglones formados sólo por ceros. Véase el Ejemplo 2.

Es posible emplear operaciones elementales de renglón para transformar la matriz de cualquier sistema de ecuaciones lineales a la forma escalonada. Esta forma, a su vez, se puede utilizar para producir un sistema de ecuaciones que sea equivalente al sistema original. Las soluciones del sistema dado se pueden calcular por sustitución inversa. El ejemplo que sigue muestra esta técnica para un sistema de cuatro ecuaciones lineales.

EJEMPLO 3 ***Empleo de la forma escalonada para resolver un sistema de ecuaciones lineales***

Resolver el sistema

$$\begin{cases} -2x + 3y + 4z = -1 \\ x - 2z + 2w = 1 \\ y + z - w = 0 \\ 3x + y - 2z - w = 3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Se han acomodado las ecuaciones de tal manera que aparezcan las mismas variables en las columnas verticales. Se inicia con la matriz aumentada y, a continuación, se llega a la forma de escalón, siguiendo lo que establecen las reglas.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right] \mathbf{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{2R_1 + R_2 \rightarrow R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & 0 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{-3R_1 + R_4 \rightarrow R_4}$$

(continúa)

$$\begin{array}{r}
\\
\mathbf{R_2 \leftrightarrow R_3} \\
\\
\\
\end{array}
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\
0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\
0 & 1 & 4 & -7 & 0
\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r}
\\
\\
\mathbf{-3R_2 + R_3 \rightarrow R_3} \\
\mathbf{-R_2 + R_4 \rightarrow R_4}
\end{array}
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\
0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & -3 & 7 & 1 \\
0 & 0 & 3 & -6 & 0
\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r}
\\
\\
\\
\mathbf{R_3 + R_4 \rightarrow R_4}
\end{array}
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\
0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & -3 & 7 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r}
\\
\\
\mathbf{-\frac{1}{3}R_3 \rightarrow R_3} \\
\\
\end{array}
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\
0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -\frac{7}{3} & -\frac{1}{3} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right]$$

La última matriz está en forma escalonada, y corresponde al sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases}
x - 2z + 2w = 1 \\
y + z - w = 0 \\
z - \frac{7}{3}w = -\frac{1}{3} \\
w = 1
\end{cases}$$

A continuación, se llega a la solución por sustitución inversa. En la última ecuación se ve que $w = 1$. Sustituyendo en la tercera ecuación, $z - \frac{7}{3}w = -\frac{1}{3}$, se tiene

$$z - \tfrac{7}{3}(1) = -\tfrac{1}{3}, \qquad \text{o bien} \qquad z = \tfrac{6}{3} = 2.$$

Sustituyendo $w = 1$ y $z = 2$ en la segunda, $y + z - w = 0$, se obtiene

$$y + 2 - 1 = 0, \qquad \text{o bien} \qquad y = -1.$$

Por último, de la primera ecuación, $x - 2z + 2w = 1$, se tiene

$$x - 2(2) + 2(1) = 1, \qquad \text{o sea} \qquad x = 3.$$

Por consiguiente, el sistema tiene una solución, que es $x = 3$, $y = -1$, $z = 2$ y $w = 1$.

Después de llegar a la forma de escalón, conviene con frecuencia aplicar otras operaciones elementales de renglón, del tipo $k\mathrm{R}_i + \mathrm{R}_j \rightarrow \mathrm{R}_j$ para que aparezca 0 también *sobre* el primer 1 de cada renglón. La matriz resultante se llama **forma escalonada reducida**. A continuación se presenta un ejemplo de una matriz 6×7 en la forma de escalón reducida. Compárela con la forma escalonada de la página 544.

EJEMPLO ILUSTRATIVO

Forma escalonada reducida

❑
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a_{13} & 0 & a_{15} & 0 & a_{17} \\ 0 & 1 & a_{23} & 0 & a_{25} & 0 & a_{27} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{35} & 0 & a_{37} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_{47} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 4 ***Utilizar una forma escalonada reducida para resolver un sistema de ecuaciones lineales***

Resolver el sistema del Ejemplo 3 empleando una forma escalonada reducida.

SOLUCIÓN Se comienza con la forma de escalón que se obtuvo en el Ejemplo 3, y se aplican otras operaciones de renglón como sigue:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{r} -2\mathbf{R}_4 + \mathbf{R}_1 \to \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_4 + \mathbf{R}_2 \to \mathbf{R}_2 \\ \frac{7}{3}\mathbf{R}_4 + \mathbf{R}_3 \to \mathbf{R}_3 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} 2\mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_1 \to \mathbf{R}_1 \\ -\mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_2 \to \mathbf{R}_2 \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

El sistema de ecuaciones correspondiente a la forma de escalón reducida da la solución *sin* recurrir a la sustitución inversa:

$$x = 3, \qquad y = -1, \qquad z = 2, \qquad w = 1.$$

A veces es necesario manejar sistemas en los cuales el número de ecuaciones no es igual al número de variables. Se pueden aplicar las mismas técnicas matriciales, como se verá en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 5 ***Resolución de un sistema de dos ecuaciones lineales con tres variables***

Resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 1 \\ 3x + 4y + 5z = 3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Se empieza con la matriz aumentada y, a continuación, se determina una forma escalonada reducida. Hay muchos modos de obtener el número 1 en la primera posición del primer renglón. Por ejemplo, la transformación elemental de renglón $\frac{1}{2}\mathrm{R}_1 \to \mathrm{R}_1$, o la transformación $-\frac{1}{3}\mathrm{R}_2 + \mathrm{R}_1 \to \mathrm{R}_1$ lo haría en un paso. Otro modo, en el que no se usan fracciones, es el siguiente:

(continúa)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \end{array}\right] \mathbf{R}_1 \leftrightarrow \mathbf{R}_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$-\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_1 \to \mathbf{R}_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$-2\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 \to \mathbf{R}_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right]$$

$$-\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_1 \to \mathbf{R}_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right]$$

La forma reducida escalonada es la matriz del sistema

$$\begin{cases} x \quad - z = 5 \\ \quad y + 2z = -3 \end{cases}$$

o, en forma equivalente,

$$\begin{cases} x = \quad z + 5 \\ y = -2z - 3 \end{cases}$$

Hay un número infinito de soluciones a este sistema; se pueden determinar asignando a z cualquier valor c y empleando a continuación las dos últimas ecuaciones para expresar a x y y en términos de c. Con ello se llega a

$$x = c + 5, \qquad y = -2c - 3, \qquad z = c.$$

Así, las soluciones del sistema consisten en todas las ternas ordenadas de la forma

$$(c + 5, -2c - 3, c)$$

para todo número real c. Se pueden comprobar las soluciones sustituyendo $c + 5$ en lugar de x, $-2c - 3$ en vez de y, y c en lugar de z en las dos ecuaciones del problema.

Puede obtenerse cualquier número de soluciones del sistema sustituyendo c por números específicos. Por ejemplo, si $c = 0$, se obtiene $(5, -3, 0)$; si $c = 2$, se tiene $(7, -7, 2)$, y así sucesivamente.

Hay otras formas de especificar la solución general. Por ejemplo, comenzando con $x = z + 5$ y $y = -2z - 3$, se podría hacer que $z = d - 5$ para todo número real d. En este caso,

$$x = z + 5 = (d - 5) + 5 = d$$

$$y = -2z - 3 = -2(d - 5) - 3 = -2d + 7,$$

y las soluciones del sistema tienen la forma

$$(d, -2d + 7, d - 5).$$

Estas ternas producen las mismas soluciones que $(c + 5, -2c - 3, c)$. Por ejemplo, si $d = 5$, se tiene $(5, -3, 0)$; si $d = 7$, entonces $(7, -7, 2)$, etc.

Un sistema de ecuaciones lineales es **homogéneo** si todos los términos que no contienen variables, es decir, los *términos constantes*, son cero. Un sistema de ecuaciones homogéneas siempre tiene la **solución trivial** que se obtiene igualando cada variable a cero. A veces existen soluciones no triviales para esos sistemas. El procedimiento para calcular las soluciones es igual al empleado para sistemas no homogéneos.

EJEMPLO 6 *Resolución de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales*

Resolver el sistema homogéneo

$$\begin{cases} x - y + 4z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Se empieza con la matriz aumentada, y se pasa a una forma escalonada reducida:

$$\left[\begin{array}{rrr|c} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{r} \\ -2\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 \to \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_3 \to \mathbf{R}_3 \end{array} \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \frac{1}{3}\mathbf{R}_2 \to \mathbf{R}_2 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_1 \to \mathbf{R}_1 \\ \\ 2\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 \to \mathbf{R}_3 \end{array} \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Esta forma reducida corresponde al sistema

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{cases} x = -z \\ y = 3z \end{cases}$$

Asignando cualquier valor c a z, se tiene $x = -c$ y $y = 3c$. Las soluciones consisten en todas las ternas ordenadas de la forma $(-c, 3c, c)$ para cualquier número real c.

EJEMPLO 7 *Sistema homogéneo con solución trivial única*

Resolver el sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Se comienza con la matriz aumentada, y se encuentra una forma reducida escalonada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{r} \\ -\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 \to \mathbf{R}_2 \\ -\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_3 \to \mathbf{R}_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$-\tfrac{1}{2}\mathbf{R}_2 \to \mathbf{R}_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} -\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_1 \to \mathbf{R}_1 \\ \\ 2\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 \to \mathbf{R}_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$-\tfrac{1}{2}\mathbf{R}_3 \to \mathbf{R}_3 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$-\mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_1 \to \mathbf{R}_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

La forma escalonada reducida es la matriz del sistema

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Por consiguiente, la única solución del sistema dado es la trivial: (0, 0, 0).

En los dos ejemplos que siguen se presentan problemas aplicados.

EJEMPLO 8 *Uso de un sistema de ecuaciones para calcular la ganancia máxima*

Un fabricante de equipo eléctrico cuenta con la siguiente información, acerca de las ganancias semanales que se obtienen con la producción y venta de cierto tipo de motor eléctrico.

Cantidad producida, x	25	50	100
Ganancia en dólares, $P(x)$	5250	7500	4500

(a) Determinar a, b y c de tal manera que la gráfica de $P(x) = ax^2 + bx + c$ se ajuste a esta información.

(b) Según la función cuadrática P de la parte (a), ¿cuántos motores se deben producir cada semana para obtener una ganancia máxima? ¿Cuál es la utilidad o ganancia semanal máxima?

SOLUCIÓN

(a) En la tabla se ve que la gráfica de $P(x) = ax^2 + bx + c$ contiene los puntos (25, 5250), (50, 7500) y (100, 4500). Con ello se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 5250 = 625a + 25b + c \\ 7500 = 2500a + 50b + c \\ 4500 = 10{,}000a + 100b + c \end{cases}$$

Se puede comprobar que la solución es $a = -2$, $b = 240$, $c = 500$.

(b) Con los resultados del inciso (a),

$$P(x) = -2x^2 + 240x + 500.$$

Como $a = -2 < 0$, la gráfica de la función cuadrática P es una parábola que se abre hacia abajo. Según la fórmula de la página 179, la abscisa del vértice de la parábola, es

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-240}{2(-2)} = \frac{-240}{-4} = 60.$$

Por consiguiente, para tener ganancia máxima, el fabricante debe producir y vender 60 motores por semana. La ganancia o utilidad semanal máxima es

$$P(60) = -2(60)^2 + 240(60) + 500 = \$7700.$$

EJEMPLO 9 ***Problema de mezclas***

Un comerciante desea mezclar dos clases de cacahuate que cuestan \$3 y \$4 por libra, respectivamente, con nuez moscada de \$8 por libra, para obtener 140 libras de una mezcla que cueste \$6 por libra. Si también desea que la cantidad de cacahuates de menor precio sea el doble de la de los más caros, ¿cuántas libras de cada tipo debe mezclar?

SOLUCIÓN Se definen tres variables como sigue:

x = libras de cacahuates de \$3/lb

y = libras de cacahuates de \$4/lb

z = libras de nueces, a \$8/lb.

De acuerdo con el enunciado del problema, se tiene lo siguiente:

$$\begin{cases} x + y + z = 140 \\ 3x + 4y + 8z = 6(140) \\ x = 2y \end{cases}$$

El lector puede comprobar que la solución de este sistema es $x = 40$, $y = 20$ y $z = 80$. Así, el comerciante debe emplear 40 lb de cacahuates de \$3, 20 lb de cacahuates de \$4, y 80 lb de nueces.

EJERCICIOS 9.3

Ejercicios 1 – 26: Emplee matrices para resolver el sistema.

1 $\begin{cases} x - 2y - 3z = -1 \\ 2x + y + z = 6 \\ x + 3y - 2z = 13 \end{cases}$

2 $\begin{cases} x + 3y - z = -3 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ 2x - y + z = -1 \end{cases}$

3 $\begin{cases} 5x + 2y - z = -7 \\ x - 2y + 2z = 0 \\ 3y + z = 17 \end{cases}$

4 $\begin{cases} 4x - y + 3z = 6 \\ -8x + 3y - 5z = -6 \\ 5x - 4y = -9 \end{cases}$

5 $\begin{cases} 2x + 6y - 4z = 1 \\ x + 3y - 2z = 4 \\ 2x + y - 3z = -7 \end{cases}$

6 $\begin{cases} x + 3y - 3z = -5 \\ 2x - y + z = -3 \\ -6x + 3y - 3z = 4 \end{cases}$

7 $\begin{cases} 2x - 3y + 2z = -3 \\ -3x + 2y + z = 1 \\ 4x + y - 3z = 4 \end{cases}$

8 $\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ 3x + 2y - z = -5 \\ 5x - 2y + z = 0 \end{cases}$

9 $\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x - 2y - 4z = 0 \end{cases}$

10 $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \\ 2x - 3y - z = 0 \end{cases}$

11 $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - 2y - 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

12 $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - y - 4z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$

13 $\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 7 \\ x + 4y - z = -2 \end{cases}$

14 $\begin{cases} 2x - y + 4z = 8 \\ -3x + y - 2z = 5 \end{cases}$

15 $\begin{cases} 4x - 2y + z = 5 \\ 3x + y - 4z = 0 \end{cases}$

16 $\begin{cases} 5x + 2y - z = 10 \\ y + z = -3 \end{cases}$

17 $\begin{cases} x + 2y - z - 3w = 2 \\ 3x + y - 2z - w = 6 \\ x + y + 3z - 2w = -3 \\ -2x - 2y + 3z + w = -9 \end{cases}$

18 $\begin{cases} x - 2y - 5z + w = -1 \\ 2x - y + z + w = 1 \\ 3x - 2y - 4z - 2w = 1 \\ x + y + 3z - 2w = 2 \end{cases}$

19 $\begin{cases} 2x - y - 2z + 2s - 5t = 2 \\ x + 3y - 2z + s - 2t = -5 \\ -x + 4y + 2z - 3s + 8t = -4 \\ 3x - 2y - 4z + s - 3t = -3 \\ 4x - 6y + z - 2s + t = 10 \end{cases}$

20 $\begin{cases} 3x + 2y + z + 3u + v + w = 1 \\ 2x + y - 2z + 3u - v + 4w = 6 \\ 6x + 3y + 4z - u + 2v + w = -6 \\ x + y + z + u - v - w = 8 \\ -2x - 2y + z - 3u + 2v - 3w = -10 \\ x - 3y + 2z + u + 3v + w = -1 \end{cases}$

21 $\begin{cases} 5x + 2z = 1 \\ y - 3z = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

22 $\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ 3y + z = -2 \\ 5x - 3z = 3 \end{cases}$

23 $\begin{cases} 4x - 3y = 1 \\ 2x + y = -7 \\ -x + y = -1 \end{cases}$

24 $\begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ x + y = 1 \\ x - 2y = 13 \end{cases}$

25 $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - 3y = 4 \\ x + y = -2 \end{cases}$

26 $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ 2x + 2y = 1 \\ 4x - 5y = 3 \end{cases}$

27 ***Mezcla de soluciones de ácido*** Se tienen tres soluciones de cierto ácido. La primera contiene ácido al 10%, la segunda al 30% y la tercera al 50%. Un químico desea emplear las tres para obtener 50 litros de una solución que contenga 32% del ácido. Si desea usar el doble de la solución al 50% que la de 30%, ¿cuántos litros debe usar de cada solución?

28 ***Llenado de una piscina*** Una piscina se puede llenar mediante tres tubos, A, B y C. El tubo A la puede llenar en 8 horas. Si se usan juntos el tubo A y el tubo C, la piscina puede llenarse en 6 horas. Si se usan B y C juntos, se tarda 10 horas. ¿Cuánto tarda en llenarse si se usan los tres tubos a la vez?

29 ***Capacidad de producción*** Una empresa tiene tres máquinas, A, B y C, cada una capaz de producir cierto artículo. Sin embargo, por falta de operadores diestros, sólo se pueden usar simultáneamente dos de ellas. La tabla siguiente muestra la producción en un periodo de 3 días, usando distintas combinaciones de máquinas.

Máquinas usadas	Horas de producción	Artículos producidos
A y B	6	4 500
A y C	8	3 600
B y C	7	4 900

¿Cuánto tarda cada máquina, estando las demás paradas, en producir 1 000 artículos?

30 ***Resistencia eléctrica*** En circuitos eléctricos se emplea la fórmula $1/R = (1/R_1) + (1/R_2)$ para calcular la resistencia total R de dos resistores R_1 y R_2 conectados en paralelo. Dados tres resistores, A, B y C, suponga que la resistencia total es 48 Ω (ohms) si A y B están conectados en paralelo, 80 Ω si B y C están en paralelo, y 60 Ω si A y C están en paralelo. Determine las resistencias de A, B y C.

31 ***Mezcla de fertilizantes*** Un proveedor de productos de jardinería tiene tres tipos de fertilizante para pasto: G_1, G_2 y G_3, cuyos contenidos de nitrógeno son 30%, 20% y 15%, respectivamente. El proveedor desea mezclarlos para obtener 600 lb de fertilizante con contenido de nitrógeno de 25%. La mezcla debe contener 100 lb más del tipo G_3 que del tipo G_2. ¿Cuántas libras debe usar de cada tipo?

32 ***Aceleración de una partícula*** Si una partícula se mueve a lo largo de un eje coordenado con aceleración constante a (en cm/s^2) entonces, cuando el tiempo, en segundos, es t, su distancia $s(t)$, en centímetros, desde el origen es

$$s(t) = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$$

cuando la velocidad inicial es v_0 y la distancia desde el origen es s_0 en el momento $t = 0$. Si las distancias al origen cuando $t = \frac{1}{2}$, y $t = 1$ $t = \frac{3}{2}$ son, respectivamente: 7, 11 y 17, calcule a, v_0 y s_0.

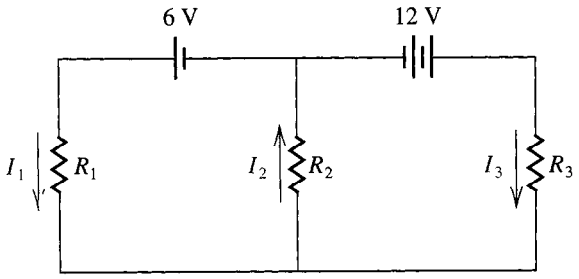
33 ***Corrientes eléctricas*** En la figura se muestra un esquema de un circuito eléctrico que tiene tres resistores, una batería de 6 V (volts), y una de 12 V. Se puede demostrar, con las leyes de Kirchhoff, que las tres corrientes, I_1, I_2 e I_3, son soluciones del sistema de ecuaciones siguiente

$$\begin{cases} I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\ R_1I_1 + R_2I_2 = 6 \\ R_2I_2 + R_3I_3 = 12 \end{cases}$$

Calcule las corrientes si

(a) $R_1 = R_2 = R_3 = 3\ \Omega$

(b) $R_1 = 4\ \Omega$, $R_2 = 1\ \Omega$ y $R_3 = 4\ \Omega$



34 ***Población de aves*** En tres islas vive una población estable de 35 000 aves. Cada año, el 10% de la población de la isla A emigra a la isla B, el 20% de la población de la isla B emigra a la isla C, y el 5% de la población de la isla C emigra a la isla A. Calcule el número de aves en cada isla, si no varía la población total de cada isla de un año al siguiente.

35 ***Mezcla de cafés*** La especialidad de un negocio es preparar mezclas de cafés para *gourmets*. El propietario desea preparar bolsas de 1 lb mezclando cafés de Colombia, Brasil y Kenya, que venderá a $8.50. El costo de las variedades de café es $10, $6 y $8, respectivamente, por libra. La cantidad de café de Colombia debe ser el triple de la cantidad del café brasileño. Calcule la cantidad de cada tipo de café en la mezcla.

36 ***Población de ganado*** Un granjero tiene 750 cabezas de ganado, que clasifica en 400 adultos (de 2 años o más), 150 terneros de 1 a 2 años, y 200 becerros de menos de 1 año. Para esta especie en particular se cuenta con la información siguiente: cada primavera, una hembra adulta da a luz un becerro, y el 75% de los becerros sobreviven al primer año. La sobrevivencia anual de los terneros y adultos es 80% y 90%, respectivamente. En todas las clasificaciones, la relación de machos a hembras es 1 a 1. Calcule la población de cada una de las clases

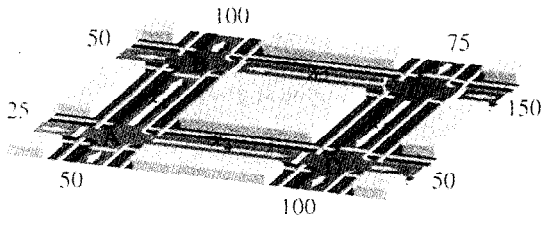
(a) para la siguiente primavera

(b) de la primavera anterior

37 ***Flujo del tránsito*** En la figura se ve un sistema de cuatro calles de un sentido que se usan para ir al centro de una ciudad. Los números de la figura indican el número promedio de vehículos, por hora, que circulan en los sentidos indicados. Cada hora entra un total de 300 vehículos a esta área, y salen 300 cada hora. Los semáforos en los cruces A, B, C y D deben sincronizarse para evitar congestionamientos; la sincronización determinará los flujos x_1, x_2, x_3 y x_4.

(a) Si el número de vehículos que entran a un cruce, por hora, debe ser igual al que sale de él, represente los flujos de tránsito en cada cruce, mediante un sistema de ecuaciones.

(b) El semáforo del cruce C se sincroniza de tal modo que x_3 sea igual a 100. Calcule x_1, x_2 y x_4.



(c) Con el sistema del inciso (a) explique por qué $75 \le x_3 \le 150$.

38 Si $f(x) = ax^3 + bx + c$, calcule a, b y c tales que la gráfica de f pase por los puntos $P(-3, -12)$, $Q(-1, 22)$ y $R(2, 13)$.

C **39** ***Contaminación del aire*** Entre 1850 y 1985, se agregaron unas 155 000 millones de toneladas métricas de carbono a la atmósfera, y la temperatura ambiente subió aproximadamente 0.5 °C. Es el producto del llamado *efecto invernadero*. Se calcula que si se duplica el contenido de dióxido de carbono (CO_2) en la atmósfera, se tendrá un aumento global de temperatura de 4 °C a 5 °C. La cantidad futura A de CO_2 en la atmósfera, en partes por millón, se puede estimar con la fórmula $A = a + ct + ke^{rt}$, en la cual a, c y k son constantes, r es el aumento porcentual en la emisión de CO_2 y t es el tiempo en años; $t = 0$ corresponde a 1990. Supóngase que se calcula que para el año 2070, A será 800 si $r = 2.5\%$, y será 560 si $r = 1.5\%$. Si en 1990, $A = 340$ y $r = 1\%$, determine el año en el cual se habrá duplicado la cantidad de CO_2 en la atmósfera.

C **40** ***Contaminación atmosférica*** En el Ejercicio 39 suponga que se estima que para el año 2030, A será 455 si $r = 2.0\%$, y será 430 si $r = 1.5\%$. Si en 1990, $A = 340$ y $r = 2.5\%$, determine el año en el cual se habrá duplicado la cantidad de CO_2 en la atmósfera.

Ejercicios 41 y 42: Deduzca la ecuación de la parábola cuyo eje es vertical y pasa por los puntos dados.

41 $P(2, 5)$, $Q(-2, -3)$, $R(1, 6)$

42 $P(3, -1)$, $Q(1, -7)$, $R(-2, 14)$

Ejercicios 43 y 44: Determine la ecuación de la parábola, en la forma $x = ay^2 + by + c$, que pase por los puntos dados.

43 $P(-1, 1)$, $Q(11, -2)$, $R(5, -1)$

44 $P(2, 1)$, $Q(6, 2)$, $R(12, -1)$

Ejercicios 45 y 46: Obtenga la ecuación de la circunferencia, en la forma $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, que pase por los puntos dados.

45 $P(2, 1)$, $Q(-1, -4)$, $R(3, 0)$

46 $P(-5, 5)$, $Q(-2, -4)$, $R(2, 4)$

47 Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, calcule a, b, c y d para que la gráfica de f pase por $(-1, 2)$, $(0.5, 2)$, $(1, 3)$ y $(2, 4.5)$.

48 Si $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, calcule a, b, c, d y e para que la gráfica de f pase por $(-2, 1.5)$, $(-1, -2)$, $(1, -3)$, $(2, -3.5)$ y $(3, -4.8)$.

9.4 FRACCIONES PARCIALES

En esta sección se indica cómo se pueden usar sistemas de ecuaciones para ayudar a descomponer expresiones racionales y obtener sumas de expresiones más simples. Esta técnica se emplea en cursos de matemáticas superiores.

Se puede comprobar que

$$\frac{2}{x^2 - 1} = \frac{1}{x - 1} + \frac{-1}{x + 1}$$

sumando las fracciones $1/(x - 1)$ y $-1/(x + 1)$ para obtener $2/(x^2 - 1)$. La expresión del lado derecho de esta ecuación se llama *descomposición en fracciones parciales*, de $2/(x^2 - 1)$.

Teóricamente es posible escribir *cualquier* expresión racional en forma de una suma de expresiones racionales en cuyos denominadores haya potencias de polinomios cuyo grado no sea mayor que 2. En forma específica, si $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios, y *el grado de $f(x)$ es menor que el grado de $g(x)$*, se puede demostrar que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = F_1 + F_2 + \cdots + F_r$$

de tal modo que F_k tiene una de las formas

$$\frac{A}{(px+q)^m} \quad \text{o bien,} \quad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n},$$

donde A y B son números reales, m y n son números no negativos, y el polinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$ es irreducible en $\mathbb{R}$; es decir, no tiene raíz real. La suma $F_1 + F_2 + \cdots + F_r$ es la **descomposición** de $f(x)/g(x)$ **en fracciones parciales**, y cada F_k es una **fracción parcial**.

Para determinar la descomposición de $f(x)/g(x)$ en fracciones parciales, *es esencial que* $f(x)$ *tenga menor grado que* $g(x)$. Si no es así, se emplea la división larga para obtener una expresión que llene este requisito. Por ejemplo, dada

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 5x - 3}{x^2 - 1},$$

se tiene

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 5x - 3}{x^2 - 1} = x - 6 + \frac{6x - 9}{x^2 - 1}.$$

A continuación se determina la descomposición de $(6x - 9)/(x^2 - 1)$.

Se utiliza el siguiente procedimiento para descomponer en fracciones parciales.

Procedimiento para determinar descomposiciones en fracciones parciales de $f(x)/g(x)$

1 Si el grado del numerador $f(x)$, no es menor que el del denominador $g(x)$, usar la división larga para obtener la forma adecuada.

2 Factorizar el denominador $g(x)$ para obtener un producto de factores lineales, $px + q$, o factores cuadráticos irreducibles, $ax^2 + bx + c$, y agrupar los factores repetidos, para que $g(x)$ sea un producto de factores *diferentes* de la forma $(px + q)^m$, o bien $(ax^2 + bx + c)^n$, donde m y n son números no negativos.

3 Aplicar las reglas siguientes a los factores que se encontraron en el Paso 2:

Regla A: Para cada factor de la forma $(px + q)^m$, donde $m \geq 1$, la descomposición en fracciones parciales contiene una suma de m fracciones parciales de la forma

$$\frac{A_1}{px+q} + \frac{A_2}{(px+q)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(px+q)^m},$$

en la cual cada numerador A_k es número real.

Regla B: Para cada factor de la forma $(ax^2 + bx + c)^n$, siendo $n \geq 1$, y donde $ax^2 + bx + c$ es irreducible, la descomposición en fracciones parciales contiene una suma de n fracciones parciales de la forma

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n},$$

en la cual A_k y B_k son números reales.

4 Calcular los números A_k y B_k del Paso 3.

Se aplica el procedimiento anterior en los ejemplos siguientes. Por comodidad, se emplean las variables A, B, C, etcétera, en vez de las variables A_k y B_k.

EJEMPLO 1 ***Descomposición en fracciones parciales en la cual cada denominador es lineal***

Determinar la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{4x^2 + 13x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x}.$$

SOLUCIÓN

Paso 1 El grado del numerador, 2, es menor que el del denominador, 3; por consiguiente, no se requiere división larga.

Paso 2 Se factoriza el denominador:

$$x^3 + 2x^2 - 3x = x(x^2 + 2x - 3) = x(x + 3)(x - 1)$$

Paso 3 Cada factor del denominador tiene la forma que pide la Regla A, con $m = 1$. Así, al factor x corresponde una fracción parcial de la forma A/x. Igualmente, a los factores $x + 3$ y $x - 1$ les corresponden fracciones parciales de la forma $B/(x + 3)$ y $C/(x - 1)$, respectivamente. La descomposicón en fracciones parciales es

$$\frac{4x^2 + 13x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 3} + \frac{C}{x - 1}.$$

Paso 4 Se determinan los valores de A, B y C del Paso 3. Se multiplican ambos miembros de la descomposición en fracciones parciales por el mínimo común denominador, que es $x(x + 3)(x - 1)$, y se obtiene

$$\begin{aligned} 4x^2 + 13x - 9 &= A(x + 3)(x - 1) + Bx(x - 1) + Cx(x + 3) \\ &= A(x^2 + 2x - 3) + B(x^2 - x) + C(x^2 + 3x) \\ &= (A + B + C)x^2 + (2A - B + 3C)x - 3A. \end{aligned}$$

Al igualar los coeficientes de potencias de x similares en cada miembro de la última ecuación, se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A + B + C = 4 \\ 2A - B + 3C = 13 \\ -3A \qquad\quad = -9 \end{cases}$$

Con los métodos que se usaron en la sección anterior, se llega a la solución $A = 3$, $B = -1$ y $C = 2$. Por lo tanto, la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{4x^2 + 13x - 9}{x(x + 3)(x - 1)} = \frac{3}{x} + \frac{-1}{x + 3} + \frac{2}{x - 1}.$$

Hay otro método para determinar A, B y C, si todos los factores del denominador son lineales y no repetidos, como el caso de este ejemplo. En vez de igualar coeficientes y usar un sistema de ecuaciones, se parte de la ecuación

$$4x^2 + 13x - 9 = A(x + 3)(x - 1) + Bx(x - 1) + Cx(x + 3).$$

A continuación se sustituyen los valores de x que hacen 0 los factores x, $x-1$ y $x-3$. Si $x=0$ y se simplifica, se tiene

$$-9 = -3A, \qquad \text{o sea} \qquad A = 3.$$

Al hacer $x=1$ en la ecuación, se obtiene $8 = 4C$, o sea, $C=2$. Por último, si $x=-3$, se tiene entonces $-12 = 12B$, o sea, $B=-1$.

EJEMPLO 2 ***Descomposición en fracciones parciales con un factor lineal repetido***

Determinar la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{x^2+10x-36}{x(x-3)^2}.$$

SOLUCIÓN

Paso 1 El grado del numerador es 2, que es menor que el del denominador, que es 3. Por consiguiente, no se requiere división larga.

Paso 2 El denominador, $x(x-3)^2$, ya está factorizado.

Paso 3 Según la Regla A, con $m=1$ hay una fracción parcial de la forma A/x, que corresponde al factor x. A continuación, aplicando la regla A con $m=2$, se observa que el factor, $(x-3)^2$ determina una suma de dos fracciones parciales de la forma $B/(x-3)$ y $C/(x-3)^2$. Así, la descomposición en fracciones parciales tiene la forma

$$\frac{x^2+10x-36}{x(x-3)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2}.$$

Paso 4 Para calcular A, B y C, se empieza multiplicando ambos miembros de la descomposición en fracciones parciales que se obtuvo en el paso anterior, por el mínimo común divisor, que es $x(x-3)^2$:

$$\begin{aligned} x^2+10x-36 &= A(x-3)^2 + Bx(x-3) + Cx \\ &= A(x^2-6x+9) + B(x^2-3x) + Cx \\ &= (A+B)x^2 + (-6A-3B+C)x + 9A \end{aligned}$$

Luego se igualan los coeficientes de potencias iguales de x y se obtiene el sistema

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -6A - 3B + C = 10 \\ 9A = -36 \end{cases}$$

La solución de este sistema de ecuaciones es $A=-4$, $B=5$, $C=1$. Entonces, la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{x^2+10x-36}{x(x-3)^2} = \frac{-4}{x} + \frac{5}{x-3} + \frac{1}{(x-3)^2}.$$

(continúa)

Como en el Ejemplo 1, también se podría haber llegado a A y C partiendo de la ecuación

$$x^2 + 10x - 36 = A(x-3)^2 + Bx(x-3) + Cx$$

para sustituir entonces los valores de x que hacen cero los factores $x-3$ y x. Así, si $x = 3$, se obtiene $3 = 3C$, o sea, $C = 1$. Si $x = 0$, se tiene $-36 = 9A$, o sea, que $A = -4$. Después se puede calcular el valor de B empleando una de las ecuaciones del sistema.

EJEMPLO 3 ***Descomposición en fracciones parciales con un factor cuadrático irreducible***

Determinar la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{4x^3 - x^2 + 15x - 29}{2x^3 - x^2 + 8x - 4}.$$

SOLUCIÓN

Paso 1 El grado del numerador, 3, es *igual* al del denominador. Por lo tanto se requiere la división larga, y se obtiene

$$\frac{4x^3 - x^2 + 15x - 29}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} = 2 + \frac{x^2 - x - 21}{2x^3 - x^2 + 8x - 4}.$$

Paso 2 Se puede factorizar el denominador agrupando como sigue:

$$2x^3 - x^2 + 8x - 4 = x^2(2x-1) + 4(2x-1) = (x^2+4)(2x-1)$$

Paso 3 Aplicando la Regla B al factor cuadrático irreducible $x^2 + 4$, en el Paso 2, se tiene que una de las fracciones parciales tiene la forma $(Ax + B)/(x^2 + 4)$. De acuerdo con la Regla A, también hay una fracción, $C/(2x-1)$, que corresponde a $2x - 1$. Así,

$$\frac{x^2 - x - 21}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} = \frac{Ax + B}{x^2 + 4} + \frac{C}{2x - 1}.$$

Paso 4 Multiplicando ambos miembros de la descomposición en fracciones parciales que se obtuvo en el Paso 3, por el mínimo común denominador, $(x^2 + 4)(2x - 1)$, se tiene

$$\begin{aligned} x^2 - x - 21 &= (Ax + B)(2x - 1) + C(x^2 + 4) \\ &= 2Ax^2 - Ax + 2Bx - B + Cx^2 + 4C \\ &= (2A + C)x^2 + (-A + 2B)x - B + 4C. \end{aligned}$$

Por tanto se llega al sistema

$$\begin{cases} 2A + C = 1 \\ -A + 2B = -1 \\ -B + 4C = -21 \end{cases}$$

La solución de este sistema es $A = 3$, $B = 1$ y $C = -5$. Así, la descomposición en fracciones parciales de lo obtenido en el Paso 3 es

$$\frac{x^2 - x - 21}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} = \frac{3x + 1}{x^2 + 4} + \frac{-5}{2x - 1},$$

y, por lo tanto, la descomposición de la expresión dada (véase el resultado del Paso 1) es

$$\frac{4x^3 - x^2 + 15x - 29}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} = 2 + \frac{3x + 1}{x^2 + 4} + \frac{-5}{2x - 1}.$$

EJEMPLO 4 ***Descomposición en fracciones parciales con factor cuadrático repetido***

Determinar la descomposición de

$$\frac{5x^3 - 3x^2 + 7x - 3}{(x^2 + 1)^2}.$$

en fracciones parciales.

SOLUCIÓN

Paso 1 El grado del numerador, 3, es menor que el del denominador, 4, y por consiguiente, no se necesita la división larga.

Paso 2 El denominador, $(x^2 + 1)^2$, ya está factorizado.

Paso 3 Se aplica la Regla B, con $n = 2$, a $(x^2 + 1)^2$, para obtener la descomposición en fracciones parciales.

$$\frac{5x^3 - 3x^2 + 7x - 3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2}.$$

Paso 4 Se multiplican por $(x^2 + 1)^2$ ambos miembros de la descomposición obtenida en el punto anterior; entonces

$$\begin{aligned} 5x^3 - 3x^2 + 7x - 3 &= (Ax + B)(x^2 + 1) + Cx + D \\ &= Ax^3 + Bx^2 + (A + C)x + (B + D). \end{aligned}$$

Al comparar los coeficientes de x^3 y x^2, se tiene $A = 5$ y $B = -3$. De acuerdo con los coeficientes de x se ve que $A + C = 7$. Entonces, $C = 7 - A = 7 - 5 = 2$. Finalmente, comparando los términos constantes, se obtiene $B + D = -3$, y $D = -3 - B = -3 - (-3) = 0$. Entonces la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{5x^3 - 3x^2 + 7x - 3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{5x - 3}{x^2 + 1} + \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

EJERCICIOS 9.4

Ejercicios 1 – 28: Descomponga en fracciones parciales las siguienes expresiones.

1 $\dfrac{8x-1}{(x-2)(x+3)}$

2 $\dfrac{x-29}{(x-4)(x+1)}$

3 $\dfrac{x+34}{x^2-4x-12}$

4 $\dfrac{5x-12}{x^2-4x}$

5 $\dfrac{4x^2-15x-1}{(x-1)(x+2)(x-3)}$

6 $\dfrac{x^2+19x+20}{x(x+2)(x-5)}$

7 $\dfrac{4x^2-5x-15}{x^3-4x^2-5x}$

8 $\dfrac{37-11x}{(x+1)(x^2-5x+6)}$

9 $\dfrac{2x+3}{(x-1)^2}$

10 $\dfrac{5x^2-4}{x^2(x+2)}$

11 $\dfrac{19x^2+50x-25}{3x^3-5x^2}$

12 $\dfrac{10-x}{x^2+10x+25}$

13 $\dfrac{x^2-6}{(x+2)^2(2x-1)}$

14 $\dfrac{2x^2+x}{(x-1)^2(x+1)^2}$

15 $\dfrac{3x^3+11x^2+16x+5}{x(x+1)^3}$

16 $\dfrac{4x^3+3x^2+5x-2}{x^3(x+2)}$

17 $\dfrac{x^2+x-6}{(x^2+1)(x-1)}$

18 $\dfrac{x^2-x-21}{(x^2+4)(2x-1)}$

19 $\dfrac{9x^2-3x+8}{x^3+2x}$

20 $\dfrac{2x^3+2x^2+4x-3}{x^4+x^2}$

21 $\dfrac{4x^3-x^2+4x+2}{(x^2+1)^2}$

22 $\dfrac{3x^3+13x-1}{(x^2+4)^2}$

23 $\dfrac{2x^4-2x^3+6x^2-5x+1}{x^3-x^2+x-1}$

24 $\dfrac{x^3}{x^3-3x^2+9x-27}$

25 $\dfrac{3x^2-16}{x^2-4x}$

26 $\dfrac{2x^2+7x}{x^2+6x+9}$

27 $\dfrac{4x^3+4x^2-4x+2}{2x^2-x-1}$

28 $\dfrac{x^5-5x^4+7x^3-x^2-4x+12}{x^3-3x^2}$

9.5 SISTEMAS DE DESIGUALDADES

En el Cap. 2 el estudio se limitó a desigualdades en una variable. A continuación se analizan desigualdades en dos variables x y y como las del ejemplo siguiente:

EJEMPLO ILUSTRATIVO

Desigualdades en x y y

❑ $y^2 < x + 4$ ❑ $3x - 4y > 12$ ❑ $x^2 + y^2 \leq 16$

Una **solución** de una desigualdad en x y y es un par ordenado, (a, b), que produce una aseveración cierta si se sustituyen x y y por a y b, respectivamente. **Resolver** una desigualdad en x y y quiere decir determinar todas las soluciones. La **gráfica** de esa desigualdad es el conjunto de todos los puntos (a, b) en el plano xy que corresponden a las soluciones. Dos desigualdades son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

Dada una desigualdad en x y y, si se remplaza el símbolo de desigualdad por el signo igual, se obtiene una ecuación cuya gráfica, por lo general, separa el plano xy en varias regiones. Sólo se analizan ecuaciones que tengan la siguiente propiedad: si R es una de esas regiones, y si un **punto de prueba** (p, q) en R aporta una solución de la desigualdad, entonces *todo* punto en R produce una solución. Luego, se pueden emplear los siguientes pasos para hacer el trazo de la gráfica de la desigualdad.

Procedimiento para trazar la gráfica de una desigualdad en x y y

1. Remplazar el signo de desigualdad por el signo igual, y trazar la gráfica de la ecuación resultante. Si el símbolo de desigualdad es $<$ o bien $>$, usar línea discontinua para indicar que ningún punto de la gráfica produce una solución. Si el símbolo es $\leq$ o bien $\geq$, use una línea continua para indicar que las soluciones de la ecuación también son soluciones de la desigualdad.
2. Si R es una región del plano xy determinada por la gráfica del paso 1, y si un punto de prueba, (p, q) en R produce una solución de la desigualdad, entonces todo punto en R produce una solución. Sombrear R para indicarlo. Si (p, q) no es solución, entonces *ningún* punto en R produce una solución, y se deja R sin sombrear.

FIGURA 9.9

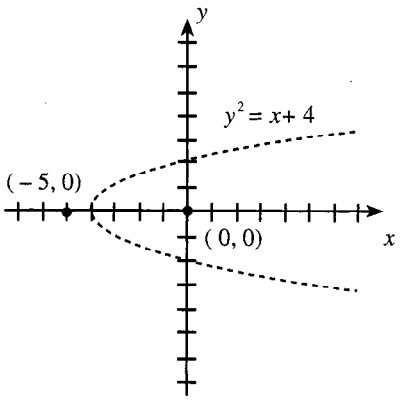
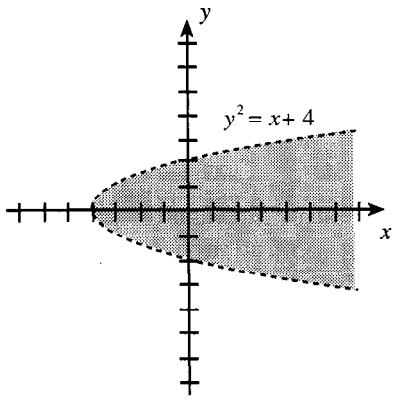


FIGURA 9.10



En el siguiente ejemplo se muestra el uso de este procedimiento.

EJEMPLO 1 *Trazo de la gráfica de una desigualdad*

Determinar las soluciones y trazar la gráfica de la desigualdad $y^2 < x + 4$.

SOLUCIÓN

Paso 1 Se remplaza $<$ con $=$, y se obtiene $y^2 = x + 4$. La gráfica de esta ecuación es una parábola, simétrica con respecto al eje x, que tiene -4 como abscisa en el origen, y también ± 2 como ordenadas en el origen. Como el símbolo de desigualdad es $<$, trazamos la parábola con línea discontinua, como se ve en la Fig. 9.9.

Paso 2 La gráfica del Paso 1 separa al plano xy en dos regiones, una a la *derecha* de la parábola, y la otra *a la izquierda*. Selecciónese, como puntos de prueba, (0, 0) y (–5, 0) en esas regiones (véase la Fig. 9.9), y sustitúyanse esas coordenadas en $y^2 < x + 4$ como sigue:

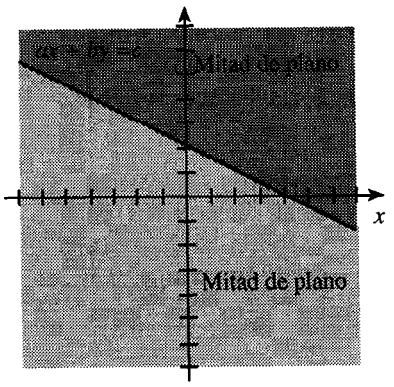
✓ ***Punto de prueba* (0, 0)** PM: $0^2 = 0$
SM: $0 + 4 = 4$

Como $0 < 4$ es un enunciado *cierto*, el punto (0, 0) *sí es* una solución de la desigualdad. Por lo tanto, *todos* los puntos a la derecha de la parábola producen soluciones, y se debe sombrear esta región, como en la Fig. 9.10.

✓ ***Punto de prueba* (– 5, 0)** PM: $0^2 = 0$
SM: $-5 + 4 = -1$

Como $0 < -1$ es *falso*, $(-5, 0)$ *no es* solución de la desigualdad. Entonces, *ningún* punto a la izquierda de la parábola es solución, y se deja sin sombrear esa región.

FIGURA 9.11



Una **desigualdad lineal** es aquélla que se puede escribir en una de las formas siguientes, en las cuales a, b y c son números reales:

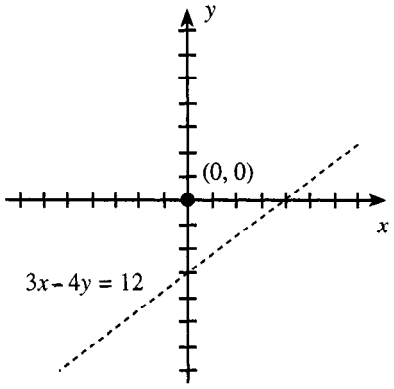
$$ax + by < c, \qquad ax + by > c, \qquad ax + by \leq c, \qquad ax + by \geq c$$

La recta $ax + by = c$ separa al plano xy en dos **semiplanos**, como se ve en la Fig. 9.11. Las soluciones de la desigualdad consisten en todos los puntos en *uno* de los semiplanos, que incluye la recta si los signos son $\leq$ o bien $\geq$, o no la incluyen si aparecen $<$ o bien $>$. *Para una desigualdad lineal, sólo se necesita un punto de prueba* (p, q) porque si éste es solución, entonces el semiplano donde está (p, q) contiene todas las soluciones, en tanto que si (p, q) *no es* solución, entonces *el otro* semiplano contiene las soluciones.

EJEMPLO 2 *Trazo de la gráfica de una desigualdad lineal*

Trazar la gráfica de la desigualdad $3x - 4y > 12$.

FIGURA 9.12



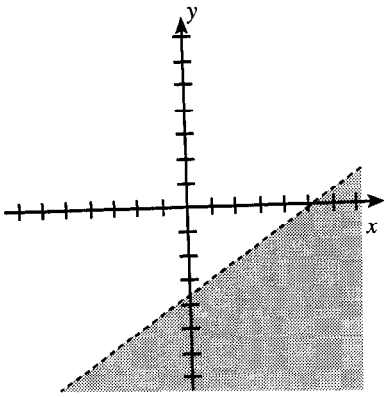
SOLUCIÓN Se remplaza $>$ por $=$, y se obtiene la recta $3x - 4y = 12$, que aparece discontinua en la Fig. 9.12. Esta línea separa al plano xy en dos semiplanos, uno *sobre* la recta y el otro *abajo* de ella. Conviene escoger el punto de prueba (0, 0) sobre la recta, y sustituir en $3x - 4y > 12$ como sigue:

✓ ***Punto de prueba*** **(0, 0)**

$$\text{PM: } 3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 = 0 - 0 = 0$$
$$\text{SM: } 12$$

Como $0 > 12$ es falso, (0, 0) no es una solución. Así, ningún punto sobre la recta es solución, y las soluciones de $3x - 4y > 12$ están expresadas por los puntos del semiplano *abajo* de la recta. La gráfica aparece en la Fig. 9.13.

FIGURA 9.13



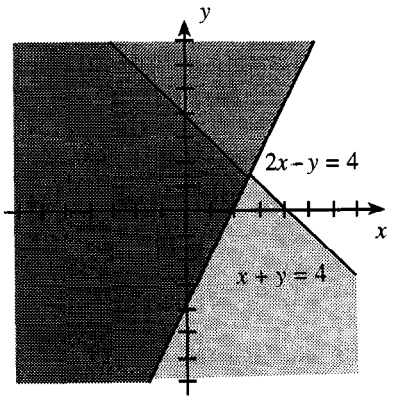
Como en las ecuaciones, a veces se trabaja con varias desigualdades en dos variables, simultáneamente; es decir, con un **sistema de desigualdades**. Las **soluciones** de un sistema de desigualdades son las comunes a todas las desigualdades del sistema. La **gráfica** de un sistema de desigualdades está formada por todos los puntos que corresponden a las soluciones. Los ejemplos siguientes muestran un método para resolver sistemas de desigualdades.

EJEMPLO 3 *Solución a un sistema de desigualdades lineales*

Trazar la gráfica del sistema

$$\begin{cases} x + y \leq 4 \\ 2x - y \leq 4 \end{cases}$$

FIGURA 9.14



SOLUCIÓN Se remplaza cada $\leq$ por $=$, y se grafican las rectas resultantes, como en la Fig. 9.14. Empleamos el punto de prueba (0, 0) y se observa que las soluciones del sistema corresponden a los puntos *abajo y en* la recta $x + y = 4$, y *arriba y en* la recta $2x - y = 4$. Al sombrear en forma distinta los semiplanos, como en la Fig. 9.14, se ve que la gráfica del sistema de los puntos que están en *ambas* regiones es la del sombreado más intenso de la figura.

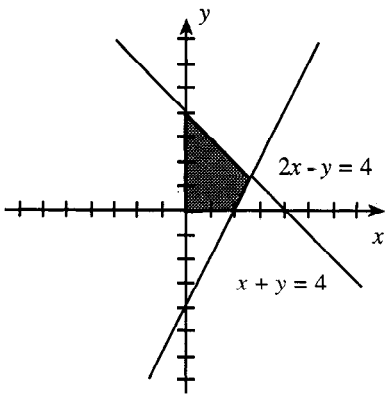
EJEMPLO 4 ***Resolver un sistema de desigualdades lineales***

Graficar el sistema

$$\begin{cases} x + y \leq 4 \\ 2x - y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Las dos primeras desigualdades son las mismas del ejemplo anterior, y por consiguiente, los puntos de la gráfica del sistema deben quedar dentro de la región más oscura de la Fig. 9.14. Además, la tercera y cuarta desigualdades del sistema indican que los puntos deben quedar en el primer cuadrante, o en sus límites. Con ello se obtiene la región que se ve en la Fig. 9.15.

FIGURA 9.15



EJEMPLO 5 ***Resolver un sistema de desigualdades que contiene valores absolutos***

Graficar el sistema

$$\begin{cases} |x| \leq 2 \\ |y| > 1 \end{cases}$$

SOLUCION Con las propiedades del valor absoluto, se ve que (x, y) es una solución del sistema si y sólo si son ciertas *las dos* condiciones siguientes:

(1) $-2 \leq x \leq 2$

(2) $y < -1$ o $y > 1$

Así, un punto, (x, y), de la gráfica del sistema debe estar entre las rectas verticales $x = \pm 2$ o en ellas también; arriba de la recta horizontal $y = 1$ o abajo de la recta $y = -1$. La gráfica aparece en la Fig. 9.16.

FIGURA 9.16

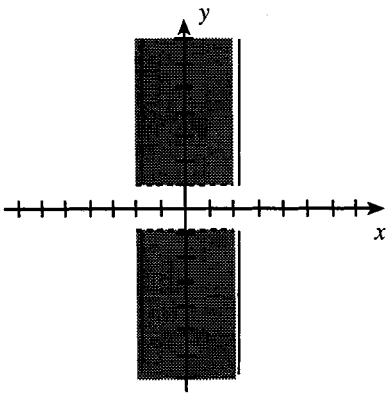
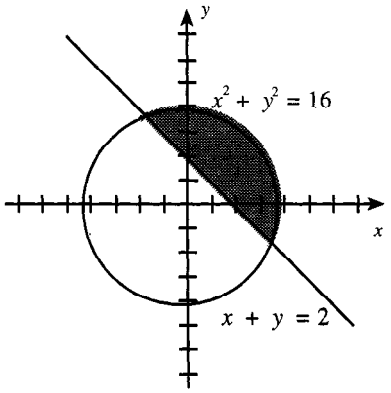


FIGURA 9.17



EJEMPLO 6 ***Resolver un sistema de desigualdades***

Graficar el sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16 \\ x + y \geq 2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN En la Fig. 9.17 se muestran las gráficas de $x^2 + y^2 = 16$, y $x + y = 2$; son la circunferencia y la recta, respectivamente. Si se usa (0, 0) como punto de prueba, se ve que los puntos que dan soluciones al sistema deben quedar dentro de, o en, la circunferencia, y también arriba de, o en, la recta. Esto da como resultado la región sombreada de la Fig. 9.17.

EJEMPLO 7 ***Aplicación de un sistema de desigualdades***

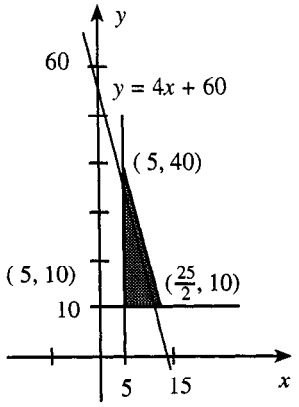
El *manager* de un equipo de béisbol desea comprar bates y bolas, que cuestan \$12 y \$3, respectivamente. Se necesitan, cuando menos, 5 bates y 10 bolas, y el costo total no debe ser mayor que \$180. Establecer un sistema de desigualdades que represente todas las posibilidades. Graficar el sistema. (Los precios son en dólares).

SOLUCIÓN Se empieza por definir que x es el número de bates y y el número de bolas. Como el costo de un bate es \$12, y el de una bola es \$3, se tiene que

$12x$ = costo de x bates

$3y$ = costo de y bolas.

FIGURA 9.18



Como el costo total no debe ser mayor que \$180, se debe cumplir

$$12x + 3y \leq 180$$

que es lo mismo que $y \leq -4x + 60$.

Como se necesita un mínimo de 5 bates y 10 bolas, también se tiene que

$x \geq 5$ y $y \geq 10$.

En la Fig. 9.18 está la gráfica de $y \leq -4x + 60$, que es el semiplano que queda *abajo* de, o en, la recta $y = -4x + 60$.

La gráfica de $x \geq 5$ es la región a la derecha de, o en, la recta vertical $x = 5$, y la gráfica de $y \geq 10$ es la región arriba de, o sobre, la recta horizontal $y = 10$.

La gráfica del sistema, es decir, los puntos comunes a los tres semiplanos, es la región triangular sombreada de la Fig. 9.18.

EJERCICIOS 9.5

Ejercicios 1 – 10: Trace la gráfica de la desigualdad.

1 $3x - 2y < 6$

2 $4x + 3y < 12$

3 $2x + 3y \geq 2y + 1$

4 $2x - y > 3$

5 $y + 2 < x^2$

6 $y^2 - x \leq 0$

7 $x^2 + 1 \leq y$

8 $y - x^3 < 1$

9 $yx^2 \geq 1$

10 $x^2 + 4 \geq y$

Ejercicios 11 – 26: Trace la gráfica del sistema de desigualdades

11 $\begin{cases} 3x + y < 3 \\ 4 - y < 2x \end{cases}$

12 $\begin{cases} y + 2 < 2x \\ y - x > 4 \end{cases}$

13 $\begin{cases} y - x < 0 \\ 2x + 5y < 10 \end{cases}$

14 $\begin{cases} 2y - x \le 4 \\ 3y + 2x < 6 \end{cases}$

15 $\begin{cases} 3x + y \le 6 \\ y - 2x \ge 1 \\ x \ge -2 \\ y \le 4 \end{cases}$

16 $\begin{cases} 3x - 4y \ge 12 \\ x - 2y \le 2 \\ x \ge 9 \\ y \le 5 \end{cases}$

17 $\begin{cases} x + 2y \le 8 \\ 0 \le x \le 4 \\ 0 \le y \le 3 \end{cases}$

18 $\begin{cases} 2x + 3y \ge 6 \\ 0 \le x \le 5 \\ 0 \le y \le 4 \end{cases}$

19 $\begin{cases} |x| \ge 2 \\ |y| < 3 \end{cases}$

20 $\begin{cases} |x| \ge 4 \\ |y| \ge 3 \end{cases}$

21 $\begin{cases} |x + 2| \le 1 \\ |y - 3| < 5 \end{cases}$

22 $\begin{cases} |x - 2| \le 5 \\ |y - 4| > 2 \end{cases}$

23 $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4 \\ x + y \ge 1 \end{cases}$

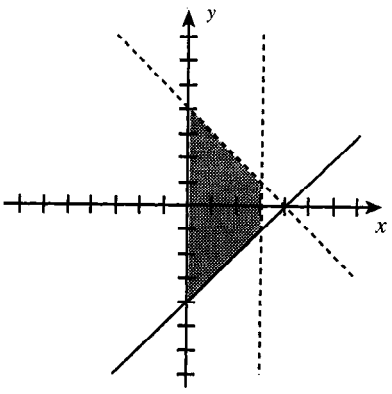
24 $\begin{cases} x^2 + y^2 > 1 \\ x^2 + y^2 < 4 \end{cases}$

25 $\begin{cases} x^2 \le 1 - y \\ x \ge 1 + y \end{cases}$

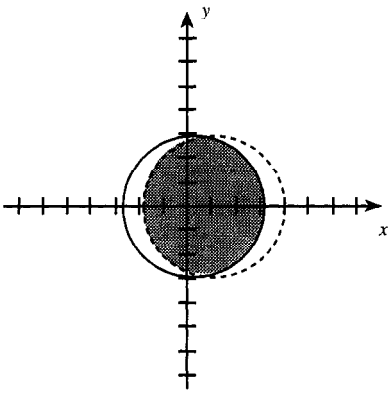
26 $\begin{cases} x - y^2 < 0 \\ x + y^2 > 0 \end{cases}$

Ejercicios 27 – 34: Deduzca un sistema de desigualdades cuya gráfica se muestra.

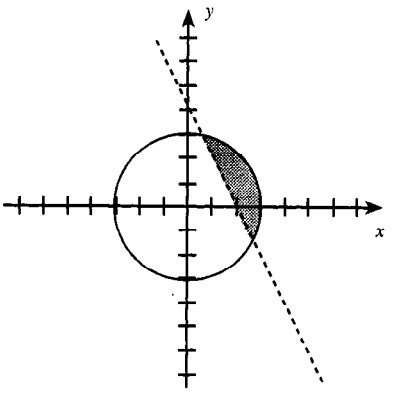
27



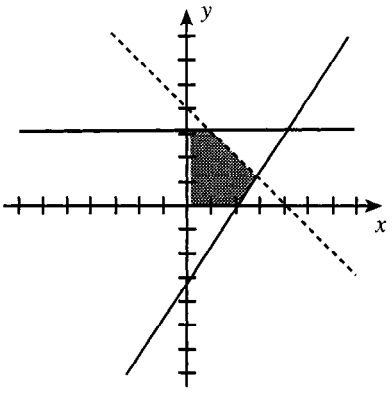
28



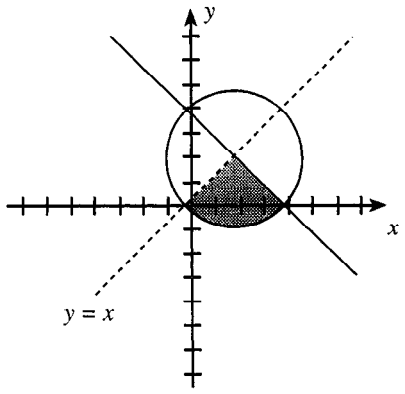
29



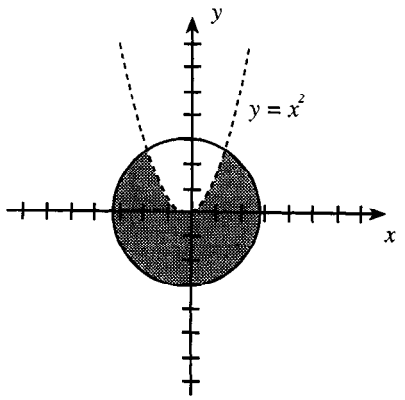
30



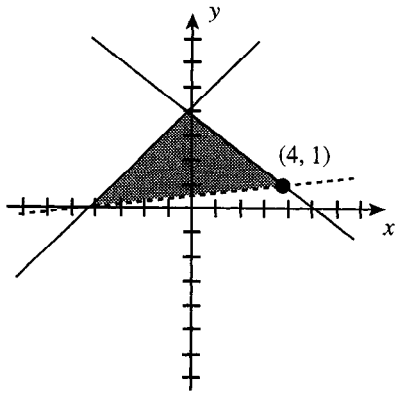
31



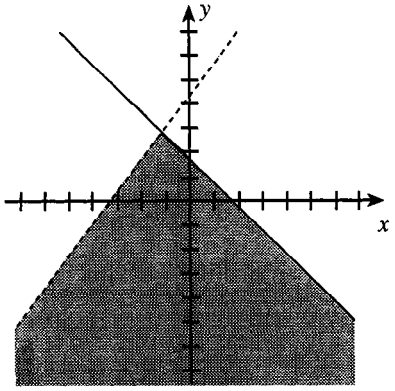
32



33



34



35 *Niveles de inventario* Un almacén vende dos marcas de televisores. Las demandas de los clientes indican que es necesario tener cuando menos el doble de televisores de la marca A que los de la marca B. También es necesario tener a la mano un mínimo de 10 televisores de la marca B. Sólo hay lugar en el almacén para no más de 100 televisores. Determine y grafique un sistema de desigualdades que represente todas las posibilidades de almacenamiento de las dos marcas.

36 *Precios de boletos* Un auditorio tiene 600 lugares. Para un evento próximo, las entradas costarán $8.00 para ciertos lugares, y $5.00 para los demás..Un mínimo de 225 lugares deben tener el precio de $5.00, y se desea un total de ventas de $3 000. Determine y grafique un sistema de desigualdades que represente todas las posibilidades de cobro con los dos tipos de boletos.

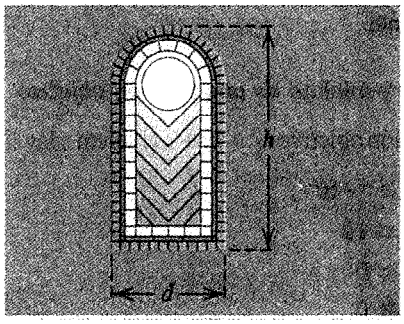
37 *Estrategia de inversión* Una mujer desea invertir $15 000, de los cuales un mínimo de $2 000 estén en valores de alto riesgo y alto rendimiento, con un mínimo de tres veces esa cantidad en valores de bajo riesgo y bajo rendimiento. Deduzca y grafique un sistema de desigualdades que represente todas las posibilidades de colocación del dinero en las dos inversiones.

38 *Niveles de inventario* El administrador de una librería escolar almacena dos tipos de cuadernos de notas. Uno tiene un precio al mayoreo de 55¢, y el otro, de 85¢. La cantidad máxima que va a gastar es $600, y desea tener un inventario mínimo de 300 de la calidad de 85¢ y 400 de la de 55¢. Determine y grafique un sistema de desigualdades que represente todas las posibilidades de almacenar los dos tipos de cuadernos.

39 *Dimensiones de una lata* Se desea fabricar una lata de aerosol en forma de cilindro circular recto, con un cono

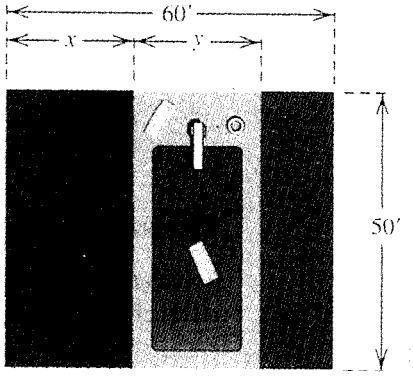
pequeño en la parte superior. La altura total de la lata no debe ser mayor que 9 pulg, y el cilindro debe contener un mínimo del 75% del volumen total. Además, la altura de la tapa cónica debe ser, como mínimo, 1 pulg. Determine y grafique un sistema de desigualdades que represente todas las posibilidades de la relación entre la altura y del cilindro, y la altura x del cono.

40 ***Dimensiones de una ventana*** Se desea poner una ventana con emplomado, en forma de un rectángulo rematado por un semicírculo (véase la figura). La altura total h de la ventana no puede ser mayor que 6 pies, y el área de la zona rectangular debe ser, como mínimo, el doble del área del semicírculo. Además, el diámetro d del semicírculo debe ser 2 pies como mínimo. Determine y grafique un sistema de desigualdades que represente todas las posibilidades para la base y altura de la parte rectangular.



41 ***Ubicación de una planta de energía eléctrica*** Se desea construir una planta nuclear de generación de energía para satisfacer las necesidades de las ciudades A y B. La ciudad B queda a 100 mi al este de A. Las autoridades han prometido que la planta estará a una distancia mínima de 60 mi de cualquier ciudad. Sin embargo, no es posible ubicar a la planta al sur de ellas, por ser el terreno áspero; la planta debe quedar a menos de 100 mi tanto de A como de B. Suponiendo que A está en el origen, deduzca y grafique un sistema de desigualdades que represente todos los lugares posibles de la planta.

42 ***Asignación de espacio*** Un hombre tiene un terreno de 50 pies de ancho por 60 de fondo. Desea construir en una parte una piscina y en otra un patio, como se ve en la figura, con $y \geq 10$. Puede gastar, cuando mucho, \$10 500 en las modificaciones. El área del patio debe ser cuando menos igual a la de la piscina. Esta última cuesta \$5 por pie cuadrado, y el patio, \$3 por pie cuadrado. Deduzca y grafique un sistema de desigualdades que represente todas las posibilidades de anchura del patio y de la alberca.



C **Ejercicios 43 y 44: Grafique la desigualdad.**

43 $64y^3 - x^3 \leq e^{1-2x}$ **44** $e^{5y} - e^{-x} \geq x^4$

C **Ejercicios 45 – 48: Grafique el sistema de desigualdades.**

45 $\begin{cases} 5^{1-y} \geq x^4 + x^2 + 1 \\ x + 3y \geq x^{5/3} \end{cases}$ **46** $\begin{cases} x^4 + y^5 < 2^x \\ \ln(x^2 + 1) < y^3 \end{cases}$

47 $\begin{cases} x^4 - 2x < 3y \\ x + 2y < x^3 - 5 \end{cases}$ **48** $\begin{cases} e^x + x^2 \leq 2^{x+2y} \\ 2^{x+2y} \leq x^3 2^y \\ x > 0 \end{cases}$

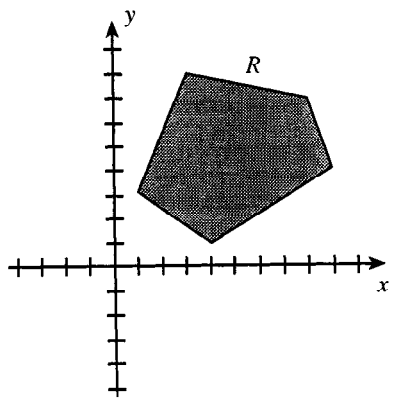
9.6 PROGRAMACIÓN LINEAL

Si un sistema de desigualdades sólo tiene expresiones lineales de la forma

$$ax + by \leq c \qquad \text{o bien,} \qquad ax + by \geq c,$$

donde a, b y c son números reales, entonces la gráfica del sistema puede ser una región R del plano xy, acotada por un polígono, posiblemente del tipo que se ve en la Fig. 9.19 de la siguiente página (para un ejemplo específico, véase el Ejemplo 4 y la Fig. 9.15 de la Secc. 9.5).

FIGURA 9.19



En el caso de la **programación lineal,** siempre se considera junto con expresiones de la forma

$$C = Ax + By + K,$$

donde A, B y K son números reales y (x, y) es un punto en R, es decir, una solución del sistema. Como para cada (x, y) se tiene un valor específico de C, a esta C se le llama *función de dos variables x, y*. En programación lineal, C se llama **función objetivo,** y las desigualdades del sistema se llaman **restricciones** de C. Las soluciones del sistema, es decir, los pares (x, y) que corresponden a los puntos en R, se llaman **soluciones factibles** del problema.

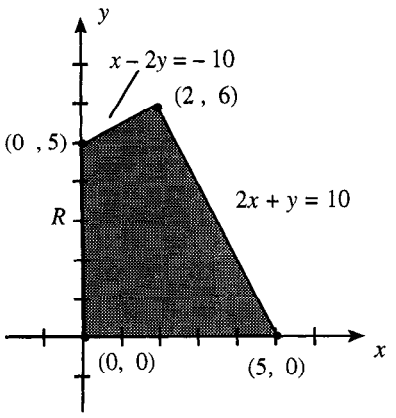
En aplicaciones características de los negocios, el valor de C puede ser el costo, ganancia, pérdida o un recurso físico, y la meta es determinar un punto específico (x, y) en R, en el cual C asuma su valor máximo o mínimo. Los métodos de programación lineal simplifican mucho la tarea de determinar ese punto. Específicamente, se puede demostrar que *los valores máximo y mínimo de C se encuentran en un vértice de R.* Este hecho se aplica en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 1 ***Cálculo de los valores máximo y mínimo de una función objetivo***

Calcular los valores máximo y mínimo de la función objetivo $C = 7x + 3y$, sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x - 2y \geq -10 \\ 2x + y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

FIGURA 9.20



SOLUCIÓN La gráfica del sistema de desigualdades determinadas por las restricciones es la región R, acotada por el cuadrilátero cuyo esquema aparece en la Fig. 9.20. Según lo que se acaba de decir, los valores máximo y mínimo de C deben estar en uno de los vértices de R. En la tabla siguiente se presentan los valores en los vértices.

Vértice	Valor de $C = 7x + 3y$
(0, 0)	7(0) + 3(0) = 0
(0, 5)	7(0) + 3(5) = 15
(5, 0)	7(5) + 3(0) = 35
(2, 6)	7(2) + 3(6) = 32

Por lo tanto, el valor mínimo $C = 0$, se obtiene si $x = 0$ y $y = 0$. El valor máximo, $C = 35$, se obtiene si $x = 5$ y $y = 0$.

En el ejemplo anterior, se dice que el valor máximo de C *en* R está en el vértice (5, 0). Para comprobarlo, se despeja y de $C = 7x + 3y$,

$$y = -\frac{7}{3}x + \frac{C}{2}.$$

Para cada C, la gráfica de esta ecuación es una recta cuya pendiente es $-\frac{7}{3}$, y su ordenada en el origen es $C/2$, como se ve en la Fig. 9.21. Para encontrar el valor máximo de C, tan sólo se determina cuál de esas rectas que cortan la región tiene máxima ordenada en el origen, $C/2$. En la Fig. 9.21 se ve que la recta requerida pasa por (5, 0). Igualmente, para obtener el valor mínimo de C, se determina la recta $y = (-7/3)x + (C/2)$ que corta la región que tiene la *mínima* ordenada en el origen. Es la que pasa por (0, 0).

Se llama **problema de programación lineal** a un planteamiento que se puede expresar en la forma del Ejemplo 1. Para resolver este tipo de problemas se aplican las siguientes reglas.

Reglas para resolver un problema de programación lineal

1. Hacer un esquema de la región R determinada por el sistema de restricciones.
2. Localizar los vértices de R.
3. Calcular el valor de la función objetivo C en cada vértice de R.
4. Determinar los valores máximos o mínimos de C empleando los vértices de R de la Regla 3, que produzcan los valores máximo o mínimo, respectivamente.

FIGURA 9.21

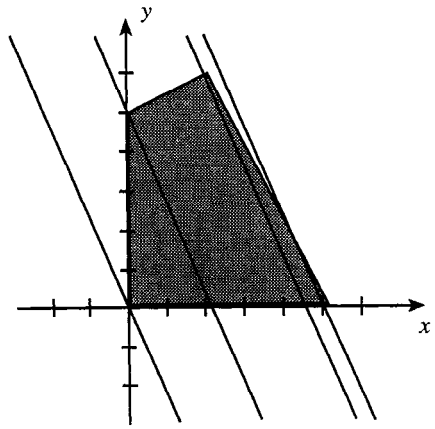
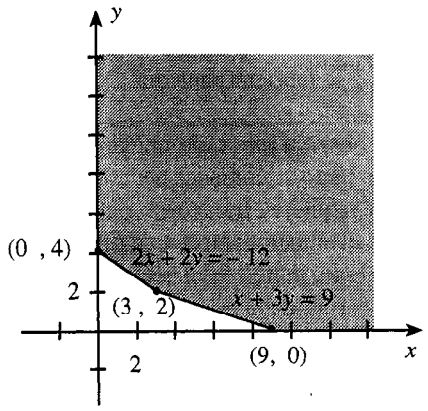


FIGURA 9.22



En el próximo ejemplo se estudia un problema de programación lineal en el cual el valor mínimo de la función objetivo se encuentra en más de un punto.

EJEMPLO 2 *Resolver un problema de programación lineal*

Calcular el valor mínimo de la función objetivo $C = 2x + 6y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 12 \\ x + 3y \geq 9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Se siguen las reglas anteriores.

Regla 1 En la Fig. 9.22 se presenta un esquema de la gráfica del sistema de desigualdades determinado por las restricciones. Es la región R, no acotada, que se muestra sombreada.

Regla 2 Los vértices de R son (0, 4), (3, 2) y (9, 0), como se ve en la Fig. 9.22.

Regla 3 El valor de C en cada vértice de R aparece en la tabla siguiente:

Vértice	Valor de $C = 2x + 6y$
(0,4)	2(0) + 6(4) = 24
(3,2)	2(3) + 6(2) = 18
(9,0)	2(9) + 6(0) = 18

(continúa)

La tabla obtenida en el paso 3 muestra que el valor mínimo de C, que es 18, se encuentra en *dos* vértices, (3, 2) y (9, 0). Además, si (x, y) es cualquier punto en el segmento de recta que une a esos puntos, entonces es una solución de la ecuación $x + 3y = 9$ y, por consiguiente,

$$C = 2x + 6y = 2(x + 3y) = 2(9) = 18.$$

Entonces, el valor mínimo $C = 18$ se encuentra *en todo* punto de este segmento de recta.

Los dos ejemplos que siguen son aplicaciones de la programación lineal. Para estos problemas es necesario usar la información y datos a la mano para formular el sistema de restricciones y la función objetivo. Una vez logrado lo anterior, se aplican las reglas como en la solución del Ejemplo 2.

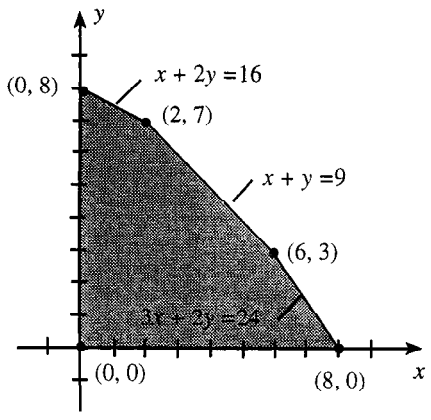
EJEMPLO 3 *Maximizar las utilidades*

Una empresa fabrica dos productos X y Y. Para cada uno es necesario emplear tres máquinas, A, B y C. Para fabricar una unidad de producto X, se debe usar 3 horas la máquina A, 1 hora la máquina B y 1 hora la C. Para fabricar una unidad del producto Y se necesitan 2 horas en A, 2 horas en B y 1 hora en C. La utilidad del producto X es \$500 (dólares) por unidad, y del producto Y es \$350 por unidad. La máquina A está disponible 24 horas diarias; sin embargo, B se puede usar sólo 16 horas, y C, 9 horas. Suponiendo que las máquinas estén disponibles cuando sea necesario, sujetas a las restricciones mencionadas del tiempo total de trabajo, calcule el número de unidades de cada producto que se deben fabricar cada día para maximizar las utilidades.

SOLUCIÓN En la tabla siguiente se resumen los datos que aparecen en el enunciado del problema.

Máquina	Horas necesarias para fabricar una unidad de X	Horas necesarias para fabricar una unidad de Y	Horas disponibles
A	3	2	24
B	1	2	16
C	1	1	9

FIGURA 9.23



Se definen las siguientes variables:

x = número de unidades de X que se fabrican cada día

y = número de unidades de Y que se fabrican cada día

Viendo el primer renglón de la tabla, se observa que cada unidad de X necesita 3 horas en la máquina A, y por lo tanto, x unidades necesitan $3x$ horas. Igualmente, ya que cada unidad de Y requiere 2 horas en A, entonces y unidades requieren $2y$ horas. Por lo tanto, el número total de horas diarias que se debe usar la máquina A es $3x + 2y$. Esto, junto con el hecho de que se puede usar A cuando mucho 24 horas diarias, da la primera restricción en el siguiente sistema de desigualdades: $3x + 2y \leq 24$. La segunda y tercera restricciones se obtienen mediante el mismo modo de deducción aplicado a los renglones 2 y 3 de la tabla. Las últimas dos restricciones, $x \geq 0$ y $y \geq 0$, se deben a que x y y no pueden ser negativas.

$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 24 \\ x + 2y \leq 16 \\ x + y \leq 9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

En la Fig. 9.23 se presenta la gráfica de este sistema, que es la región R.

Como la producción de cada unidad del producto X proporciona una ganancia de \$500, y cada unidad del producto Y de \$350, la utilidad P que se obtiene produciendo x unidades de X y y unidades de Y es

$$P = 500x + 350y$$

Esta es la función objetivo del problema. El valor máximo de P debe encontrarse en uno de los vértices de R de la Fig. 9.23. Los valores de P en esos vértices aparecen en la tabla siguiente.

Vértice	Valor de $P = 500x + 350y$
(0, 0)	500(0) + 350(0) = 0
(0, 8)	500(0) + 350(8) = 2800
(8, 0)	500(8) + 350(0) = 4000
(2, 7)	500(2) + 350(7) = 3450
(6, 3)	500(6) + 350(3) = 4050

En la tabla se ve que la utilidad máxima de \$4 050 se obtiene con una producción diaria de 6 unidades del producto X y 3 del producto Y.

El Ejemplo 3 muestra la maximización de una utilidad. El ejemplo siguiente muestra cómo se puede aplicar la programación lineal para minimizar el costo en un caso determinado.

EJEMPLO 4 *Minimización de un costo*

Un distribuidor de aparatos para tocar discos compactos tiene dos almacenes W_1 y W_2. Hay 80 unidades almacenadas en W_1, y 70 en W_2. Dos clientes, A y B, piden 35 unidades y 60 unidades, respectivamente. El costo de embarque de cada bodega a A y B aparece en la tabla siguiente. ¿Cómo se deben surtir los pedidos para minimizar el costo total de embarque?

Almacén	Cliente	Costo unitario de embarque
W_1	A	\$ 8
W_1	B	12
W_2	A	10
W_2	B	13

SOLUCIÓN Se empieza por definir las variables como sigue:

x = número de unidades que se mandan a A desde W_1

y = número de unidades que se mandan a B desde W_1

Como A pidió 35 unidades, y B, 60, se debe cumplir

$35 - x$ = número de unidades que se mandan a A desde W_2

$60 - y$ = número de unidades que se mandan a B desde W_2

El objetivo es calcular los valores de x y y que hagan mínimo el costo total de embarque.

El número de unidades que se mandan desde W_1 no puede ser mayor de 80, y el de unidades embarcadas en W_2 no puede ser mayor de 70. Expresando lo anterior en forma de desigualdades se tiene

$$\begin{cases} x + y \leq 80 \\ (35 - x) + (60 - y) \leq 70 \end{cases}$$

Al simplificar se tiene las dos primeras restricciones del sistema siguiente. Las últimas dos se deben a que los valores máximos de x y y son 35 y 60, respectivamente.

$$\begin{cases} x + y \leq 80 \\ x + y \geq 25 \\ 0 \leq x \leq 35 \\ 0 \leq y \leq 60 \end{cases}$$

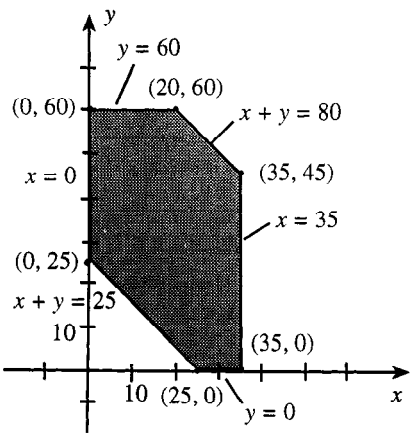
En la Fig. 9.24 está la gráfica de este sistema, que es la región R.

Sea C el costo total, en dólares, de embarque de los aparatos a los clientes A y B. En la tabla de costos de embarque se ve que se cumple lo siguiente:

costo de embarcar 35 unidades a A = $8x + 10(35 - x)$

costo de embarcar 60 unidades a B = $12y + 13(60 - y)$

FIGURA 9.24



Así que el costo total es

$$C = 8x + 10(35 - x) + 12y + 13(60 - y).$$

Simplificando se llega a la siguiente función objetivo:

$$C = 1130 - 2x - y$$

Para calcular el valor mínimo de C en R, es necesario verificar tan sólo los vértices de la Fig. 9.24, lo cual se hace en la tabla siguiente.

Vértice	Valor de $C = 1130 - 2x - y$
(0, 25)	1130 – 2(0) – 25 = 1105
(0, 60)	1130 – 2(0) – 60 = 1070
(20, 60)	1130 – 2(20) – 60 = 1030
(35, 45)	1130 – 2(35) – 45 = 1015
(35, 0)	1130 – 2(35) – 0 = 1060
(25, 0)	1130 – 2(25) – 0 = 1080

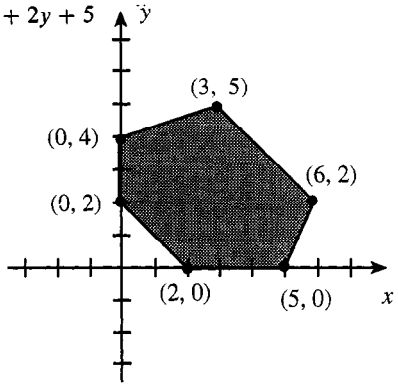
Se observa en esta tabla que se obtiene el costo mínimo de embarque, \$1 050, si $x = 35$ y $y = 45$. Esto quiere decir que el distribuidor debe enviar de W_1 todos los tocadiscos a A, y no debe embarcarle ninguno de W_2. Además, debe mandar 45 unidades a B desde W_1 y 15 desde W_2. (Nótese que se tendrá el costo *máximo* de embarque si $x = 0$ y $y = 25$; es decir, si las 35 unidades de A se mandan desde W_2, y si B recibe 25 unidades de W_1 y 35 de W_2).

Los ejemplos presentados son problemas elementales de programación lineal con dos variables, que se pueden resolver con métodos básicos. Los problemas que ocurren en la práctica, mucho más complicados y con muchas variables, se pueden resolver mediante técnicas matriciales adaptadas para que la computadora ayude a resolverlos.

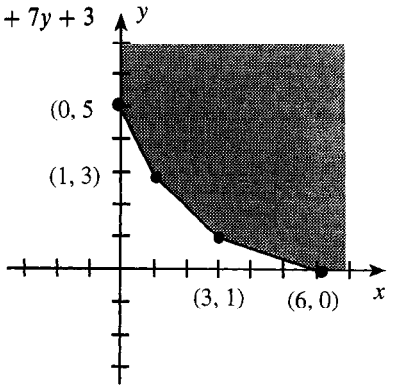
EJERCICIOS 9.6

Ejercicios 1 y 2: Calcule los valores máximo y mínimo de la función objetiva C en la región de la figura.

1 $C = 3x + 2y + 5$



2 $C = 2x + 7y + 3$



Ejercicios 3 y 4: Trace la región R determinada por las restricciones dadas, e identifique sus vértices. Calcule el valor máximo de C en R.

3 $C = 3x + y$; $x \geq 0, y \geq 0,$
$3x - 4y \geq -12,$ $3x + 2y \leq 24,$ $3x - y \leq 15$

4 $C = 4x - 2y$;
$x - 2y \geq -8,$ $7x - 2y \leq 28,$ $x + y \geq 4$

Ejercicios 5 y 6: Haga un esquema de la región R determinada por las restricciones dadas, e identifique sus vértices. Calcule el valor máximo de C en R.

5 $C = 3x + 6y$; $x \geq 0, y \geq 0,$
$2x + 3y \geq 12,$ $2x + 5y \geq 16$

6 $C = 6x + y$; $y \geq 0,$
$3x + y \geq 3,$ $x + 5y \leq 15,$ $2x + y \leq 12$

Ejercicios 7 y 8: Haga un esquema de la región R, determinada por las restricciones dadas, e identifique sus vértices. Represente el conjunto de puntos para los cuales C es máxima en R.

7 $C = 2x + 4y$; $x \geq 0, y \geq 0,$
$x - 2y \geq -8,$ $\frac{1}{2}x + y \leq 6,$ $3x + 2y \leq 24$

8 $C = 6x + 3y$; $x \geq 2, y \geq 1,$
$2x + 3y \leq 19,$ $x + 0.5y \leq 6.5$

9 ***Programación de producción*** Un fabricante de raquetas de tenis obtiene una utilidad de \$15 en cada raqueta grande y de \$8 en cada raqueta normal. Para cumplir con la demanda, la producción diaria de raquetas normales debe estar entre 30 y 80, y la de raquetas grandes, entre 10 y 30. Para mantener una alta calidad, el número de

raquetas totales no debe ser mayor de 80 diarias. ¿Cuántas raquetas de cada tipo debe producir diariamente para maximizar su utilidad?

10 ***Programación de producción*** Un fabricante de radios de banda civil obtiene una utilidad de $25 en cada modelo de lujo, y de $30 en cada modelo normal. La empresa desea producir un mínimo de modelos de lujo y un mínimo de 100 normales, por día. Para mantener una calidad alta, la producción diaria no debe ser mayor que 200 radios. ¿Cuántos radios de cada tipo debe producir diariamente para maximizar su utilidad?

11 ***Minimización de costos*** Dos sustancias S y T contienen cada una dos tipos de ingredientes I y G. Una libra de S contiene 2 onzas de I y 4 de G. Una libra de T contiene 2 onzas de I y 6 de G. (Una libra tiene 16 onzas). Un fabricante desea combinar cantidades de las dos sustancias para obtener una mezcla que contenga un mínimo de 9 onzas de I y 20 de G. Si el costo de S es $3.00 por libra, y el de T es $4.00 por libra, ¿qué tanto de cada sustancia debe usar para mantener el costo al mínimo?

12 ***Maximización de la utilidad bruta*** Una empresa papelera fabrica dos tipos de cuadernos: uno de lujo, con hojas divisoras, que vende a $1.25, y uno normal, que vende a $0.90. Los costos de producción son $1.00 por cada cuaderno de lujo y $0.75 por cuaderno normal. La empresa tiene instalaciones para fabricar entre 2 000 cuadernos y 3 000 cuadernos de lujo y entre 3 000 y 6 000 normales, pero en conjunto, un máximo de 7 000. ¿Cuántos cuadernos de cada tipo debe fabricar para maximizar la diferencia entre los precios de venta y el costo de producción?

13 ***Minimización de los costos de embarque*** Refiérase al Ejemplo 4 de esta sección. Si los costos de embarque son $ 12 por unidad desde W_1 a A, $10 por unidad de W_2 a A, $16 por unidad de W_1 a B, y $12 por unidad de W_2 a B, calcule cómo se debe surtir el pedido para minimizar el costo de embarque.

14 ***Minimización de costos*** Una empresa compra lotes mezclados de café en grano, y los clasifica en las categorías selecta, regular y de desecho. La empresa necesita al menos 280 ton de selecto, y 200, de regular. Puede comprar café sin seleccionar con dos proveedores, toda la cantidad que quiera. Las muestras de los dos proveedores muestran tener los siguientes porcentajes de grano:

Proveedor	Selecto	Regular	Desecho
A	20%	50%	30%
B	40%	20%	40%

Si el proveedor A cobra $125 por tonelada, y el B, $200 por tonelada, ¿cuánto debe comprar la empresa a cada uno para llenar sus necesidades a un costo mínimo?

15 ***Planeación de la superficie de cultivo*** Un agricultor, que produce forraje para ganado, tiene disponibles 90 acres para sembrar alfalfa y maíz. El costo de la semilla, por acre, es $4 con alfalfa y $6 con maíz. El costo total de la mano de obra es $20 por acre con alfalfa y $ 10 con maíz. El ingreso esperado es $110 por acre con alfalfa, y $150 por acre con maíz. Si el agricultor no desea gastar más de $480 en semillas y $1 400 en mano de obra, ¿cuántos acres de cada cultivo debe sembrar para obtener la utilidad máxima?

16 ***Programación de maquinaria*** Una empresa pequeña fabrica libreros y escritorios para microcomputadoras. En cada producto necesita usar una sierra y un canteador motorizados. Para fabricar cada librero, debe usar la sierra durante 1/2 hora y el canteador durante 1 hora. Para un escritorio se necesita emplear cada máquina durante 2 horas. Las utilidades son $20 por librero y $50 por escritorio. Si la sierra se puede usar 8 horas diarias y el canteador 12 horas, ¿cuántos libreros y escritorios debe fabricar diariamente para maximizar su utilidad?

17 ***Minimización del costo de una formulación*** Tres sustancias, X, Y y Z, contienen cada una cuatro ingredientes, A, B, C y D. En la tabla siguiente se muestra el porcentaje de cada ingrediente y el costo, en centavos (de dólar) por onza, de cada sustancia.

Sustancia	Ingredientes				Costo por onza
	A	B	C	D	
X	20%	10%	25%	45%	25¢
Y	20%	40%	15%	25%	35¢
Z	10%	20%	25%	45%	50¢

Si el costo debe ser mínimo, ¿cuántas onzas de cada sustancia debe combinar para obtener una mezcla de 20 onzas que contengan al menos 14% de A, 16% de B y 20% de C? ¿Qué combinación haría máximo el costo?

18 ***Maximización de la utilidad*** Un hombre desea poner un local en una feria que dura un día, en el cual venderá bolsas de cacahuates y bolsas de dulces. Dispone de $400 para comprar sus materiales, que cuestan 40¢ por bolsa de cacahuates y 80¢ por bolsa de dulce. Desea vender los cacahuates a $1.00 y los dulces a $1.60 por bolsa. Su local puede contener hasta 500 bolsas de cacahuates y 400 de dulce. De acuerdo con su experiencia, sabe que no venderá más de 700 bolsas. Calcule el número de bolsas de cada producto que debe tener

disponibles para maximizar las utilidades. ¿Cuál es la utilidad máxima?

19 ***Aumento de capacidad de pasajeros*** Un pueblo desea comprar autobuses y minibuses usados para su sistema de transporte público. No puede gastar más de $100 000 en vehículos, y $500 mensuales, como máximo, en mantenimiento. Los minibuses cuestan $10 000 cada uno, y necesitan $100 mensuales en mantenimiento. Las estimaciones correspondientes de costo por autobús son $20 000 y $75 mensual. Si cada minibús puede llevar 15 pasajeros, y cada autobús 25, calcule el número de minibuses y autobuses que se deben comprar para maximizar la capacidad de pasajeros del sistema.

20 ***Minimización del costo de combustible*** Refiérase al Ejercicio 19; el costo mensual de combustible (basado en 5 000 millas de servicio) es $550 por cada minibús, y $850 por cada autobús. Calcule el número de minibuses y autobuses que se deben comprar para minimizar los costos mensuales de combustible, si la capacidad mínima de pasajeros del sistema debe ser 75.

21 ***Abastecimiento de una granja piscícola*** Un piscicultor debe comprar como máximo 5 000 truchas y robalos al proveedor, para alimentarlos con dieta especial durante 1 año. El costo de alimento para peces es $0.50 para las truchas, y $0.75 para los robalos, y el costo total no debe ser mayor de $3 000. Al final de un año, una trucha pesa 3 libras y un robalo 4 libras. ¿Cuántos peces de cada tipo debe abastecer en el estanque para maximizar las libras totales de peces al final del año?

22 ***Planeación dietética*** El dietista en un hospital desea preparar un platillo de verduras, de maíz y calabaza, que tenga un mínimo de 3 g de proteína y no cueste más de 36¢ por ración. Una onza de maíz con crema proporciona 0.5 g de proteína y cuesta 4¢. Una onza de calabaza proporciona 0.25 g de proteína y cuesta 3¢. En cuanto a sabor, debe haber un mínimo de 2 onzas de maíz y una cantidad mínima de calabaza igual a la de maíz. Es importante mantener tan bajo como sea posible el número de onzas por ración. Determine la combinación de maíz y calabaza que minimice la cantidad de ingredientes empleados por ración.

23 ***Planeación de almacenes*** Un contratista tiene un edificio grande que desea transformar en una serie de bodegas para rentar. Puede construir unidades básicas de 8×10 pies, y unidades de lujo de 12×10 pies que tengan anaqueles y un guardarropa. Las consideraciones del mercado indican que deben haber cuando menos el doble de unidades básicas que unidades de lujo, y que las unidades básicas se pueden rentar en $40 mensuales, y las de lujo a $ 75. Se dispone de un máximo de 7 200 pies^2 para las bodegas, y no se pueden gastar más de $30 000 en la construccion. Si cada unidad básica cuesta $300 en su construcción, y la de lujo $600, ¿cuántas unidades se deben construir de cada tipo para maximizar los ingresos mensuales?

24 ***Dieta de un alce*** Un alce se alimenta principalmente de hojas y plantas acuáticas, y no es capaz de digerir más de 33 kg diarios de esos alimentos. Aunque las plantas acuáticas tienen menor contenido energético, el animal debe consumir un mínimo de 17 kg para satisfacer sus necesidades de sodio; 1 kg de hojas tiene cuatro veces más energía que uno de plantas acuáticas. Determine la combinación de alimentos que maximice la dosis máxima de energía diaria.

9.7 ÁLGEBRA DE MATRICES

En la Secc. 9.3 se describieron las matrices como un auxiliar en el cálculo de soluciones de sistemas de ecuaciones. En esta sección se estudian algunas de sus propiedades. Estas últimas son importantes en los campos de matemáticas superiores y en las aplicaciones.

En la definición siguiente el símbolo (a_{ij}) representa una matriz A de $m \times n$ del tipo descrito en la definición de la página 542. Se usan notaciones semejantes para las matrices B y C.

Definición de igualdad y adición de matrices

Sean $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ y $C = (c_{ij})$, matrices $m \times n$.

(1) $A = B$ si y sólo si $a_{ij} = b_{ij}$ para toda i y j.

(2) $C = A + B$ si y sólo si $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para toda i y j.

Nótese que dos matrices son iguales únicamente si tienen el mismo tamaño y los elementos correspondientes son iguales.

EJEMPLO ILUSTRATIVO
Igualdad de matrices

❑ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ \sqrt[3]{8} & 3^2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^2 & 0 & \sqrt{25} \\ 2 & 9 & -2 \end{bmatrix}$

Usando la notación de paréntesis para representar matrices, se escribe la definición de la adición de dos matrices $m \times n$ como

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Así, para sumar dos matrices, se suman los elementos en las posiciones correspondientes de cada una. *Se pueden sumar dos matrices si y sólo si son del mismo tamaño.*

EJEMPLO ILUSTRATIVO
Adición de matrices

❑ $\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 4 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 7 & 0 \\ -8 & 2 \end{bmatrix}$

❑ $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

❑ $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 4 \end{bmatrix}$

La **matriz cero** $m \times n$, representada por O, es la que tiene m renglones y n columnas, en las cuales cada elemento es 0.

EJEMPLO ILUSTRATIVO
Matrices cero

❑ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ❑ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ❑ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

La **inversa aditiva** $-A$ de la matriz $A = (a_{ij})$ es la matriz $(-a_{ij})$ que se obtiene cambiando el signo de cada elemento de A distinto de cero.

EJEMPLO ILUSTRATIVO
Inversa aditiva

❑ $-\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

La demostración del siguiente teorema es consecuencia de la definición de la suma de matrices.

Teorema

Si A, B y C son matrices $m \times n$, y si O es la matriz cero $m \times n$,

(1) $A + B = B + A$

(2) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(3) $A + O = A$

(4) $A + (-A) = O$

La **sustracción** de dos matrices $m \times n$ se define como sigue:

$$A - B = A + (-B).$$

Empleando la notación de paréntesis se tiene

$$\begin{aligned}(a_{ij}) - (b_{ij}) &= (a_{ij}) + (-b_{ij}) \\ &= (a_{ij} - b_{ij}).\end{aligned}$$

Así, para restar dos matrices, se restan los elementos en las posiciones correspondientes.

EJEMPLO ILUSTRATIVO

Sustracción de matrices

❑ $$\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 4 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -7 & 8 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Definición

El **producto** de un número real c por una matriz $m \times n$ $A = (a_{ij})$, es

$$cA = (ca_{ij}).$$

Nótese que para determinar cA, se multiplica por c cada elemento de A.

EJEMPLO ILUSTRATIVO

Producto de un número real por una matriz

❑ $$3\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Se puede demostrar lo siguiente.

Teorema

Si A y B son matrices $m \times n$, y si c y d son números reales, entonces

(1) $c(A + B) = cA + cB$

(2) $(c + d)A = cA + dA$

(3) $(cd)A = c(dA)$

La definición siguiente, del producto AB de dos matrices, puede parecer extraña, pero tiene muchas aplicaciones. Para multiplicar, a diferencia de sumar, A y B pueden tener distintos tamaños; sin embargo, *el número de columnas de A debe ser igual al número de renglones de B*. Por tanto, si A es $m \times n$, B debe ser $n \times p$, para toda p. Así, el tamaño de AB es, en este caso, $m \times p$. Si $C = AB$, el método para calcular el elemento c_{ij} en el renglón i y la columna j de C se explica en las siguientes reglas.

Reglas para determinar c_{ij} del producto $C = AB$ si A es $m \times n$ y B es $n \times p$

1 Aislar el i-ésimo renglón R_i de A, y la j-ésima columna C_j de B:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & \boxed{b_{1j}} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

2 *Simultáneamente,* avanzar hacia la derecha por R_i, y hacia abajo en C_j, multiplicando pares de elementos para obtener

$$a_{i1}\,b_{1j},\ a_{i2}\,b_{2j},\ a_{i3}\,b_{3j},\ \ldots,\ a_{in}\,b_{nj}\,.$$

3 Sumar los productos de los pares obtenidos en la Regla 2 para obtener c_{ij}.

$$c_{ij} = a_{i1}\,b_{1j} + a_{i2}\,b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{in}\,b_{nj}$$

Al aplicar estas reglas se ve que el elemento c_{11} del primer renglón y la primera columna de AB es

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + \cdots + a_{1n}b_{n1}.$$

El elemento c_{mp} del último renglón y la última columna de AB es

$$c_{mp} = a_{m1}b_{1p} + a_{m2}b_{2p} + a_{m3}b_{3p} + \cdots + a_{mn}b_{np}.$$

Lo que acabamos de establecer se resume en la siguiente definición.

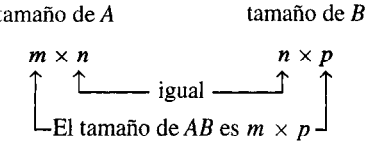
Definición del producto de dos matrices

Sean $A = (a_{ij})$ una matriz $m \times n$, y $B = (b_{ij})$ una matriz $n \times p$. El producto AB es la matriz $m \times p$, $C = (c_{ij})$, tal que

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

para $i = 1, 2, \ldots, m$, y $j = 1, 2, \ldots, p$.

El diagrama siguiente puede ayudar al lector a recordar la relación entre tamaños de matrices, cuando se trate del producto AB.



El ejemplo que sigue muestra algunos casos especiales.

EJEMPLO ILUSTRATIVO

Tamaños de matrices en los productos

	Tamaño de A	Tamaño de B	Tamaño de AB
❑	2×3	3×5	2×5
❑	4×2	2×3	4×3
❑	3×1	1×3	3×3
❑	1×3	3×1	1×1
❑	5×3	3×5	5×5
❑	5×3	5×3	AB no está definida

En el ejemplo siguiente se analiza el modo de calcular el producto de dos matrices específicas.

EJEMPLO 1 ***Cálculo del producto de dos matrices***

Determinar el producto AB si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN La matriz A es 2×3, y la B es 3×4. Por consiguiente, el producto $C = AB$ está definido y es 2×4. A continuación se siguen las reglas para calcular los elementos $c_{11}, c_{12}, \ldots$ del producto. Por ejemplo, para calcular el elemento c_{23}, se aísla el segundo renglón R_2 de A, y la tercera columna C_3 de B, como se ve a continuación, y se aplican después las Reglas 2 y 3 para obtener

$$c_{23} = 4 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + (-2) \cdot 5 = -2.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ & & -2 & \end{bmatrix}$$

Igualmente, para calcular el elemento c_{12} del renglón 1 y la columna 2 del producto, se procede como sigue:

$$c_{12} = 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 6 + (-3) \cdot 0 = 8$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 8 & & \\ & & -2 & \end{bmatrix}$$

Los elementos restantes del producto se determinan como se ve en la tabla siguiente, en la que se ha indicado el renglón de A y la columna de B que se usan cuando se aplica la Regla 1.

Renglón de A	Columna de B	Elemento de C
R_1	C_1	$c_{11} = 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot 7 = -18$
R_1	C_3	$c_{13} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 5 = -7$
R_1	C_4	$c_{14} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 8 = -22$
R_2	C_1	$c_{21} = 4 \cdot 5 + 0 \cdot (-1) + (-2) \cdot 7 = 6$
R_2	C_2	$c_{22} = 4 \cdot (-4) + 0 \cdot 6 + (-2) \cdot 0 = -16$
R_2	C_4	$c_{24} = 4 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 8 = -16$

Por lo tanto,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -18 & 8 & -7 & -22 \\ 6 & -16 & -2 & -16 \end{bmatrix}.$$

Una matriz es una **matriz renglón** si sólo tiene tal fila. Una **matriz columna** sólo tiene una columna. En el ejemplo siguiente se muestran algunos productos en los que intervienen matrices renglón y columna. El lector debe comprobar cada elemento de los productos.

EJEMPLO ILUSTRATIVO

Productos en los que intervienen matrices renglón y columna

- $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ -7 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 19 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -10 \\ 3 & 15 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \end{bmatrix}$

La operación producto (o multiplicación) de dos matrices no es conmutativa. Por ejemplo, si A es 2×3, y B es 3×4, entonces se puede evaluar AB, ya que el número de columnas de A es igual que el número de renglones de B. Sin embargo, BA no está definido, porque el número de columnas de B es distinto del número de renglones de A. Aun si están definidas tanto AB como BA, con frecuencia sucede que son distintas. Esto se muestra en el ejemplo que sigue, en donde también se analiza que el producto de dos matrices distintas de cero puede ser una matriz cero.

EJEMPLO 2 *La multiplicación matricial no es conmutativa*

Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, demostrar que $AB \neq BA$.

SOLUCIÓN Con la definición del producto de dos matrices, se obtiene lo siguiente:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, $AB \neq BA$. Nótese que la última igualdad demuestra que *el producto de dos matrices distintas de cero puede ser una matriz cero.*

Aunque la multiplicación de matrices no es conmutativa, sí es asociativa. De modo que si A es $m \times n$, B es $n \times p$ y C es $p \times q$, entonces

$$A(BC) = (AB)C.$$

Las propiedades distributivas se cumplen si las matrices que intervienen tienen el número propio de renglones y columnas. Si A_1 y A_2 son matrices $m \times n$, y B_1 y B_2 son matrices $n \times p$, entonces

$$A_1(B_1 + B_2) = A_1B_1 + A_1B_2$$

$$(A_1 + A_2)B_1 = A_1B_1 + A_2B_1.$$

Como caso especial, si todas las matrices son cuadradas, de orden n, entonces son válidas las propiedades asociativa y distributiva.

EJERCICIOS 9.7

Ejercicios 1 – 8: Calcule, de ser posible, $A + B$, $A - B$, $2A$ y $-3B$.

1 $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

2 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

3 $A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

4 $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 7 \\ 5 & 4 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

5 $A = [4 \quad -3 \quad 2]$, $B = [7 \quad 0 \quad -5]$

6 $A = \begin{bmatrix} 7 \\ -16 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -11 \\ 9 \end{bmatrix}$

7 $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

8 $A = [2 \quad 1]$, $B = [3 \quad -1 \quad 5]$

Ejercicios 9 – 20: Determine, de ser posible, AB y BA.

9 $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$

10 $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

11 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

12 $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

13 $A=\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$

14 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

15 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

16 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

17 $A=[-3 \quad 7 \quad 2]$, $B=\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$

18 $A=[4 \quad 8]$, $B=\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$

19 $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

20 $A=[3 \quad -1 \quad 4]$, $B=\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$

Ejercicios 21 – 24: Determine AB.

21 $A=\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 3 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

22 $A=\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B=[5 \quad 1]$

23 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ -7 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

24 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

Ejercicios 25 – 28: Sean

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad C=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Compruebe la afirmación.

25 $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$, donde $A^2 = AA$ y $B^2 = BB$.

26 $(A+B)(A+B) \neq A^2 + 2AB + B^2$

27 $A(B+C) = AB + AC$

28 $A(BC) = AB)C$

Ejercicios 29 – 32: Compruebe la identidad para

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}, \quad C=\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$$

y los números reales m y n.

29 $m(A+B) = mA + mB$ **30** $(m+n)A = mA + nA$

31 $A(B+C) = AB + AC$ **32** $A(BC) = (AB)C$

9.8 INVERSA DE UNA MATRIZ

En esta sección, se limita el estudio a matrices cuadradas. El símbolo I_n representa la matriz cuadrada de orden n que tiene 1 en cada lugar de la diagonal principal, y 0 en los demás lugares. I_n se llamará **matriz identidad de orden n** (o **matriz neutra de orden n**).

Matrices identidad (o neutras)

❑ $I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ❑ $I_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Se puede demostrar que si A es cualquier matriz cuadrada de orden n, entonces

$$AI_n = A = I_nA.$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO

$AI_3 = A = I_3A$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

A veces, una matriz A $n \times n$ tiene una **inversa**, es decir, una matriz B tal que $AB = I_n = BA$. Si A tiene inversa, se representa mediante A^{-1} y se puede escribir

$$AA^{-1} = I_n = A^{-1}A.$$

El símbolo A^{-1} se lee "inversa de A". En matrices, el símbolo $1/A$ no representa la inversa A^{-1}.

Si una matriz cuadrada A tiene inversa, se puede calcular A^{-1} mediante operaciones elementales de renglón. Si $A = (a_{ij})$ es $n \times n$, *entonces se empieza con la matriz* $n \times 2n$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

en la cual la matriz identidad $n \times n$, I_n, aparece a la derecha de la raya vertical. A continuación se aplica una serie de transformaciones elementales de renglón, como se hizo en la Secc. 9.3 para pasar a formas escalonadas, hasta llegar a una matriz de la forma

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right]$$

en la cual la matriz identidad I_n aparece a la izquierda de la raya vertical. Se puede demostrar que la matriz $n \times n$, (b_{ij}), es la inversa A^{-1}.

EJEMPLO 1 ***Determinación de la inversa de una matriz 2 × 2***

Determinar A^{-1} si $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN Se empieza con la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

A continuación se efectúan operaciones elementales de renglón hasta que aparezca la matriz identidad I_2 a la izquierda de la raya vertical, como sigue:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \mathbf{R}_1 \leftrightarrow \mathbf{R}_2 \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$-3\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 \rightarrow \mathbf{R}_2 \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$$-\tfrac{1}{7}\mathbf{R}_2 \rightarrow \mathbf{R}_2 \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{array}\right]$$

$$-4\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_1 \rightarrow \mathbf{R}_1 \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{array}\right]$$

De acuerdo con el análisis anterior,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Se comprueba que $AA^{-1} = I_2 = A^{-1}A$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 2 ***Determinación de la inversa de una matriz 3×3***

Evaluar A^{-1} si $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] -\mathbf{R}_1 \rightarrow \mathbf{R}_1 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{matrix} -2\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 \rightarrow \mathbf{R}_2 \\ -3\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_3 \rightarrow \mathbf{R}_3 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$-\mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_2 \rightarrow \mathbf{R}_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{matrix} 3\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_1 \rightarrow \mathbf{R}_1 \\ \\ -10\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 \rightarrow \mathbf{R}_3 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -4 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -9 & 13 & -10 & 11 \end{array}\right]$$

$$-\tfrac{1}{9}\mathbf{R}_3 \rightarrow \mathbf{R}_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -4 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{9} & \frac{10}{9} & -\frac{11}{9} \end{array}\right]$$

$$\begin{matrix} -2R_3 + R_1 \to R_1 \\ -R_3 + R_2 \to R_2 \\ \end{matrix}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{10}{9} & \frac{7}{9} & -\frac{5}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{9} & \frac{10}{9} & -\frac{11}{9} \end{array}\right]$$

En consecuencia,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{10}{9} & \frac{7}{9} & -\frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{13}{9} & \frac{10}{9} & -\frac{11}{9} \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -10 & 7 & -5 \\ 4 & -1 & 2 \\ -13 & 10 & -11 \end{bmatrix}.$$

El lector puede comprobar que $AA^{-1} = I_3 = A^{-1}A$.

Si el procedimiento usado en los Ejemplos 1 y 2 no produce una matriz identidad a la izquierda de la raya vertical, la matriz A no tiene inversa.

Las inversas de matrices se usan para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Considérese el caso de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = k_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = k_2 \end{cases}$$

El sistema se puede expresar en términos de matrices en la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}.$$

Si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix},$$

entonces, la *forma matricial* del sistema es

$$AX = B.$$

Si existe A^{-1}, al multiplicar ambos miembros de esta ecuación por A^{-1} se obtiene $A^{-1}AX = A^{-1}B$. Como $A^{-1}A = I_2$, y también $I_2 X = X$, se llega a

$$X = A^{-1}B,$$

a partir de la cual se puede obtener la solución (x, y). Esta técnica se puede generalizar a sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas.

EJEMPLO 3 ***Resolver un sistema de ecuaciones lineales mediante la inversa de una matriz***

Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -x + 3y + z = 1 \\ 2x + 5y = 3 \\ 3x + y - 2z = -2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Si

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 1\\ 2 & 5 & 0\\ 3 & 1 & -2\end{bmatrix},\qquad X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix},\qquad \text{y}\qquad B=\begin{bmatrix}1\\ 3\\ -2\end{bmatrix},$$

entonces $AX = B$. Esto significa que $X = A^{-1}B$. La matriz A^{-1} se determinó en el Ejemplo 2. Por lo tanto,

$$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\tfrac{1}{9}\begin{bmatrix}-10 & 7 & -5\\ 4 & -1 & 2\\ -13 & 10 & -11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 3\\ -2\end{bmatrix}=\tfrac{1}{9}\begin{bmatrix}21\\ -3\\ 39\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{7}{3}\\ -\frac{1}{3}\\ \frac{13}{3}\end{bmatrix}.$$

Así, $x=\frac{7}{3}$, $y=-\frac{1}{3}$, $z=\frac{13}{3}$, y la terna ordenada $(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{13}{3})$ es la solución del sistema dado.

El método de solución en el Ejemplo 3 es útil sólo si se conoce A^{-1} (o se puede evaluar con facilidad) o si se van a tener muchos sistemas con la misma matriz de coeficientes. La técnica preferida para resolver un sistema arbitrario de ecuaciones lineales es el método matricial que se explicó en la Secc. 9.3.

Hay otros usos más importantes de la inversa de una matriz, pero se presentan en campos más avanzados de las matemáticas y en las aplicaciones de los mismos.

EJERCICIOS 9.8

Ejercicios 1 – 10: Obtenga la inversa de la matriz, si es que existe.

1 $\begin{bmatrix}2 & -4\\ 1 & 3\end{bmatrix}$

2 $\begin{bmatrix}3 & 2\\ 4 & 5\end{bmatrix}$

3 $\begin{bmatrix}2 & 4\\ 4 & 8\end{bmatrix}$

4 $\begin{bmatrix}3 & -1\\ 6 & -2\end{bmatrix}$

5 $\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$

6 $\begin{bmatrix}3 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ -4 & 0 & 2\end{bmatrix}$

7 $\begin{bmatrix}-2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 4\end{bmatrix}$

8 $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}$

9 $\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$

10 $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3\end{bmatrix}$

11 Explique las condiciones de a y b que aseguren que la matriz $\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{bmatrix}$ tiene una inversa, y determine la fórmula de la inversa, en caso de existir.

12 Si $abc \neq 0$, determine la inversa de $\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{bmatrix}$.

13 Si $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$, demuestre que $AI_3 = A = I_3A$.

14 Demuestre que $AI_4 = A = I_4A$ para toda matriz cuadrada A de orden 4.

Ejercicios 15 – 18: Resuelva el sistema con el método del Ejem. 3. (Refiérase a los Ejercicios 1 – 2 y 7 – 8.)

15 $\begin{cases}2x - 4y = c\\ x + 3y = d\end{cases}$

(a) $\begin{bmatrix}c\\ d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix}c\\ d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ 5\end{bmatrix}$

16 $\begin{cases}3x + 2y = c\\ 4x + 5y = d\end{cases}$

(a) $\begin{bmatrix}c\\ d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix}c\\ d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 3\end{bmatrix}$

17
$$\begin{cases} -2x + 2y + 3z = c \\ x - y = d \\ y + 4z = e \end{cases}$$

(a) $\begin{bmatrix} c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

18
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = c \\ -2x + y = d \\ 3x - y + z = e \end{cases}$$

(a) $\begin{bmatrix} c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ejercicios 19 y 20: (a) Exprese el sistema en forma matricial $AX = B$. (b) Calcule A^{-1} con exactitud de 4 decimales en sus elementos. (c) Use $X = A^{-1}B$ para determinar la solución del sistema con exactitud de 4 decimales.

19
$$\begin{cases} 3.1x + 6.7y - 8.7z = 1.5 \\ 4.1x - 5.1y + 0.2z = 2.1 \\ 0.6x + 1.1y - 7.4z = 3.9 \end{cases}$$

20
$$\begin{cases} 5.6x + 8.4y - 7.2z + 4.2w = 8.1 \\ 8.4x + 9.2y - 6.1z - 6.2w = 5.3 \\ -7.2x - 6.1y + 9.2z + 4.5w = 0.4 \\ 4.2x - 6.2y - 4.5z + 5.8w = 2.7 \end{cases}$$

9.9 DETERMINANTES

En esta sección y la siguiente supondremos que todas las matrices que manejemos serán matrices *cuadradas*. Relacionado con cada matriz cuadrada A hay un número que se llama **determinante de A**, y que se representa con $|A|$. Esta notación no debe confundirse con el símbolo del valor absoluto de un número real. Para evitar cualquier malentendido, a veces se usa la expresión $\det A$ en lugar de $|A|$. Se define $|A|$ partiendo del caso en el que A tiene orden 1 y aumentando el orden una unidad cada vez. Como se ve en la Secc. 9.10, estas definiciones surgen en forma natural cuando se resuelven sistemas de ecuaciones lineales.

Si A es una matriz cuadrada de orden 1, entonces A sólo tiene 1 elemento. Así, $A = [a_{11}]$, y se define $|A| = a_{11}$. Si A es una matriz cuadrada de orden 2, entonces

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

y se define el determinante de A como

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Otra notación $|A|$ consiste en remplazar los corchetes de A por rayas verticales, como sigue: como sigue:

Determinante de una matriz A, 2×2

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Ejemplo 1 ***Cálculo del determinante de una matriz*** 2×2

Hallar $|A|$ si $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN Por definición,

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = (2)(-3) - (4)(-1) = -6 + 4 = -2.$$

Para las matrices cuadradas de orden $n > 1$, conviene introducir la siguiente terminología:

Definición de menor y cofactor

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden $n > 1$.

(1) El **menor** M_{ij} del elemento a_{ij} es el determinante de la matriz de orden $n - 1$ que se obtiene eliminando el renglón i y la columna j de A.

(2) El **cofactor** A_{ij} del elemento a_{ij}, es $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

Para obtener el menor de un elemento, se elimina el renglón y la columna en los que aparece este elemento y se forma el determinante de la matriz cuadrada resultante. Este proceso se demuestra en el siguiente ejemplo, en el cual se indican con rayas verticales y horizontales las eliminaciones de renglones y columnas de una matriz 3×3.

EJEMPLO ILUSTRATIVO

Menores

Matriz	Menor
❑ $\begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$	$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$
❑ $\begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$	$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}$
❑ $\begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$	$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}$
❑ $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$	$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}$

Para la matriz del ejemplo anterior, hay otros cinco menores: M_{21}, M_{22}, M_{31}, M_{32} y M_{33}, que se pueden obtener de la misma forma.

Para obtener el cofactor de a_{ij} de una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$, se aísla el menor y se multiplica por 1 o por -1, según si la suma de i y j es par o impar, respectivamente. Otra forma de recordar el signo $(-1)^{i+j}$ asociado al cofactor A_{ij} es ver la siguiente configuración de los signos más y menos, en forma de tablero de ajedrez:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 2 ***Determinación de menores y cofactores***

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & -7 & 5 \end{bmatrix}$, determinar M_{11}, M_{21}, M_{22}, A_{11}, A_{21} y A_{22}.

SOLUCIÓN Al eliminar de A los renglones y columnas adecuados, se obtiene

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} = (2)(5) - (-7)(0) = 10$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} = (-3)(5) - (-7)(3) = 6$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = (1)(5) - (-2)(3) = 11.$$

Para obtener los cofactores, se anteponen los signos adecuados a los menores. Así, de acuerdo con la definición de cofactor, se tiene que

$$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = (1)(10) = 10$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = (-1)(6) = -6$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = (1)(11) = 11.$$

También se puede emplear el tablero o cuadro de los signos para determinar el signo correcto.

El determinante $|A|$ de una matriz cuadrada de orden 3 se define como sigue:

Definición del determinante de una matriz A, 3×3

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

Como $A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11}$, $A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -M_{12}$ y $A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = M_{13}$, entonces se puede expresar la definición anterior como sigue:

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}.$$

Si se expresa M_{11}, M_{12} y M_{13} mediante elementos de A y se reacomodan los términos, se obtiene la siguiente fórmula de $|A|$:

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

La definición de $|A|$ para una matriz cuadrada A de orden 3, representa multiplicar cada elemento del renglón 1 por su cofactor y sumar luego los productos para calcular $|A|$. Este proceso se llama *desarrollo* (o *expansión*) *de* $|A|$ *por el primer renglón.* Si se llevan a cabo los cálculos, se puede demostrar que $|A|$ *también se puede desarrollar empleando cualquier renglón o columna.* Por ejemplo, el desarrollo por la segunda columna es

$$|A| = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} = a_{12}\left(-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\right) + a_{22}\left(+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\right) + a_{32}\left(-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}\right).$$

Al aplicar la definición a los determinantes entre paréntesis, multiplicar como se observa y reacomodar los términos de la suma, se podría llegar a la fórmula de $|A|$ en términos de los elementos de A. Igualmente, el desarrollo por el tercer renglón es

$$|A| = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}.$$

Una vez más, puede demostrarse que este resultado concuerda con los desarrollos anteriores.

EJEMPLO 3 ***Cálculo del determinante de una matriz*** 3×3

Calcular $|A|$ si $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN Como el segundo renglón tiene un cero, se desarrolla $|A|$ por ese renglón, pues entonces sólo se necesita evaluar dos cofactores. Así,

$$|A| = (2)A_{21} + (5)A_{22} + (0)A_{23}.$$

Con la definición de cofactores, se tiene

$$A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -[(3)(-2) - (1)(1)] = 7$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = [(-1)(-2) - (3)(1)] = -1.$$

En consecuencia,

$$|A| = (2)(7) + (5)(-1) + (0)A_{23} = 14 - 5 + 0 = 9.$$

La siguiente definición del determinante de una matriz de orden arbitrario n se enuncia siguiendo a la que sirvió para el determinante de la matriz de orden 3.

Definición del determinante de una matriz $A, n \times n$

El **determinante** $|A|$ **de una matriz** A **de orden** n es el desarrollo en cofactores por el primer renglón:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}$$

En términos de menores,

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \ldots + a_{1n}(-1)^{1+n}M_{1n}.$$

Se puede calcular el número $|A|$ empleando *cualquier* renglón o columna, como se indica en el siguiente teorema.

Teorema de expansión o desarrollo de determinantes

> Si A es una matriz cuadrada de orden $n > 1$, entonces su determinante $|A|$ se puede calcular multiplicando los elementos de cualquier renglón (o columna) por sus cofactores respectivos, y sumando los productos obtenidos.

La demostración de este teorema se puede ver en libros de álgebra lineal. El teorema es útil cuando aparecen muchos ceros en un renglón o columna, como se ve en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4 ***Cálculo del determinante de una matriz*** 4×4

Calcular $|A|$ si $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN Nótese que todos los elementos del tercer renglón, con excepción de uno, son cero. Por consiguiente, si se desarrolla $|A|$ por el tercer renglón, se tiene cuando mucho un término distinto de cero. Específicamente,

$$|A| = (0)A_{31} + (0)A_{32} + (-3)A_{33} + (0)A_{34} = -3A_{33}$$

donde
$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Se desarrolla A_{33} por la columna 1:

$$A_{33} = (1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + (-2)\left(-\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\right) + (0)\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 3 + 10 + 0 = 13$$

Así,
$$|A| = -3A_{33} = (-3)(13) = -39.$$

En general, si todos los elementos de un renglón o columna de A son cero, con excepción de uno, y si se desarrolla el determinante $|A|$ por ese renglón o columna, entonces desaparecen todos los términos, con excepción del producto de ese elemento por su cofactor. Si *todos* los elementos de un renglón o columna son cero, se aplica el siguiente teorema:

Teorema

> Si todo elemento de un renglón o columna de una matriz cuadrada A es cero, entonces $|A| = 0$.

DEMOSTRACIÓN Si todo elemento de un renglón o columna de una matriz A es cero, el desarrollo por ese renglón o columna es cero.

EJERCICIOS 9.9

Ejercicios 1 – 4: Calcule todos los menores y cofactores de los elementos de la matriz.

1 $\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

2 $\begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

3 $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -5 & 7 & 0 \end{bmatrix}$

4 $\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 4 & 7 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

Ejercicios 5 – 8: Calcule los determinantes de las matrices en los ejercicios que se mencionan.

5 Ejercicio 1

6 Ejercicio 2

7 Ejercicio 3

8 Ejercicio 4

Ejercicios 9 – 20: Halle el determinante de la matriz.

9 $\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

10 $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

11 $\begin{bmatrix} a & -a \\ b & -b \end{bmatrix}$

12 $\begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}$

13 $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 5 \\ -6 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

14 $\begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -3 & 1 & 6 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

15 $\begin{bmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 7 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

16 $\begin{bmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

17 $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}$

18 $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 6 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

19 $\begin{bmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$

20 $\begin{bmatrix} a & u & v & w \\ 0 & b & x & y \\ 0 & 0 & c & z \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$

Ejercicios 21 – 28: Compruebe la identidad desarrollando cada determinante.

21 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$

22 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$

23 $\begin{vmatrix} a & kb \\ c & kd \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

24 $\begin{vmatrix} a & b \\ kc & kd \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

25 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ ka + c & kb + d \end{vmatrix}$

26 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & ka + b \\ c & kc + d \end{vmatrix}$

27 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b + e \\ c & d + f \end{vmatrix}$

28 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c + e & d + f \end{vmatrix}$

29 Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n tal que $a_{ij} = 0$ si $i < j$. Demuestre que $|A| = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$.

30 Si $A = (a_{ij})$ es cualquier matriz 2×2 tal que $|A| \neq 0$, demuestre que A tiene una inversa, y deduzca una fórmula general para A^{-1}.

Ejercicios 31 – 34: Sea $I = I_2$ la matriz identidad de orden 2, y sea $f(x) = |A - xI|$. Determine (a) el polinomio $f(x)$, y (b) los ceros de $f(x)$. (En el campo de las matrices, $f(x)$ es el *polinomio característico de* A, y las raíces (o ceros) de $f(x)$ son los *valores característicos* de A.

31 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

32 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

33 $A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

34 $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

Ejercicios 35 – 38: Sea $I = I_3$, y sea $f(x) = |A - xI|$. Determine (a) el polinomio $f(x)$ y (b) las raíces de $f(x)$.

35 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

36 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

37 $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

38 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Ejercicios 39 – 42: Exprese el determinante en forma $ai + bj + ck$ donde a, b y c son números reales.

39 $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 6 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

40 $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}$

41 $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -6 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **42** $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -6 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

c **Ejercicios 43 y 44: Sean $I = I_3$ y $f(x) = |A - xI|$. (a) Determine el polinomio $f(x)$. (b) Grafique f y calcule los valores característicos de A.**

43 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ **44** $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

9.10 PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

La evaluación de un determinante mediante el teorema del desarrollo de la Secc. 9.9 no da resultados satisfactorios cuando las matrices son de orden superior. Por ejemplo, si el determinante de una matriz de orden 10 se desarrolla por cualquier renglón, se obtiene una suma de 10 términos, y cada uno de ellos contiene el determinante de una matriz de orden 9, que es cofactor de la matriz original. Si cualquiera de estos últimos determinantes se desarrolla por un renglón o columna, se obtiene una suma de 9 términos, y cada uno contiene el determinante de una matriz de orden 8. Por consiguiente, en esta etapa se tendrían que evaluar 90 determinantes de matrices de orden 8. El proceso podría continuar hasta tener sólo determinantes de matrices de orden 2. ¡El lector puede comprobar que habría 1 814 400 matrices de orden 2! A menos que muchos elementos de la matriz original sean cero, es un trabajo enorme el llevar a cabo todos los cálculos.

En esta sección se explican reglas que simplifican el proceso de evaluación de determinantes. El uso principal de esas reglas es introducir ceros en el determinante. Se pueden emplear también para pasar al determinante a la **forma escalonada** o **en escalón**, es decir, a una forma en la cual los elementos bajo la diagonal principal son todos cero (Secc. 9.3). Las transformaciones de renglones, del teorema siguiente, son las mismas transformaciones de renglón de una matriz que se presentan en la Secc. 9.3. Sin embargo, para los determinantes también se puede emplear transformaciones análogas de columna.

Teorema de transformaciones de renglón y columna de un determinante

Sea A una matriz cuadrada de orden n.

(1) Si se obtiene una matriz B de A intercambiando dos renglones (o columnas) cualesquiera, entonces $|B| = -|A|$.

(2) Si se obtiene B de A multiplicando cada elemento de un renglón (o columna) de A por cualquier número real k, entonces $|B| = k|A|$.

(3) Si se obtiene B de A sumando k veces cualquier renglón o columna de A a otro renglón (o columna), donde k es un número real, entonces $|B| = |A|$.

Al emplear el teorema, se indican los renglones o columnas del *determinante* según el modo obvio. Por ejemplo, la propiedad (3) se puede enunciar: *Si se suma el producto de k por cualquier renglón o columna a otro renglón o columna de un determinante, no se altera el valor del determinante.*

Las transformaciones de renglón de los determinantes se especificarán mediante los símbolos $R_i \leftrightarrow R_j$, $kR_i \rightarrow R_i$, y $kR_i + R_j \rightarrow R_j$, que se presentaron en la Secc. 9.3. Para las transformaciones

de columna se usarán símbolos semejantes. Por ejemplo, $kC_i + C_j \rightarrow C_j$ quiere decir: sumar k multiplicado por la i-ésima columna a la j-ésima columna. Los ejemplos siguientes son muestras de la aplicación del teorema anterior, y a la derecha aparece la justificación de cada igualdad.

EJEMPLO ILUSTRATIVO

Transformaciones de determinantes

$$\square \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} \qquad R_1 \leftrightarrow R_2$$

$$\square \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix} \qquad C_1 \leftrightarrow C_3$$

$$\square \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -8 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} \qquad -2R_1 + R_2 \rightarrow R_2$$

$$\square \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} \qquad 2C_2 + C_1 \rightarrow C_1$$

Teorema

> Si dos renglones o columnas de una matriz cuadrada A son idénticos, entonces $|A| = 0$.

DEMOSTRACIÓN Si B es la matriz que se obtiene de A por intercambio de dos renglones o columnas idénticos, entonces B y A son iguales y, por consiguiente, $|B| = |A|$. Sin embargo, según la propiedad (1) del teorema de transformaciones de renglón y columna en un determinante, $|B| = -|A|$, y por lo tanto, $-|A| = |A|$. Así, $2|A| = 0$ y $|A| = 0$. ■

EJEMPLO 1 ***Uso de transformaciones de renglón y de columna***

Calcular $|A|$ si $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN Se desea emplear la propiedad (3) del teorema de transformaciones de renglón y de columna para introducir muchos ceros en algún renglón o columna. Conviene trabajar con un elemento de la matriz que sea igual a 1, porque con ello se evita el empleo de fracciones. Si 1 no es elemento de la matriz original, siempre es posible introducir el número 1 aplicando la propiedad (2) o (3) del teorema. En este ejemplo, aparece 1 en el renglón 3, y se procede como sigue, anotando a la derecha la razón de cada igualdad.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -6 & 4 \end{vmatrix} \qquad -2R_3 + R_1 \to R_1$$

$$3R_3 + R_4 \to R_4$$

$$= (1)\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 5 & -1 & 6 \\ 2 & -6 & 4 \end{vmatrix} \qquad \text{se desarrolla por la primera columna}$$

$$= \begin{vmatrix} 23 & 4 & 22 \\ 0 & -1 & 0 \\ -28 & -6 & -32 \end{vmatrix} \qquad 5C_2 + C_1 \to C_1$$

$$6C_2 + C_3 \to C_3$$

$$= (-1)\begin{vmatrix} 23 & 22 \\ -28 & -32 \end{vmatrix} \qquad \text{se desarrolla por el segundo renglón}$$

$$= (-1)[(23)(-32) - (-28)(22)] \qquad \text{definición del determinante}$$

$$= 120$$

La parte (2) del teorema de transformaciones de renglón y de columna es útil para definir factores de determinantes. Por ejemplo, para un determinante de una matriz de orden 3, se tiene que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Se aplican fórmulas semejantes si k es factor común de los elementos de cualquier otro renglón o columna. Cuando se refiere a este manejo, con frecuencia se dice que *k es factor común del renglón*, o *de la columna.*

EJEMPLO 2 ***Separar los factores comunes de los renglones de un determinante***

Calcular $|A|$ si $A = \begin{bmatrix} 14 & -6 & 4 \\ 4 & -5 & 12 \\ -21 & 9 & -6 \end{bmatrix}$.

(continúa)

SOLUCIÓN

$$|A| = 2\begin{vmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 12 \\ -21 & 9 & -6 \end{vmatrix}$$ 2 es factor común del renglón 1

$$= (2)(-3)\begin{vmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 12 \\ 7 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$ −3 es factor común del renglón 3

$$= 0$$ dos renglones son idénticos

EJEMPLO 3 ***Eliminación de un factor común de una columna***

Sin desarrollar, demostrar que $a - b$ es factor de $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

SOLUCIÓN

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a-b & b & c \\ a^2-b^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$ $-C_2 + C_1 \rightarrow C_1$

$$= (a-b)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & b & c \\ a+b & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$ $a - b$ es factor común de la columna 1

Al resolver sistemas de ecuaciones lineales es posible que surjan determinantes. Por ejemplo, considérense dos ecuaciones lineales en dos variables, x y y:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = k_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = k_2 \end{cases}$$

en cada una de las cuales aparece cuando menos un coeficiente distinto de cero. Se puede suponer que $a_{11} \neq 0$, o bien, que $a_{12} \neq 0$, y se podría entonces considerar que y es la primera variable, en lugar de x. Se usan transformaciones elementales de renglón para obtener la matriz de un sistema equivalente, donde $a_{21} = 0$, como sigue:

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & k_2 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{a_{21}}{a_{11}}\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 \rightarrow \mathbf{R}_2} \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ 0 & a_{22} - \left(\frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}\right) & k_2 - \left(\frac{a_{21}k_1}{a_{11}}\right) \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{a_{11}\mathbf{R}_2 \rightarrow \mathbf{R}_2} \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ 0 & (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) & (a_{11}k_2 - a_{21}k_1) \end{array}\right]$$

Así, el sistema dado equivale a

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = k_1 \\ (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y = a_{11}k_2 - a_{21}k_1 \end{cases}$$

el cual también se puede escribir en la siguiente forma:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = k_1 \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a_{11} & k_1 \\ a_{21} & k_2 \end{vmatrix} \end{cases}$$

Si $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, se despeja y de la segunda ecuación, y se tiene entonces

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & k_1 \\ a_{21} & k_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

El valor correspondiente de x se puede calcular sustituyendo y en la primera ecuación, con lo cual se llega a

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & a_{12} \\ k_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Esto demuestra que *si el determinante de la matriz de coeficientes de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables no es cero, el sistema tiene solución única.* Las dos últimas fórmulas de x y y, en forma de cocientes de determinantes, son la **regla de Cramer** para dos variables.

Hay una forma fácil de recordar la regla de Cramer. Sea

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

la matriz de coeficientes del sistema, y sea D_x la matriz que se obtiene de D al remplazar los coeficientes a_{11} y a_{21} de x con los números k_1 y k_2, respectivamente. Igualmente, sea D_y la matriz que se obtiene de D remplazando los coeficientes a_{12} y a_{22} de y por los números k_1 y k_2, respectivamente. Es decir,

$$D_x = \begin{bmatrix} k_1 & a_{12} \\ k_2 & a_{22} \end{bmatrix}, \quad D_y = \begin{bmatrix} a_{11} & k_1 \\ a_{21} & k_2 \end{bmatrix}$$

Si $|D| \neq 0$, la solución (x, y) está expresada mediante las fórmulas siguientes.

Regla de Cramer para dos variables

$$\boxed{x = \frac{|D_x|}{|D|}, \quad y = \frac{|D_y|}{|D|}}$$

EJEMPLO 4 ***Aplicación de la regla de Cramer para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales***

Usar la regla de Cramer para resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 5x + 7y = 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN El determinante de la matriz de coeficientes es

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 29.$$

Empleando la notación convenida, se tiene que

$$|D_x| = \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -25, \qquad |D_y| = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 22.$$

Por consiguiente, $$x = \frac{|D_x|}{|D|} = \frac{-25}{29}, \qquad y = \frac{|D_y|}{|D|} = \frac{22}{29}.$$

Así, este sistema tiene la solución única $\left(-\frac{25}{29}, \frac{22}{29}\right)$.

Se puede ampliar la regla de Cramer a sistemas de n ecuaciones lineales con n variables x_1, $x_2, \ldots, x_n$, donde cada ecuación tenga la forma

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = k.$$

Para resolver ese sistema, sea D la matriz de coeficientes y sea D_{xi} la matriz que se obtiene remplazando los coeficientes de x_i en D, por los números $k_1, \ldots, k_n$ que aparecen en la columna a la derecha de los signos de igualdad en el sistema. Si $|D| \neq 0$, entonces el sistema tiene la solución única siguiente:

Regla de Cramer (forma general)

$$x_1 = \frac{|D_{x_1}|}{|D|} \qquad x_2 = \frac{|D_{x_2}|}{|D|}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{|D_{x_n}|}{|D|}$$

EJEMPLO 5 ***Uso de la regla de Cramer para resolver un sistema de tres ecuaciones lineales***

Con la regla de Cramer resolver el sistema

$$\begin{cases} x \quad - 2z = 3 \\ \quad - y + 3z = 1 \\ 2x \quad + 5z = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Tan sólo se indican los diversos determinantes. El lector debe comprobar los resultados.

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -9, \qquad |D_x| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -15$$

$$|D_y| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 27, \qquad |D_z| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

De acuerdo con la regla de Cramer, la solución es

$$x = \frac{|D_x|}{|D|} = \frac{-15}{-9} = \frac{5}{3}$$

$$y = \frac{|D_y|}{|D|} = \frac{27}{-9} = -3$$

$$z = \frac{|D_z|}{|D|} = \frac{6}{-9} = -\frac{2}{3}.$$

La regla de Cramer no es método eficaz cuando el sistema tiene un gran número de ecuaciones, porque se deben evaluar muchos determinantes de matrices de orden superior. También, nótese que la regla de Cramer no se puede usar en forma directa si $|D| = 0$, o si el número de ecuaciones no es igual al número de variables. Para los cálculos numéricos, el método matricial es mejor que la regla de Cramer. Sin embargo, la formulación en términos de la regla de Cramer es útil en la teoría matemática.

EJERCICIOS 9.10

Ejercicios 1 – 14 : Sin desarrollar, explique la razón por la que lo indicado es cierto.

1 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

2 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

3 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

4 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

5 $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

6 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

7 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

8 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$

9 $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$

10 $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

11 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$

12 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

13 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

14 $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Ejercicios 15 – 24: Calcule el determinante de la matriz después de introducir ceros, como en el Ejemplo 1.

15 $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

16 $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

17 $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -2 \end{bmatrix}$

18 $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 5 & 1 & -3 \\ 6 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

19 $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 3 & 6 & 9 \\ -2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

20 $\begin{bmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 5 & 3 & -6 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

21
$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

22
$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

23
$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

24
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

25 Demuestre que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a).$$

(*Sugerencia:* Vea el Ejemplo 3).

26 Demuestre que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

27 Si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix},$$

pruebe que $|A| = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$.

28 Si

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{bmatrix},$$

demuestre que

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}.$$

29 Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son matrices cuadradas arbitrarias de orden 2, demuestre que $|AB| = |A|\,|B|$.

30 Si $A = (a_{ij})$ es matriz cuadrada de orden n, y k es cualquier número real, pruebe que $|kA| = k^n|A|$. [*Sugerencia:* Use la propiedad (2) del teorema de transformaciones de renglón y columna de un determinante].

31 Use las propiedades de los determinantes para demostrar que lo que sigue es la ecuación de una recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2):

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

32 Use las propiedades de los determinantes, para demostrar que lo siguiente es la ecuación de un círculo que pasa por tres puntos no colineales, (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3):

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ejercicios 33 – 42: Con la regla de Cramer, cuando se pueda aplicar, resuelva el sistema.

33 $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x - 2y = 8 \end{cases}$

34 $\begin{cases} 4x + 5y = 13 \\ 3x + y = -4 \end{cases}$

35 $\begin{cases} 2x + 5y = 16 \\ 3x - 7y = 24 \end{cases}$

36 $\begin{cases} 7x - 8y = 9 \\ 4x + 3y = -10 \end{cases}$

37 $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -6x + 9y = 12 \end{cases}$

38 $\begin{cases} 3p - q = 7 \\ -12p + 4q = 3 \end{cases}$

39 $\begin{cases} x - 2y - 3z = -1 \\ 2x + y + z = 6 \\ x + 3y - 2z = 13 \end{cases}$

40 $\begin{cases} x + 3y - z = -3 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ 2x - y + z = -1 \end{cases}$

41 $\begin{cases} 5x + 2y - z = -7 \\ x - 2y + 2z = 0 \\ 3y + z = 17 \end{cases}$

42 $\begin{cases} 4x - y + 3z = 6 \\ -8x + 3y - 5z = -6 \\ 5x - 4y = -9 \end{cases}$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 9

Ejercicios 1 – 16: Resuelva el sistema

1 $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 5x + 4y = 1 \end{cases}$

2 $\begin{cases} x - 3y = 4 \\ -2x + 6y = 2 \end{cases}$

3 $\begin{cases} y + 4 = x^2 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$

4 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x - y = 7 \end{cases}$

5 $\begin{cases} 9x^2 + 16y^2 = 140 \\ x^2 - 4y^2 = 4 \end{cases}$

6 $\begin{cases} 2x = y^2 + 3z \\ x = y^2 + z - 1 \\ x^2 = xz \end{cases}$

7 $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{y} = 7 \\ \dfrac{4}{x} - \dfrac{2}{y} = 1 \end{cases}$

8 $\begin{cases} 2^x + 3^{y+1} = 10 \\ 2^{x+1} - 3^y = 5 \end{cases}$

9 $\begin{cases} 3x + y - 2z = -1 \\ 2x - 3y + z = 4 \\ 4x + 5y - z = -2 \end{cases}$

10 $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ y - 5z = 3 \\ 2x + z = -1 \end{cases}$

11 $\begin{cases} 4x - 3y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 3x - y + 3z = 0 \end{cases}$

12 $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 3x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$

13 $\begin{cases} 4x + 2y - z = 1 \\ 3x + 2y + 4z = 2 \end{cases}$

14 $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x - 3y = 17 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$

15 $\begin{cases} \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{2}{z} = 4 \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} - \dfrac{1}{z} = 1 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 4 \end{cases}$

16 $\begin{cases} 2x - y + 3z - w = -3 \\ 3x + 2y - z + w = 13 \\ x - 3y + z - 2w = -4 \\ -x + y + 4z + 3w = 0 \end{cases}$

Ejercicios 17 – 20: Determine la descomposición en fracciones parciales.

17 $\dfrac{4x^2 + 54x + 134}{(x + 3)(x^2 + 4x - 5)}$

18 $\dfrac{2x^2 + 7x + 9}{x^2 + 2x + 1}$

19 $\dfrac{x^2 + 14x - 13}{x^3 + 5x^2 + 4x + 20}$

20 $\dfrac{x^3 + 2x^2 + 2x + 16}{x^4 + 7x^2 + 10}$

Ejercicios 21 – 24: Trace la gráfica del sistema

21 $\begin{cases} x^2 + y^2 < 16 \\ y - x^2 > 0 \end{cases}$

22 $\begin{cases} y - x \le 0 \\ y + x \ge 2 \\ x \le 5 \end{cases}$

23 $\begin{cases} x - 2y \le 2 \\ y - 3x \le 4 \\ 2x + y \le 4 \end{cases}$

24 $\begin{cases} x^2 - y < 0 \\ y - 2x < 5 \\ xy < 0 \end{cases}$

Ejercicios 25 – 34: Exprese lo siguiente en forma de una sola matriz.

25 $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

26 $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$

27 $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

28 $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 8 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$

29 $2\begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

30 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$

31 $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

32 $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

33 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\right\}$

34 $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -3 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -3 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$

Ejercicios 35 – 38: Determine la matriz inversa.

35 $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

36 $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

37 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

38 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

39 Resuelva el sistema empleando el resultado del Ejercicio 35.

$$\begin{cases} 5x - 4y = 30 \\ -3x + 2y = -16 \end{cases}$$

40 Resuelva el sistema aplicando el resultado del Ejercicio 36.

$$\begin{cases} 2x - y = -5 \\ x + 4y + 2z = 15 \\ 3x - 2y + z = -7 \end{cases}$$

Ejercicios 41 – 50: Calcule el determinante de la matriz.

41 $[-6]$

42 $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$

43 $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

44 $\begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

45 $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

46 $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -5 & 2 & -4 \\ 7 & 3 & -6 \end{bmatrix}$

47 $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -4 & 0 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

48 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 2 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

49 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

50 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

Ejercicios 51 y 52: Resuelva la ecuación $|A - xI| = 0$

51 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$, $I = I_2$

52 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, $I = I_3$

Ejercicios 53 y 54: Sin desarrollar, explique por qué la ecuación es válida.

53 $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 12 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

54 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & k \\ a & b & c \end{vmatrix}$

55 Calcule el determinante de la matriz $n \times n$, (a_{ij}), donde $a_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$.

56 Sin desarrollar, demuestre que

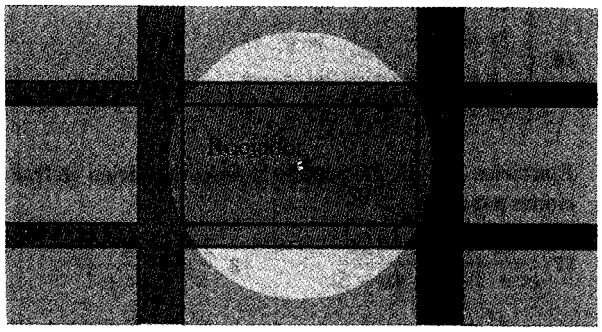
$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0.$$

Ejercicios 57 y 58: Con la regla de Cramer resuelva el sistema.

57 $\begin{cases} 5x - 6y = 4 \\ 3x + 7y = 8 \end{cases}$

58 $\begin{cases} 2x - 3y + 2z = -3 \\ -3x + 2y + z = 1 \\ 4x + y - 3z = 4 \end{cases}$

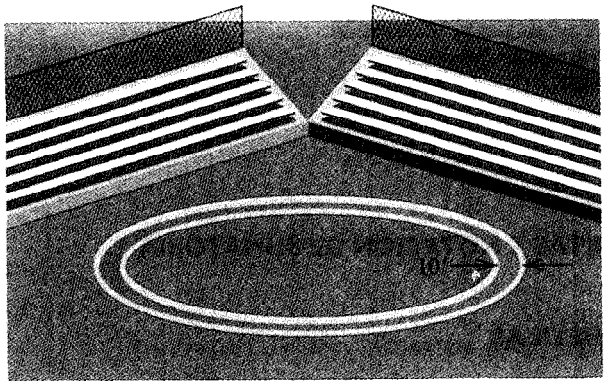
59 ***Riego de un campo*** Se desea colocar un rociador rotatorio, con alcance de 50 pies, en el centro de un campo rectangular (véase la figura). Si el área del campo es 4 000 pies^2, y el agua debe llegar apenas a las esquinas, calcule las dimensiones del campo.



60 Deduzca las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, que pasan por el punto $(0, 3)$. (*Sugerencia:* Sea $y = mx + 3$ y determine las condiciones de m para que se asegure que el sistema sólo tenga una solución).

61 ***Contabilidad de nómina*** Un contador debe pagar impuestos y bonos sobre nómina a los empleados, en una empresa que tiene utilidades de \$50 000. El impuesto total es 40% de la cantidad que queda después de pagar la participación de los empleados, y el total pagado por este concepto es 10% de lo que resta después de separar lo de los impuestos. Calcule el impuesto y la participación totales que se pagan.

62 ***Dimensiones de una pista*** Una pista circular debe tener 10 pies de ancho (vea la figura). La longitud interior de la pista debe ser el 90% de la longitud exterior. Calcule las dimensiones de la pista.



63 ***Flujos*** Para llenar un depósito de almacenamiento de agua, de 1 000 pies^3, se pueden emplear tres tubos, A, B y C. Cuando se usan los tres tubos, el llenado tarda 10 h. Cuando sólo se usan A y B, el tiempo de llenado aumenta a 20 h. Con los tubos A y C, el tanque se puede llenar en 12.5 h. Calcule el flujo en cada uno de los tubos, en pies cúbicos por hora.

64 ***Cargos por embarque*** Para surtir un pedido de 150 escritorios, un distribuidor mueblero debe embarcarlos de dos bodegas. El costo de embarque por escritorio es \$24 de la bodega poniente, y \$35 de la bodega oriente. Si el costo total de embarque es \$4 025, ¿cuántos escritorios se embarcan de cada bodega?

65 ***Tarifas de correo expreso*** Una empresa de mensajería cobra \$15 por entrega de una carta durante la noche, siempre que las dimensiones del sobre satisfagan las tres condiciones siguientes: (a) que el largo, sea 12 pulg como máximo; (b) que la anchura sea 8 pulg como máximo, y (c) que la anchura sea, cuando menos, la mitad del largo. Deduzca y grafique un sistema de desigualdades que represente todas las posibilidades para las dimensiones de un sobre estándar.

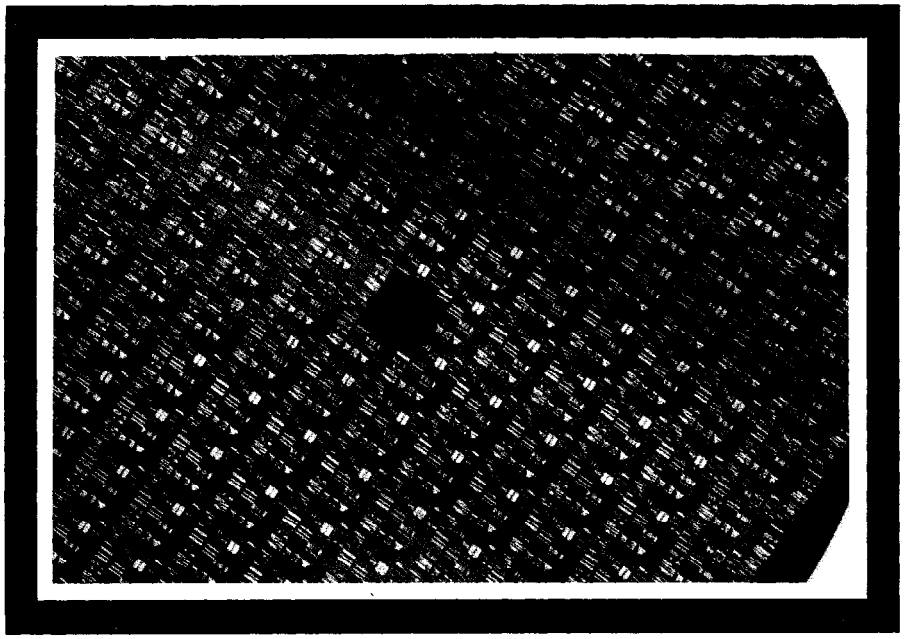
66 ***Actividades de un ciervo*** Un ciervo pasa el día ocupado en tres actividades básicas: descanso, búsqueda de alimento y apacentamiento. Debe pasar cuando menos 6 horas diarias descansando, y el número de horas que busca alimento debe ser cuando menos dos veces el tiempo que pasa pastando. Si x es el número de horas que pasa buscando alimento, y y es el número de horas en apacentamiento, deduzca y grafique el sistema de desigualdades que represente las divisiones posibles del día.

67 ***Programación de producción*** Una empresa fabrica una podadora motorizada y una canteadora, también motorizada. Estos dos productos tienen una calidad tan alta que la empresa vende toda su producción, pero su capacidad de producción está limitada en las áreas de maquinado, soldadura y ensamble. Cada semana, la empresa dispone de 600 h de maquinado, 300 de soldadura y 550 de ensamble. En la siguiente tabla se indican las horas necesarias para producir cada artículo que se fabrica.

Producto	Maquinado	Soldadura	Ensamble
Podadora	6	2	5
Canteadora	4	3	5

Las utilidades en la venta son \$100 para la podadora y \$80 para la canteadora, respectivamente. ¿Cuántas podadoras y canteadores se deben producir semanalmente para maximizar la utilidad?

68 ***Maximización de los rendimientos de inversión*** Una pareja jubilada desea invertir \$150 000, diversificando en tres áreas: acciones de alto riesgo, con tasa de rendimiento anual (o interés) de 15%; acciones de bajo riesgo con rendimiento anual esperado de 10%; y bonos gubernamentales que pagan interés anual de 8%, sin riesgo. Para proteger el valor de la inversión, la pareja desea colocar cuando menos el doble de acciones de bajo riesgo, con respecto a las de alto riesgo, y con el resto comprar bonos. ¿Cómo deben repartir el dinero para maximizar el rendimiento anual esperado?



Las sucesiones (o secuencias) se aplican en los circuitos integrados de alta densidad para computadora y en muchos otros aspectos de la ciencia y la industria.

10.1	**SUCESIONES INFINITAS Y NOTACIÓN DE SUMATORIA**
10.2	**SUCESIONES ARITMÉTICAS**
10.3	**SUCESIONES GEOMÉTRICAS**
10.4	**INDUCCIÓN MATEMÁTICA**
10.5	**TEOREMA DEL BINOMIO**
10.6	**PERMUTACIONES**
10.7	**PERMUTACIONES DISTINGUIBLES Y COMBINACIONES**
10.8	**PROBABILIDAD**

CAPÍTULO 10

SUCESIONES, SERIES Y PROBABILIDAD

■ *Las sucesiones y la notación de sumatoria, que se estudian en la primera sección, son de gran importancia en matemáticas superiores y sus aplicaciones. De interés especial son las sucesiones aritméticas y geométricas, que se tratan en las Seccs. 10.2 y 10.3. A continuación se explica el método de la inducción matemática, proceso que con frecuencia se emplea para demostrar que es cierto cada enunciado de una sucesión infinita de enunciados. Se usa la inducción, como aplicación, para demostrar el Teorema del Binomio en la Secc. 10.5. En la última parte del capítulo se analizan procesos de conteo que surgen con frecuencia en matemáticas y en la vida cotidiana. Estos procesos incluyen los conceptos de permutaciones, combinaciones y probabilidad.* ■

10.1 SUCESIONES INFINITAS Y NOTACIÓN DE SUMATORIA

Una *sucesión infinita* (o *secuencia infinita*) arbitraria se puede representar como sigue:

Notación de sucesión infinita

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

Por comodidad, a las sucesiones infinitas se les llama *sucesiones*, a secas. Se considera que una sucesión infinita es un conjunto de números reales en correspondencia biunívoca con los enteros positivos. Cada número a_k es un **término** de la sucesión. La sucesión es *ordenada*, porque hay un **primer término** a_1, un **segundo término** a_2, un **45o. término** a_{45}, y si n indica cualquier entero positivo arbitrario, un ***n*-ésimo término**, a_n. Las sucesiones infinitas se definen, por lo común, enunciando una fórmula para el n-ésimo término.

En matemáticas se presentan con frecuencia las sucesiones infinitas. Por ejemplo, la sucesión

$$0.6, 0.66, 0.666, 0.6666, 0.66666, \ldots$$

se puede usar para representar el número racional $\frac{2}{3}$. En este caso, el n-ésimo término se acerca cada vez más a $\frac{2}{3}$ al aumentar n.

Asimismo se considera que una sucesión infinita es una función. Según la Secc. 3.4, una función f es una correspondencia que asigna exactamente a cada número x del dominio D un número $f(x)$ del contradominio R. Si se limita el dominio a los enteros positivos 1, 2, 3, . . . , se obtiene una sucesión infinita que se apega a la siguiente definición.

Definición de sucesión infinita

Una **sucesión infinita** es una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos

En este libro, el contradominio de una sucesión infinita será un conjunto de números reales.

Si una función f es una sucesión infinita, entonces a cada entero positivo n corresponde un número real $f(n)$. Esos números del contradominio de f se pueden representar mediante

$$f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n), \ldots.$$

Para pasar a la forma de subíndices, como la que se presenta al principio de esta sección, se considera $a_n = f(n)$ para todo entero positivo n.

De acuerdo con la definición de igualdad de funciones, se tiene que una sucesión

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

es **igual** a una sucesión

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$$

si y sólo si $a_k = b_k$ para todo entero positivo k.

Otra forma de representar una sucesión a_n con término n-ésimo, es $\{a_n\}$. Por ejemplo, el n-ésimo término de la sucesión $\{2^n\}$ es $a_n = 2^n$. Esta sucesión es

$$2^1, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n, \ldots$$

Por definición, la sucesión $\{2^n\}$ es la función f con $f(n) = 2^n$ para todo entero positivo n.

EJEMPLO 1 ***Cálculo de los términos de una sucesión***

Escribir los cuatro primeros términos, y el décimo, de cada una de las siguientes sucesiones:

(a) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ **(b)** $\{2 + (0.1)^n\}$ **(c)** $\left\{(-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{3n-1}\right\}$ **(d)** $\{4\}$

SOLUCIÓN Para obtener los cuatro primeros términos, se sustituye $n = 1, 2, 3$ y 4 en la fórmula de a_n. El décimo término se define sustituyendo 10 en lugar de n. A continuación se efectúa lo anterior y se simplifica:

Sucesión	n-ésimo término a_n	Primeros cuatro términos	Décimo término
$\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$	$\dfrac{n}{n+1}$	$\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}$	$\dfrac{10}{11}$
$\{2 + (0.1)^n\}$	$2 + (0.1)^n$	2.1, 2.01, 2.001, 2.0001	2.0000000001
$\left\{(-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{3n-1}\right\}$	$(-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{3n-1}$	$\dfrac{1}{2}, -\dfrac{4}{5}, \dfrac{9}{8}, -\dfrac{16}{11}$	$-\dfrac{100}{29}$
$\{4\}$	4	4, 4, 4, 4	4

En algunos casos se define el primer término a_1 junto con una regla para obtener cualquier término a_{k+1} a partir del anterior a_k cuando $k \geq 1$. A esta manera de enunciar se le llama **definición recurrente**, y se dice que la sucesión se define **recurrentemente**.

EJEMPLO 2 ***Obtención de términos de una sucesión definida recurrentemente***

Calcular los primeros cuatro términos y el n-ésimo de la sucesión infinita cuya definición recurrente es la siguiente:

$$a_1 = 3, \qquad a_{k+1} = 2a_k \qquad \text{para} \quad k \geq 1$$

SOLUCIÓN Los cuatro primeros términos son

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_2 &= 2a_1 = 2 \cdot 3 = 6 \\ a_3 &= 2a_2 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3 = 12 \\ a_4 &= 2a_3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3 = 24. \end{aligned}$$

Se han escrito los términos en forma de productos para poder apreciar la naturaleza del n-ésimo término. Para continuar se obtiene $a_5 = 2^4 \cdot 3$, $a_6 = 2^5 \cdot 3$ y, en general,

$$a_n = 2^{n-1} \cdot 3$$

para todo entero positivo n.

Si sólo se conocen los primeros términos de una sucesión infinita, es imposible predecir los demás. Por ejemplo, si se dan 3, 6, 9, . . . , y se solicita el cuarto término, no podríamos proseguir careciendo de más información. La sucesión infinita cuyo n-ésimo término es

$$a_n = 3n + (1 - n)^3(2 - n)^2(3 - n)$$

tiene cuatro primeros términos que son 3, 6, 9 y 120. Es posible dar sucesiones en las cuales los primeros tres términos sean 3, 6, 9 y el cuarto sea *cualquier* número dado. Esto demuestra que cuando se trabaja con una sucesión infinita es esencial tener información específica acerca del n-ésimo término, o bien, contar con un método general para obtener cada término a partir del precedente.

A veces se necesita determinar la suma de muchos términos de una sucesión infinita. Para expresar con facilidad esas sumas, se usa la **notación de sumatoria**. Dada una sucesión infinita

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots,$$

el símbolo $\sum_{k=1}^{m} a_k$ representa la *sumatoria*, o suma sucesiva de los primeros m términos, como se ve a continuación.

Notación de sumatoria

$$\sum_{k=1}^{m} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m$$

La letra griega sigma mayúscula, $\sum$, indica tal suma sucesiva, y el símbolo a_k representa el k-ésimo término. La letra k es el **índice** (o **variable**) **de sumatoria**, y los números 1 y m indican los valores mínimo y máximo de tal índice o variable, respectivamente.

EJEMPLO 3 ***Evaluación de una sumatoria***

Determinar la sumatoria $\sum_{k=1}^{4} k^2(k - 3)$.

SOLUCIÓN En este caso, $a_k = k^2(k - 3)$. Para evaluar la sumatoria, sólo se sustituye, consecutivamente, k por los enteros 1, 2, 3 y 4, y se suman los términos resultantes.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{4} k^2(k - 3) &= 1^2(1 - 3) + 2^2(2 - 3) + 3^2(3 - 3) + 4^2(4 - 3) \\ &= (-2) + (-4) + 0 + 16 = 10\end{aligned}$$

No importa la letra que se use para representar la variable de sumatoria. Por ejemplo, si j es la citada variable, entonces

$$\sum_{j=1}^{m} a_j = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m,$$

que es la misma suma que $\sum_{k=1}^{m} a_k$. También se usan otros símbolos, por ejemplo, la sumatoria

del Ejemplo 3 se puede representar por

$$\sum_{j=1}^{4} j^2(j-3).$$

Si n es un entero positivo, entonces la suma de los n primeros términos de una sucesión infinita se representará con S_n. Por ejemplo, dadas $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$,

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

y, en general,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Nótese que también se puede escribir

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = S_1 + a_2$$
$$S_3 = S_2 + a_3$$
$$S_4 = S_3 + a_4$$

y, para toda $n > 1$,

$$S_n = S_{n-1} + a_n.$$

Al número real S_n se le denomina ***n*-ésima suma parcial** de la sucesión infinita $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, y la sucesión

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$$

es una **sucesión de sumas parciales**. Las sucesiones de sumas parciales son importantes en el estudio de las *series infinitas*, tema del Cálculo. En la Secc. 10.3 se estudian algunos tipos especiales de series infinitas.

EJEMPLO 4 *Cálculo de los términos de una sucesión de sumas parciales*

Calcular los cuatro primeros términos, y el n-ésimo, de la sucesión de sumas parciales relacionada con la sucesión $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ de enteros positivos.

SOLUCIÓN Si $a_n = n$, entonces los cuatro primeros términos de la sucesión de sumas parciales son

$$S_1 = a_1 = 1$$
$$S_2 = S_1 + a_2 = 1 + 2 = 3$$
$$S_3 = S_2 + a_3 = 3 + 3 = 6$$
$$S_4 = S_3 + a_4 = 6 + 4 = 10.$$

(continúa)

La n-ésima suma parcial S_n (es decir, la suma de 1, 2, 3, . . . , n) se puede escribir en cualquiera de las siguientes formas:

$$S_n = 1 + 2 \quad + 3 \quad + \cdots + (n-2) + (n-1) + n$$
$$S_n = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 \quad + 2 \quad + 1$$

Sumando los términos correspondientes en cada lado de las ecuaciones se obtiene

$$2S_n = \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ veces}}.$$

Como la expresión $(n + 1)$ aparece n veces en el lado derecho de la última ecuación, entonces

$$2S_n = n(n+1) \quad \text{o, en forma equivalente,} \quad S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Si a_k es igual para todo entero positivo k, por ejemplo $a_k = c$ para un número real c, entonces.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$
$$= c + c + c + \cdots + c = nc.$$

Con lo anterior se ha demostrado la propiedad (1) del teorema siguiente.

Teorema de la suma de una constante

$$\textbf{(1)} \sum_{k=1}^{n} c = nc \qquad \textbf{(2)} \sum_{k=m}^{n} c = (n - m + 1)c$$

Para demostrar la parte (2), se escribe

$$\sum_{k=m}^{n} c = \sum_{k=1}^{n} c - \sum_{k=1}^{m-1} c \qquad \text{se restan los primeros } m-1 \text{ términos de la suma de } n \text{ términos}$$
$$= nc - (m-1)c \qquad \text{se aplica (1) del teorema para cada suma}$$
$$= (n - m + 1)c \qquad \text{se saca } c \text{ como factor común}$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO

Sumatoria de una constante

- $\sum_{k=1}^{4} 7 = 7 + 7 + 7 + 7 = 4 \cdot 7 = 28$
- $\sum_{k=1}^{10} \pi = 10\pi$
- $\sum_{k=3}^{8} 9 = (8 - 3 + 1)(9) = 6(9) = 54$
- $\sum_{k=10}^{20} 5 = (20 - 10 + 1)(5) = 11(5) = 55$

Como se muestra en la propiedad (2) del teorema anterior, el dominio de la variable de sumatoria no necesita comenzar en 1. Por ejemplo,

$$\sum_{k=4}^{8} a_k = a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8.$$

Otra variante: si el primer término de una sucesión infinita es a_0, como en

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

entonces se consideran sumatorias de la forma

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

que es la suma de los $n + 1$ primeros términos de la sucesión.

EJEMPLO 5 ***Evaluación de una sumatoria***

Evaluar la sumatoria $\sum_{k=0}^{3} \frac{2^k}{k+1}$.

SOLUCIÓN

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{2^k}{k+1} = \frac{2^0}{0+1} + \frac{2^1}{1+1} + \frac{2^2}{2+1} + \frac{2^3}{3+1}$$
$$= 1 + 1 + \tfrac{4}{3} + 2 = \tfrac{16}{3}$$

Se puede emplear la notación de sumatoria para indicar polinomios. De modo que si

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

entonces

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

El teorema que sigue acerca de las sumas, tiene muchas aplicaciones.

Teorema de sumatorias

Si $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ y además $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, son sucesiones infinitas, entonces, para todo entero positivo n,

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$ para todo número real c.

DEMOSTRACIÓN Para demostrar la fórmula (1) se desarrolla primero

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \cdots + (a_n + b_n).$$

Si se emplean varias veces las propiedades conmutativa y asociativa, se puede reacomodar los términos del segundo miembro para obtener

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n).$$

Expresando el lado derecho en notación de sumatoria se obtiene la fórmula (1).

Para la fórmula (3),

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} (ca_k) &= ca_1 + ca_2 + ca_3 + \cdots + ca_n \\ &= c(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) \\ &= c\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right).\end{aligned}$$

Se deja como ejercicio la demostración de (2).

EJERCICIOS 10.1

Ejercicios 1 – 16: Calcule los primeros cuatro términos y el octavo de la sucesión.

1 $\{12 - 3n\}$

2 $\left\{\dfrac{3}{5n-2}\right\}$

3 $\left\{\dfrac{3n-2}{n^2+1}\right\}$

4 $\left\{10 + \dfrac{1}{n}\right\}$

5 $\{9\}$

6 $\{\sqrt{2}\}$

7 $\{2 + (-0.1)^n\}$

8 $\{4 + (0.1)^n\}$

9 $\left\{(-1)^{n-1}\dfrac{n+7}{2n}\right\}$

10 $\left\{(-1)^n\dfrac{6-2n}{\sqrt{n+1}}\right\}$

11 $\{1 + (-1)^{n+1}\}$

12 $\{(-1)^{n+1} + (0.1)^{n-1}\}$

13 $\left\{\dfrac{2^n}{n^2+2}\right\}$

14 $\{(n-1)(n-2)(n-3)\}$

15 a_n es el número de cifras decimales en $(0.1)^n$.

16 a_n es el número de enteros positivos menores que n^3.

Ejercicios 17 – 24: Obtenga los primeros cinco términos de la sucesión infinita con la definición recurrente indicada.

17 $a_1 = 2, \quad a_{k+1} = 3a_k - 5$

18 $a_1 = 5, \quad a_{k+1} = 7 - 2a_k$

19 $a_1 = -3, \quad a_{k+1} = a_k^2$

20 $a_1 = 128, \quad a_{k+1} = \frac{1}{4}a_k$

21 $a_1 = 5, \quad a_{k+1} = ka_k$

22 $a_1 = 3, \quad a_{k+1} = 1/a_k$

23 $a_1 = 2, \quad a_{k+1} = (a_k)^k$

24 $a_1 = 2, \quad a_{k+1} = (a_k)^{1/k}$

Ejercicios 25 – 28: Obtenga los primeros cuatro términos de la sucesión de sumas parciales en la sucesión dada.

25 $\{3 + \frac{1}{2}n\}$

26 $\{1/n^2\}$

27 $\{(-1)^n n^{-1/2}\}$

28 $\{(-1)^n 1/2^n\}$

Ejercicios 29 – 42: Evalúe la sumatoria.

29 $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (2k - 7)$

30 $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} (10 - 3k)$

31 $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} (k^2 - 5)$

32 $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} [1 + (-1)^k]$

33 $\sum_{k=0}^{5} k(k-2)$ **34** $\sum_{k=0}^{4} (k-1)(k-3)$

35 $\sum_{k=3}^{6} \frac{k-5}{k-1}$ **36** $\sum_{k=1}^{6} \frac{3}{k+1}$

37 $\sum_{k=1}^{5} (-3)^{k-1}$ **38** $\sum_{k=0}^{4} 3(2^k)$

39 $\sum_{k=1}^{100} 100$ **40** $\sum_{k=1}^{1000} 5$

41 $\sum_{k=253}^{571} \frac{1}{3}$ **42** $\sum_{k=137}^{428} 2.1$

43 Demuestre la fórmula (2) del teorema de sumatorias.

44 Generalice la fórmula (1) del teorema de sumatorias a

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k + c_k).$$

45 Se pueden aproximar los términos de la sucesión cuya definición recurrente es $a_1 = 5$, $a_{k+1} = \sqrt{a_k}$ con una calculadora tecleando 5 y oprimiendo repetidamente la tecla $\boxed{\sqrt{x}}$. Explique lo que sucede a los términos de la sucesión al aumentar k.

46 ***Sucesión de Bode*** La sucesión de Bode se define como

$$a_1 = 0.4, \qquad a_k = 0.1(3 \cdot 2^{k-2} + 4) \text{ para } k \geq 2,$$

y se puede aplicar para calcular distancias del Sol a los planetas. Estas distancias se miden en unidades astronómicas (UA), donde 1 UA = 150 000 000 km. Por ejemplo, el tercer término corresponde a la Tierra, y el quinto, al planetoide Ceres. Calcule los primeros cinco términos de la sucesión.

47 En una pregunta de examen se presentan los primeros cuatro términos de una sucesión: 2, 4, 6 y 8, y se pregunta cuál es el quinto. Demuestre que puede ser cualquier número real a determinando el n-ésimo término de una sucesión cuyos primeros cinco términos son 2, 4, 6, 8 y a.

48 ***Proliferación de bacterias*** El número de bacterias en determinado cultivo es, inicialmente, 500, y se duplica cada día.

(a) Calcule el número de bacterias presentes después de uno, dos y tres días.

(b) Deduzca la fórmula del número de bacterias presentes después de n días.

49 Los términos de la sucesión cuya definición recurrente es $a_1 = 1$, $a_{k+1} = \cos a_k$ se pueden determinar con una calculadora presionando la tecla 1 y luego $\boxed{\cos}$ (en modo radianes), repetidamente. Explique lo que sucede con los términos de la sucesión al aumentar k.

50 Se pueden obtener aproximaciones del valor de π a partir de la sucesión

$$x_1 = 3, \qquad x_{k+1} = x_k - \tan x_k.$$

(a) Calcule los primeros cinco términos de esta sucesión.

(b) ¿Qué sucede con los términos de la sucesión cuando $x_1 = 6$?

51 ***La sucesión de Fibonacci*** La definición recurrente de la sucesión de Fibonacci es

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 1, \qquad a_{k+1} = a_k + a_{k-1} \text{ para } k \geq 2.$$

(a) Calcule los primeros 10 términos de la sucesión.

(b) Los términos de la sucesión $r_k = a_{k+1}/a_k$ producen mejores aproximaciones progresivas a τ, la razón aurea. Calcule los primeros 10 términos de esta sucesión.

52 ***La sucesión de Fibonacci*** Esta sucesión se puede definir con la fórmula

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Obtenga los primeros 8 términos y demuestre que concuerdan con los que se calcularon empleando la definición del Ejercicio 51.

C **Ejercicios 53 – 55: Para el n-ésimo término dado $a_n = f(n)$ de una sucesión, use la gráfica de $y = f(x)$ en el intervalo [1, 100] para comprobar que cuando n aumenta sin límite, a_n tiende a algún número real c.**

53 $a_n = \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}\right)^n$ **54** $a_n = n^{1/n}$

55 $a_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n}$

10.2 SUCESIONES ARITMÉTICAS

En esta sección y en la siguiente se tratan dos tipos especiales de sucesiones: las aritméticas y las geométricas. El primer tipo se puede definir como sigue.

Definición de la sucesión aritmética

Una sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ es una **sucesión aritmética** si hay un número real d tal que para cada entero positivo k,

$$a_{k+1} = a_k + d.$$

El número $d = a_{k+1} - ak$ se llama **diferencia común** de la sucesión.

Nótese que la diferencia común d es la diferencia entre dos términos sucesivos *cualesquiera* de una sucesión aritmética.

EJEMPLO 1 ***Demostración de que una sucesión es aritmética***

Demostrar que la sucesión

$$1, 4, 7, 10, \ldots, 3n - 2, \ldots$$

es aritmética, y calcular la diferencia común.

SOLUCIÓN Si $a_n = 3n - 2$, entonces, para todo entero positivo k,

$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_k &= [3(k + 1) - 2] - (3k - 2) \\ &= 3k + 3 - 2 - 3k + 2 = 3. \end{aligned}$$

Por consiguiente, la sucesión dada es aritmética, y la diferencia común es 3.

Dada una sucesión aritmética, se sabe que

$$a_{k+1} = a_k + d$$

para todo entero positivo k. Esto da una fórmula de recurrencia para obtener términos sucesivos. Comenzando con un número real a_1 se obtiene una sucesión aritmética con diferencia común d, simplemente sumando d y a_1, luego sumando d a $a_1 + d$, y así sucesivamente, para llegar a

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, a_1 + 4d, \ldots.$$

El n-ésimo término a_n de esta sucesión, está expresado por la fórmula siguiente.

n-ésimo término de una sucesión aritmética

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

EJEMPLO 2 ***Cálculo de un término específico de una sucesión aritmética***

Los primeros tres términos de una sucesión aritmética son 20, 16.5 y 13. Calcular el décimo quinto término.

SOLUCIÓN La diferencia común es

$$16.5 - 20 = -3.5.$$

Sustituyendo $a_1 = 20$, $d = -3.5$ y $n = 15$ en a_n $a_1 + (n-1)d$, se tiene

$$a_{15} = 20 + (15 - 1)(-3.5) = 20 - 49 = -29.$$

EJEMPLO 3 ***Cálculo de un término específico de una sucesión aritmética***

El cuarto término de una sucesión aritmética es 5, y el noveno es 20. Calcular el sexto término.

SOLUCIÓN Los datos son $a_4 = 5$ y $a_9 = 20$, y se desea calcular a_6. Los siguientes son sistemas equivalentes de ecuaciones en las variables a_1 y d:

$$\begin{cases} a_4 = a_1 + (4-1)d & \text{sea } n = 4 \text{ en } a_n = a_1 + (n-1)d, \\ a_9 = a_1 + (9-1)d & \text{sea } n = 9 \text{ en } a_n = a_1 + (n-1)d, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 = a_1 + 3d & a_4 = 5 \\ 20 = a_1 + 8d & a_9 = 20 \end{cases}$$

Restando de la segunda la primera ecuación del sistema, da como resultado $15 = 5d$, o sea, $d = 3$. Por tanto, $a_1 = 5 - 3d = -4$. Por tanto,

$$\begin{aligned} a_6 &= a_1 + (6-1)d && \text{sea } n = 6 \text{ en } a_n = a_1 + (n-1)d, \\ &= (-4) + (5)(3) && a_1 = -4 \text{ y } d = 3 \\ &= 11. && \text{se simplifica} \end{aligned}$$

El teorema siguiente contiene la fórmula de la n-ésima suma parcial S_n de una sucesión aritmética.

Teorema: Fórmulas de S_n

Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ es una sucesión aritmética cuya diferencia común es d, entonces, la n-ésima suma parcial, S_n, es

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \qquad \text{o bien} \qquad S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

DEMOSTRACIÓN Se puede escribir

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + [a_1 + (n-1)d]. \end{aligned}$$

Aplicando varias veces las propiedades asociativa y conmutativa, se tiene

$$S_n = (a_1 + a_1 + a_1 + \cdots + a_1) + [d + 2d + \cdots + (n-1)d],$$

donde a_1 aparece n veces dentro del primer par de paréntesis. Así,

$$S_n = na_1 + d[1 + 2 + \cdots + (n - 1)].$$

La expresión entre corchetes es la suma de los primeros $n - 1$ enteros positivos. Con la fórmula $S_n = n(n + 1)/2$, del Ejemplo 4 de la Secc. 10.1, pero con $n - 1$ en vez de n, se tiene

$$1 + 2 + \cdots + (n - 1) = \frac{(n - 1)n}{2}.$$

Sustituyendo en la última ecuación de S_n y factorizando, se llega a

$$S_n = na_1 + d\frac{n(n - 1)}{2}$$

$$= \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d].$$

Como $a_n = a_1 + (n - 1)d$, la última ecuación equivale a

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n). \blacksquare$$

EJEMPLO 4 ***Cálculo de una suma de enteros pares***

Calcular la suma de todos los enteros pares desde 2 a 100.

SOLUCIÓN Este problema equivale a calcular la suma de los 50 primeros términos de la sucesión aritmética

$$2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots.$$

Sustituyendo $n = 50$, $a_1 = 2$ y $a_{50} = 100$ en $S_n = (n/2)(a_1 + a_n)$, se obtiene

$$S_{50} = \tfrac{50}{2}(2 + 100) = 2550.$$

Otra alternativa es usar $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$ con $d = 2$:

$$S_{50} = \tfrac{50}{2}[2(2) + (50 - 1)2] = 25[4 + 98] = 2550$$

La **media aritmética** de dos números a y b se define como $(a + b)/2$. Es también el **promedio aritmético** de a y b. Nótese que

$$a, \frac{a + b}{2}, b$$

es una sucesión aritmética finita. El concepto puede generalizarse como sigue. Si $c_1, c_2, \ldots, c_k$ son números reales tales que

$$a, c_1, c_2, \ldots, c_k, b$$

es una sucesión aritmética finita, entonces $c_1, c_2, \ldots, c_k$ son k **medias aritméticas** entre los números a y b. El proceso de calcular esos números se llama *intercalar* o *insertar* k medias aritméticas entre a y b

EJEMPLO 5 ***Inserción de medias aritméticas***

Insertar tres medias aritméticas entre 2 y 9.

SOLUCIÓN Se desea calcular 3 números reales c_1, c_2 y c_3, tales que lo siguiente sea una sucesión aritmética finita:

$$2, c_1, c_2, c_3, 9$$

Se considera que esta sucesión es aritmética, con el primer término $a_1 = 2$ y el quinto $a_5 = 9$. Para calcular la diferencia común d se procede como sigue:

$$\begin{aligned} a_5 &= a_1 + (5-1)d && \text{sea } n = 5 \text{ en } a_n = a_1 + (n-1)d, \\ 9 &= 2 + 4d && a_5 = 9, \text{ y } a_1 = 2 \\ d &= \tfrac{7}{4} && \text{se despeja } d \end{aligned}$$

Así, las medias aritméticas son

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 + d = 2 + \tfrac{7}{4} = \tfrac{15}{4} \\ c_2 &= c_1 + d = \tfrac{15}{4} + \tfrac{7}{4} = \tfrac{22}{4} = \tfrac{11}{2} \\ c_3 &= c_2 + d = \tfrac{22}{4} + \tfrac{7}{4} = \tfrac{29}{4}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 6 ***Aplicación de una sucesión aritmética***

Un carpintero desea construir una escalera de mano con 9 escalones, de tal manera que el espacio entre ellos decrezca uniformemente, desde 24 pulg entre el suelo y el primer escalón, hasta 18 pulg entre los dos peldaños superiores. Calcule los 7 espacios intermedios.

SOLUCIÓN La escalera se ilustra en la Fig. 10.1. Los espacios entre escalones deben formar una sucesión aritmética $a_1, a_2, \ldots, a_9$ con $a_1 = 18$ y $a_9 = 24$. Por consiguiente se necesita introducir siete medias aritméticas entre 18 y 24. Empleando $a_n = a_1 + (n-1)d$ con $n = 9$, $a_1 = 18$ y $a_9 = 24$, se tiene

$$24 = 18 + 8d, \qquad \text{o sea,} \qquad 8d = 6.$$

Por consiguiente, $d = \frac{6}{8} = 0.75$, y los peldaños intermedios están espaciados (en pulgadas) así:

$$18.75,\ 19.5,\ 20.25,\ 21,\ 21.75,\ 22.5,\ 23.25.$$

A veces se necesita expresar una suma en notación de sumatoria, como en el ejemplo que sigue.

EJEMPLO 7 ***Aplicación de la notación de sumatoria***

Expresar en dicha notación:

$$\tfrac{1}{4} + \tfrac{2}{9} + \tfrac{3}{14} + \tfrac{4}{19} + \tfrac{5}{24} + \tfrac{6}{29}$$

SOLUCIÓN Los seis términos de la suma no forman sucesión aritmética; sin embargo, los numeradores y denominadores de las fracciones, *por separado*, son sucesiones aritméticas. Específicamente, se observa lo siguiente:

Numeradores: 1, 2, 3, 4, 5, 6 **diferencia común = 1**

Denominadores: 4, 9, 14, 19, 24, 29 **diferencia común = 5**

Aplicando dos veces la fórmula del n-ésimo término de una sucesión aritmética, se obtiene el n-ésimo término de cada sucesión:

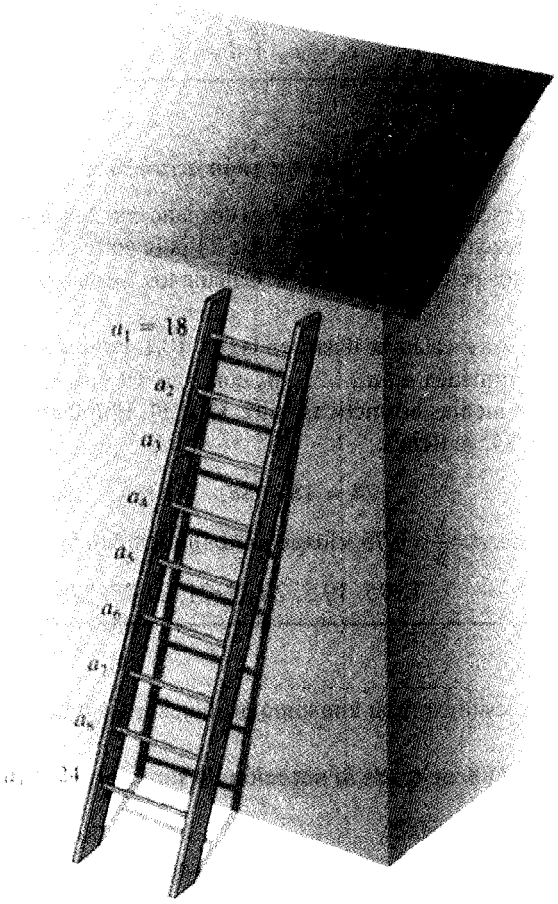
$$a_n = a_1 + (n - 1)d = 1 + (n - 1)1 = n$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d = 4 + (n - 1)5 = 5n - 1$$

Por consiguiente, el n-ésimo término de la suma dada es $n/(5n - 1)$, y se puede escribir

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{9} + \frac{3}{14} + \frac{4}{19} + \frac{5}{24} + \frac{6}{29} = \sum_{n=1}^{6} \frac{n}{5n - 1}.$$

FIGURA 10.1



EJERCICIOS *10.2*

Ejercicios 1 y 2: Demuestre que la sucesión dada es aritmética, y calcule la diferencia común.

1 $-6, -2, 2, \ldots, 4n - 10, \ldots$

2 $53, 48, 43, \ldots, 58 - 5n, \ldots$

Ejercicios 3 – 10: Calcule el quinto, décimo y n-ésimo términos de la sucesión aritmética dada.

3 $2, 6, 10, 14, \ldots$

4 $16, 13, 10, 7, \ldots$

5 $3, 2.7, 2.4, 2.1, \ldots$

6 $-6, -4.5, -3, -1.5, \ldots$

7 $-7, -3.9, -0.8, 2.3, \ldots$

8 $x - 8, x - 3, x + 2, x + 7, \ldots$

9 $\ln 3, \ln 9, \ln 27, \ln 81, \ldots$

10 $\log 1000, \log 100, \log 10, \log 1, \ldots$

Ejercicios 11 y 12: Determine la diferencia común de la sucesión aritmética que tiene los términos especificados.

11 $a_2 = 21, \quad a_6 = -11$

12 $a_4 = 14, \quad a_{11} = 35$

Ejercicios 13 – 18: Determine el término especificado de la sucesión aritmética que tiene los dos términos dados.

13 a_{12}; $\quad a_1 = 9.1, \quad a_2 = 7.5$

14 a_{11}; $\quad a_1 = 2 + \sqrt{2}, \quad a_2 = 3$

15 a_1; $\quad a_6 = 2.7, \quad a_7 = 5.2$

16 a_1; $\quad a_8 = 47, \quad a_9 = 53$

17 a_{15}; $\quad a_3 = 7, \quad a_{20} = 43$

18 a_{10}; $\quad a_2 = 1, \quad a_{18} = 49$

Ejercicios 19 – 22: Calcule la suma S_n de la sucesión aritmética que satisfaga las condiciones citadas.

19 $a_1 = 40, \quad d = -3, \quad n = 30$

20 $a_1 = 5, \quad d = 0.1, \quad n = 40$

21 $a_1 = -9, \quad a_{10} = 15, \quad n = 10$

22 $a_7 = \frac{7}{3}, \quad d = -\frac{2}{3}, \quad n = 15$

Ejercicios 23 – 26: Evalúe la sumatoria.

23 $\sum_{k=1}^{20} (3k - 5)$

24 $\sum_{k=1}^{12} (7 - 4k)$

25 $\sum_{k=1}^{18} (\frac{1}{2}k + 7)$

26 $\sum_{k=1}^{10} (\frac{1}{4}k + 3)$

Ejercicios 27 – 32: Exprese la suma en notación de sumatoria. (Las respuestas pueden no ser únicas.)

27 $1 + 3 + 5 + 7$

28 $2 + 4 + 6 + 8 + 10$

29 $1 + 3 + 5 + \cdots + 73$

30 $2 + 4 + 6 + \cdots + 150$

31 $\frac{3}{7} + \frac{6}{11} + \frac{9}{15} + \frac{12}{19} + \frac{15}{23} + \frac{18}{27}$

32 $\frac{5}{13} + \frac{10}{11} + \frac{15}{9} + \frac{20}{7}$

Ejercicios 33 y 34: Calcule el número de términos de la sucesión aritmética con las condiciones dadas.

33 $a_1 = -2, \quad d = \frac{1}{4}, \quad S = 21$

34 $a_6 = -3, \quad d = 0.2, \quad S = -33$

35 Inserte 5 medias aritméticas entre 2 y 10.

36 Inserte tres medias aritméticas entre 3 y –5.

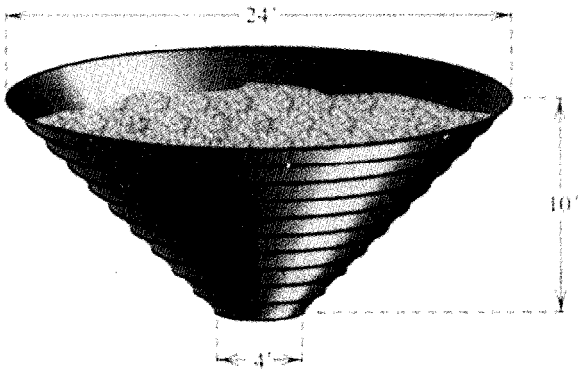
37 **(a)** Calcule el número de enteros que hay entre 32 y 395 que sean divisibles entre 6.
(b) Determine su suma.

38 **(a)** Encuentre el número de enteros negativos mayores que –500, que sean divisibles entre 33.
(b) Calcule su suma.

39 *Pila de troncos* Una pila de troncos tiene 24 en la capa inferior, 23 en la segunda, 22 en la tercera, etcétera. La capa superior tiene 10 troncos. Calcule el número total de troncos en la pila.

40 *Asientos en un estadio* Las 10 primeras filas de asientos en una sección de un estadio tienen 30, 32, 34 lugares, y así sucesivamente. De la decimoprimera a la vigésima tienen 50 asientos. Calcule el número total de asientos en la sección.

41 *Construcción de un silo o depósito de granos* Se desea construir una tolva en forma de cono truncado (véase la figura). Debe tener 10 pies de altura y 11 anillos metálicos colocados uniformemente, uno sobre otro, desde la salida de 4 pies de diámetro en el fondo, a la abertura de 24 pies en la parte superior. Calcule la longitud total de metal necesario para formar los anillos.



42 *Descenso* Un ciclista desciende por una pendiente, y recorre 4 pies en el primer segundo. En cada segundo siguiente el ciclista recorre 5 pies más que en el segundo anterior. Si el ciclista llega al término de la bajada en 11 s, calcule la distancia total recorrida.

43 *Premio en efectivo* Un concurso tiene 5 premios en efectivo, que hacen un total de $5 000, y entre premios sucesivos habrá una diferencia de $100. Calcule el monto del primer premio.

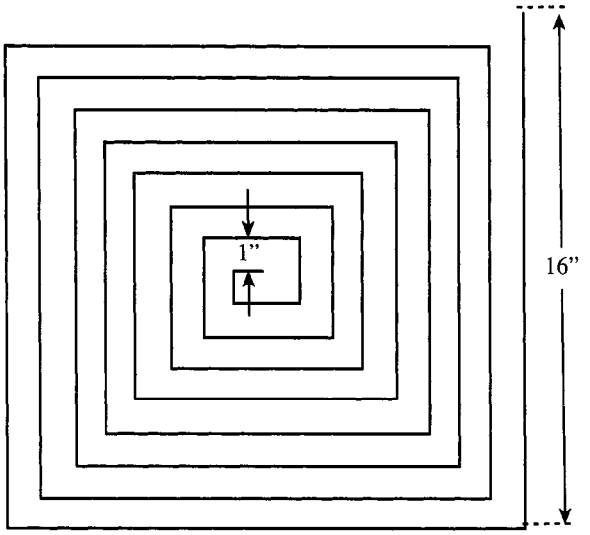
44 *Bono de ventas* Una empresa desea distribuir $46 000 en bonos a sus 10 mejores vendedores. El décimo vendedor de la lista recibirá $1 000, y la diferencia entre los premios sucesivos debe ser constante. Calcule el bono de cada vendedor.

45 *Recorrido de caída de un objeto* Suponiendo insignificante la resistencia del aire, un objeto pequeño que se deja caer desde un globo aerostático recorre 16 pies durante el primer segundo, 48 en el segundo, 80 en el tercero, 112 en el cuarto, y así sucesivamente. Deduzca una ecuación para la distancia que recorre el objeto al caer durante n segundos.

46 Si f es función lineal, demuestre que la sucesión cuyo n-ésimo término es $a_n = f(n)$ es sucesión aritmética.

47 *Secuencia genética* La sucesión cuya definición recurrente es $x_{k+1} = x_k/(1 + x_k)$ se presenta en genética, en el estudio de la eliminación de un gen defectuoso de una población. Demuestre que es aritmética la sucesión cuyo n-ésimo término es $1/x_n$.

48 *Dimensiones de un laberinto* Calcule la longitud total de la línea quebrada de la figura, si el ancho del laberinto es 16 pulg y todos los caminos en él tienen 1 pulg de ancho. ¿Cuál es la longitud, si el ancho del laberinto es 32 pulg?



Ejercicios 49 y 50: A veces, en los negocios, se emplean métodos de depreciación para estimar el valor de un activo para el que se estima una vida de n años. En el método de suma de dígitos de año, para cada año $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, disminuye el valor de un activo una fracción $A_k = (n-k+1)/T_n$ de su costo inicial, donde $T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$.

49 **(a)** Si $n = 8$, calcule $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_8$.

(b) Demuestre que la sucesión en (a) es aritmética, y calcule S_8.

(c) Si el valor inicial de un activo es $1 000, ¿cuánto se habrá depreciado a los 4 años?

50 **(a)** Si n es cualquier entero positivo, calcule $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$.

(b) Demuestre que la sucesión en (a) es aritmética, y calcule S_n.

10.3 SUCESIONES GEOMÉTRICAS

El segundo tipo especial de sucesión que se estudia, la sucesión geométrica, se presenta con frecuencia en problemas aplicados.

Definición de sucesión geométrica

Una sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ es una **sucesión geométrica** si $a_1 \neq 0$ y si hay un número real, $r \neq 0$, tal que para cada entero positivo k,

$$a_{k+1} = a_k r.$$

El número $r = a_{k+1}/a_k$ se llama **razón común** de la sucesión.

Nótese que la razón común $r = a_{k+1}/a_k$ es el cociente (o razón) de dos términos sucesivos *cualesquiera* de una sucesión geométrica.

La fórmula $a_{k+1} = a_k r$ da un método recurrente para obtener los términos de una sucesión geométrica. Se inicia con cualquier número real a_1 distinto de cero y se multiplica por el número r, sucesivamente, para obtener

$$a_1, a_1 r, a_1 r^2, a_1 r^3, \ldots.$$

El n-ésimo término a_n de esta sucesión está expresado por la fórmula siguiente.

Fórmula del n-ésimo término de una sucesión geométrica

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

EJEMPLO 1 ***Cálculo de términos de una sucesión geométrica***

Una sucesión geométrica tiene 3 como primer término, y su razón común es $-\frac{1}{2}$. Calcular los primeros 5 términos y el décimo.

SOLUCIÓN Se define $a_1 = 3$, y $r = -\frac{1}{2}$, entonces los primeros 5 términos serán

$$3, -\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{4}, -\tfrac{3}{8}, \tfrac{3}{16}.$$

Con la fórmula $a_n = a_1 r^{n-1}$, con $n = 10$, se ve que el décimo término es

$$a_{10} = 3(-\tfrac{1}{2})^9 = -\tfrac{3}{512}.$$

EJEMPLO 2 ***Cálculo de un término específico de una sucesión geométrica***

El tercer término de una sucesión geométrica es 5, y el sexto es – 40. Hallar el octavo término.

SOLUCIÓN Los datos son $a_3 = 5$, y $a_6 = -40$, y se desea calcular a_8. Los siguientes sistemas de ecuaciones, con variables a_1 y r, son equivalentes:

$$\begin{cases} a_3 = a_1 r^{3-1} & \text{sea } n = 3 \text{ en } a_n = a_1 r^{n-1}, \\ a_6 = a_1 r^{6-1} & \text{sea } n = 6 \text{ en } a_n = a_1 r^{n-1}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 = a_1 r^2 & a_3 = 5 \\ -40 = a_1 r^5 & a_6 = -40 \end{cases}$$

Despejando a_1 de la primera ecuación del sistema se tiene $a_1 = 5/r^2$. Sustituyendo en la segunda ecuación, se tiene

$$-40 = \frac{5}{r^2} \cdot r^5.$$

Al simplificar se llega a $r^3 = -8$, y por consiguiente, $r = -2$. A continuación, se usa $a_1 = 5/r^2$ para obtener

$$a_1 = \frac{5}{(-2)^2} = \frac{5}{4}.$$

Por último, con $a_n = a_1 r^{n-1}$ con $n = 8$, se tiene

$$a_8 = a_1 r^7 = (\tfrac{5}{4})(-2)^7 = -160.$$

El teorema que sigue presenta la fórmula de la n-ésima suma parcial S_n de una sucesión geométrica.

Teorema: fórmula de S_n

La n-ésima suma parcial, S_n, de una sucesión geométrica cuyo primer término es a_1 y cuya razón común $r \neq 1$ es

$$S_n = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

DEMOSTRACIÓN Por definición, la n-ésima suma parcial S_n es

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1}.$$

Multiplicando por r ambos lados de esta ecuación, se obtiene

$$rS_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n.$$

Si se resta esta ecuación de la anterior, se anulan todos los términos, excepto dos, del segundo miembro, y se tiene lo siguiente:

$$S_n - rS_n = a_1 - a_1 r^n \quad \text{se resta}$$

$$(1 - r)S_n = a_1(1 - r^n) \quad \text{se factoriza}$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r} \quad \text{se divide entre } 1 - r \ \blacksquare$$

EJEMPLO 3 ***Cálculo de una suma de términos de una sucesión geométrica***

Si $1, 0.3, 0.09, 0.027, \ldots$ es una sucesión geométrica, calcular la suma de los 5 primeros términos.

SOLUCIÓN Si $a_1 = 1$, $r = 0.3$ y $n = 5$, en la fórmula de S_n del teorema anterior, se tiene

$$S_5 = (1)\frac{1 - (0.3)^5}{1 - 0.3} = 1.4251.$$

EJEMPLO 4 ***Crecimiento rápido de los términos de una sucesión geométrica***

Un hombre desea ahorrar apartando 1¢ (centavo de dólar) el primer día, 2¢ el segundo, 4¢ el tercero, y así sucesivamente.

(a) Si continúa duplicando la cantidad que aparta cada día, ¿cuánto debe apartar el decimoquinto día?

(b) Suponiendo que no se le acabe el dinero, ¿cuál es la cantidad total que ahorra al término de 30 días?

SOLUCIÓN

(a) La cantidad, en centavos, que se aparta en días sucesivos forma una sucesión geométrica:

$$1, 2, 4, 8, \ldots$$

cuyo primer término es 1 y cuya razón común es 2. Para calcular la cantidad apartada en el decimoquinto día, se usa $a_n = a_1 r^{n-1}$, con $a_1 = 1$, y $n = 15$:

$$a_{15} = a_1 r^{14} = 1 \cdot 2^{14} = 16{,}384$$

Por consiguiente, ese día debe apartar \$163.84.

(b) Para calcular la cantidad total ahorrada después de 30 días, se aplica la fórmula de S_n con $n = 30$ y se obtiene, en centavos,

$$S_{30} = (1)\frac{1 - 2^{30}}{1 - 2} = 1{,}073{,}741{,}823.$$

Entonces, la cantidad total que ahorra es \$10 737 418.23.

De modo análogo a como se trabajó con las sucesiones aritméticas, si a y b son números reales positivos, entonces se dice que hay un número positivo c que es la medida geométrica, o promedio geométrico de a y b, si a, c, b es una sucesión geométrica. Si la razón común es r, entonces

$$r = \frac{c}{a} = \frac{b}{c}, \qquad \text{o} \qquad c^2 = ab.$$

Sacando raíz cuadrada en ambos miembros de la última ecuación, se observa que *la media geométrica de los números positivos a y b* es $\sqrt{ab}$. Generalizando, k números positivos reales $c_1, c_2, \ldots, c_k$ son ***k* medias geométricas** entre a y b si $a, c_1, c_2, \ldots, c_k, b$ es una sucesión geométrica. El proceso de calcular esos números se llama *intercalar* o *insertar* k medias geométricas entre a y b.

EJEMPLO ILUSTRATIVO

Promedio geométrico

Números	Media geométrica
❑ 20, 45	$\sqrt{20 \cdot 45} = \sqrt{900} = 30$
❑ 3, 4	$\sqrt{3 \cdot 4} = 2\sqrt{3}$

Dada la serie geométrica cuyo primer término es a_1 y cuya relación común es $r \neq 1$, se puede escribir la fórmula de S_n, del teorema anterior, en la forma

$$S_n = \frac{a_1}{1-r} - \frac{a_1}{1-r} r^n.$$

Si $|r| < 1$, entonces r^n *tiende a* 0 *cuando* n *aumenta sin límite.* Así S_n tiende a $a_1/(1-r)$ cuando n aumenta sin límite. Con la rotación que se estableció para las funciones racionales, en la Secc. 4.5, se tiene

$$S_n \to \frac{a_1}{1-r} \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

El número $a_1/(1-r)$ se llama *suma S* de la **serie geométrica infinita**

Y con esto se llega al siguiente resultado.

Teorema de la suma de una serie geométrica infinita

Si $|r| < 1$, entonces la suma de la serie geométrica infinita

$$a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1} + \cdots$$

es $S = \dfrac{a_1}{1-r}$.

Este teorema dice que si se suman más y más términos de la serie geométrica indicada, las sumas se aproximan más y más a $a_1/(1-r)$. El ejemplo que sigue muestra cómo se puede usar el teorema para demostrar que es racional todo número real representado por una cantidad con cifras decimales que se repiten.

EJEMPLO 5 ***Expresar un número decimal con cifras que se repiten hasta el infinito en forma de número racional***

Calcular el número racional que corresponde al número decimal repetitivo al infinito $5.4\overline{27}$, en el cual los dígitos bajo la sobrerraya se repiten indefinidamente.

SOLUCIÓN A partir de la expresión decimal 5.4272727. . ., se obtiene la serie infinita

$$5.4 + 0.027 + 0.00027 + 0.0000027 + \cdots.$$

La parte de la expresión que sigue al primer término es

$$0.027 + 0.00027 + 0.0000027 + \cdots,$$

que tiene la forma que aparece en el teorema de la suma de una serie geométrica infinita, con $a_1 = 0.027$ y $r = 0.01$. Por consiguiente, la suma S de esta serie geométrica infinita es

$$S = \frac{0.027}{1-0.01} = \frac{0.027}{0.99} = \frac{27}{990} = \frac{3}{110}.$$

Por tanto, resulta que el número deseado es $5.4 + \frac{3}{110}$, o sea, $\frac{597}{110}$. Se comprueba dividiendo realmente $597 \div 110$; se ve que sí corresponde al número decimal repetitivo dado.

En general, dada cualquier sucesión infinita $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$, la expresión

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

se llama **serie infinita**, o simplemente, **serie**. Se representa mediante

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Cada número a_k es un **término** de la serie, y a_n es el ***n*-ésimo término**. Ya que sólo se pueden sumar algebraicamente sumas *finitas*, es necesario definir lo que quiere decir *suma infinita*. Considérese la sucesión de sumas parciales

$$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots.$$

Si hay un número S tal que $S_n \to S$ cuando $n \to \infty$, como en el caso de las series geométricas infinitas, entonces S es la **suma** de la serie infinita, y se escribe

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots.$$

En el Ejemplo 5 se vio que el número decimal repetitivo hasta el infinito, 5.4272727. . . corresponde al número racional $\frac{597}{110}$. Como este último es la suma de una serie infinita determinada por el número decimal, se puede escribir entonces

$$\tfrac{597}{110} = 5.4 + 0.027 + 0.00027 + 0.0000027 + \cdots.$$

Si los términos de una sucesión infinita son positivos y negativos, alternadamente, como en la expresión

$$a_1 + (-a_2) + a_3 + (-a_4) + \cdots + [(-1)^{n+1}a_n] + \cdots$$

para números reales positivos a_k, la expresión es entonces una **serie infinita alternante**, que se representa en la siguiente forma:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1}a_n + \cdots.$$

El tipo más común de estas series infinitas alternantes es la serie geométrica infinita en la cual es negativa la razón común r.

EJEMPLO 6 *Cálculo de la suma de una serie geométrica infinita*

Calcular la suma S de la serie geométrica infinita alternante,

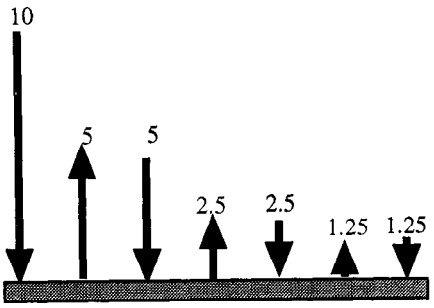
$$\sum_{n=1}^{\infty} 3(-\tfrac{2}{3})^{n-1} = 3 - 2 + \tfrac{4}{3} - \tfrac{8}{9} + \cdots + 3(-\tfrac{2}{3})^{n-1} + \cdots.$$

SOLUCIÓN Mediante la fórmula de S del teorema de la suma de una serie geométrica infinita, en la cual $a_1 = 3$ y $r = -\frac{2}{3}$ se obtiene

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{3}{1-(-\frac{2}{3})} = \frac{3}{\frac{5}{3}} = \frac{9}{5}.$$

EJEMPLO 7 *Aplicación de una serie geométrica infinita*

Se deja caer una pelota de caucho desde 10 m de altura. Supóngase que rebota y llega hasta la mitad de la altura cada vez, como se ve en la Fig. 10.2. Calcular la distancia total que recorre la pelota hasta que se detiene.



SOLUCIÓN Si la pelota siempre rebota a la mitad de la altura desde la que cae, entonces, teóricamente, *nunca* se detiene. Sin embargo, la suma de las distancias que recorre hacia abajo, y de las que recorre hacia arriba forman dos series geométricas infinitas:

Serie hacia abajo: $10 + 5 + 2.5 + 1.25 + 0.625 + \cdots$

Serie hacia arriba: $5 + 2.5 + 1.25 + 0.625 + \cdots$

Se supone que la distancia total S que recorre la pelota se puede calcular sumando las sumas de esas series infinitas. Esto da

$$\begin{aligned} S &= 10 + 2[5 + 2.5 + 1.25 + 0.625 + \cdots] \\ &= 10 + 2[5 + 5(\tfrac{1}{2}) + 5(\tfrac{1}{2})^2 + 5(\tfrac{1}{2})^3 + \cdots]. \end{aligned}$$

Con la fórmula $S = a_1/(1 - r)$, con $a_1 = 5$ y $r = \frac{1}{2}$, se tiene

$$S = 10 + 2\left[\frac{5}{1 - \frac{1}{2}}\right] = 10 + 2(10) = 30 \text{ m}.$$

EJERCICIOS 10.3

Ejercicios 1 y 2: Demuestre que la sucesión dada es geométrica, y calcule su razón común.

1 $5, -\frac{5}{4}, \frac{5}{16}, \ldots, 5(-\frac{1}{4})^{n-1}, \ldots$

2 $\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, \frac{9}{7}, \ldots, \frac{1}{7}(3)^{n-1}, \ldots$

Ejercicios 3 – 14: Calcule el quinto, octavo y n-ésimo términos de la sucesión geométrica.

3 $8, 4, 2, 1, \ldots$

4 $4, 1.2, 0.36, 0.108, \ldots$

5 $300, -30, 3, -0.3, \ldots$

6 $1, -\sqrt{3}, 3, -3\sqrt{3}, \ldots$

7 $5, 25, 125, 625, \ldots$

8 $2, 6, 18, 54, \ldots$

9 $4, -6, 9, -13.5, \ldots$

10 $162, -54, 18, -6, \ldots$

11 $1, -x^2, x^4, -x^6, \ldots$

12 $1, -\frac{x}{3}, \frac{x^2}{9}, -\frac{x^3}{27}, \ldots$

13 $2, 2^{x+1}, 2^{2x+1}, 2^{3x+1}, \ldots$

14 $10, 10^{2x-1}, 10^{4x-3}, 10^{6x-5}, \ldots$

Ejercicios 15 y 16: Calcule todos los valores posibles de r para una sucesión geométrica con los dos términos dados.

15 $a_4 = 3, \quad a_6 = 9$

16 $a_3 = 4, \quad a_7 = \frac{1}{4}$

17 Determine el sexto término de la sucesión geométrica cuyos dos primeros términos son 4 y 6.

18 Determine el séptimo término de la sucesión geométrica cuyo segundo y tercer términos son 2 y $-\sqrt{2}$, respectivamente.

19 Dada una sucesión geométrica tal que $a_4 = 4$ y $a_7 = 12$, calcule r y a_{10}.

20 Dada una sucesión geométrica tal que $a_2 = 3$ y $a_5 = -81$, calcule r y a_9.

Ejercicios 21 – 24: Evalúe la sumatoria.

21 $\sum_{k=1}^{10} 3^k$

22 $\sum_{k=1}^{9} (-\sqrt{5})^k$

23 $\sum_{k=0}^{9} (-\frac{1}{2})^{k+1}$

24 $\sum_{k=1}^{7} (3^{-k})$

Ejercicios 25 – 28: Exprese la suma en notación de sumatoria. Las respuestas pueden no ser únicas.

25 $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128$

26 $2 - 4 + 8 - 16 + 32 - 64$

27 $\frac{1}{4} - \frac{1}{12} + \frac{1}{36} - \frac{1}{108}$ **28** $3 + \frac{3}{5} + \frac{3}{25} + \frac{3}{125} + \frac{3}{625}$

Ejercicios 29 – 36: Calcule la suma, si existe, de la serie geométrica infinita.

29 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots$ **30** $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \cdots$

31 $1.5 + 0.015 + 0.00015 + \cdots$

32 $1 - 0.1 + 0.01 - 0.001 + \cdots$

33 $\sqrt{2} - 2 + \sqrt{8} - 4 + \cdots$ **34** $1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{27}{8} + \cdots$

35 $256 + 192 + 144 + 108 + \cdots$

36 $250 - 100 + 40 - 16 + \cdots$

Ejercicios 37 – 44: Calcule el número racional representado por el número decimal repetitivo.

37 $0.\overline{23}$ **38** $0.0\overline{71}$

39 $2.4\overline{17}$ **40** $10.\overline{5}$

41 $5.\overline{146}$ **42** $3.2\overline{394}$

43 $1.\overline{6124}$ **44** $123.61\overline{83}$

45 Calcule la media geométrica de 12 y 48.

46 Calcule la media geométrica de 20 y 25.

47 Inserte dos medias geométricas entre 4 y 500.

48 Inserte tres medias geométricas entre 2 y 512.

49 ***Uso de una bomba de vacío*** Una bomba de vacío saca la mitad del aire de un recipiente en cada carrera del émbolo. Después de 10 carreras, ¿qué porcentaje del aire original queda en el recipiente?

50 ***Cálculo de la depreciación*** La depreciación anual de determinada máquina es 25% del valor que tenía al comenzar el año. Si el costo original de la máquina es \$20 000, ¿cuál es su valor después de 6 años?

51 ***Proliferación de bacterias*** Cierto cultivo tiene inicialmente 10 000 bacterias y aumenta 20% cada hora.

(a) Deduzca una fórmula para el número de bacterias $N(t)$ que hay al haber transcurrido t horas.

(b) ¿Cuántas bacterias hay en el cultivo después de 10 horas?

52 ***Intereses sobre el ahorro*** Se deposita cierta cantidad P de dinero en una cuenta de ahorros que paga interés con una tasa anual de r por ciento, compuesto trimestralmente. Se dejan en la cuenta la cantidad inicial y el interés acumulado. Deduzca una fórmula para la cantidad total en la cuenta, después de n años.

53 ***Rebote de una pelota*** Se deja caer una pelota de caucho desde una altura de 60 pies. Rebota y llega aproximadamente a 2/3 de la altura desde la que cayó. Con una serie geométrica infinita calcule la distancia total que recorre la pelota hasta que se detiene.

54 ***Movimiento de un péndulo*** La lenteja de un péndulo oscila describiendo un arco de 24 cm de longitud en su primera oscilación. Si cada oscilación sucesiva tiene, aproximadamente 5/6 de la longitud de la oscilación anterior, calcule mediante una serie infinita la distancia total aproximada que recorre la lenteja hasta que se detiene.

55 ***Efecto multiplicador*** Una empresa manufacturera acaba de llegar a un pueblo pequeño. Pagará en salarios 2 millones de dólares anualmente. Se calcula que el 60% de dichos salarios será gastado en el pueblo, y el 60% de ese dinero cambiará de manos dentro del pueblo. Este proceso se llama efecto multiplicador, y se repite *ad infinitum*. Calcule la cantidad total de gastos locales que generarán los salarios de la empresa.

56 ***Erradicación de plagas*** En un programa de erradicación de plagas se sueltan N moscas machos esterilizadas, dentro de la población general, cada día. Se calcula que 90% de esas moscas sobreviven un determinado día.

(a) Demuestre que el número de moscas esterilizadas de la población, n días después de iniciado el programa, es

$$N + (0.9)N + (0.9)^2N + \cdots + (0.9)^{n-1}N.$$

(b) Si la meta *a largo plazo* del programa es mantener 20 000 machos esterilizados en la población, ¿cuántas moscas se deben soltar cada día?

57 ***Dosis medicinal*** Determinado medicamento tiene una semivida (o "vida media") de unas 2 h en el flujo sanguíneo. Se debe administrar en dosis de D miligramos cada 4 h, pero hay que evaluar primero D.

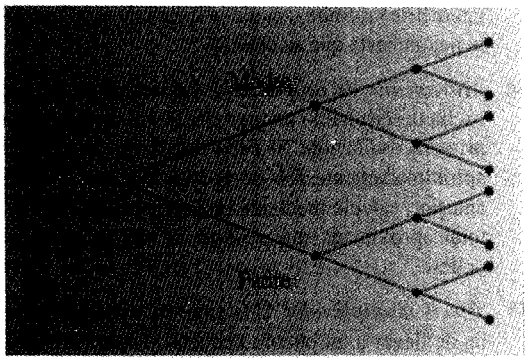
(a) Demuestre que el número de miligramos de medicina en el flujo sanguíneo después de haber administrado la n-ésima dosis es

$$D + \tfrac{1}{4}D + \cdots + (\tfrac{1}{4})^{n-1}D,$$

y que esta suma es, aproximadamente, $\frac{4}{3}D$ para grandes valores de n.

(b) Se considera que más de 500 mg del medicamento en el flujo sanguíneo es una cantidad peligrosa. Calcule la dosis máxima posible que se puede administrar durante largo tiempo.

58 ***Genealogía*** En la figura se muestra un árbol genealógico que presenta la generación actual (usted), y 3 generaciones anteriores. Hay un total de 12 antecesores. Si tuviera usted que rastrear su historia familiar 10 generaciones atrás, ¿cuántos antecesores tendría?

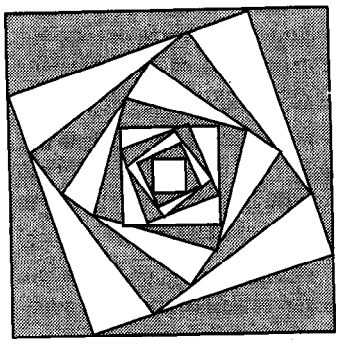


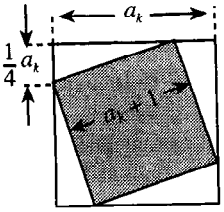
59 La primera figura muestra algunos términos de una sucesión de cuadrados $S_1, S_2, \ldots, S_k, \ldots$ Sean a_k, A_k y P_k el lado, área y perímetro, respectivamente, del cuadrado S_k. El cuadrado S_{k+1} se forma a partir de S_k uniendo cuatro puntos de S_k, que se encuentran a una distancia igual a $\frac{1}{4}a_k$ de un vértice, como se ve en la segunda figura.

(a) Determine la relación entre a_{k+1} y a_k.

(b) Calcule a_n, A_n y P_n.

(c) Evalúe $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$.

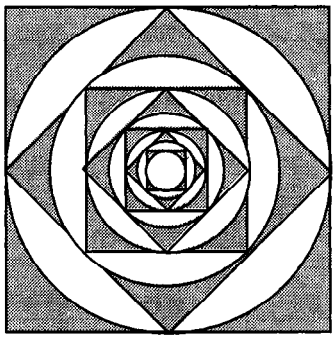




60 La figura muestra varios términos de una sucesión que consiste de círculos y cuadrados que se alternan. Cada círculo está inscrito en un cuadrado, y cada cuadrado, excepto el mayor, está inscrito en un círculo. Sea S_n el área del n-ésimo cuadrado, y C_n el área del n-ésimo círculo.

(a) Calcule las relaciones entre S_n y C_n, y entre C_n y S_{n+1}.

(b) ¿Qué parte del área del cuadrado mayor está sombreada en la figura?



61 ***Interés compuesto*** Si se depositan \$100 el primer día de cada mes en una cuenta que paga 6 % de interés compuesto, capitalizado mensualmente, calcule la cantidad en cuenta transcurridos 18 meses.

62 ***Interés compuesto*** Refiérase al Ejercicio 61. Demuestre que si el depósito mensual es P dólares, y que si la tasa es r % compuesta mensualmente, entonces la cantidad A en cuenta después de n meses es

$$A = P\left(\frac{12}{r} + 1\right)\left[\left(1 + \frac{r}{12}\right)^n - 1\right].$$

63 ***Interés compuesto*** En el Ejercicio 62, calcule A para el depósito mensual P = \$100, con r = 8% y n = 60.

64 ***Interés compuesto*** En el Ejercicio 62, si r = 10%, ¿cuántos años, aproximadamente, se requieren para acumular \$100 000, si el depósito mensual P es

(a) \$100 **(b)** \$200

Ejercicios 65 – 66: Hay un método de depreciación, el *método de saldo doble declinante*, en el cual, para cada año $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, el valor de un activo disminuye en una fracción $A_k = \frac{2}{n}\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{k-1}$ de su costo inicial.

65 **(a)** Si n = 5, calcule $A_1, A_2, \ldots, A_5$.

(b) Demuestre que la sucesión de (a) es geométrica, y calcule S_5.

(c) Si el valor inicial de un activo es \$25 000, ¿qué fracción de su valor se habrá depreciado después de 2 años?

66 **(a)** Si n es cualquier entero positivo, calcule $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

(b) Demuestre que la sucesión de (a) es geométrica, y calcule S_n.

10.4 INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Si n es entero positivo y P_n es el enunciado matemático $(xy)^n = x^n y^n$, se obtiene la siguiente *sucesión infinita de enunciados.*

Enunciado P_1: $(xy)^1 = x^1y^1$

Enunciado P_2: $(xy)^2 = x^2y^2$

Enunciado P_3: $(xy)^3 = x^3y^3$

Enunciado P_n: $(xy)^n = x^ny^n$

Es fácil demostrar que P_1, P_2 y P_3 son afirmaciones *ciertas*. Sin embargo, es imposible comprobar la validez de P_n para *todo* entero positivo n. Para demostrar que P_n es cierta para toda n se necesita el siguiente principio.

Principio de inducción matemática

Si para cada entero positivo n hay asociado un enunciado, P_n, entonces todas las afirmaciones P_n serán válidas siempre y cuando se satisfagan las dos condiciones siguientes:

(1) Que P_1 sea cierta.
(2) Que siempre que P_k sea válida para un entero positivo k, entonces P_{k+1} también es cierta.

Para ayudar a entender este principio, imagínese una sucesión infinita de afirmaciones

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots$$

que satisfacen las condiciones (1) y (2). De acuerdo con (1), el enunciado P_1 es cierto. Como es válida la condición (2), siempre que P_k sea cierto, el siguiente enunciado, P_{k+1} también lo será. Por consiguiente, como P_1 es válido, P_2 también sera cierto, de acuerdo con (2). Sin embargo, si P_2 es válido, entonces, de acuerdo con (2), la siguiente afirmación, P_3, también lo será. Una vez más si P_3 es válida, entonces, según (2), P_4 también lo es. Si se continúa de este modo, puede decirse que si n es cualquier entero *determinado*, entonces P_n es válida, porque se puede emplear la condición (2), paso a pasa, para llegar finalmente a P_n. Aunque este tipo de razonamiento en realidad no *demuestra* el principio de la inducción matemática, si lo hace factible. La demostración del principio se encuentra en textos de álgebra superior; en los que se emplean postulados para los enteros positivos.

Al aplicar el principio de inducción matemática, siempre se siguen dos pasos.

Pasos para aplicar el principio de inducción matemática

(1) Demostrar que P_1 es válida.
(2) *Suponer* que P_k es cierta y, a continuación, demostrar que P_{k+1} es cierta también.

Con frecuencia, el paso 2 se presta a confusión. Nótese que no se *demostró* que P_k sea cierta, a excepción de cuando $k = 1$. Lo que se demostró es que *si* se cumple que P_k es cierta, entonces el enunciado P_{k+1} también lo será. La hipótesis de que P_k es cierta se llama **hipótesis de inducción**.

EJEMPLO 1 ***Aplicación del principio de inducción matemática***

Mediante inducción matemática, demostrar que para todo entero positivo n, la suma de los n primeros enteros positivos es

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

SOLUCIÓN Si n es cualquier entero positivo, sea P_n el enunciado

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

A continuación se presentan algunos casos especiales de P_n:

Si $n = 1$, entonces P_1 es

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}; \qquad \text{esto es,} \quad 1 = 1.$$

Si $n = 2$, entonces P_2 es

$$1 + 2 = \frac{2(2+1)}{2}; \qquad \text{esto es,} \quad 3 = 3.$$

Si $n = 3$, entonces P_3 es

$$1 + 2 + 3 = \frac{3(3+1)}{2}; \qquad \text{esto es,} \quad 6 = 6.$$

Si $n = 4$, entonces P_4 es

$$1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4(4+1)}{2}; \quad \text{esto es,} \quad 10 = 10.$$

Aunque es instructivo comprobar la validez de P_n para diversos valores de n, como se ha efectuado, no es necesario hacerlo. Solo es necesario aplicar el proceso de dos pasos que se explicó antes de este ejemplo. De manera que, se procede como sigue:

Paso 1 Si se sustituye $n = 1$ en P_n, entonces el primer miembro sólo contiene al número 1, y el segundo miembro es $\frac{1(1+1)}{2}$, que también es igual a 1. Por lo tanto, P_1 es válida, o cierta.

Paso 2 Supóngase que P_k sea válida. Entonces, la hipótesis de inducción es

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

El objetivo es demostrar que P_{k+1} es válida; es decir, que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (k+1) = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}.$$

Se puede demostrar que la última fórmula es cierta volviendo a escribir el primer miembro y empleando la hipótesis de inducción como sigue:

$$
\begin{aligned}
&1 + 2 + 3 + \cdots + (k + 1) \\
&\quad = (1 + 2 + 3 + \cdots + k) + (k + 1) && \text{se agrupan los } k \text{ primeros términos} \\
&\quad = \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) && \text{hipótesis de inducción} \\
&\quad = \frac{k(k + 1) + 2(k + 1)}{2} && \text{se suma} \\
&\quad = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2} && \text{se saca } k + 1 \text{ como factor común} \\
&\quad = \frac{(k + 1)[(k + 1) + 1]}{2} && \text{se cambia la forma de } k + 2
\end{aligned}
$$

Con lo cual se demuestra que P_{k+1} es cierta y, por consiguiente, se termina la demostración empleando inducción matemática.

EJEMPLO 2 ***Empleo del principio de inducción matemática***

Demostrar que para cada entero positivo n,

$$1^2 + 3^2 + \cdots + (2n - 1)^2 = \frac{n(2n - 1)(2n + 1)}{3}.$$

SOLUCIÓN Sea P_n la afirmación dada, para todo entero positivo n. Obsérvese que es una fórmula de la suma de los cuadrados de los n primeros enteros positivos impares. De nuevo se sigue el procedimiento en dos pasos.

Paso 1 Sustituyendo 1 en lugar de n en P_n, se obtiene

$$1^2 = \frac{(1)(2 - 1)(2 + 1)}{3} = \frac{3}{3} = 1.$$

con lo que se demuestra que P_1 es válida.

Paso 2 Supóngase que P_k es cierta. Así, la hipótesis de inducción es

$$1^2 + 3^2 + \cdots + (2k - 1)^2 = \frac{k(2k - 1)(2k + 1)}{3}.$$

Se desea demostrar que P_{k+1} es cierta; es decir, que

$$1^2 + 3^2 + \cdots + [2(k + 1) - 1]^2 = \frac{(k + 1)[2(k + 1) - 1][2(k + 1) + 1]}{3}.$$

Esta ecuación se simplifica y da

$$1^2 + 3^2 + \cdots + (2k + 1)^2 = \frac{(k + 1)(2k + 1)(2k + 3)}{3}.$$

Téngase en cuenta que el término que sigue al último, en el primer miembro de la ecuación, es $(2k - 1)^2$. De modo semejante al que se usó en la solución del Ejemplo 1, puede demostrarse

la fórmula para P_{k+1} volviendo a escribir el lado izquierdo y empleando la hipótesis de inducción, como sigue:

$$
\begin{aligned}
&1^2 + 3^2 + \cdots + (2k+1)^2 \\
&= [1^2 + 3^2 + \cdots + (2k-1)^2] + (2k+1)^2 && \text{se agrupan los } k \text{ primeros términos} \\
&= \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2k+1)^2 && \text{hipótesis de inducción} \\
&= \frac{k(2k-1)(2k+1) + 3(2k+1)^2}{3} && \text{se suma} \\
&= \frac{(2k+1)[k(2k-1) + 3(2k+1)]}{3} && \text{se saca } 2k+1 \text{ como factor común} \\
&= \frac{(2k+1)(2k^2 + 5k + 3)}{3} && \text{se simplifica} \\
&= \frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3} && \text{se factoriza y se cambia el orden}
\end{aligned}
$$

Esto demuestra que P_{k+1} es válida y, por lo tanto, P_n es cierta para todo n.

EJEMPLO 3 ***Uso del principio de inducción matemática***

Demostrar que 2 es factor de $n^2 + 5n$ para todo entero positivo n.

SOLUCIÓN Para cada entero positivo n, sea P_n la siguiente afirmación:

$$2 \text{ es factor de } n^2 + 5n.$$

Se sigue el procedimiento de los dos pasos.

Paso 1 Si $n = 1$, entonces

$$n^2 + 5n = 1^2 + 5 \cdot 1 = 6 = 2 \cdot 3.$$

Así, 2 es factor de $n^2 + 5n$, para $n = 1$; es decir, P_1 es válida.

Paso 2 Supóngase que P_k sea cierta. Entonces, la hipótesis de inducción es

$$2 \text{ es factor de } k^2 + 5k$$

o, de manera similar, $$k^2 + 5k = 2p$$

para algún entero p.

Se desea demostrar que P_{k+1} es cierta; es decir, que

$$2 \text{ es factor de } (k+1)^2 + 5(k+1).$$

Se hace como sigue:

$$\begin{aligned}
&(k+1)^2 + 5(k+1) \\
&= k^2 + 2k + 1 + 5k + 5 && \text{se multiplica} \\
&= (k^2 + 5k) + (2k + 6) && \text{se reagrupan los términos} \\
&= 2p + 2(k+3) && \text{hipótesis de inducción; se factoriza } 2k+6 \\
&= 2(p + k + 3) && \text{se saca 2 como factor común}
\end{aligned}$$

Como 2 es factor de la última expresión, P_{k+1} es válida y, por consiguiente, P_n es cierta para toda n.

Sea j un entero positivo, y supóngase que con cada entero, $n \geq j$, hay un enunciado asociado P_n. Por ejemplo, si $j = 6$, entonces se numeran los enunciados $P_6, P_7, P_8, \ldots$ El principio de inducción matemática se puede generalizar para abarcar este caso. Para demostrar que las afirmaciones P_n son válidas para $n \geq j$, se usan los dos pasos siguientes, del mismo modo que lo hicimos para $n \geq 1$.

Aplicación del principio de inducción matemática generalizado para P_k, siendo $k \geq j$

---

1. Demostrar que P_j es válida.
2. Suponer que P_k es válida cuando $k \geq j$ y demostrar que P_{k+1} también lo es.

EJEMPLO 4 ***Empleo del principio de inducción matemática generalizado***

Sea a un número real distinto de cero tal que $a > -1$. Demostrar que

$$(1 + a)^n > 1 + na$$

para todo entero $n \geq 2$.

SOLUCIÓN Para todo entero positivo n, se tiene que P_n representa la desigualdad $(1 + a)^n > 1 + na$. Nótese que P es falsa, o no válida, ya que $(1 + a)^1 = 1 + (1)(a)$. Sin embargo, puede demostrarse que Pn es válida para $n \geq 2$ mediante el principio generalizado, con $j = 2$.

Paso 1 Primero, obsérvese que $(1 + a)^2 = 1 + 2a + a^2$. Como $a \neq 0$, se tiene que $a^2 > 0$ y, por consiguiente, $1 + 2a + a^2 > 1 + 2a$, o sea, $(1 + a)^2 > 1 + 2a$. Por lo tanto, P_2 es válida.

Paso 2 Supóngase que P_k es cierta. Entonces, la hipótesis de inducción es

$$(1 + a)^k > 1 + ka.$$

Se desea demostrar que P_{k+1} es cierta, es decir, que

$$(1 + a)^{k+1} > 1 + (k + 1)a.$$

Para demostrar esto último, se observa primero lo siguiente:

$$\begin{aligned}
(1 + a)^{k+1} &= (1 + a)^k(1 + a) && \text{ley de los exponentes} \\
&> (1 + ka)(1 + a) && \text{hipótesis de inducción, y } 1 + a > 0
\end{aligned}$$

(continúa)

A continuación se observa que

$$\begin{aligned}(1+ka)(1+a) &= 1 + ka + a + ka^2 && \text{se multiplica}\\ &= 1 + (ka + a) + ka^2 && \text{se agrupan los términos}\\ &= 1 + (k+1)a + ka^2 && \text{se saca } a \text{ como factor común}\\ &> 1 + (k+1)a. && \text{porque } ka^2 > 0\end{aligned}$$

Las dos últimas desigualdades dan como resultado

$$(1+a)^{k+1} > 1 + (k+1)a.$$

Así, P_{k+1} es válida, y termina la demostración por inducción matemática.

EJERCICIOS 10.4

Ejercicios 1 – 26: Demuestre que la afirmación es cierta para todo entero positivo n.

1 $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$

2 $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2) = \dfrac{n(3n-1)}{2}$

3 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$

4 $3 + 9 + 15 + \cdots + (6n-3) = 3n^2$

5 $2 + 7 + 12 + \cdots + (5n-3) = \frac{1}{2}n(5n-1)$

6 $2 + 6 + 18 + \cdots + 2 \cdot 3^{n-1} = 3^n - 1$

7 $1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} = 1 + (n-1) \cdot 2^n$

8 $(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \cdots + (-1)^n = \dfrac{(-1)^n - 1}{2}$

9 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

10 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

11 $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

12 $\dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dfrac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

13 $3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n = \frac{3}{2}(3^n - 1)$

14 $1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$

15 $n < 2^n$

16 $1 + 2n \le 3^n$

17 $1 + 2 + 3 + \cdots + n < \frac{1}{8}(2n+1)^2$

18 If $0 < a < b$, then $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n+1} < \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$.

19 3 es factor de $n^3 - n + 3$.

20 2 es factor de $n^2 + n$.

21 4 es factor de $5^n - 1$.

22 9 es factor de $10^{n+1} + 3 \cdot 10^n + 5$

23 Si a es mayor que 1, entonces $a^n > 1$.

24 Si $r \neq 1$, entonces $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$.

25 $a - b$ es factor de $a^n - b^n$.
(Nota: $a^{k+1} - b^{k+1} = a^k(a-b) + (a^k - b^k)b$.*)*

26 $a + b$ es factor de $a^{2n-1} + b^{2n-1}$.

Ejercicios 27 – 32: Determine el mínimo entero positivo j para el cual la afirmación es válida. Emplee el principio de inducción matemática generalizado para demostrar que la fórmula es cierta para todo entero mayor que j.

27 $n + 12 \le n^2$

28 $n^2 + 18 \le n^3$

29 $5 + \log_2 n \le n$

30 $n^2 \le 2^n$

31 $2n + 2 \le 2^n$

32 $n \log_2 n + 20 \le n^2$

Ejercicios 33 – 36: Exprese la suma en términos de n.

33 $\sum_{k=1}^{n} (k^2 + 3k + 5)$

(*Sugerencia:* Use el teorema de las sumas para escribir la suma en la forma

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 5.$$

A continuación aplique el Ejercicio 9, Ejemplo 4, de la Secc. 10.1, y la fórmula para $\sum_{k=1}^{n} c$.)

34 $\sum_{k=1}^{n} (3k^2 - 2k + 1)$ **35** $\sum_{k=1}^{n} (2k - 3)^2$

36 $\sum_{=1}^{n} (k^3 + 2k^2 - k + 4)$(*Sugerencia:* Use el Ejercicio 10.)

Ejercicios 37 y 38: (a) Evalúe la fórmula dada para los valores citados de n, y resuelva el sistema resultante de ecuaciones para obtener a, b, c y d. (A veces se puede usar este método para obtener fórmulas de sumas.) (b) Compare el resultado en la parte (a) con el ejercicio indicado, y explique por qué este método no demuestra que la fórmula sea válida para toda n.

37 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = an^3 + bn^2 + cn$; $n = 1, 2, 3$ (Ejercicio 9)

38 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn$; $n = 1, 2, 3, 4$ (Ejercicio 10)

Ejercicios 39 y 40: (a) Con el método de los Ejercicios 37 y 38, deduzca una fórmula de la suma. (b) Compruebe que la fórmula que encontró en la parte (a) es válida para toda n.

39 $1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4$

40 $2^3 + 4^3 + 6^3 + \cdots + (2n)^3$

Ejercicios 41 – 44: Demuestre que la afirmación es cierta para todo entero positivo n.

41 $\operatorname{sen}(\theta + n\pi) = (-1)^n \operatorname{sen}\theta$

42 $\cos(\theta + n\pi) = (-1)^n \cos\theta$

43 Demuestre el teorema de De Moivre:

$$[r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

para todo entero positivo n.

44 Demuestre que para todo entero positivo $n \geq 3$, la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $(n - 2) \cdot 180°$.

10.5 TEOREMA DEL BINOMIO

Un **binomio** es una suma $a + b$ en la cual a y b representan números. Si n es un entero positivo, entonces una fórmula general para *desarrollar* $(a + b)^n$; es decir, para expresarlo como suma, es el **teorema del binomio**. En esta sección se emplea la inducción matemática para llegar a esta fórmula general. Multiplicando se puede llegar a los siguientes casos especiales:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Estas expresiones de $(a + b)^n$, para $n = 2, 3, 4$ y 5 tienen las propiedades siguientes:

Tienen $n + 1$ términos; el primero es a^n y el último es b^n.
A medida que se pasa de cualquier término al siguiente, el exponente de a disminuye en 1, y el exponente de b aumenta en 1. Para cada término, la suma de los exponentes de a y b es n.

(3) Cada término tiene la forma $(c)a^{n-k}b^k$, donde el coeficiente c es un número real, y $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

(4) La siguiente fórmula es válida para cada uno de los n primeros términos del desarrollo:

$$\frac{(\text{coeficiente de término}) \cdot (\text{exponente de } a)}{\text{número de términos}} = \text{coeficiente del siguiente término}$$

La tabla siguiente muesta la propiedad (4) para el desarrollo de $(a + b)^5$.

Término	Colocación del término	Coeficiente del término	Exponente de a	Coeficiente del siguiente término
a^5	1	1	5	$\frac{1 \cdot 5}{1} = 5$
$5a^4b$	2	5	4	$\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$
$10a^3b^2$	3	10	3	$\frac{10 \cdot 3}{3} = 10$
$10a^2b^3$	4	10	2	$\frac{10 \cdot 2}{4} = 5$
$5ab^4$	5	5	1	$\frac{5 \cdot 1}{5} = 1$

A continuación considérese $(a + b)^n$ para un entero positivo arbitrario n. El primer término es a^n, que tiene el coeficiente 1. Si se supone que la propiedad (4) es válida, se obtienen los coeficientes sucesivos que se ven en la siguiente tabla.

Término	Colocación del término	Coeficiente del término	Exponente de a	Coeficiente del siguiente término
a^n	1	1	n	$\frac{1 \cdot n}{1} = n$
$\frac{n}{1}a^{n-1}b$	2	$\frac{n}{1}$	$n - 1$	$\frac{n(n-1)}{2 \cdot 1}$
$\frac{n(n-1)}{2 \cdot 1}a^{n-2}b^2$	3	$\frac{n(n-1)}{2 \cdot 1}$	$n - 2$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}$
$\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}a^{n-3}b^3$	4	$\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}$	$n - 3$	$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$

El comportamiento que aparece en la quinta columna conduce a la siguiente fórmula del coeficiente del término general.

Coeficiente del $(k+1)$-ésimo término del desarrollo de $(a+b)^n$

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\cdots\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1},\quad k=1,2,\ldots,n$$

El $(k+1)$-ésimo coeficiente se puede escribir en forma reducida empleando la **notación factorial**. Si n es cualquier entero no negativo, se define el símbolo $n!$ (*factorial n* o *n factorial*) como sigue:

Definición de $n!$

(1) $n! = n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot1$ si $n>0$
(2) $0! = 1$

De modo que, si $n > 0$, entonces $n!$ es el producto de los n primeros enteros positivos. Por definición, $0! = 1$, para que ciertas fórmulas en las que intervienen factoriales sean válidas para enteros *no negativos*.

EJEMPLO ILUSTRATIVO

Factoriales

- $1! = 1$
- $2! = 2\cdot1 = 2$
- $3! = 3\cdot2\cdot1 = 6$
- $4! = 4\cdot3\cdot2\cdot1 = 24$
- $5! = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 120$
- $6! = 6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 720$
- $7! = 7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 5040$
- $8! = 8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 40{,}320$

Nótese el rápido crecimiento de $n!$ cuando n aumenta. Se puede demostrar, con ayuda de una calculadora, que

$$20! \approx 2.4\times10^{18} \qquad \text{y} \qquad 50! \approx 3.0\times10^{64}.$$

A veces se desea simplificar cocientes en los que tanto el numerador como el denominador contienen factoriales, como los del siguiente ejemplo.

EJEMPLO ILUSTRATIVO

Simplificación de cocientes de factoriales

- $\dfrac{7!}{5!} = \dfrac{7\cdot6\cdot5!}{5!} = 7\cdot6 = 42$
- $\dfrac{10!}{6!} = \dfrac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6!}{6!} = 10\cdot9\cdot8\cdot7 = 5040$

Como en el ejemplo anterior, si n y k son enteros positivos, y $k < n$, entonces

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-k+1)\cdot[(n-k)!]}{(n-k)!}$$
$$= n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-k+1),$$

el cual es el numerador del coeficiente del $(k+1)$-ésimo término de $(a+b)^n$. Dividiendo entre el denominador $k!$, se llega a la siguiente forma del $(k+1)$-ésimo coeficiente:

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Estos números se llaman **coeficientes binomiales**; con frecuencia se representan con el símbolo $\binom{n}{k}$, o bien, con el símbolo $C(n, k)$. Se tiene, por lo tanto, lo siguiente:

Coeficiente del $(k+1)$-ésimo término del desarrollo de $(a+b)^n$. (Forma alterna)

$$\binom{n}{k}=C(n,k)=\frac{n!}{k!\,(n-k)!},\quad k=0,1,2,\ldots,n$$

EJEMPLO 1 *Evaluar* $\binom{n}{k}$

Calcular $\binom{5}{0}, \binom{5}{1}, \binom{5}{2}, \binom{5}{3}, \binom{5}{4}$, y $\binom{5}{5}$.

SOLUCIÓN Estos seis números son los coeficientes del desarrollo de $(a+b)^5$, que se tabuló al principio de esta sección. Por definición,

$$\binom{5}{0}=\frac{5!}{0!(5-0)!}=\frac{5!}{1\cdot 5!}=1$$

$$\binom{5}{1}=\frac{5!}{1!(5-1)!}=\frac{5!}{1\cdot 4!}=\frac{5\cdot 4!}{4!}=5$$

$$\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!(5-2)!}=\frac{5!}{2!3!}=\frac{5\cdot 4\cdot 3!}{2\cdot 3!}=\frac{20}{2}=10$$

$$\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!(5-3)!}=\frac{5!}{3!2!}=\frac{5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 2}=\frac{20}{2}=10$$

$$\binom{5}{4}=\frac{5!}{4!(5-4)!}=\frac{5!}{4!1!}=\frac{5\cdot 4!}{4!}=5$$

$$\binom{5}{5}=\frac{5!}{5!(5-5)!}=\frac{5!}{5!0!}=\frac{1}{0!}=\frac{1}{1}=1.$$

El teorema del binomio se puede enunciar como sigue.

Teorema del binomio

$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$
$$+\cdots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+b^n$$

Empleando la notación de sumatoria, el teorema del binomio se expresa en la forma

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k.$$

Otro enunciado de este teorema es el siguiente. (Al final de esta sección se demuestra.)

Teorema del binomio (Forma alterna)

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k + \cdots + nab^{n-1} + b^n$$

Los ejemplos que siguen se pueden resolver mediante las fórmulas generales del teorema del binomio, o usando repetidamente la propiedad (4) que se estableció al inicio de esta sección.

EJEMPLO 2 *Obtención de un desarrollo binomial*

Determine el desarrollo binomial de $(2x + 3y^2)^4$.

SOLUCIÓN Se aplica el teorema del binomio con $a = 2x$, $b = 3y^2$ y $n = 4$:

$$(2x+3y^2)^4 = (2x)^4 + \binom{4}{1}(2x)^3(3y^2) + \binom{4}{2}(2x)^2(3y^2)^2 + \binom{4}{3}(2x)(3y^2)^3 + (3y^2)^4$$

Esta expresión se puede escribir del siguiente modo:

$$\begin{aligned}(2x+3y^2)^4 &= 16x^4 + 4(8x^3)(3y^2) + 6(4x^2)(9y^4) + 4(2x)(27y^6) + 81y^8 \\ &= 16x^4 + 96x^3y^2 + 216x^2y^4 + 216xy^6 + 81y^8.\end{aligned}$$

El ejemplo siguiente ilustra que si a o b son negativos, los términos del desarrollo son positivos y negativos, alternadamente.

EJEMPLO 3 *Determinación de un desarrollo binomial*

Desarrollar $\left(\frac{1}{x} - 2\sqrt{x}\right)^5$.

SOLUCIÓN Los coeficientes binomiales de $(a+b)^5$ se obtuvieron en el Ejemplo 1. De modo que, si $a = 1/x$, $b = -2\sqrt{x}$ y $n = 5$ en el teorema del binomio, se tiene que

$$\left(\frac{1}{x} - 2\sqrt{x}\right)^5 = \left(\frac{1}{x}\right)^5 + 5\left(\frac{1}{x}\right)^4(-2\sqrt{x}) + 10\left(\frac{1}{x}\right)^3(-2\sqrt{x})^2 + 10\left(\frac{1}{x}\right)^2(-2\sqrt{x})^3 + 5\left(\frac{1}{x}\right)(-2\sqrt{x})^4 + (-2\sqrt{x})^5,$$

(continúa)

lo cual se puede escribir en la forma siguiente:

$$\left(\frac{1}{x} - 2\sqrt{x}\right)^5 = \frac{1}{x^5} - \frac{10}{x^{7/2}} + \frac{40}{x^2} - \frac{80}{x^{1/2}} + 80x - 32x^{5/2}.$$

Para determinar un término específico del desarrollo de $(a + b)^n$ conviene primero determinar el exponente k que se ha de asignar a b. Nótese que, de acuerdo con el teorema del binomio, *el exponente de b siempre es menor en uno que el número del término.* Una vez calculado k, ya se sabe que el exponente de a es $n - k$, y que el coeficiente es $\binom{n}{k}$.

EJEMPLO 4 ***Determinación de un término específico de un desarrollo binomial***

Determinar el quinto término del desarrollo de $(x^3 + \sqrt{y})^{13}$.

SOLUCIÓN Sean $a = x^3$ y $b = \sqrt{y}$. El exponente de b en el quinto término es 4 y, por consiguiente, el de a es 9. Según la descripción del párrafo anterior, llegamos a

$$\binom{13}{4}(x^3)^9(\sqrt{y})^4 = \frac{13!}{4!(13-4)!}x^{27}y^2 = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{4!}x^{27}y^2$$
$$= 715x^{27}y^2.$$

EJEMPLO 5 ***Determinación de un término específico de un desarrollo binomial***

Determinar el término en el que aparece q^{10} en el desarrollo binoimal de $(\frac{1}{3}p + q^2)^{12}$.

SOLUCIÓN De acuerdo con el enunciado del teorema binomial, con $a = \frac{1}{3}p$, $b = q^2$ y $n = 12$, cada término del desarrollo tiene la forma

$$\binom{n}{k}a^{n-k}b^k = \binom{12}{k}(\tfrac{1}{3}p)^{12-k}(q^2)^k.$$

Como $(q^2)^k = q^{2k}$, se debe hacer $k = 5$ para obtener el término en el que interviene q^{10}. Al hacerlo se obtiene

$$\binom{12}{5}(\tfrac{1}{3}p)^{12-5}(q^2)^5 = \frac{12!}{5!(12-5)!}(\tfrac{1}{3})^7p^7q^{10} = \frac{88}{243}p^7q^{10}.$$

Hay un interesante conjunto triangular de números, llamado **triángulo de Pascal**, que se puede emplear para obtener los coeficientes binomiales. Los números se disponen del modo siguiente.

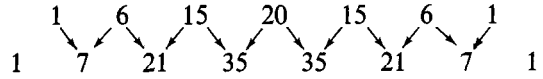
```
                1
              1   1
            1   2   1
          1   3   3   1
        1   4   6   4   1
      1   5  10  10   5   1
    1   6  15  20  15   6   1
  .   .   .   .   .   .   .   .
.   .   .   .   .   .   .   .   .
```

Los números del segundo renglón son los coeficientes del desarrollo de $(a + b)^1$; los del tercero, los que corresponden a $(a + b)^2$; los del cuarto se obtienen de $(a + b)^3$, y así sucesivamente. Cada número del conjunto, si es distinto de 1, se puede determinar sumando los dos números del renglón anterior, que están inmediatamente arriba y a la izquierda y derecha del número, como se ilustra en la solución del ejemplo siguiente.

EJEMPLO 6 ***Uso del triángulo de Pascal***

Determinar el octavo renglón del triángulo de Pascal, y usarlo para desarrollar $(a + b)^7$.

SOLUCIÓN Se vuelve a escribir el séptimo renglón, y luego se aplica el proceso que se acaba de explicar. En la siguiente figura, las flechas indican cuáles son los dos números del séptimo renglón que se suman para obtener los números del octavo.



El octavo renglón da los coeficientes del desarrollo de $(a + b)^7$:

$$(a + b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

El triángulo de Pascal es útil para desarrollar pequeñas potencias de $a + b$; sin embargo, para potencias grandes, o para determinar un término específico, como en los Ejemplos 4 y 5, es más útil la fórmula general del teorema del binomio.

Esta sección termina con una demostración del teorema del binomio, mediante inducción matemática.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DEL BINOMIO Para cada entero positivo n, sea P_n la afirmación que se da en la otra forma del teorema del binomio.

Paso 1 Si $n = 1$, el enunciado se reduce a $(a + b)^1 = a^1 + b^1$. En consecuencia, P_1 es válida.

Paso 2 Supóngase que P_k es válida. Entonces, la hipótesis de inducción es

$$(a + b)^k = a^k + ka^{k-1}b + \frac{k(k-1)}{2!}a^{k-2}b^2 + \cdots + \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-r+2)}{(r-1)!}a^{k-r+1}b^{r-1} + \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-r+1)}{r!}a^{k-r}b^r + \cdots + kab^{k-1} + b^k.$$

Se ha obtenido el r-ésimo y el $(r + 1)$-ésimo término del desarrollo.

Para demostrar que P_{k+1} es válida, primero se escribe

$$(a + b)^{k+1} = (a + b)^k(a + b).$$

Con la hipótesis de inducción para sustituir a $(a + b)^k$ y, a continuación, multiplicar por $(a + b)$ esa expresión, se tiene

$$(a+b)^{k+1} = \left[a^{k+1} + ka^k b + \frac{k(k-1)}{2!}a^{k-1}b^2 + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots(k-r+1)}{r!}a^{k-r+1}b^r + \cdots + ab^k\right] + \left[a^k b + ka^{k-1}b^2 + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots(k-r+2)}{(r-1)!}a^{k-r+1}b^r + \cdots + kab^k + b^{k+1}\right],$$

donde los términos del primer par de corchetes resultan de multiplicar el segundo miembro de la hipótesis de inducción por a, y los del segundo par de corchetes provienen de multiplicar por b. A continuación, se redisponen y combinan los términos:

$$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + (k+1)a^k b + \left[\frac{k(k-1)}{2!} + k\right]a^{k-1}b^2 + \cdots + \left[\frac{k(k-1)\cdots(k-r+1)}{r!} + \frac{k(k-1)\cdots(k-r+2)}{(r-1)!}\right]a^{k-r+1}b^r + \cdots + (1+k)ab^k + b^{k+1}$$

Si se simplifican los coeficientes, se obtiene la afirmación P_n con $k+1$ en lugar de n. Por consiguiente, P_{k+1} es válida y, entonces, P_n es válida para todo entero positivo n, con lo cual termina la demostración. ■

EJERCICIOS 10.5

Ejercicios 1 – 12: Evalúe la expresión.

1 $2!6!$

2 $3!4!$

3 $7!0!$

4 $5!0!$

5 $\dfrac{8!}{5!}$

6 $\dfrac{6!}{3!}$

7 $\binom{5}{5}$

8 $\binom{7}{0}$

9 $\binom{7}{5}$

10 $\binom{8}{4}$

11 $\binom{13}{4}$

12 $\binom{52}{2}$

Ejercicios 13 y 14: Reexprese en una forma en que no haya factoriales.

13 $\dfrac{(2n+2)!}{(2n)!}$

14 $\dfrac{(3n+1)!}{(3n-1)!}$

Ejercicios 15 – 28: Use el teorema del binomio para desarrollar, y simplifique.

15 $(4x-y)^3$

16 $(x^2+2y)^3$

17 $(a+b)^6$

18 $(a+b)^4$

19 $(a-b)^7$

20 $(a-b)^5$

21 $(3x-5y)^4$

22 $(2t-s)^5$

23 $(\frac{1}{3}x+y^2)^5$

24 $(\frac{1}{2}c+d^3)^4$

25 $\left(\dfrac{1}{x^2}+3x\right)^6$

26 $\left(\dfrac{1}{x^3}-2x\right)^5$

27 $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$

28 $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$

Ejercicios 29 – 44: Sin desarrollar totalmente, determine el (o los) término(s) indicado(s) en el desarrollo de la expresión.

29 $(3c^{2/5}+c^{4/5})^{25}$; primeros tres términos

30 $(x^3+5x^{-2})^{20}$; primeros tres términos

31 $(4b^{-1} - 3b)^{15}$; últimos tres términos

32 $(s - 2t^3)^{12}$; últimos tres términos

33 $\left(\frac{3}{c} + \frac{c^2}{4}\right)^7$; sexto término

34 $(3a^2 - \sqrt{b})^9$; quinto término

35 $(\frac{1}{3}u + 4v)^8$; séptimo término

36 $(3x^2 - y^3)^{10}$; cuarto término

37 $(x^{1/2} + y^{1/2})^8$; término central.

38 $(rs^2 + t)^7$; los dos términos centrales

39 $(2y + x^2)^8$; término que contenga x^{10}

40 $(x^2 - 2y^3)^5$; término que contenga y^6

41 $(3b^3 - 2a^2)^4$; término que contenga b^9

42 $(\sqrt{c} + \sqrt{d})^8$; término que contenga c^2

43 $\left(3x - \frac{1}{4x}\right)^6$; término que no contenga a x

44 $(xy - 3y^{-3})^8$; término que no contenga a y

45 Calcule, aproximadamente, $(1.2)^{10}$ empleando los tres primeros términos del desarrollo de $(1 + 0.2)^{10}$, y compare su respuesta con la que obtenga mediante una calculadora.

46 Calcule aproximadamente $(0.9)^4$ utilizando los tres primeros términos del desarrollo de $(1 - 0.1)^4$, y compare su respuesta con la obtenida con una calculadora.

Ejercicios 47 y 48: Simplifique la expresión mediante el teorema del binomio.

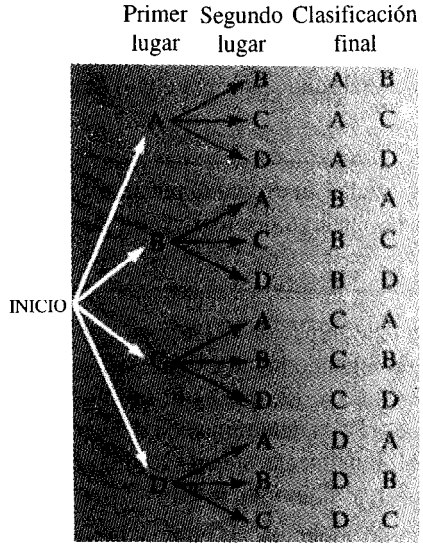
47 $\dfrac{(x + h)^4 - x^4}{h}$ **48** $\dfrac{(x + h)^5 - x^5}{h}$

49 Demuestre que $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}$ para $n \geq 1$

50 Demuestre que $\binom{n}{0} = \binom{n}{n}$ para $n \geq 0$

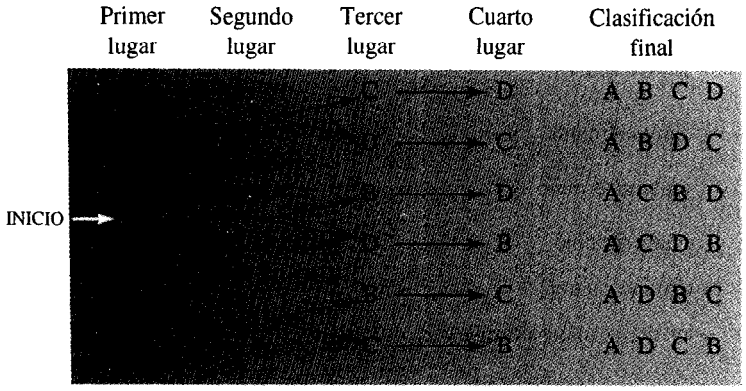
10.6 PERMUTACIONES

FIGURA 10. 3



Supóngase que en un torneo intervienen cuatro equipos y que se van a determinar el primero, segundo, tercero y cuarto lugares. Para fines de identificación, se les llama A, B, C y D. Se desea determinar el número de los distintos modos en que pueden resultar el primero y segundo lugares. Conviene emplear un **diagrama de árbol**, como el de la Fig. 10.3. Después de la palabra INICIO, se ven las cuatro posibilidades de primer lugar. De cada una parten flechas que apuntan al finalista de segundo lugar. Las últimas columnas muestran los resultados posibles, de izquierda a derecha. Se determinan siguiendo los distintos caminos (*ramas* del árbol) que van desde la palabra INICIO hasta el equipo en segundo lugar. El número total de resultados es 12, que es el producto del número de posibilidades (4) de primer lugar, por el número de posibilidades (3), para el segundo lugar, después de haber determinado el primero.

Ahora veamos el número total de maneras en las que se puede llegar al segundo, tercero y cuarto lugares. Para hacer un diagrama de árbol, se puede comenzar trazando flechas desde la palabra INICIO hasta cada posible finalista en primer lugar, A, B, C o D. A continuación se trazan las flechas desde éstos hasta los posibles finalistas en segundo lugar, como se hizo en la Fig. 10.3. De cada segundo lugar, se trazan a continuación flechas que indiquen los terceros lugares posibles. Por último, se presentan flechas al equipo del cuarto lugar. Si sólo se considera el caso en el cual el equipo A termina en primer lugar, se tiene el diagrama de la Fig. 10.4.



Nótese que hay seis clasificaciones finales posibles en las cuales el equipo A ocupa el primer lugar. En un diagrama de árbol completo, también habrían otras tres ramas de este tipo, que corresponderían a los finalistas B, C y D si ocuparan el primer lugar. Un diagrama completo presentaría las siguientes 24 posibilidades de clasificaciones finales:

ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCB,
BACD, BADC, BCAD, BCDA, BDAC, BDCA,
CABD, CADB, CBAD, CBDA, CDAB, CDBA,
DABC, DACB, DBAC, DBCA, DCAB, DCBA.

Obsérvese que el número de posibilidades, 24, es el producto del número de posibilidades que puede haber para el primer lugar, por el número de modos, 3, que puede haber para el segundo lugar (después de que se definió el primer lugar), por el número de resultados posibles (2) para el tercer lugar (después de haber decidido los dos primeros sitios) y por el número de posibilidades, 1, que hay para el cuarto lugar (después de que se definieron los tres primeros lugares).

La descripción anterior muestra la siguiente regla general, que se acepta como el axioma básico del conteo.

Principio fundamental de conteo

Sean $E_1, E_2, \ldots, E_k$ una sucesión de k eventos. Si, para cada i, el evento E_i puede suceder de m_i modos, entonces el número total de maneras en las cuales todos los eventos pueden suceder es el producto $m_1 m_2 \cdots m_k$.

Regresando al primer ejemplo ilustrativo, sea E_1 la determinación del equipo del primer lugar, por lo que $m_1 = 4$. Si E_2 representa la del equipo de segundo lugar, entonces $m_2 = 3$. Por tanto, el número de resultados de la sucesión E_1, E_2 es $4 \cdot 3 = 12$, que es lo mismo que se determinó mediante el diagrama de árbol. Si se prosigue a E_3, la determinación del equipo de tercer lugar, entonces $m_3 = 2$ y, por lo tanto, $m_1 m_2 m_3 = 24$. Finalmente, si han sucedido E_1, E_2 y E_3, sólo hay un resultado posible para E_4. Entonces, $m_4 = 1$, y $m_1 m_2 m_3 m_4 = 24$.

En lugar de equipos, considérese a a, b, c y d sólo como símbolos, así como a las diversas *ordenaciones*, o *disposiciones*, que se pueden asignar a ellos, tomando dos a la vez, tres a la vez o cuatro a la vez. Abstrayendo de este modo se pueden aplicar los métodos a otros casos. Las ordenaciones que se han visto son **disposiciones sin repeticiones**, porque un símbolo no puede

aparecer más de una vez en uno de ellos. En el Ejemplo 1 se ven ordenaciones en las cuales *sí se permiten* repeticiones en los arreglos.

Ya se definió anteriormente lo que son pares (o díadas) ordenados y ternas (o tríadas) ordenadas. De igual forma, una tétrada ordenada es un conjunto que contiene cuatro elementos x_1, x_2, x_3, x_4 para el cual se ha especificado un orden, de modo que uno de los elementos pueda llamarse *primer elemento*; otro, *segundo elemento*, y así sucesivamete. El símbolo (x_1, x_2, x_3, x_4) indica la tétrada que tiene x_1 como primer elemento, x_2 como segundo elemento, x_3 como tercero y x_4 como cuarto. En general, para todo entero positivo r se tiene una r-ada ordenada.

$$(x_1, x_2, \ldots, x_r)$$

que es un conjunto de elementos en el cual se indica que x_1 es el primer elemento, x_2 el segundo, y así sucesivamente.

EJEMPLO 1 *Cálculo del número de r-adas*

Calcular cuántos de los siguientes grupos se pueden obtener usando sólo las letras a, b, c y d.

(a) ternas ordenadas **(b)** tétradas ordenadas **(c)** r-adas ordenadas

SOLUCIÓN

(a) Se debe determinar el número de símbolos de la forma (x_1, x_2, x_3) que se pueden obtener empleado sólo las letras a, b, c y d. No es lo mismo que hacer una lista de primero, segundo y tercer lugar como en el ejemplo ilustrativo anterior, porque no se ha eliminado la posibilidad de repeticiones. Por ejemplo, (a, b, a), (a, a, b) y (a, a, a) son ternas ordenadas diferentes. Si para $i = 1$, 2 y 3 hacemos que E_i represente la determinación de x_i en la terna ordenada (x_1, x_2, x_3), entonces, como se permiten las repeticiones, hay cuatro posibilidades, a, b, c y d, para cada evento E_1, E_2 y E_3. Por consiguiente, según el principio fundamental de conteo, el número total de ternas ordenadas es $4 \cdot 4 \cdot 4$, es decir, 64.

(b) El número de tétradas ordenadas posibles, (x_1, x_2, x_3, x_4) es $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$.

(c) El número de r-adas ordenadas es el producto $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 4$, donde aparece 4 como factor r veces. Ese producto es igual a 4^r.

EJEMPLO 2 *Elección de representantes de un grupo escolar*

En un grupo hay 60 mujeres y 40 hombres. ¿De cuántas maneras se pueden elegir presidente, vicepresidente, tesorero y secretario, si el tesorero debe ser mujer, el secretario hombre y una persona no puede ocupar más de un puesto?

SOLUCIÓN Si un evento es especializado en cierta forma, por ejemplo (el tesorero *debe* ser mujer), entonces se debe llevar a cabo antes de cualquier otro no especializado. Así, por ejemplo E_1 representa la elección del tesorero, y E_2 la del secretario. A continuación, se establece que E_3 y E_4 representen las elecciones de presidente y vicepresidente, respectivamente. Como en el principio fundamental de conteo, se hace que m_i represente el número de modos distintos en que E_i puede suceder para $i = 1, 2, 3$ y 4. Por consiguiente, $m_1 = 60$, $m_2 = 40$, $m_3 = 98$ y $m_4 = 97$. De acuerdo con el principio fundamental de conteo, el número total de posibilidades es

$$60 \cdot 40 \cdot 98 \cdot 97 = 22{,}814{,}400.$$

Cuando se trabaja con conjuntos, por lo general no interesa el orden de los elementos. Sin embargo, en lo que resta de esta sección, el orden de los elementos será el principal interés.

Definición de permutación

Sea S un conjunto de n elementos, y sea $1 \leq r \leq n$. Una **permutación** de r elementos de S es una ordenación, sin repeticiones, de r elementos.

También se emplea la frase **permutación de n elementos tomados r a la vez**. El símbolo $P(n, r)$ representrá el número total de permutaciones distintas de r elementos que se puede obtener a partir de un conjunto de n elementos. Como caso especial, $P(n, n)$ indica el número de arreglos de n elementos de S; es decir, el número de formas de disponer *todos* los elementos de S.

En la primera explicación en la que se tenían los cuatro equipos, A, B, C y D, había $P(4, 2) = 12$, ya que había 12 modos distintos de disponer los cuatro equipos en grupos de 2. También se mostró que el número de modos de ordenar todos los elementos A, B, C y D, es 24. En la notación de permutaciones, se escribiría lo anterior como $P(4, 4) = 24$.

El teorema siguiente da una fórmula general para $P(n, r)$.

Teorema de las permutaciones

Sea S un conjunto de n elementos, y sea $1 \leq r \leq n$. El número de permutaciones distintas de r elementos de S es

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1).$$

DEMOSTRACIÓN El problema de determinar $P(n, r)$ equivale a definir el número de r-adas $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ distintas tales que cada x_i sea elemento de S, y que ningún elemento de S aparezca dos veces o más en la misma r-ada. Se puede calcular este número mediante el principio fundamental de conteo. Para cada $i = 1, 2, \ldots, r$, sea E_i la determinación del elemento x_i y sea m_i el número de modos distintos de elegir x_i. Se desea aplicar la sucesión $E_1, E_2, \ldots, E_r$. Hay n posibilidades para x_1 y, en consecuencia, $m_1 = n$. Como no se permiten las repeticiones, entonces hay $n - 1$ posibilidades para x_2, de modo que $m_2 = n - 1$. Continuando de este modo, se obtiene sucesivamente $m_3 = n - 2$, $m_4 = n - 3$ y, finalmente, $m_r = n - (r - 1)$, o, en forma similar, $m_r = n - r + 1$. Por consiguiente, empleando el principio fundamental de conteo, se llega a la fórmula $P(n, r)$ del teorema. ■

Nótese que *la fórmula de $P(n, r)$ del teorema anterior contiene exactamente r factores en el segundo miembro*, como se ve en el ejemplo ilustrativo siguiente.

EJEMPLO ILUSTRATIVO
Número de permutaciones distintas

- $P(n, 1) = n$
- $P(n, 2) = n(n - 1)$
- $P(n, 3) = n(n - 1)(n - 2)$
- $P(n, 4) = n(n - 1)(n - 2)(n - 3)$

EJEMPLO 3 ***Cálculo de $P(n, r)$***

Calcular $P(5, 2)$, $P(6, 4)$ y $P(5, 5)$.

SOLUCIÓN Se usa la fórmula de $P(n, r)$ del teorema anterior:

$$5 - 2 + 1 = 4, \text{ so } P(5, 2) = 5 \cdot 4 = 20$$

$$6 - 4 + 1 = 3, \text{ so } P(6, 4) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

$$5 - 5 + 1 = 1, \text{ so } P(5, 5) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

EJEMPLO 4 ***Orden de bateo en un equipo de béisbol***

En un equipo de béisbol hay 9 jugadores. Calcular el número de formas de llenar los cuatro primeros lugares del orden al bat, sin tomar en cuenta al lanzador.

SOLUCIÓN Se desea calcular el número de permutaciones de 8 personas tomadas de 4 en 4. Con la fórmula de $P(n, r)$, con $n = 8$ y $r = 4$, se tiene que $n - r + 1 = 5$, y por lo tanto,

$$P(8, 4) = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680.$$

El siguiente resultado presenta una forma de $P(n, r)$ en la que se usa el símbolo factorial.

Forma factorial de $P(n, r)$

Si n es entero positivo, y $1 \leq r \leq n$, *entonces*

$$\mathrm{P}(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!}.$$

DEMOSTRACIÓN Si $r = n$ en la fórmula de $P(n, r)$ en el teorema de las permutaciones, se obtiene el número de permutaciones distintas de *todos* los elementos de un conjunto de n elementos. En este caso,

$$n - r + 1 = n - n + 1 = 1$$

y

$$P(n, n) = n(n - 1)(n - 2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

Por consiguiente, $P(n, n)$ es el producto de los n primeros enteros positivos. Este resultado también se puede expresar en forma factorial, porque si $r = n$, entonces

$$P(n, n) = \frac{n!}{(n - n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!.$$

Si $1 \leq r < n$, entonces

$$\frac{n!}{(n - r)!} = \frac{n(n - 1)(n - 2) \cdots (n - r + 1) \cdot [(n - r)!]}{(n - r)!}$$

$$= n(n - 1)(n - 2) \cdots (n - r + 1).$$

Esto concuerda con la fórmula de $P(n, r)$ del teorema de las permutaciones. ■

EJEMPLO 5 ***Cálculo de $P(n, r)$ usando factoriales***

Con la fórmula factorial de $P(n, r)$ calcular $P(5, 2)$, $P(6, 4)$ y $P(5, 5)$.

SOLUCIÓN

$$P(5, 2) = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20$$

$$P(6, 4) = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

$$P(5, 5) = \frac{5!}{(5-5)!} = \frac{5!}{0!} = \frac{5!}{1} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

EJERCICIOS 10.6

Ejercicios 1 – 8: Calcule el número.

1 $P(7, 3)$ **2** $P(8, 5)$

3 $P(9, 6)$ **4** $P(5, 3)$

5 $P(5, 5)$ **6** $P(4, 4)$

7 $P(6, 1)$ **8** $P(5, 1)$

9 ¿Cuántos números de 3 dígitos se pueden formar con 1, 2, 3, 4 y 5, si

(a) no se permiten repeticiones?

(b) se permiten repeticiones?

10 Repetir el Ejercicio 9 con números de 4 dígitos.

11 ¿Cuántos números se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3 y 4, si no se permiten repeticiones? (*Nota*: 42 y 231 son ejemplos de esos números.)

12 Calcule el número de enteros positivos menores que 10 000 que se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3 y 4, si se permiten repeticiones.

13 ***Clasificación en básquetbol*** Si en un torneo hay 8 equipos de básquetbol, calcule el número de formas distintas en que los equipos pueden ocupar el primero segundo y tercer lugares, suponiendo que no se permiten empates.

14 ***Clasificación en básquetbol*** Repita el Ejercicio 13 para 12 equipos.

15 ***Combinaciones de un guardarropa*** Una muchacha tiene 4 faldas y 6 blusas. ¿Cuántas combinaciones puede hacer con ellas?

16 ***Combinaciones de un guardarropa*** En el Ejercicio 15, si también tiene 3 suéteres, ¿cuántas combinaciones puede hacer?

17 ***Números de placa*** En determinado lugar, los números de placas de automóviles se inician con una letra del alfabeto, seguida de 5 dígitos (0, 1, 2, . . . , 9). Calcule cuántos números distintos se pueden tener si

(a) el primer dígito que sigue a la letra no puede ser 0.

(b) la primera letra no puede ser O ni I, y el primer dígito no puede ser 0.

18 ***Juego de dados*** Se tiran dos dados, uno después de otro. ¿Cuántas posibilidades hay en que pueden caer? Haga una lista del número de formas distintas en las que la suma de los puntos puede ser igual a

(a) 3 **(b)** 5 **(c)** 7 **(d)** 9 **(e)** 11

19 ***Distribución de asientos*** En un grupo escolar, se desea ocupar una fila de 6 asientos con individuos seleccionados de un grupo de 10 estudiantes.

(a) ¿De cuántos modos distintos se pueden ocupar los asientos?

(b) Si hay 6 hombres y 4 mujeres en el grupo, y si han de sentarse alternadamente, calcule el número de formas de ocupar los asientos.

20 ***Horario de clases*** Un estudiante puede asistir a matemáticas a las 8, 10, 11 o 14 horas al día; inglés a las 9, 10, 13 o 14 h; e historia a las 8, 11, 14 o 15. Calcule el número de modos distintos en los cuales puede programar esas tres materias.

21 ***Prueba de cierto o falso*** ¿De cuántos modos distintos se puede hacer una prueba formada por 10 preguntas de cierto o falso?

22 ***Prueba de opción múltiple*** Una prueba consite en 6 preguntas de opción múltiple, y para cada pregunta hay 5 opciones para escoger de ahí la respuesta. ¿De cuántas maneras distintas se puede resolver la prueba?

23 ***Acomodo de asientos*** ¿De cuántas formas distintas es posible distribuir sentadas 8 personas en una fila?

24 ***Arreglo de libros*** ¿De cuántas maneras distintas se pueden colocar 10 libros en una repisa?

25 ***Señales*** Si se tienen seis banderas diferentes, ¿cuántas señales distintas se pueden hacer con tres banderas, colocadas una arriba de otra, en un asta?

26 ***Selección de libros*** ¿de cuántos modos se pueden elegir 5 libros de un conjunto de 12?

27 ***Radioindicativos de llamada*** ¿Cuántos indicativos de estación, formados por 4 letras, se pueden tener si la primera letra debe ser K o W, y

(a) no se permiten repeticiones?
(b) se permiten repeticiones?

28 ***Nombres de fraternidades*** Hay 24 letras del alfabeto griego. ¿Cuántas fraternidades se pueden nombrar con tres letras griegas si

(a) no se permiten repeticiones?
(b) se permiten repeticiones?

29 ***Números telefónicos*** ¿Cuántos números telefónicos de 7 dígitos se pueden formar con los números del 0 al 9, si el primer dígito no debe ser cero?

30 ***Orden al bat*** Después de elegir nueve jugadores, el *manager* del equipo de béisbol dispone el orden de modo que el lanzador sea el último, y el mejor bateador sea el tercero. ¿De cuántos modos distintos se pueden distribuir los restantes jugadores en el orden al bat?

31 ***Clave secreta*** Un cliente recuerda que 2, 4, 7 y 9 son los cuatro dígitos de una clave de acceso a un cajero automático. Desafortunadamente, ha olvidado el orden de los números. Calcule el número máximo posible de intentos necesarios para obtener la clave correcta.

32 ***Clave secreta*** Repita el Ejercicio 31; si los dígitos son 2, 4 y 7, y uno de ellos se repite en la clave de 4 dígitos.

33 ***Elección de asientos de teatro*** Tres matrimonios compraron entradas de teatro. Los esposos se deben sentar uno al lado del otro, y las seis butacas están en fila. ¿De cuántos modos se pueden sentar las seis personas?

34 ***Resultados de carreras de caballos*** En una carrera participan 10 caballos. Si no se toma en cuenta la posibilidad de un empate en cualquier lugar, ¿de cuántos modos se pueden tener los ganadores en primero, segundo y tercer lugares?

35 Las leyes conmutativa y asociativa de la suma garantizan que la suma de enteros del 1 al 10 es independiente del orden de los sumandos. ¿De cuántos modos distintos se pueden sumar dichos enteros?

36 ***Barajado de cartas***

(a) ¿De cuántos modos se puede encontrar barajado un mazo normal de 52 naipes de la baraja francesa?
(b) ¿De cuántos modos se pueden barajar para que los 4 ases aparezcan en los primeros lugares del mazo?

37 ***Palindromos numéricos*** Un palindromo es un número entero, como 45654, que resulta lo mismo leído normalmente o al revés.

(a) ¿Cuántos palindromos de 5 dígitos hay?
(b) ¿Cuántos palindromos de n dígitos hay?

38 ***Disposiciones de colores*** Cada uno de los seis cuadros que se muestran en la figura se puede llenar con uno cualquiera de 10 colores. ¿Cuántas maneras posibles hay de colorear la banda de la figura para que cuadros vecinos no tengan el mismo color?

C **39** Para este ejercicio se necesita una calculadora que pueda graficar $x!$.

(a) Grafique $y = \dfrac{x!\, e^x}{x^x \sqrt{2\pi x}}$ en $(0, 20]$; determine la asíntota horizontal.

(b) Use la gráfica del inciso (a) para calcular una aproximación de $n!$, si n es un entero positivo grande.

40 **(a)** ¿Qué sucede si se usa una calculadora para determinar $P(150, 50)$? Explíquelo.

(b) Calcule r si $P(150, 50) = 10^r$ con la fórmula siguiente, que se obtiene en matemáticas superiores:

$$\log n! \approx \frac{n \ln n - n}{\ln 10}$$

10.7 PERMUTACIONES DISTINGUIBLES Y COMBINACIONES

En algunos problemas se trata de determinar diferentes disposiciones de objetos, algunas de las cuales son indistinguibles. Por ejemplo, supóngase que se tienen 5 discos del mismo tamaño, de los cuales 3 son negros, 1 es blanco y 1 rojo. Se desea calcular el número de modos en los que se pueden ordenar en una fila para obtener distintos acomodos de los colores. Si todos los discos fueran de distinto color, el número de arreglos sería 5!, o 120. Sin embargo, como algunos tienen el mismo aspecto, no se pueden obtener 120 arreglos distintos. Para aclarar lo anterior, se tiene

N N N B R

lo que significa que se acomodan los tres discos negros en los primeros tres lugares del renglón, el blanco en cuarto y el rojo en quinto lugar. Los tres primeros discos se pueden acomodar de 3! o 6 modos distintos, pero no se pueden distinguir entre sí por tener el mismo aspecto. Se dice que esas 3! permutaciones son **no distinguibles**. Igualmente, dado cualquier otro arreglo, por ejemplo,

N R N B N,

hay 3! modos distintos de acomodar los tres discos negros; pero cada disposición es, nuevamente, indistinguible de las otras. Dos acomodos de objetos se llaman permutaciones distinguibles si una ordenación no se puede obtener de otra reordenando objetos iguales. Así, N N N B R y N R N B N son permutaciones distinguibles de los cinco discos. Sea k el número de permutaciones distinguibles. Como a cada arreglo corresponden 3! permutaciones no *distinguibles*, se debe tener $3!k = 5!$, que es el número de permutaciones de 5 objetos *distintos*. Por lo tanto, $k = 5!/3! = 5 \cdot 4 = 20$. *Mediante el mismo tipo de razonamiento, se llega a la siguiente generalización de lo que se ha explicado.*

Teorema

Si r objetos de un conjunto de n objetos son iguales, y si los restantes son distintos entre sí y de los r objetos, el número de permutaciones distinguibles de los n objetos es

$$\frac{n!}{r!}$$

Se puede generalizar este teorema al caso en el cual hay varios subconjuntos de objetos no distinguibles. Por ejemplo, considérense 8 discos, de los cuales 4 son negros, 3 blancos y 1 rojo. En este caso, con cada ordenación, como por ejemplo

N B N B N B N R,

hay 4! arreglos de los discos negros y 3! de los blancos que no tienen efecto en el orden de los colores. Por consiguiente, 4!3! arreglos posibles de los discos no producen permutaciones distinguibles. Si k representa el número de permutaciones *distinguibles*, entonces $4!3!k = 8!$, ya que 8! es el número de permutaciones que se obtendría si todos los discos fueran distintos. Así, el número de permutaciones distinguibles es

$$k = \frac{8!}{4!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} \cdot \frac{4!}{4!} = 280.$$

Se puede demostrar que el resultado siguiente es cierto.

Teorema de permutaciones distinguibles

Si en un conjunto de n objetos, n_1 son iguales, n_2 son iguales de otro tipo . . . , n_k son iguales de un tipo más, y si

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k,$$

entonces, el número de permutaciones distinguibles de los n objetos es

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2 \cdots n_k!}.$$

EJEMPLO 1 ***Determinación del número de permutaciones distinguibles***

Calcular el número de permutaciones distinguibles de las letras de la palabra *Mississippi*.

SOLUCIÓN En este ejemplo se tiene un conjunto de 11 objetos, de los cuales 4 son de un tipo (la letra *s*), cuatro de otro (la letra *i*), dos de un tercer tipo (la *p*), y uno es de un cuarto tipo (la *M*). Por lo tanto, de acuerdo con el teorema anterior, el número de permutaciones distinguibles es

$$\frac{11!}{4!4!2!1!} = 34{,}650.$$

Cuando se trabaje con permutaciones, se debe tener cuidado con las ordenaciones o arreglos de los elementos. Por lo pronto, omítase el orden, de los elementos, y considérese la siguiente pregunta: Dado un conjunto de n elementos distintos, ¿de cuántos modos se puede escoger un subconjunto de r elementos en el cual $r \leq n$? Antes de contestarla, considere la definición siguiente.

Definición de combinación

Sea S un conjunto de n elementos, y sea $1 \leq r \leq n$. Una **combinación** de r elementos de S es un subconjunto de S que contiene r elementos distintos.

Si S contiene n elementos, también se usa la frase **combinación de n elementos tomados de r en r**. El símbolo $C(n, r)$ representa el número de combinaciones de r elementos que se pueden obtener de un conjunto de n elementos.

Teorema de las combinaciones

El número de combinaciones de r elementos que se puede obtener a partir de un conjunto de n elementos es

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!\, r!}, \quad 1 \leq r \leq n.$$

DEMOSTRACIÓN Si S contiene n elementos, entonces, para calcular $C(n, r)$, se debe determinar el número de subconjuntos de la forma

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$$

tal que las x_i sean elementos de *S diferentes* entre sí. Como los elementos $x_1, x_2, \ldots, x_r$ se pueden ordenar de $r!$ modos distintos, cada subconjunto de ésos produce $r!$ grupos distintos formados por r elementos. Así, el número total de r-adas distintas es $r!\,C(n, r)$. Sin embargo, en la sección anterior se estableció que el número total de grupos formados por r elementos es

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!}.$$

Por consiguiente,

$$r!C(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!}$$

Al dividir entre $r!$ ambos miembros de la última ecuación se llega a la fórmula del teorema para $C(n, r)$.

La fórmula de $C(n, r)$ *es idéntica a la del coeficiente binomial,* $\binom{n}{r}$ de la Secc. 10.5.

EJEMPLO 2 ***Opciones de un equipo de béisbol***

Un equipo de ligas infantiles de béisbol tiene 6 jardineros, 7 jugadores de cuadro, 5 lanzadores y 2 receptores. Cada jardinero puede jugar en cualquiera de los tres jardines: derecho, central e izquierdo; cada jugador de cuadro puede jugar en las cuatro posiciones: primera, segunda y tercera bases, y parador en corto. ¿De cuántos modos se puede formar el equipo normal de nueve jugadores?

SOLUCIÓN El número de maneras de escoger tres jardineros entre los 6 candidatos es

$$C(6, 3) = \frac{6!}{(6 - 3)!3!} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3!} = 20.$$

El número de modos de elegir los cuatro jugadores de cuadro es

$$C(7, 4) = \frac{7!}{(7 - 4)!4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3!4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35.$$

Hay 5 modos de elegir un lanzador, y dos para elegir al receptor. De acuerdo con el principio fundamental de conteo, el número total de modos para formar un equipo es

$$20 \cdot 35 \cdot 5 \cdot 2 = 7000.$$

Nótese que si $r = n$, la fórmula para $C(n, r)$ se transforma en

$$C(n, n) = \frac{n!}{(n - n)!n!} = \frac{n!}{0!n!} = 1.$$

Conviene asignar un significado a $C(n, r)$ si $r = 0$. Si la fórmula debe ser válida para ese caso, entonces se debe cumplir

$$C(n, 0) = \frac{n!}{n!0!} = 1.$$

Por consiguiente, *se define* $C(n, 0) = 1$, que es igual que $C(n, n)$. Finalmente, también *se define* $C(0, 0) = 1$, para que haya consistencia. Así, $C(n, r)$ tiene significado para todos los enteros no negativos, n y r, donde $r \leq n$.

EJEMPLO 3 ***Cálculo del número de subconjuntos de un conjunto***

Sea S un conjunto de n elementos. Calcular el número de subconjuntos de S distintos entre sí.

SOLUCIÓN Sea r cualquier entero no negativo tal que $r \leq n$. Según la explicación anterior, el número de subconjuntos de S formados por r elementos es $C(n, r)$, o sea $\binom{n}{r}$. Por lo tanto, para calcular el número total de subconjuntos, se determina la suma

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n}.$$

Es exactamente el desarrollo binomial de $(1 + 1)^n$. Por lo tanto, hay 2^n subconjuntos en un conjunto de n elementos. En particular, un conjunto de 3 elementos tiene $2^3 = 8$ subconjuntos distintos. Un conjunto de 4 elementos tiene $2^4 = 16$ subconjuntos; y uno de 10 elementos tiene $2^{10} = 1024$ subconjuntos.

EJERCICIOS 10.7

Ejercicios 1 – 8: Calcule el número de combinaciones.

1 $C(7, 3)$ **2** $C(8, 4)$

3 $C(9, 8)$ **4** $C(6, 2)$

5 $C(n, n - 1)$ **6** $C(n, 1)$

7 $C(7, 0)$ **8** $C(5, 5)$

Ejercicios 9 y 10: Calcule el número de ordenaciones posibles de colores para los 12 discos dados, colocados en fila.

9 5 negros, 3 rojos, 2 blancos y 2 verdes.

10 3 negros, 3 rojos, 3 blancos y 3 verdes.

11 Calcule el número de permutaciones distinguibles de las letras de la palabra *bookkeeper* (tenedor de libros).

12 Determine el número de permutaciones distinguibles de las letras de la palabra *moon* (luna). Enliste todas ellas.

13 ***Formación de equipos de básquetbol*** Diez personas desean jugar básquetbol. ¿De cuántas maneras distintas se pueden formar 2 equipos de 5 jugadores cada uno?

14 ***Selección de preguntas de examen*** Un estudiante puede contestar 6 preguntas cualesquiera de 10 que aparecen en un examen.

(a) ¿De cuántas maneras distintas puede seleccionar las seis preguntas?

(b) ¿Cuántas opciones son posibles si se tienen que contestar las dos primeras preguntas?

Ejercicios 15 y 16: Se tienen 8 puntos cualesquiera, tales que no hay en ellos 3 que sean colineales.

15 ¿Cuántas rectas quedan determinadas?

16 ¿Cuántos triángulos quedan determinados?

17 ***Acomodo de libros*** Un estudiante tiene 5 libros de matemáticas, 4 de historia y 8 de literatura. ¿De cuántos modos distintos se pueden ordenar en una repisa, si los de la misma materia deben estar juntos?

18 ***Formación de un equipo de básquetbol*** Una escuadra de básquetbol está formada por 12 jugadores.

(a) Sin tener en cuenta las posiciones, ¿de cuántos modos se puede formar un equipo de 5?

(b) Si el centro del equipo debe ser uno de dos individuos específicos del conjunto, y los otros 4 miembros pueden ser cualesquiera de los restantes 10, calcule el número posible de equipos diferentes.

19 ***Formación de un equipo de fútbol americano*** Una escuadra ofensiva de jugadores estaba formada por 3 centros, 10 "linieros" que pueden ser centro, *guard* o *tackle*, tres *quarterbacks*, 6 *halfbacks*, 4 extremos y 4 *fullbacks*. En el campo debe haber un centro, dos guardas, dos tacles, dos extremos, dos *halfbacks*, un *quarterback* y un *fullback*. ¿De cuántos modos distintos se

puede formar un equipo de 11 jugadores con los integrantes disponibles?

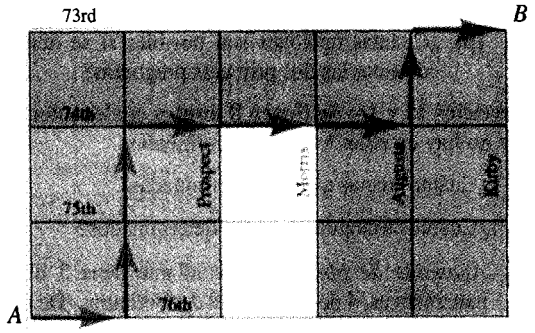
20 ***Orden de llaves en un anillo*** ¿De cuántos modos se pueden ordenar 7 llaves en un llavero anular, si éstas pueden deslizarse por todo el derredor del anillo?

21 ***Selección de un comité*** Se desea elegir un comité de 3 hombres y 2 mujeres entre un grupo de 12 hombres y 8 mujeres. Calcule el número de maneras distintas de formar el comité.

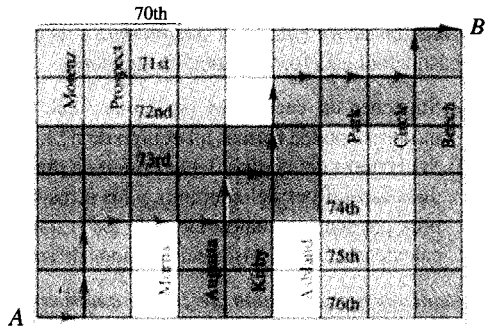
22 ***Orden de nacimientos*** Las letras M y H representan nacimiento de mujer y hombre, respectivamente. Para una familia con 3 niños y 3 niñas, un orden posible de nacimientos es M M M H H H. ¿Cuántas ordenaciones de nacimientos se pueden tener con esos 6 niños?

Ejercicios 23 y 24: En la figura aparece un mapa de calles y una ruta posible desde el punto *A* hasta el punto *B*. ¿Cuántas otras rutas posibles hay de *A* a *B*, si los movimientos sólo pueden ser hacia arriba o hacia la derecha? (*Sugerencia:* si D representa un movimiento de una unidad hacia la derecha y A representa a uno hacia arriba, entonces, la trayectoria del ejercicio 23 es D A A D D D A D). (Se consideran en ciudades de Estados Unidos).

23



24



25 ***Alternativas de lotería*** Para ganar en una lotería local, un participante debe escoger correctamente 6 números entre el 1 y el 49 inclusive.

(a) Calcule el número total de elecciones posibles.

(b) Repita la parte (a) si un jugador sólo selecciona números pares.

26 ***Asignación de cubículos*** Un departamento de matemáticas tiene 10 profesores, pero sólo 9 cubículos, de tal modo que dos profesores deben compartir uno de los cubículos. ¿De cuántos modos diferentes se pueden asignar los cubículos?

27 ***Torneo de tenis*** En un torneo todos contra todos de tenis, cada participante juega exactamente una vez con cada uno de los demás. ¿Cuántos jugadores pueden participar en un torneo de 45 juegos?

28 ***Examen de cierto o falso*** Un examen con respuestas de cierto o falso tiene 20 preguntas.

(a) ¿De cuántos modos distintos puede contestarse el examen?

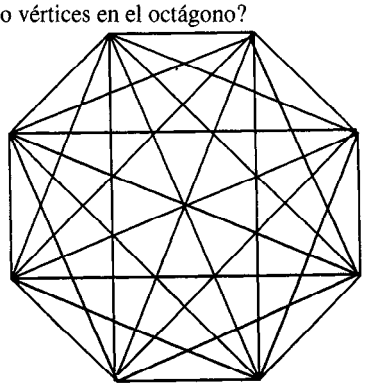
(b) ¿De cuántos modos distintos un estudiante puede contestar correctamente 10 de las preguntas?

29 ***Serie de campeonato de básquetbol*** El ganador de la serie de campeonato de la NBA, de 7 juegos, es el equipo que gane 4 encuentros. ¿De cuántas maneras se puede ganar la serie de 7 juegos?

30 Una figura geométrica se forma uniendo cada par de vértices de un octágono (véase la figura)

(a) ¿Cuántos triángulos de la figura tienen sus tres vértices en el octágono?

(b) ¿Cuántos cuadriláteros de la figura tienen sus cuatro vértices en el octágono?



31 ***Elecciones de helado*** Una fuente de sodas tiene helados de 31 sabores, y anuncia que puede servir 4 500 conos distintos de 3 bolas, cada una de ellas de distinto sabor. ¿Cómo calcularon ese número?

32 ***Elección de condimentos de hamburguesa*** Un restaurante de bocadillos anuncia que ofrece cualquier combinación de 8 condimentos en cada hamburguesa, con lo cual el cliente tiene 256 combinaciones distintas a su disposición. ¿Cómo se calculó ese número?

Ejercicios 33 y 34: (a) Calcule la suma S_n para $n = 1, 2, 3, \ldots, 10$, donde, si $n < r$, entonces $\binom{n}{r} = 0$. (b) Deduzca una fórmula general de S_n.

33 $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \binom{n}{7} + \cdots$

34 $(1)\binom{n}{1} - (2)\binom{n}{2} + (3)\binom{n}{3} - (4)\binom{n}{4} + (5)\binom{n}{5} - \cdots$

10.8 PROBABILIDAD

Si se tiran 2 dados, ¿qué probabilidad hay de sacar 7? Si a una persona se le dan 5 cartas de un mazo de baraja francesa de 52, ¿qué probabilidad tiene de obtener tercia de ases? Preguntas como éstas, acerca de juegos de azar, condujeron al estudio de la *probabilidad* en el siglo XVII. Desde entonces esa teoría ha crecido extensamente. Hoy se emplea para predecir resultados de una gran variedad de casos que se presentan en las ciencias naturales y sociales.

Todo proceso aleatorio, por ejemplo, arrojar una moneda, tirar los dados, repartir cartas de una baraja, determinar si un artículo está defectuoso, o medir la presión arterial de una persona, es un **experimento**. El experimento genera un **resultado**. Por ahora, se restringe la explicación a experimentos cuyos resultados sean **igualmente probables**. Esto quiere decir, por ejemplo, que si se arroja una moneda, se supone que la posibilidad de obtener cara es igual a la posibilidad de obtener cruz. Igualmente, si se tira un dado, se supone que es *justo*, o sea, no está cargado y que hay igual probabilidad de obtener 1, 2, 3, 4, 5 o 6 puntos. El conjunto S de todos los resultados posibles de un experimento es el **espacio muestral** de éste. De modo que, si el experimento consiste en tirar una moneda y se considera que H o T representan el resultado de obtener cara (anverso) o cruz (reverso), respectivamente, entonces el espacio muestral S se puede representar mediante

$$S = \{\text{H}, \text{T}\}.$$

Si el experimento es tirar un dado no cargado, entonces el conjunto S de todos los resultados posibles (espacio muestral) es

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

La siguiente definición expresa, en términos matemáticos, la noción de obtener resultados *particulares* en un experimento.

Definición de evento

Sea S el espacio muestral de un experimento. Un **evento** asociado con el experimento es cualquier subconjunto E de S.

Considérese el experimento que consiste en tirar un solo dado, de tal modo que el espacio muestral es $S = \{1,2,3,4,5,6\}$. Si $E = \{4\}$, entonces el evento E asociado con el experimento consiste en obtener 4 al lanzar el dado. Con el mismo experimento se pueden asociar distintos eventos. Por ejemplo, si $E = \{1,3,5\}$, entonces este evento consiste en obtener un número impar en una tirada del dado.

Otro ejemplo: supóngase que el experimento consiste en arrojar dos monedas al aire, una después de la otra. Si se representa por HH el resultado en el cual se obtienen dos caras, HT el de obtener una cara en la primera tirada y una cruz en la segunda, etc., entonces, el espacio muestral S del experimento, se puede representar mediante

$$S = \{\text{HH}, \text{HT}, \text{TH}, \text{TT}\}.$$

Si se define $E = \{HT, TH\}$,

entonces, un evento consiste en la aparición de cara en una de las monedas, y una cruz en la segunda.

A continuación se define lo que significa *probabilidad* de un evento. En la explicación se supone que el espacio muestral S de un experimento, contiene sólo un número finito de elementos. Si E es un evento, *los símbolos n(E) y n(S) indican el número de elementos en E y en S, respectivamente.*

Definición de la probabilidad de un evento

Sea S el espacio muestral de un experimento y E un evento. La **probabilidad**, $P(E)$ de E es

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}.$$

Como E es un subconjunto de S, se observa que

$$0 \leq n(E) \leq n(S).$$

Dividiendo entre $n(S)$, se llega a

$$0 \leq P(E) \leq 1.$$

Nótese que $P(E) = 1$ si $E = S$, y que $P(E) = 0$ si E no contiene elementos.

En el ejemplo que sigue se ilustran varios casos de la definición anterior, si E contiene exactamente un elemento.

EJEMPLO 1 ***Cálculo de la probabilidad de un evento***

Si se arroja una moneda, calcule la probabilidad de obtener cara.

Si se tira un dado no cargado, determine la probabilidad de obtener 4.

Si se arrojan dos monedas, calcule la probabilidad de obtener dos caras.

SOLUCIÓN Para cada experimento se escriben los conjuntos S y E para después calcular $P(E)$ mediante la definición de probabilidad.

(a) $S = \{H, T\}$, $E = \{H\}$, $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{1}{2}$

(b) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $E = \{4\}$, $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{1}{6}$

(c) $S = \{HH, HT, TH, TT\}$, $E = \{HH\}$, $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{1}{4}$

En el inciso (a) del Ejemplo 1, se encontró que la probabilidad de obtener cara al arrojar una moneda es $\frac{1}{2}$. Ello significa decir que si se arroja muchas veces la moneda, el número de veces que se obtiene cara debe ser, aproximadamente, la mitad del número total de veces que se lanza la moneda. Así, para 100 pruebas, se debería obtener cara aproximadamente 50 veces. No es

probable que en realidad se obtenga *exactamente* 50 veces cara. La probabilidad de $\frac{1}{2}$ quiere decir que si aumenta el número de veces que se lanza la moneda, entonces el número de veces que se obtiene cara *tiende* a ser la mitad del número total de veces que se lanza la moneda. Para las partes (b) y (c) del Ejemplo 1 son válidas observaciones análogas.

En los dos ejemplos que siguen se consideran experimentos en los cuales un evento contiene más de un elemento.

EJEMPLO 2 *Cálculo de las probabilidades al tirar dos dados*

Si se tiran 2 dados, ¿cuál es la probabilidad de obtener, como suma,
(a) 7? **(b)** 9?

SOLUCIÓN Uno de los dados se llama *primer dado*, y el otro, *segundo dado*. Se usan como sigue los pares ordenados para representar resultados: (2, 4) representa el resultado de obtener 2 con el primer dado y 4 con el segundo; (5, 3) representa 5 en el primero y 3 en el segundo, y así sucesivamente. Como hay 6 posibilidades distintas para el primero de los números del par ordenado, y, con cada una de ellas, seis para el segundo, el número total de pares ordenados es 36. Por consiguiente, si S es el espacio muestral, entonces $n(S) = 36$.

(a) El evento E que corresponde a obtener una suma de 7 es

$$E = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\},$$

y por consiguiente,

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

(b) Si E es el evento que corresponde a obtener 9 en la suma, entonces

$$E = \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$$

y

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

En el ejemplo que sigue, y en los ejercicios, cuando se diga que se toman una o más cartas de una baraja, se entiende que cada una se saca del mazo de la baraja francesa (o americana) de 52 cartas, y que *no* se vuelve a introducir para sacar la siguiente.

EJEMPLO 3 *Cálculo de la probabilidad de sacar cierta mano de cartas*

Supóngase que se sacan 5 cartas de una baraja. Calcule la probabilidad de que las cinco cartas sean de corazones.

SOLUCIÓN El espacio muestral S del experimento, es el conjunto de todas las manos posibles de 5 cartas, que se puedan formar con las 52 de la baraja. De acuerdo con lo establecido anteriormente, este número es $n(S) = C(52, 5)$.

Como hay 13 cartas del palo (o signo) de corazones, el número de modos distintos de obtener una mano que tenga 5 naipes de corazones es $C(13, 5)$. Por lo tanto, si E representa este evento, entonces

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{C(13, 5)}{C(52, 5)} = \frac{\frac{13!}{5!8!}}{\frac{52!}{5!47!}}.$$

Y se tiene que

$$P(E) = \frac{1287}{2{,}598{,}960} \approx 0.0005.$$

Así,

$$P(E) \approx \frac{1}{2000}.$$

Este resultado quiere decir que si se lleva a cabo el experimento muchas veces, se debe obtener una mano de cinco naipes de corazones aproximadamente una vez de cada 2 000.

Supóngase que S es el espacio muestral de un experimento, y que E_1 y E_2 son dos eventos asociados con el experimento. Si E_1 y E_2 no tienen elementos en común, se llaman *conjuntos ajenos* o *disjuntos*, y se representan mediante $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, que es el *conjunto vacío*. En este caso, si sucede un evento, el otro no puede suceder. Son **eventos mutuamente excluyentes**. De modo que, si $E = E_1 \cup E_2$, entonces

$$n(E) = n(E_1 \cup E_2) = n(E_1) + n(E_2).$$

Por consiguiente,

$$P(E) = \frac{n(E_1) + n(E_2)}{n(S)} = \frac{n(E_1)}{n(S)} + \frac{n(E_2)}{n(S)},$$

o sea,

$$P(E) = P(E_1) + P(E_2).$$

De tal modo, la probabilidad de E es la suma de las probabilidades de E_1 y E_2. Se ha demostrado lo siguiente.

Teorema de eventos mutuamente excluyentes

Si E_1 y E_2 son eventos mutuamente excluyentes, y si $E = E_1 \cup E_2$, entonces

$$P(E) = P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2).$$

Se puede generalizar este teorema a cualquier número de eventos $E_1, E_2, \ldots, E_k$, que son mutuamente excluyentes, tales que si $i \neq j$, entonces $E_i \cap E_j = \varnothing$. La conclusión del teorema es, entonces,

$$P(E) = P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_k).$$

EJEMPLO 4 *Probabilidades cuando se arrojan dos dados*

Si se tiran 2 dados, calcular la probabilidad de obtener 7 o 9 como suma.

SOLUCIÓN Sea E_1 el evento de obtener una suma de 7, y E_2 de obtener la de 9. Como E_1 y E_2 no pueden suceder simultáneamente, son mutuamente excluyentes. Se desea calcular la probabilidad del evento $E = E_1 \cup E_2$. De acuerdo con el Ejemplo 2, se sabe que $P(E_1) = \frac{1}{6}$, y que $P(E_2) = \frac{1}{9}$. Por consiguiente, de acuerdo con el último teorema,

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E_1) + P(E_2) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{5}{18} = 0.2\overline{7}. \end{aligned}$$

Si E_1 y E_2 son eventos que posiblemente tengan elementos comunes, entonces se puede demostrar lo siguiente.

Teorema de la probabilidad de que ocurra uno de dos eventos

Si E_1 y E_2 son dos eventos cualesquiera, entonces

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2).$$

Nótese que se E_1 y E_2 son mutuamente excluyentes, entonces $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, y $P(E_1 \cap E_2) = 0$. Por consiguiente, el último teorema abrca el caso especial del teorema de eventos mutuamente excluyentes.

EJEMPLO 5 ***Probabilidad de seleccionar determinada carta de una baraja***

Si del mazo de 52 cartas se saca una, calcular la probabilidad que sea una sota (jack) o una de espadas (o picas).

SOLUCIÓN Sea E_1 el evento que la carta sea sota, y E_2 el evento que sea de espadas. Los eventos E_1 y E_2 *no* son mutuamente excluyentes, porque hay una carta, la sota de espadas, en ambos eventos y, por consiguiente, $P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{52}$. De acuerdo con el teorema anterior, la probabilidad que la carta sea una sota o una espadas es

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2) &= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) \\ &= \tfrac{4}{52} + \tfrac{13}{52} - \tfrac{1}{52} = \tfrac{16}{52} = \tfrac{4}{13} \approx 0.31. \end{aligned}$$

Al resolver problemas de probabilidad, con frecuencia es útil clasificar los resultados de un espacio muestral S en un evento E y el conjunto E' de elementos de S que no están en E. Se dice que E' es el **complemento** de E. Nótese que

$$E \cup E' = S \qquad \text{y} \qquad n(E) + n(E') = n(S).$$

Dividiendo entre $n(S)$ ambos miembros de la ecuación, se obtiene

$$\frac{n(E)}{n(S)} + \frac{n(E')}{n(S)} = 1.$$

Por consiguiente,

$$P(E) + P(E') = 1, \quad \text{o sea,} \quad P(E) = 1 - P(E').$$

En el ejemplo que sigue se usa esta fórmula.

EJEMPLO 6 ***Probabilidad de sacar cierta mano de cartas***

Si se toman 13 naipes de una baraja de 52, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 2 de las cartas sean de corazones?

SOLUCIÓN Si $P(k)$ representa la probabilidad de obtener k naipes de corazones, entonces la probabilidad de obtener al menos 2 es

$$P(2) + P(3) + P(4) + \cdots + P(13).$$

Como las únicas probabilidades que restan son $P(0)$ y $P(1)$, la probabilidad deseada es igual a

$$1 - [P(0) + P(1)].$$

Para calcular $P(k)$ para cualquier k, se puede considerar que la baraja se divide en dos grupos: de corazones y no de corazones. Para $P(0)$ se observa que en las 13 cartas de la mano, no hay de corazones, y que de las 39 no de corazones, se sacan 13. Como el número de modos de escoger 13 cartas de una baraja de 52 es $C(52, 13)$, entonces.

$$P(0) = \frac{n(0)}{n(S)} = \frac{C(13, 0) \cdot C(39, 13)}{C(52, 13)} \approx 0.0128.$$

La probabilidad $P(1)$ corresponde a obtener 1 de las cartas de corazones y 12 de las 39 que no son de corazones. Así,

$$P(1) = \frac{n(1)}{n(S)} = \frac{C(13, 1) \cdot C(39, 12)}{C(52, 13)} \approx 0.0801.$$

Por consiguiente, la probabilidad deseada es

$$1 - [P(0) + P(1)] \approx 1 - [0.0128 + 0.0801] = 0.9071.$$

Se dice que dos eventos E_1 y E_2 son **eventos independientes**, si al suceder uno no se influye sobre la ocurrencia del otro. Se puede demostrar lo siguiente.

Teorema de eventos independientes

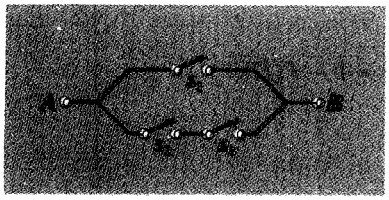
Si E_1 y E_2 son eventos independientes, entonces

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2).$$

Es decir, el teorema establece que si E_1 y E_2 son eventos independientes, la probabilidad que sucedan *ambos* simultáneamente, es el producto de sus probabilidades. Nótese que si dos eventos, E_1 y E_2 son mutuamente excluyentes, entonces $P(E_1 \cap E_2) = 0$, y no pueden ser independientes. (Se supone que ni E_1 ni E_2 son vacíos.)

EJEMPLO 7 *Aplicación de la probabilidad en un sistema eléctrico*

FIGURA 10.5



Un sistema eléctrico tiene interruptores de dos posiciones (abierto o cerrado) s_1, s_2 y s_3, como se ve en la Fig. 10.5. Trabajan independientemente entre sí, y la corriente pasa de A a B si s_1 está cerrado, o bien, tanto si s_2 como s_3 están cerrados.

(a) Si S_k representa al evento cerrar s_k, donde $k = 1, 2, 3$, expresar, en términos de $P(S_1)$, $P(S_2)$ y $P(S_3)$, la probabilidad p de que la corriente pase de A a B.

(b) Calcule p si $P(S_k) = \frac{1}{2}$ para cada k.

SOLUCIÓN

(a) La probabilidad p que suceda S_1, o bien que suceda *tanto* S_2 *como* S_3, es

$$p = P(S_1 \cup (S_2 \cap S_3)).$$

Con el teorema de probabilidad de ocurrencia de uno de los dos eventos S_1, o bien, $S_2 \cap S_3$, se obtiene

$$p = P(S_1) + P(S_2 \cap S_3) - P(S_1 \cap (S_2 \cap S_3)).$$

Aplicando dos veces el teorema de eventos independientes, se tiene

$$p = P(S_1) + P(S_2) \cdot P(S_3) - P(S_1) \cdot P(S_2 \cap S_3).$$

Por último, usando una vez más del teorema de eventos independientes, se llega a

$$p = P(S_1) + P(S_2) \cdot P(S_3) - P(S_1) \cdot P(S_2) \cdot P(S_3).$$

(b) Si $P(S_k) = \frac{1}{2}$ para toda k, entonces, de acuerdo con el inciso (a), la probabilidad que la corriente pase de A a B es

$$p = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{8} = 0.625.$$

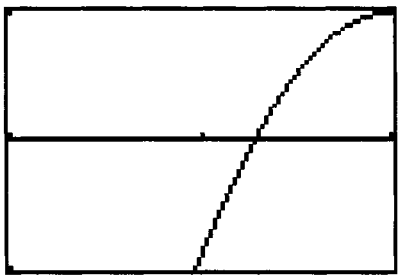
EJEMPLO 8 ***Continuación del Ejemplo7***

En el Ejemplo 7, si la probabilidad de cerrar s_k es igual para toda k, calcular $P(S_k)$ tal que $p = 0.99$.

SOLUCIÓN Como la probabilidad $P(S_k)$ es igual para toda k, $P(S_k) = x$, para $k = 1$, 2 y 3. Sustituyendo en la fórmula de p obtenida en el inciso (a) del Ejemplo 7, se obtiene

$$p = x + x \cdot x - x \cdot x \cdot x = -x^3 + x^2 + x.$$

FIGURA 10. 6 [0.8, 1] por [– 0.01, 0.01]



Si $p = 0.99$ se llega a la ecuación

$$-x^3 + x^2 + x = 0.99.$$

Si se grafica $y = -x^3 + x^2 + x - 0.99$ con un rectángulo visual estándar, se observa que hay 3 abscisas en el origen. La probabilidad que se busca debe estar entre $x = 0$ y $x = 1$, y estar cerca de 1. Empleando las dimensiones [0.8, 1] por [– 0.01, 0.01] del rectángulo, se obtiene un esquema semejante al de la Fig. 10. 6. Con los modos de trazo y ampliación se llega a $x \approx 0.93$. Por consiguiente, $P(S_k) \approx 0.93$.

Obsérvese que la probabilidad de que un interruptor individual esté cerrado es *menor que* la probabilidad de que pase la corriente por el sistema.

En esta sección sólo se han presentado algunos conceptos básicos acerca de la probabilidad. Quien esté interesado, debe consultar otros textos y asistir a cursos dedicados a esta rama de las matemáticas.

EJERCICIOS 10.8

1 Cada palo de una baraja de 52 cartas está formado por un as (A), nueve de números (2, 3, . . . , 10), y tres de figura (J, Q, K). Un experimento consiste en retirar una sola carta de un mazo de 52 y, a continuación, tirar un dado una vez.

(a) Describa el espacio muestral S del experimento, y calcule $n(S)$.

(b) Sea E_1 el evento que consiste en sacar una carta de número, y el número de puntos del dado sea igual al número de la carta. Calcule $n(E_1)$, $n(E'_1)$ y $P(E_1)$.

(c) Sea E_2 el evento en el cual la carta que se saca es de figura, y sea E_3 el evento en el cual el número de puntos del dado es par. ¿Son E_2 y E_3 mutuamente excluyentes? ¿Son independientes? Calcule $P(E_2)$, $P(E_3)$, $P(E_2 \cap E_3)$ y $P(E_2 \cup E_3)$.

(d) ¿Son E_1 y E_2 mutuamente excluyentes? ¿Son independientes? Calcule $P(E_1 \cap E_2)$ y $P(E_1 \cup E_2)$.

2 Un experimento consiste en seleccionar una letra del alfabeto y uno de los dígitos 0, 1, . . . , 9.

(a) Describa el espacio muestral S del experimento, y calcule $n(S)$.

(b) Suponga que se asignan números a las letras del alfabeto, como sigue: A = 1, B = 2, . . . , Z = 26. Sea E_1 el evento en el que el dígito que corresponde a las unidades del número asignado a la letra es igual al número seleccionado. Calcule $n(E_1)$, $n(E'_1)$ y $P(E_1)$.

(c) Sea E_2 el evento en que la letra es una de las cinco vocales, y E_3 el correspondiente a que el dígito sea número primo. ¿Son E_2 y E_3 mutuamente excluyentes? ¿Son independientes? Calcule $P(E_2)$, $P(E_3)$, $P(E_2 \cap E_3)$ y $P(E_2 \cup E_3)$.

(d) Sea E_4 el evento en el que el valor numérico de la letra es par. ¿Son E_2 y E_4 mutuamente excluyentes? ¿Son independientes? Determine $P(E_2 \cap E_4)$ y $P(E_2 \cup E_4)$.

Ejercicios 3 y 4: Se toma una carta de una baraja de 52. Calcule la probabilidad que la carta sea la especificada.

3 **(a)** un rey

(b) un rey o una reina

(c) un rey, una reina o una sota.

4 **(a)** una de corazones

(b) una de corazones o una de diamantes

(c) una de corazones, una de diamantes o una de tréboles.

Ejercicios 5 y 6: Se lanza un dado. Calcule la probabilidad de que la tirada sea la especificada.

5 **(a)** un 4
(b) un 6
(c) un 4 o un 6.

6 **(a)** un número par
(b) un número divisible entre 5
(c) un número par, o un número divisible entre 5.

Ejercicios 7 y 8: Una urna contiene 5 bolas rojas, 6 bolas verdes y 4 bolas blancas. Si se saca una bola, calcule la probablidad de que sea la que se especifica.

7 **(a)** roja **(b)** verde **(c)** roja o blanca

8 **(a)** blanca **(b)** verde o blanca **(c)** que no sea verde

Ejercicios 9 y 10: Se tiran dos dados. Calcule la probabilidad de que la suma de lo obtenido sea la especificada.

9 **(a)** 11 **(b)** 8 **(c)** 11 u 8

10 **(a)** mayor que 9 **(b)** numero impar

Ejercicios 11 y 12: Se tiran 3 dados. Calcule la probabilidad del evento especificado.

11 Una suma que resulte 5.

12 Aparezca un 6 en exactamente un dado.

13 Si se lanzan tres monedas, calcule la probabilidad de obtener exactamente dos caras.

14 Si se arrojan cuatro monedas, calcule la probabilidad de obtener dos caras y dos cruces.

Ejercicios 15 – 20: Suponga que se toman 5 cartas de las 52 de una baraja. Calcule la probabilidad de obtener las manos indicadas.

15 Un póker o cuatro del mismo valor (por ejemplo, 4 ases o 4 reyes).

16 Un *full*, con 3 ases y dos reyes.

17 4 de diamantes y 1 de espadas.

18 Cinco de figura.

19 Una flor (cinco cartas del mismo palo).

20 Una flor real o imperial (as, rey, reina, sota y 10, todas del mismo palo).

21 Para una tirada de un dado, calcule la probabilidad de obtener un número impar o un número primo.

22 Se toma una carta de un mazo de 52. Calcule la probabilidad que sea roja, o que sea de figura.

23 Si la probabilidad de que un bateador logre un *hit* en una vez al bat es 0.326, calcule la de que no lo haga en 4 veces al bat.

24 Si la probabilidad de que un basquetbolista enceste en un tiro libre es 0.9, calcule la probabilidad de que enceste al menos en 1 de 2 tiros libres.

Ejercicios 25 y 26: En la tabla se muestran los resultados 1, 2, . . . , 6 de un experimento, con sus probabilidades correspondientes.

Resultado	1	2	3	4	5	6
Probabilidad	0.25	0.10	0.15	0.20	0.25	0.005

Para los eventos indicados, calcule

(a) $P(E_2)$
(b) $P(E_1 \cap E_2)$
(c) $P(E_1 \cup E_2)$
(d) $P(E_2 \cup E'_3)$.

25 $E_1 = \{1, 2\}$; $E_2 = \{2, 3, 4\}$; $E_3 = \{4, 6\}$.

26 $E_1 = \{1, 2, 3, 6\}$; $E_2 = \{3, 4\}$; $E_3 = \{4, 5, 6\}$.

Ejercicios 27 y 28: Una caja contiene 10 bolas rojas, 20 azules y 30 verdes. Si de la caja se sacan 5 bolas, calcule la probabilidad que sean las indicadas.

27 **(a)** todas azules
(b) al menos 1 verde
(c) cuando más, 1 roja.

28 **(a)** exactamente 4 verdes
(b) cuando menos 2 rojas
(c) a lo más 2 azules.

29 *Examen de cierto o falso* Un examen de respuestas de cierto o falso tiene 8 preguntas. Si un estudiante adivina la respuesta de cada una, calcule la probabilidad de que

(a) las 8 respuestas sean correctas
(b) 7 sean correctas y 1 incorrecta
(c) 6 sean correctas y 2 incorrectas
(d) cuando menos 6 sean correctas.

30 *Elección de un comité* Se va a nombrar un comité de 6 personas sacando de un sombrero los nombres de los presentes. Si el sombrero contiene los nombres de 8 hombres y 14 mujeres, calcule la probabilidad de que el comité quede formado por 3 hombres y 3 mujeres

Ejercicios 31 y 32: De una baraja de 52 cartas se retiran 5. Calcule la probabilidad del evento especificado.

31 Obtener cuando menos un as.

32 Obtener cuando menos una de corazones.

33 *Tirada de dados* Si se tiran 2 dados, calcule la probabilidad de que la suma de lo obtenido sea mayor que 5.

34 *Tirada de dados* Si se tiran 3 dados, calcule la probabilidad de que la suma de lo obtenido sea menor que 16.

35 *Composición de una familia* Suponiendo que sean igualmente probables los nacimientos de niños y niñas, calcule la probabilidad de que una familia con 5 hijos tenga

(a) sólo niños **(b)** cuando menos 1 niña.

36 *Tragamonedas* Una máquina tal tiene 3 cilindros, cada uno con 20 símbolos. Si el primero tiene 5 campanas, el intermedio 4 y el último 2, calcule la probabilidad de obtener 3 campanas en fila.

37 *Experimento de percepción extrasensorial, PES* En un experimento sencillo, que tiene por objeto probar la PES, se barajan 4 cartas (sota, reina, rey y as) y se colocan en una mesa, cara abajo. El sujeto trata de identificar cada una de las 4, dando un nombre distinto a cada una de ellas. Si está adivinando y no tiene PES, calcule la probabilidad de identificar correctamente

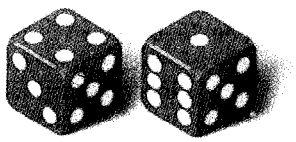
(a) las 4 cartas **(b)** exactamente 2 de las 4.

38 *Tirada de dados* Se tiran 3 dados.

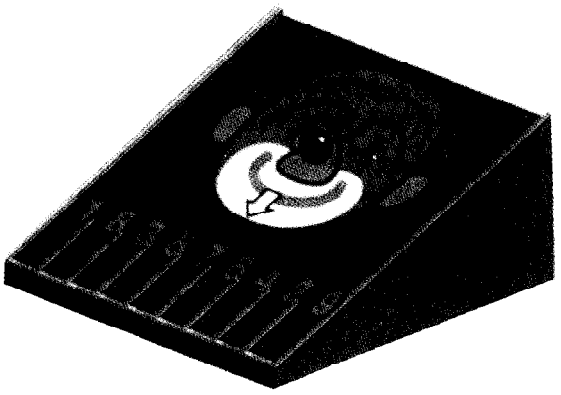
(a) Calcule la probabilidad de que todos muestren el mismo número de puntos.
(b) Calcule la probabilidad de que sea distinto el número de puntos en cada uno.
(c) Repita los incisos (a) y (b) para n dados.

39 *Dados de truco* Para un dado normal, la suma de los puntos en caras opuestas es 7. En la figura tenemos un par de dados de truco, en los cuales aparece *el mismo* número de puntos en sus caras opuestas. Calcule la probabilidad de sacar una suma de

(a) 7 **(b)** 8

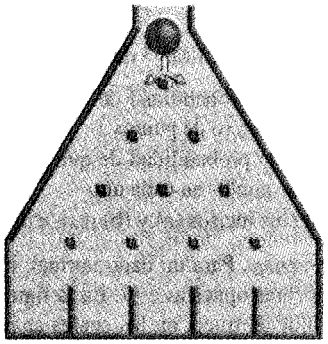


40 ***Juego de carnaval*** En un juego común de carnaval, se hacen rodar tres bolas por un plano inclinado, para que caigan en ranuras numeradas del 1 al 9, como se ve en la figura. Como las ranuras son muy angostas, los jugadores no tienen control sobre el lugar donde caen las bolas. Se otorga un premio si la suma de los tres números es menor que 7. Calcule la probabilidad de obtener un premio.



41 ***Demostración de la probabilidad*** En la figura vemos una pequeña versión de un aparato de demostración de probabilidad. Se deja caer una pequeña bola por la parte superior del laberinto, y llega al fondo, dando tumbos. Cada vez que la bola choca con un obstáculo, hay 50% de probabilidades que se mueva hacia la izquierda. Calcule la probabilidad que la bola termine en la ranura

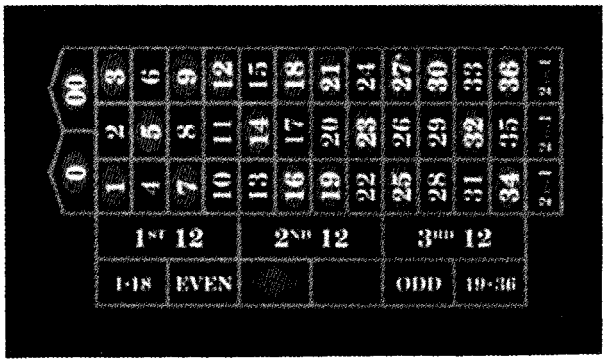
(a) de la extrema izquierda **(b)** en la parte media



42 ***Ruleta*** En la versión estadounidense de la ruleta, se hace girar una bola en una rueda, y tiene igual probabilidad de llegar a cualquiera de las 38 ranuras numeradas 0, 00, 1, 2, . . . , 36. En la figura se ve una mesa normal de apuestas para esa ruleta, en la cual el color del óvalo corresponde al color de la ranura en la rueda. Calcule la probabilidad de que la bola termine

(a) en una ranura negra

(b) en una ranura negra, dos veces consecutivas.



43 ***Elección de números de lotería*** En una versión de una lotería, un jugador elige 6 de los números del 1 al 54. La agencia de lotería también selecciona 6 números. ¿Cuál es la probabilidad de que el jugador elija los mismos 6 números si compra 2 boletos de 50 ¢? (Este juego tiene cuando menos $2 millones de dólares de premio en efectivo, y crece a medida que aumenta el número de boletos vendidos).

44 ***Lotería*** Refiérase al Ejercicio 43. El jugador puede ganar unos $1000 si coinciden 5 de los 6 números, y unos $40 si coinciden 4. Calcule la probabilidad de que el jugador gane algo si compra 1 boleto.

45 ***Dados*** En el juego de *craps*, hay dos modos en los que un jugador puede ganar una apuesta de *pasar la línea*. El jugador gana de inmediato si se tiran 2 dados y su suma es 7 u 11. Si la suma es 4, 5, 6, 8, 9 o 10, puede ganar todavía una apuesta a línea de pase si este mismo número (que se llama el *punto*) sale de nuevo antes de obtener un 7. Calcule la probabilidad de que gane el jugador.

(a) una apuesta de línea de pase en la primera tirada.

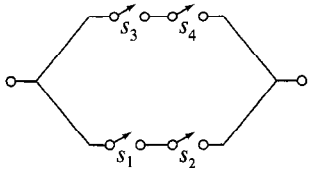
(b) una apuesta de línea de pase habiendo sacado 4 en la primera tirada.

(c) en cualquier apuesta de línea de pase.

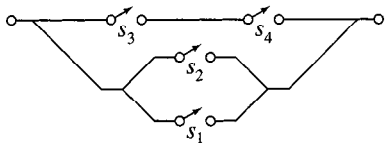
46 ***Dados sin pérdida*** Refiérase al Ejercicio 45. En el juego de *craps*, un jugador pierde una línea de pase si obtiene una suma de 2, 3 o 12 en la primera tirada (lo cual se llama "craps" o "mal tiro"). En otra versión del juego, llamada *crapless craps* el jugador no pierde si saca el mal tiro, y no gana si saca 11 en la primera tirada. En lugar de ello, gana si la primera tirada es 7 o si se repite el punto (2–12, sin contar 7) antes de sacar un 7. Calcule la probabilidad de que el jugador gane en una apuesta de línea de pase en este juego.

C **Ejercicios 47 y 48: En los ejemplos 7 y 8. (a) Calcule p para el sistema eléctrico de la figura, si $P(S_k) = 0.9$ para toda k. (b) Mediante una gráfica, calcule $P(S_k)$ si $p = 0.99$.**

47



48



49 *Probabilidad de cumpleaños*

(a) Demuestre que la probabilidad de p que todas las personas de un grupo de n tengan días de cumpleaños diferentes es

$$p = \frac{365!}{365^n(365 - n)!}.$$

(b) Si en un recinto hay 32 personas, calcule la probabilidad de que 2 o más tengan el *mismo* aniversario. (Primero calcule $\ln p$ empleando la siguiente fórmula, de matemáticas superiores:

$$\ln n! \approx n \ln n - n.)$$

C **50** *Probabilidad de cumpleaños* En el Ejercicio 49, calcule el número mínimo de personas en un recinto tal que la probabilidad de que todos tengan aniversarios distintos sea menor que $\frac{1}{2}$.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 10

Ejercicios 1 – 4: Calcule los primeros 4 términos y el 7° de la sucesión con el n-ésimo término especificado.

1 $\left\{\dfrac{5n}{3 - 2n^2}\right\}$

2 $\{(-1)^{n+1} - (0.1)^n\}$

3 $\{1 + (-\frac{1}{2})^{n-1}\}$

4 $\left\{\dfrac{2^n}{(n + 1)(n + 2)(n + 3)}\right\}$

Ejercicios 5 – 8: Determine los 5 primeros términos de la sucesión o secuencia infinita definida recurrente.

5 $a_1 = 10, \quad a_{k+1} = 1 + (1/a_k)$

6 $a_1 = 2, \quad a_{k+1} = a_k!$

7 $a_1 = 9, \quad a_{k+1} = \sqrt{a_k}$

8 $a_1 = 1, \quad a_{k+1} = (1 + a_k)^{-1}$

Ejercicios 9 – 12: Evalúe.

9 $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (k^2 + 4)$

10 $\displaystyle\sum_{k=2}^{6} \frac{2k - 8}{k - 1}$

11 $\displaystyle\sum_{k=7}^{100} 10$

12 $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} (2^k - 10)$

Ejercicios 13 – 24: Exprese la suma en notación de sumatoria. (Las respuestas no son únicas.)

13 $3 + 6 + 9 + 12 + 15$

$4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

15 $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{99 \cdot 100}$

16 $\dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dfrac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{98 \cdot 99 \cdot 100}$

17 $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \frac{4}{11}$

$\frac{1}{4} + \frac{2}{9} + \frac{3}{14} + \frac{4}{19}$

19 $100 - 95 + 90 - 85 + 80$

20 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$

21 $a_0 + a_1x^4 + a_2x^8 + \cdots + a_{25}x^{100}$

22 $a_0 + a_1x^3 + a_2x^6 + \cdots + a_{20}x^{60}$

23 $1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^6}{6} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{2n}$

24 $1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + \dfrac{x^n}{n}$

25 Calcule el 10° término y la suma de los 10 primeros términos de la serie aritmética cuyos dos primeros términos son $4 + \sqrt{3}$ y 3.

26 Calcule la suma de los 8 primeros términos de la sucesión aritmética en la cual el 4° término es 9 y la diferencia común es –5.

27 El quinto y el decimotercero términos de una sucesión aritmética son 5 y 77, respectivamente. Calcule el primero y el decimo términos.

28 Inserte cuatro medias aritméticas entre 20 y –10.

29 Calcule el 10° término de la sucesión geométrica cuyos dos primeros términos son $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{4}$.

30 Si una sucesión geométrica tiene 3 y – 0.3 como sus tercero y cuarto términos, calcule el octavo término.

31 Calcule la media geométrica de 4 y 8.

32 En una sucesión geométrica, el 8° término es 100, y la razón común es $-\frac{3}{2}$. Calcule el primer término.

33 Dada una sucesión aritmética tal que $S_{12} = 402$ y $a_{12} = 50$, calcule a_1 y d.

34 Dada una sucesión geométrica tal que $a_5 = \frac{1}{16}$ y $r = \frac{3}{2}$, calcule a_1 y S_5.

Ejercicios 35 – 38: Evalúe.

35 $\sum_{k=1}^{15} (5k - 2)$

36 $\sum_{k=1}^{10} (6 - \frac{1}{2}k)$

37 $\sum_{k=1}^{10} (2^k - \frac{1}{2})$

38 $\sum_{k=1}^{8} (\frac{1}{2} - 2^k)$

39 Calcule la suma de la serie geométrica infinita

$$1 - \tfrac{2}{5} + \tfrac{4}{25} - \tfrac{8}{125} + \cdots$$

40 Determine el número racional cuya representación decimal es $6.\overline{274}$.

Ejercicios 41 – 45: Demuestre que es cierto el enunciado para todo entero positivo n.

41 $2 + 5 + 8 + \cdots + (3n - 1) = \dfrac{n(3n + 1)}{2}$

42 $2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n)^2 = \dfrac{2n(2n + 1)(n + 1)}{3}$

43 $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \dfrac{1}{(2n - 1)(2n + 1)} = \dfrac{n}{2n + 1}$

44 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n + 1) = \dfrac{n(n + 1)(n + 2)}{3}$

45 3 es factor de $n^3 + 2n$.

46 Demuestre que $n^2 + 3 < 2^n$ para todo entero positivo $n \geq 5$.

Ejercicios 47 y 48: Calcule el entero positivo mínimo j para el cual la afirmación sea válida. Use el principio ampliado de inducción matemática para demostrar que la fórmula es válida para todo entero mayor que j.

47 $2^n \leq n!$

48 $10^n \leq n^n$

Ejercicios 49 y 50: Emplee el teorema del binomio para desarrollar y simplificar la expresión.

49 $(x^2 - 3y)^6$

50 $(2a + b^3)^4$

Ejercicios 51 – 54: Sin desarrollar por completo, calcule el (o los) término(s) indicado(s) en el desarrollo de la expresión.

51 $(a^{2/5} + 2a^{-3/5})^{20}$; primeros tres términos.

52 $(b^3 - \frac{1}{2}c^2)^9$; sexto término.

53 $(4a^2 - b)^7$; el término que contiene a^{10}.

54 $(2c^3 + 5c^{-2})^{10}$; el término que no contiene a c.

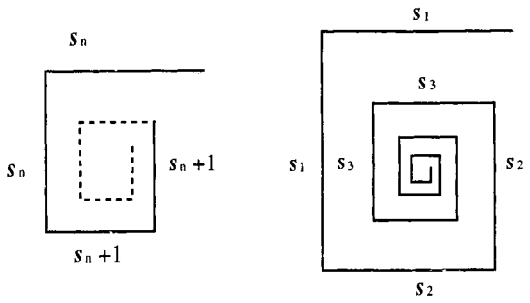
55 ***Bloques constructivos*** Se van a cortar polines de madera de 2 × 2 pulg y 10 pies de largo, en 5 trozos para formar los bloques constructivos de un juego de niños; las longitudes de los 5 bloques deben formar una sucesión aritmética.

(a) Demuestre que la diferencia d en las longitudes debe ser menor que 1 pie.

(b) Si el bloque menor debe tener 6 pulg de longitud, calcule las longitudes de las otras 4 piezas.

56 ***Construcción de una escala*** Se desea construir una escalera con 16 peldaños, cuya longitud debe disminuir uniformemente desde 20 pulg en la base hasta 16 pulg en el extremo superior. Calcule la longitud total del material necesario para los peldaños.

57 En la primera figura vemos una línea angulada que se obtiene tomando dos lados adyacentes de un cuadrado de longitud s_n, disminuyendo la longitud del lado según un factor f, donde $0 < f < 1$, y formando dos lados de un cuadrado menor con longitud $s_{n+1} = f \cdot s_n$. El proceso se repite a continuación, y así hasta el infinito. Si $s_1 = 1$ en la segunda figura, exprese la longitud de la línea angulada resultante (infinita) en función de f.



Cuando se deja caer una pelota desde una altura de h pies, llega al suelo en $\sqrt{h}/4$ segundos. La pelota rebota hasta una altura de d pies en $\sqrt{d}/4$ segundos. Si se deja caer una pelota desde una altura de 10 pies, y rebota hasta 3/4 de la altura de caída cada vez que rebota, ¿cuántos segundos pasan hasta que llega al reposo?

59 *Selección de cartas*

(a) ¿De cuántos modos se pueden escoger 13 cartas de un mazo de 52 naipes?

(b) ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar 13 cartas para que haya 5 de espadas, 3 de corazones, 3 de tréboles y 2 de diamantes?

60 ¿Cuántos números de 4 dígitos se pueden formar con los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6 si

(a) ¿no se permiten repeticiones?

(b) ¿se permiten repeticiones?

61 *Selección de preguntas de examen*

(a) Si un estudiante debe contestar 8 de 12 preguntas de un examen, ¿cuántas elecciones distintas de preguntas puede escoger?

(b) ¿Cuántas elecciones son posibles, si se deben contestar las primeras 3 preguntas?

62 *Orden de colores* Se van a ordenar en fila 6 discos negros, 5 rojos, 4 blancos y 2 verdes. ¿Cuántas combinaciones posibles de colores hay?

63 *Tiro de monedas* Calcule la probabilidad que coincidan las monedas si

(a) Dos personas tiran (o vuelan) una moneda cada una.

(b) Tres personas tiran una moneda cada una.

64 *Elección de cartas* Se toman 4 cartas de una baraja de 52. Calcule la probabilidad de que

(a) las cuatro sean del mismo color

(b) se tomen alternando rojo-negro-rojo-negro.

65 *Probabilidades en un sorteo* Se venden 1 000 boletos de una rifa. Calcule la probabilidad de ganar, cuando una persona compra

(a) 1 boleto

(b) 10 boletos

(c) 50 boletos.

66 *Lanzamiento de monedas* Se tiran 4 monedas. Calcule la probabilidad de obtener 1 cara y 3 cruces.

67 *Prueba de cierto o falso* Una prueba tiene 6 preguntas para contestar cierto o falso; se necesitan al menos 5 respuestas correctas para pasar de grado. Si el estudiante adivina cada respuesta, ¿cuál es la probabilidad que tiene de

(a) ser aprobado?

(b) no ser aprobado?

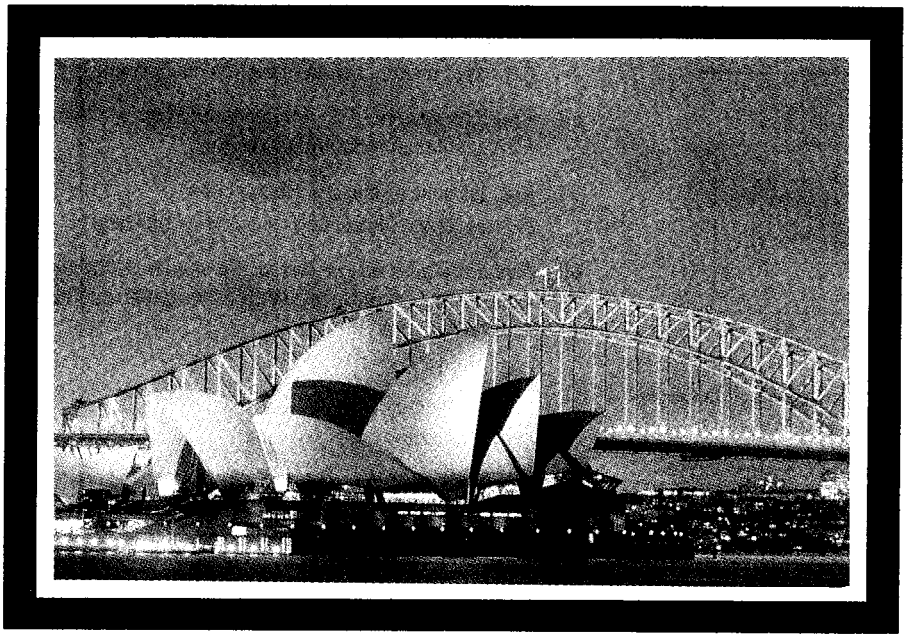
68 *Probabilidades con dados y cartas* Se tira un dado y a continuación se toma una carta de un mazo de 52. ¿Cuál es la probabilidad de obtener

(a) 6 con el dado y el rey de corazones?

(b) 6 con el dado, o bien, el rey de corazones?

69 *Demografía* En una población de 5 000 habitantes, 1 000 tienen más de 60 años y 2 000 son mujeres. Se sabe que 40% de las mujeres tienen más de 60 años. ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo seleccionado al azar sea mujer, o de que tenga más de 60 años?

70 *Jugadas de backgammon* En el juego del *backgammon* se permite que los participantes muevan sus contadores el mismo número de espacios que indique la suma de puntos de dos dados. Sin embargo, si se obtiene un par (es decir, si ambos dados muestran el mismo número de puntos), los jugadores pueden mover sus contadores el doble de la suma de puntos. ¿Cuál es la probabilidad de que un jugador pueda mover su contador cuando menos 10 espacios en una tirada?



Las secciones cónicas se emplean en el diseño de una gran variedad de estructuras arquitectónicas.

11.1	**PARÁBOLAS**
11.2	**ELIPSES**
11.3	**HIPÉRBOLAS**
11.4	**ROTACIÓN DE EJES**
11.5	**COORDENADAS POLARES**
11.6	**ECUACIONES POLARES DE LAS CÓNICAS**
11.7	**CURVAS PLANAS Y ECUACIONES PARAMÉTRICAS**

CAPÍTULO 11

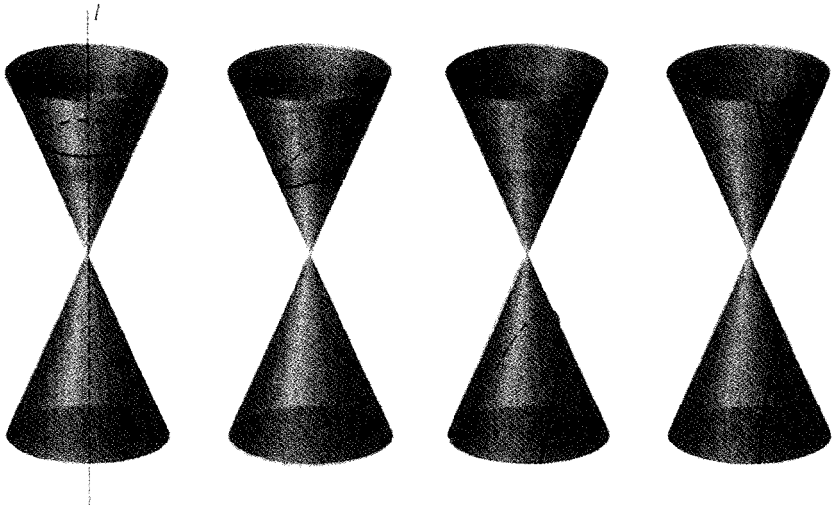
TEMAS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

■ *La geometría plana se ocupa del estudio de las figuras que están en un plano, como líneas, círculos y triángulos. Se demuestran sus teoremas por razonamiento deductivo a partir de ciertos postulados. En la* ***geometría analítica*** *se estudian las figuras geométricas planas introduciendo sistemas de coordenadas y aplicando ecuaciones y fórmulas. Si se tuviera que resumir el estudio de la geometría analítica mediante una frase, quizá la siguiente fuera la adecuada: Dada una ecuación, determinar su gráfica y, recíprocamente, dada una gráfica, deducir su ecuación. En este capítulo se aplican métodos con sistemas coordenados, para varias figuras planas básicas.* ■

11.1 PARÁBOLAS

Las *secciones cónicas*, o simplemente *cónicas*, se obtienen al cortar con un plano un cono circular recto prolongado. Si se varía la posición del plano se obtiene una *circunferencia*, una *elipse*, una *parábola* o una *hipérbola*, como se observa en la Fig. 11.1.

FIGURA 11.1
(a) Circunferencia **(b)** Elipse **(c)** Parábola **(d)** Hipérbola



Si el plano corta al cono sólo en un punto, o según una o dos rectas en el cono, se obtienen las *cónicas degeneradas*. Los antiguos griegos estudiaron extensamente las secciones cónicas; fueron ellos quienes descubrieron las propiedades que permiten enunciar sus definiciones en términos de puntos y líneas, lo cual se hace en este estudio.

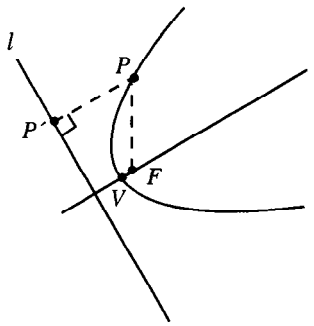
De acuerdo con la Secc. 3.6, si $a \neq 0$, la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ es una *parábola* con eje vertical. A continuación se establece una definición general de parábola y se deducen ecuaciones de parábolas que tienen su eje vertical u horizontal.

Definición de una parábola

Una **parábola** es el conjunto de los puntos en un plano que equidistan de un punto fijo F (llamado **foco**) y una recta fija l (llamada **directriz**), situados ambos en el plano.

Supóngase que F no está en l, porque si estuviera se obtendría una recta. Si P es un punto en el plano, y P' es el punto en l determinado por una recta que pasa por P perpendicularmente a l (Fig. 11.2), entonces, de acuerdo con la definición, P está en la parábola si y sólo si son iguales las distancias $d(P, F)$ y $d(P, P')$. El **eje** de la parábola es la recta que pasa por F, perpendicular a la directriz. El **vértice** de la parábola es el punto V sobre el eje a la mitad de la distancia de F a l. Dicho vértice es el punto de la parábola más cercano a la directriz.

FIGURA 11.2



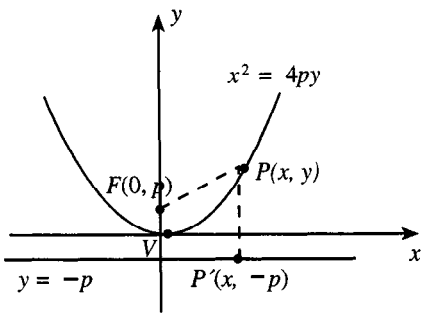
Para obtener una ecuación sencilla de una parábola, se coloca el eje y a lo largo del eje de la misma, y el origen en el vértice V, como se ve en la Fig. 11.3. En este caso, las coordenadas del foco F son $(0, p)$, para un número real $p \neq 0$, y la ecuación de la directriz es $y = -p$. (En la figura se ve el caso en que $p > 0$.) Según la fórmula de la distancia, un punto P(x, y) está en la parábola si y sólo si $d(P, F) = d(P, P')$, es decir, si

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+p)^2}$$

Se elevan ambos miembros al cuadrado y se simplifica:

$$x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2$$
$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$
$$x^2 = 4py$$

FIGURA 11.3



De acuerdo con lo anterior, una ecuación equivalente de la parábola es

$$y = \frac{1}{4p}x^2.$$

Se ha demostrado que las coordenadas de todo punto (x, y) en la parábola satisfacen $x^2 = 4py$. Al contrario, si (x, y) es solución a $x^2 = 4py$, invirtiendo los pasos anteriores vemos que el punto (x, y) está en la parábola. Si $p > 0$, la parábola abre hacia arriba, como en la Fig. 11.3. Si $p < 0$, se abre hacia abajo. La gráfica es simétrica con respecto al eje y, porque si se sustituye x por $-x$, no cambia la ecuación $x^2 = 4py$.

Al intercambiar los papeles de x y y se obtiene

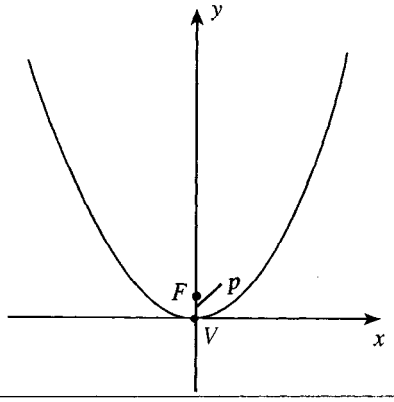
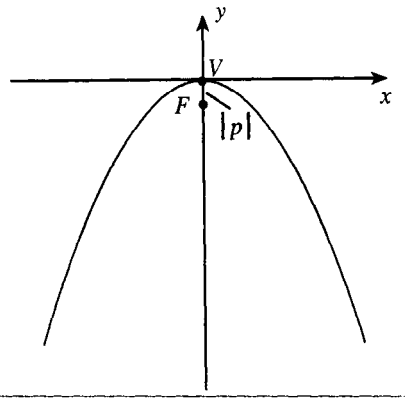
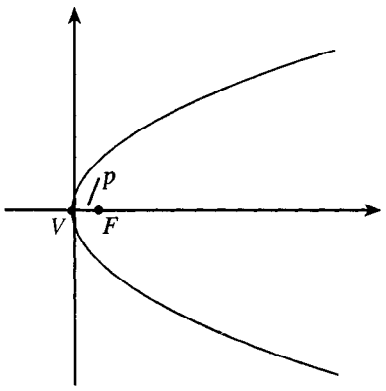
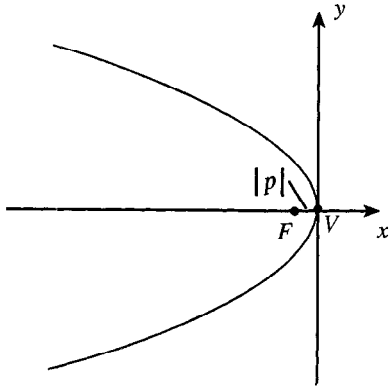
$$y^2 = 4px \qquad \text{o sea, equivalentemente} \qquad x = \frac{1}{4p}y^2.$$

Esto es la ecuación de una parábola con vértice en el origen, foco $F(p, 0)$, que abre hacia la derecha si $p > 0$, o hacia la izquierda si $p < 0$. La ecuación de la directriz es $x = -p$.

Para simplificar, se dice "la parábola $x^2 = 4py$ (o bien $y^2 = 4px$)" en vez de "la parábola cuya ecuación es $x^2 = 4py$ (o bien $y^2 = 4px$)".

En la tabla siguiente se resume la explicación.

Parábolas con vértice $V(0, 0)$

Ecuación	Gráfica para $p > 0$	Gráfica para $p < 0$
$x^2 = 4py$ o bien $y = \frac{1}{4p}x^2$		
$y^2 = 4px$ o bien $x = \frac{1}{4p}y^2$		

Se ve de la tabla que para todo número real a distinto de cero, la gráfica de la **ecuación normal** $y = ax^2$, o bien $x = ay^2$, es una parábola con vértice $V(0, 0)$. Además, $a = 1/(4p)$, o bien, en forma equivalente, $p = 1/(4a)$, donde $|p|$ es la distancia entre el foco F y el vértice V. Para determinar la directriz l, téngase en cuenta que l también está a la distancia $|p|$ de V.

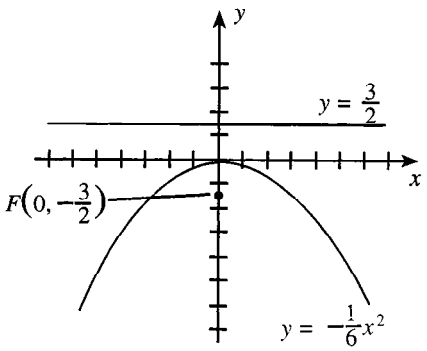
EJEMPLO 1 ***Determinación del foco y la directriz de una parábola***

Determinar el foco y la directriz de la parábola $y = -\frac{1}{6}x^2$, y trazar su gráfica.

SOLUCIÓN La ecuación tiene la forma $y = ax^2$, donde $a = -\frac{1}{6}$. Como en la tabla anterior, $a = 1/(4p)$, y por lo tanto,

$$p = \frac{1}{4a} = \frac{1}{4(-\frac{1}{6})} = -\frac{3}{2}.$$

FIGURA 11.4

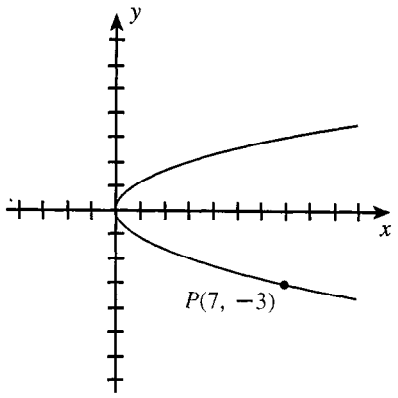


Vemos que la parábola abre hacia abajo, y su foco está en $F(0, -\frac{3}{2})$, como se ve en la Fig. 11.4. La directriz es la recta horizontal $y = \frac{3}{2}$, que está a una distancia $\frac{3}{2}$ arriba de V, lo cual también se ve aprecia en la figura.

Deducción de la ecuación de una parábola que satisface determinados requisitos

(a) Encontrar la ecuación de una parábola que tenga su vértice en el origen, abra hacia la derecha y pase por el punto $P(7, -3)$.
(b) Determinar el foco de la parábola.

SOLUCIÓN



(a) La parábola se ve en la Fig. 11.5. Como se indica en la tabla, su ecuación tiene la forma $x = ay^2$ para cierto número a. Si $P(7, -3)$ está en la gráfica, entonces

$$7 = a(-3)^2, \quad \text{o bien} \quad a = \tfrac{7}{9}.$$

Por consiguiente, la ecuación de la parábola es $x = \frac{7}{9}y^2$.

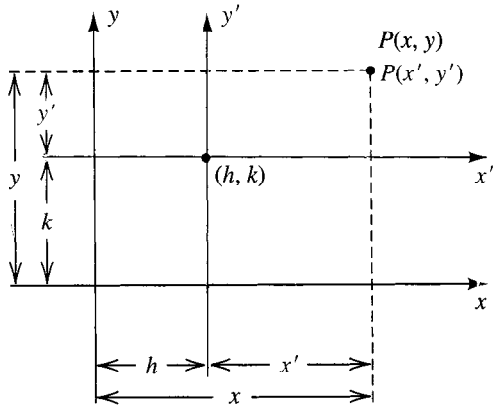
(b) El foco está a la distancia p a la derecha del vértice, siendo

$$p = \frac{1}{4a} = \frac{1}{4(\frac{7}{9})} = \frac{9}{28}.$$

Así, las coordenadas del foco son $(\frac{9}{28}, 0)$.

Con el objeto de ampliar la explicación de la parábola al caso en el cual el vértice *no esté* en el origen, se recurre a una **traslación de ejes**, como se ilustra en la Fig. 11.6, en la cual los ejes x, y se desplazan a posiciones indicadas por x', y', y quedan paralelos a sus posiciones originales.

FIGURA 11.6



Todo punto P en el plano, tiene ahora dos representaciones por pares ordenados: $P(x, y)$ en el sistema xy, y $P(x', y')$ en el sistema $x'y'$. Si el origen del nuevo sistema $x'y'$ tiene coordenadas (h, k) en el plano xy, como se ve en la Fig. 11.6, entonces

$$x = x' + h \quad \text{y} \quad y = y' + k.$$

Estas fórmulas son ciertas para todos los valores de h y k. Otras fórmulas equivalentes son

$$x' = x - h \quad \text{y} \quad y' = y - k.$$

Esto conduce a lo siguiente.

Fórmulas de traslación de ejes

Si (x, y) son las coordenadas de un punto p en un plano xy, y si $(x' y')$ son las coordenadas de P en un plano $x'y'$ cuyo origen está en el punto (h, k) del plano xy, entonces

(1) $x = x' + h, \quad y = y' + k$
(2) $x' = x - h, \quad y' = y - k$

Como ejemplo de las fórmulas de traslación de ejes, considérese:

$$(x')^2 = 4py',$$

que es la conocida ecuación de una parábola con vértice en el origen O' del plano $x'y'$. Con la fórmula (2), se ve que

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

es una ecuación de la misma parábola en el plano xy, con vértice $V(h, k)$. El foco es $F(h, k + p)$, y la directriz es $y = k - p$, como se muestra en el primer renglón de la tabla que se presenta más adelante. Elevando al cuadrado el primer miembro de $(x - h)^2 = 4p(y - k)$, y simplificando, se llega a una ecuación de la forma

$$y = ax^2 + bx + c,$$

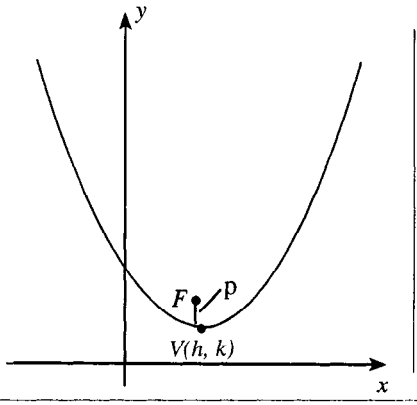
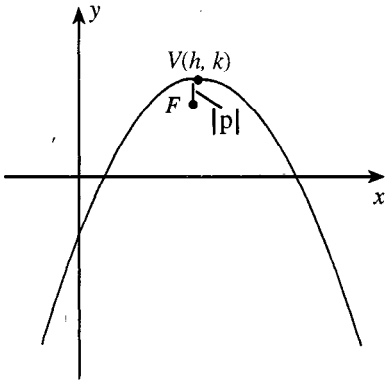
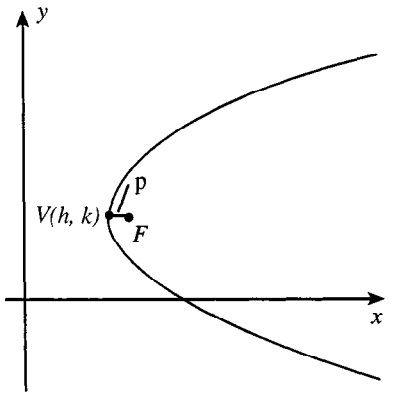
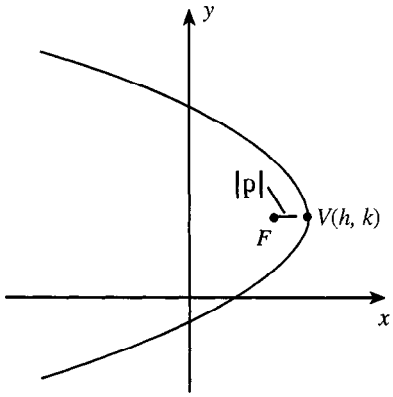
en la cual a, b y c son números reales. Recíprocamente, si $a \neq 0$, entonces la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ es una parábola con eje vertical. Como en el caso de $y = ax^2$, se puede demostrar que $a = 1/(4p)$, o bien, $p = 1/(4a)$.

De igual manera, si se empieza con $(y')^2 = 4px'$ y se usan las fórmulas de traslación de ejes, se llega a

$$(y - k)^2 = 4p(x - h),$$

que es la ecuación de una parábola en el plano xy, cuyo vértice es $V(h, k)$, y que abre a la derecha si $p > 0$, o hacia la izquierda si $p < 0$, como se ve en el segundo renglón de la tabla siguiente donde, por conveniencia, está $V(h, k)$ en el primer cuadrante. La ecuación se puede escribir en la forma $x = ay^2 + by + c$, donde $a = 1/(4p)$, o bien, $p = 1/(4a)$.

Parábolas con vértice $V(h, k)$

Ecuación	Gráfica para $p > 0$	Gráfica para $p < 0$
$(x - h)^2 = 4p(y - k)$ o bien $y = ax^2 + bx + c$, siendo $p = \frac{1}{4a}$		
$(y - k)^2 = 4p(x - h)$ o bien $x = ay^2 + by + c$, siendo $p = \frac{1}{4a}$		

EJEMPLO 3 ***Trazo de una parábola con su eje horizontal***

Analizar y trazar la gráfica de $2x = y^2 + 8y + 22$.

SOLUCIÓN Como la ecuación se puede escribir en la forma $x = ay^2 + by + c$, si se despeja x, se ve, de la tabla anterior, que la gráfica es una parábola con eje horizontal. Primero se escribe la ecuación dada en la forma

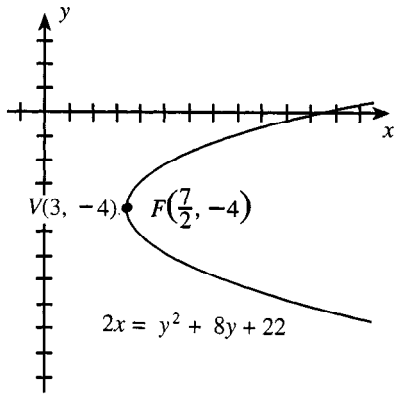
$$y^2 + 8y = 2x - 22$$

y a continuación se completa el cuadrado de la izquierda, sumando 16 a ambos miembros:

$$y^2 + 8y + 16 = 2x - 6$$

$$(y + 4)^2 = 2(x - 3)$$

FIGURA 11.7



Al consultar la tabla anterior se observa que $h = 3$, $k = -4$ y $4p = 2$, o sea, $p = \frac{1}{2}$. Con lo anterior se tienen los siguientes resultados:

El vértice $V(h, k)$ es $V(3, -4)$.

El foco es $F(h + p, k) = F(3 + \frac{1}{2}, -4)$, o sea, $F(\frac{7}{2}, -4)$.

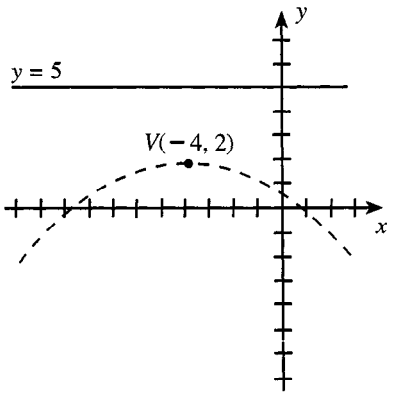
La directriz es $x = h - p = 3 - \frac{1}{2}$, o sea, $x = \frac{5}{2}$

Esta parábola se ilustra en la Fig. 11.7.

EJEMPLO 4 *Deducción de la ecuación de una parábola dados su vértice y su directriz*

Una parábola tiene vértice $V(-4, 2)$ y directriz $y = 5$. Exprese su ecuación en la forma $y = ax^2 + bx + c$.

FIGURA 11.8



SOLUCIÓN En la Fig. 11.8 están el vértice y la directriz. La línea discontinua indica una posición posible de la parábola. De la tabla anterior se ve que una ecuación de esa parábola es

$$(x - h)^2 = 4p(y - k),$$

con $h = -4$ y $k = 2$, *y con* p igual a 3 *negativo*, ya que V está 3 unidades *abajo* de la directriz. Con lo anterior se tiene

$$(x + 4)^2 = -12(y - 2).$$

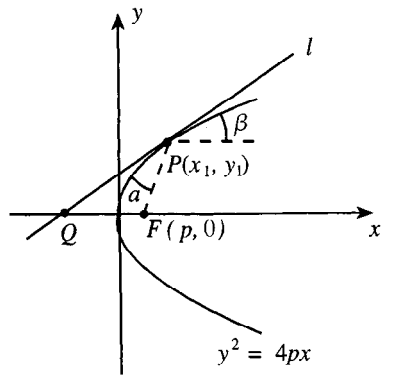
La última ecuación se puede expresar en la forma $y = ax^2 + bx + c$, como sigue:

$$x^2 + 8x + 16 = -12y + 24$$

$$12y = -x^2 - 8x + 8$$

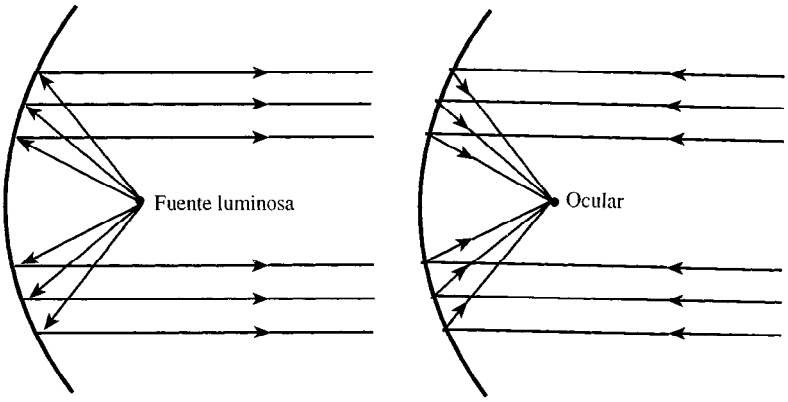
$$y = -\tfrac{1}{12}x^2 - \tfrac{2}{3}x + \tfrac{2}{3}$$

FIGURA 11.9



Una propiedad importante se relaciona con la recta tangente a una parábola. (Una *tangente* a una parábola es una recta que tiene exactamente un punto en común con la curva, pero que no la corta.) Supóngase que l es una tangente en el punto $P(x_1, y_1)$ en la gráfica de $y^2 = 4px$, y sea F el foco. Como en la Fig. 11.9, sea α el ángulo que forman l y el segmento de recta FP, y β el ángulo que forman l y la semirrecta horizontal indicada, cuyo punto inicial es P. Se puede demostrar que $\alpha = \beta$. Esta *propiedad reflectiva*, o de reflexión, tiene muchas aplicaciones. Por ejemplo, la forma del espejo reflector en un faro se obtiene haciendo girar una parábola alrededor de su eje. A la superficie tridimensional que resulta se le llama **paraboloide**, y se dice que es *generado* por la parábola. El **foco** del paraboloide es el mismo que el de la parábola generante o generatriz. Si se coloca una fuente luminosa puntual en F entonces, debido a la ley de la física que dice que el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia,

FIGURA 11.10
(a) Espejo de faro **(b)** Espejo de telescopio



un rayo de luz se reflejará siguiendo una recta paralela al eje [véase Fig. 11.10(a)]. Este mismo principio se emplea en la construcción de espejos de telescopios y hornos solares: un rayo luminoso que llega al espejo en dirección paralela al eje, se reflejará hacia el foco [(Fig. 11.10(b))]. En las antenas de sistemas de radar, radiotelescopios y micrófonos de campo que se usan en espectáculos al aire libre, también se aplica esta propiedad.

FIGURA 11.11

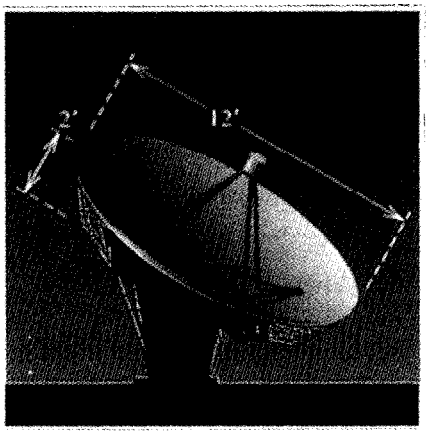
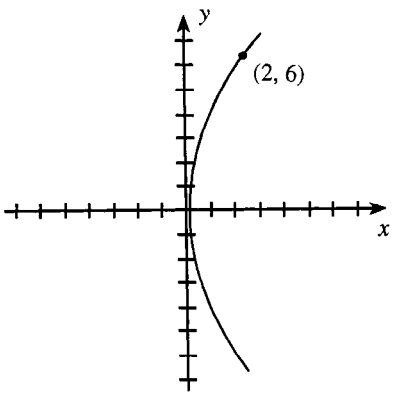


FIGURA 11.12



EJEMPLO 5 ***Ubicación del foco de una antena de TV vía satélite***

El interior de una antena satelital de TV es un plato con forma de paraboloide finito, cuyo diámetro es 12 pies y tiene 2 pies de profundidad, como se ve en la Fig. 11.11. Calcular la distancia del centro del plato al foco.

SOLUCIÓN La parábola generatriz se muestra en un plano xy en la Fig. 11.12, en la cual se ha colocado el vértice en el origen, y el eje de la parábola en el eje x. Una ecuación de esta parábola es $y^2 = 4px$, donde p es la distancia requerida, del centro del plato al foco. Como el punto (2, 6) está en la parábola, entonces

$$6^2 = 4p \cdot 2, \quad \text{o bien, } p = \tfrac{36}{8} = 4.5 \text{ pies.}$$

En el ejemplo que sigue se utiliza una graficadora para trazar una parábola.

EJEMPLO 6 ***Trazado de parábolas***

Grafique $x = y^2 + 2y - 4$.

SOLUCIÓN La gráfica es una parábola con eje horizontal. Se empieza por despejar y de la ecuación equivalente

$$y^2 + 2y - 4 - x = 0$$

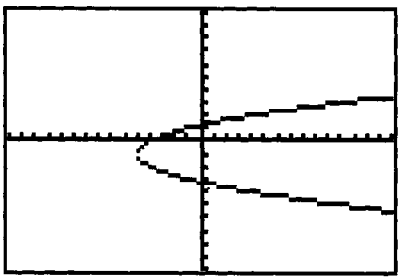
en función de x, mediante la fórmula cuadrática, con $a = 1$, $b = 2$ y $c = -4 - x$:

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-4 - x)}}{2(1)} \quad \text{fórmula cuadrática}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{20 + 4x}}{2} \quad \text{se simplifica}$$

$$= -1 \pm \sqrt{x + 5} \quad \text{por simplificación}$$

FIGURA 11.13 [-15, 15] por [-10, 10]



La última ecuación, $y = -1 \pm \sqrt{x+5}$, representa la mitad superior de la parábola ($y = -1 + \sqrt{x+5}$), y la inferior ($y = -1 - \sqrt{x+5}$). Nótese, que $y = -1$ es el eje de la parábola.

A continuación, se hacen las asignaciones siguientes:

$$Y_1 = \sqrt{x + 5}, \qquad Y_2 = -1 + Y_1, \qquad \text{y} \qquad Y_3 = -1 - Y_1.$$

Se escoge graficar las funciones Y_2 y Y_3 con un rectángulo visual estándar, y se obtiene una figura semejante a la de la Fig. 11.13.

EJERCICIOS 11.1

Ejercicios 1 – 12: Determine el vértice, el foco y la directriz de la parábola. Trace la curva, indicando el foco y la directriz.

1 $8y = x^2$

2 $20x = y^2$

3 $2y^2 = -3x$

4 $x^2 = -3y$

5 $(x + 2)^2 = -8(y - 1)$

6 $(x - 3)^2 = \frac{1}{2}(y + 1)$

7 $(y - 2)^2 = \frac{1}{4}(x - 3)$

8 $(y + 1)^2 = -12(x + 2)$

9 $y = x^2 - 4x + 2$

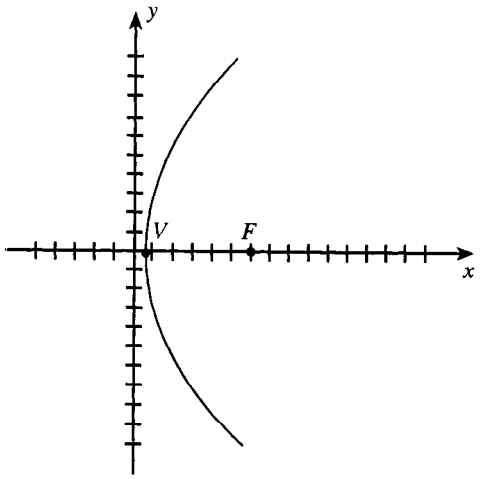
10 $y^2 + 14y + 4x + 45 = 0$

11 $x^2 + 20y = 10$

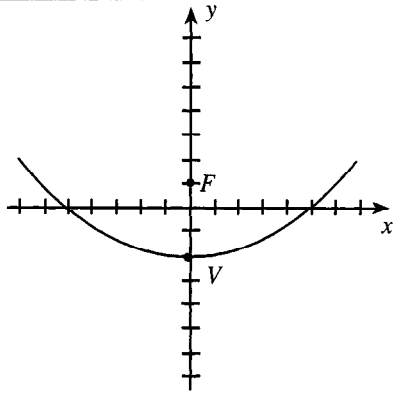
12 $y^2 - 4y - 2x - 4 = 0$

Ejercicios 13 – 16: Deduzca una ecuación para la parábola que se muestra en la figura.

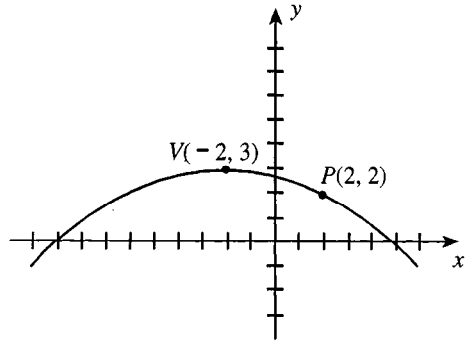
13



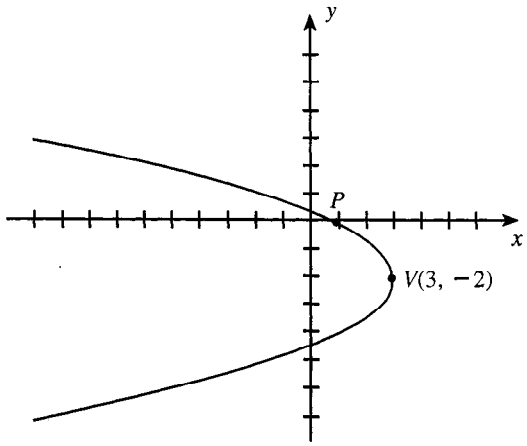
14



15



16



Ejercicios 17 – 28: Determine una ecuación de la parábola que satisface las condiciones dadas.

17 Foco $F(2, 0)$, directriz $x = -2$.

18 Foco $F(0, -4)$, directriz $y = 4$.

19 Foco $F(6, 4)$, directriz $y = -2$.

20 Foco $F(-3, -2)$, directriz $y = 1$.

21 Vértice $V(3, -5)$, directriz $x = 2$.

22 Vértice $V(-2, 3)$, directriz $y = 5$.

23 Vértice $V(-1, 0)$, foco $F(-4, 0)$.

24 Vértice $V(1, -2)$, $F(1, 0)$.

25 Vértice en el origen, simétrica respecto del eje y, y que pase por el punto $(2, -3)$.

26 Vértice en el origen, simétrica respecto del eje y, y que pase por el punto $(6, 3)$.

27 Vértice $V(-3, 5)$, eje paralelo al eje x, y que pase por el punto $(5, 9)$.

28 Vértice $V(3, -2)$, eje paralelo al eje x, y ordenada en el origen igual a 1.

Ejercicios 29 – 32: Encuentre la ecuación del conjunto de puntos en el plano xy que equidisten del punto P y de la recta l.

29 $P(0, 5)$; l: $y = -3$ **30** $P(7, 0)$; l: $x = 1$

31 $P(-6, 3)$; l: $x = -2$ **32** $P(5, -2)$; l: $y = 4$

Ejercicios 33 – 36: Deduzca una ecuación para la parte indicada de la parábola especificada.

33 La mitad inferior de $(y + 1)^2 = x + 3$.

34 La mitad superior de $(y - 2)^2 = x - 4$.

35 La mitad derecha de $(x + 1)^2 = y - 4$.

36 La mitad izquierda de $(x + 3)^2 = y + 2$.

Ejercicios 37 y 38: Determine una ecuación de la parábola con eje vertical que pase por los puntos dados.

37 $P(2, 5)$, $Q(-2, -3)$, $R(1, 6)$

38 $P(3, -1)$, $Q(1, -7)$, $R(-2, 14)$

Ejercicios 39 y 40: Determine una ecuación de la parábola que tenga eje horizontal y que pase por los puntos dados.

39 $P(-1, 1)$, $Q(11, -2)$, $R(5, -1)$

40 $P(2, 1)$, $Q(6, 2)$, $R(12, -1)$

41 ***Espejo de telescopio*** El espejo de un telescopio reflector tiene la forma de un paraboloide finito, de 8 pulg de diámetro; su profundidad es 1 pulg. ¿A qué distancia del centro del espejo convergerá la luz procedente de una estrella lejana?

42 ***Antena parabólica*** Una antena para satélites tiene forma paraboloidal, con 10 pies de diámetro y 3 pies de profundidad. ¿A qué distancia del centro del plato se

debe colocar el receptor para captar la mayor intensidad de las ondas de sonido?

43 ***Reflector de faro*** Un reflector de faro tiene forma de paraboloide, y la fuente luminosa está en su foco. Si tal reflector tiene 3 pies de diámetro y 1 pie de profundidad, ¿dónde está el foco?

44 ***Espejo reflector de linterna*** El espejo de una linterna de mano es paraboloidal, con 4 pulg de diámetro y profundidad de 3/4 pulg. ¿Dónde se debe colocar el bombillo para que los rayos que salgan de la linterna sean paralelos al eje del paraboloide?

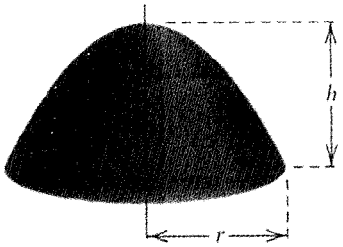
45 ***Plato receptor*** Un reflector sonoro se usa en eventos deportivos al exterior, y tiene la forma de un paraboloide con su foco a 5 pulg de su vértice. Calcule el diámetro que debe tener si su profundidad debe ser 2 pies.

46 ***Plato receptor*** Repita el Ejercicio 45 si el receptor está a 9 pulg del vértice.

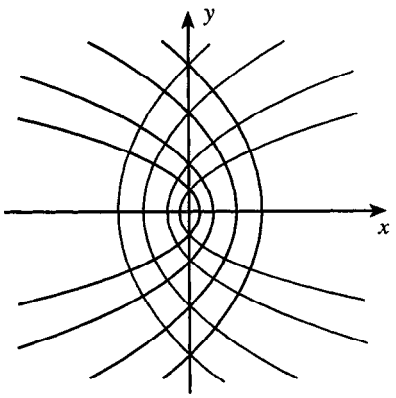
47 ***Reflector parabólico***

(a) La distancia focal del paraboloide finito de la figura es la distancia p de su vértice a su foco. Exprese p en función de r y h.

(b) Se desea construir un reflector de 10 pies de distancia focal, con profundidad de 5 pies. Calcule su radio.



48 ***Parábolas confocales*** La parábola $y^2 = 4p(x + p)$ tiene su foco en el origen y su eje es el eje x. Si se asignan distintos valores a p, se obtiene una famila de parábolas confocales, como se ve en la figura. Esas familias se presentan al estudiar electricidad y magnetismo. Demuestre que hay exactamente dos parábolas en la familia que pasan por determinado punto $P(x_1, y_1)$ si $y_1 \neq 0$.



49 ***Radiotelescopio de Jodrell Bank*** Un radiotelescopio tiene la forma de paraboloide de revolución con distancia focal p y diámetro $2a$. Según el Cálculo, el área superficial S disponible para reunir ondas de radio, es

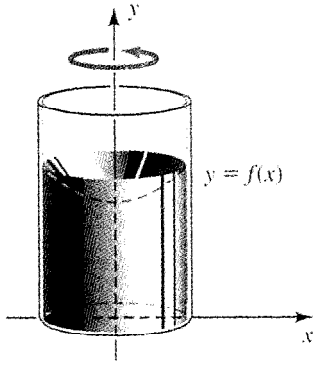
$$S = \frac{8\pi p^2}{3}\left[\left(1 + \frac{a^2}{4p^2}\right)^{3/2} - 1\right].$$

Uno de los mayores radiotelescopios está en Jodrell Bank, Cheshire, Inglaterra; tiene 250 pies de diámetro y 50 pies de distancia focal. Calcule S aproximando al pie cuadrado más cercano.

50 ***Distancia focal y velocidad angular*** Un recipiente cilíndrico está parcialmente lleno de mercurio; se hace girar sobre su eje de manera que la velocidad angular de todas las secciones transversales sea ω rad/s (véase Ejemplo 6 de la Secc. 6.1). Según la física, la función f, cuya gráfica genera la superficie interior del mercurio (véase la figura) está expresada por

$$f(x) = \tfrac{1}{64}\omega^2 x^2 + k,$$

en la cual k es constante. Calcule la velocidad angular, ω, que haga que la distancia focal sea 2 pies.



C **Ejercicios 51 y 52: Grafique la ecuación.**

51 $x = -y^2 + 2y + 5$ **52** $x = 2y^2 + 3y - 7$

C **Ejercicios 53 y 54: Grafique las parábolas en el mismo plano de coordenadas, y localice sus puntos de intersección.**

53 $y = x^2 - 2.1x - 1$; $x = y^2 + 1$

54 $y = -2.1x^2 + 0.1x + 1.2$; $x = 0.6y^2 + 1.7y - 1.1$

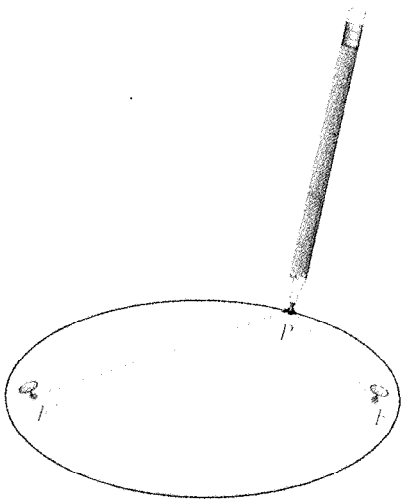
11.2 ELIPSES

Se puede definir una elipse como sigue.

Definición de una elipse

Una **elipse** es el conjunto de puntos en el plano tales que la *suma* de sus distancias a dos puntos fijos, llamados **focos**, también en el plano, es igual a una constante positiva.

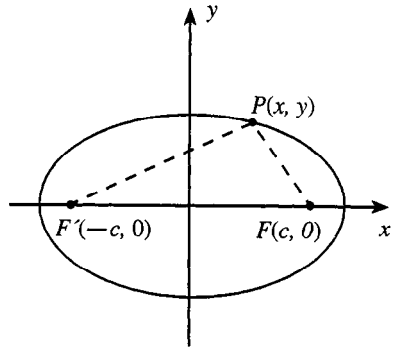
FIGURA 11.14



Se puede trazar una elipse como sigue. Se clavan dos tachuelas en el papel puesto sobre una tabla, en dos puntos cualesquiera F y F', y se amarran los extremos de un cordón a ellas. Con la punta de un lápiz se tira del cordón, y se localiza el punto P que se ve en la Fig. 11.14; se mueve el lápiz en una vuelta completa, manteniendo tenso el cordel, para trazar la elipse. La suma de las distancias $d(F, P)$ y $d(F', P)$ es la longitud del cordón y, por consiguiente, es constante. De este modo el lápiz trazará una elipse cuyos focos están en F y F'. El punto medio del segmento FF' se llama **centro** de la elipse. Si se cambian las posiciones de F y F', manteniendo fija la longitud del cordón, se puede hacer variar mucho la forma de la elipse. Si F y F' se alejan, de modo que $d(F, F')$ sea casi igual a la longitud del cordón, la elipse se alarga. Si $d(F, F')$ tiende a cero, la elipse es casi circular. Si F, F', se obtiene una circunferencia con centro en F.

Para obtener una ecuación sencilla de una elipse, se selecciona al eje x como la recta que pasa por los dos focos F y F'; y que el origen esté en el centro de la elipse. Si F tiene las coordenadas $(c, 0)$ donde $c > 0$, entonces, como se ve en la Fig. 11.15, F' tiene coordenadas $(-c, 0)$. Por consiguiente, la distancia de F a F' es $2c$. La suma constante de las distancias de P a F y a F' se llamará $2a$. Para obtener puntos que no estén en el eje x, se debe cumplir que $2a > 2c$, es decir, que $a > c$. Por definición, $P(x, y)$ está en la elipse si y sólo si son válidas las ecuaciones equivalentes a continuación:

FIGURA 11.15



$$d(P, F) + d(P, F') = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la última ecuación, se tiene

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2,$$

o bien

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx.$$

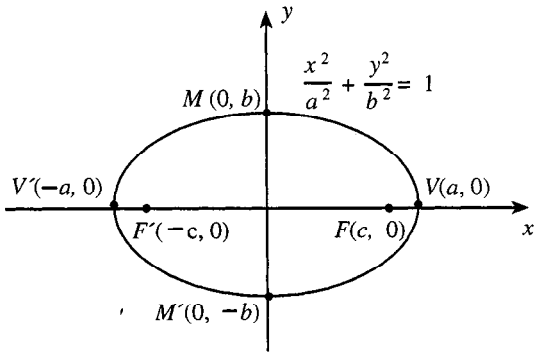
Al elevar al cuadrado nuevamente ambos miembros, se tiene

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2,$$

o sea,

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

FIGURA 11.16



Dividiendo ambos miembros entre $a^2(a^2 - c^2)$, se obtiene

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Si se tiene en cuenta que $a > c$, y que, por consiguiente, $a^2 - c^2 > 0$, se hace

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}, \quad \text{o bien} \quad b^2 = a^2 - c^2.$$

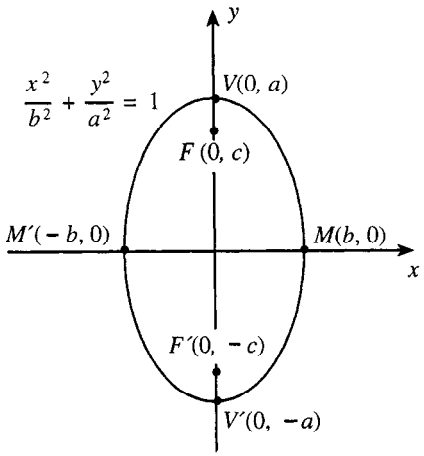
Con lo cual se tiene

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Como $c > 0$ y $b^2 = a^2 - c^2$, entonces $a^2 > b^2$ y, por consiguiente, $a > b$.

Se ha demostrado que las coordenadas de todo punto (x, y) de la elipse de la Fig. 11.16 satisfacen la ecuación $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$. Recíprocamente, si (x, y) es solución de esa ecuación, invirtiendo los pasos anteriores se observa que el punto (x, y) está en la elipse.

FIGURA 11.17



Se calculan las abscisas en el origen de la elipse, haciendo $y = 0$ en la ecuación. Con ello se obtiene $x^2/a^2 = 1$, o sea, $x^2 = a^2$. Por lo tanto, las ordenadas en el origen son a y $-a$. Los puntos correspondientes de la gráfica, $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$, se llaman **vértices** de la elipse (véase Fig. 11.16). Al segmento de recta $V'V$ se le llama eje **mayor**. Igualmente, si $x = 0$ en la ecuación, entonces $y^2/b^2 = 1$, o bien, $y^2 = b^2$. Por consiguiente, las ordenadas en el origen son b y $-b$. Al segmento que va de $M'(0, -b)$ a $M(0, b)$, se llama **eje menor** de la elipse. Es claro que el eje mayor siempre es más largo que el eje menor, porque $a > b$.

Si se aplican las pruebas de simetría, se ve que la elipse es simétrica con respecto al eje x, al eje y y al origen.

Igualmente, si hacemos que los focos estén en el eje y, se obtiene la ecuación

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

En este caso, los vértices de la elipse son $(0, \pm a)$ y los puntos extremos del eje menor son $(\pm b, 0)$, como se muestra en la Fig. 11.17.

La explicación anterior se puede resumir como sigue:

Ecuaciones normales de una elipse con centro en el origen

La gráfica de

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \text{o bien,} \qquad \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1,$$

en las cuales $a > b > 0$, es una elipse con centro en el origen. La longitud del eje mayor es $2a$, y la del eje menor es $2b$. Los focos se encuentran a la distancia c del origen, y $c^2 = a^2 - b^2$.

Se ha demostrado que siempre se puede escribir la ecuación de una elipse con centro en el origen, y focos en un eje coordenado, en la forma

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=1, \qquad \text{o} \qquad qx^2+py^2=pq,$$

donde son positivos p y q, y $p \neq q$. Si $p > q$, el eje mayor está en el eje x; si $p < q$, está en el eje y. No es necesario memorizar esto, porque en cualquier problema se puede determinar el eje mayor examinando las ordenadas y abscisas en el origen.

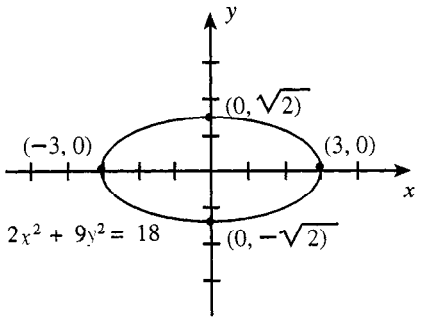
EJEMPLO 1 ***Trazo de una elipse con centro en el origen***

Trazar la gráfica de $2x^2 + 9y^2 = 18$, y localizar los focos.

SOLUCIÓN La gráfica es una elipse con centro en el origen y focos en un eje coordenado. Para determinar las abscisas en el origen, se hace $y = 0$, y se obtiene

$$2x^2 = 18, \quad \text{es decir,} \quad x = \pm 3.$$

FIGURA 11.18



Para calcular las ordenadas al origen, se hace $x = 0$, y se obtiene

$$9y^2 = 18, \quad \text{es decir,} \quad y = \pm\sqrt{2}.$$

Ya se puede trazar la elipse, como se ve en la Fig. 11.18. Como $\sqrt{2} < 3$, el eje mayor está en el eje x.

Para localizar los focos, se hace $a = 3$, $b = \sqrt{2}$, y se tiene

$$c^2 = a^2 - b^2 = 3^2 - (\sqrt{2})^2 = 7.$$

Así, $c = \sqrt{7}$, y los focos están en $(\pm\sqrt{7}, 0)$.

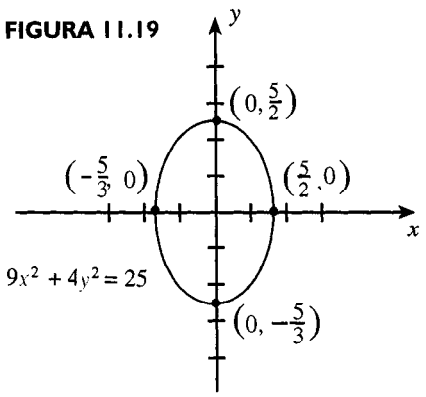
EJEMPLO 2 ***Trazar una elipse con centro en el origen***

Graficar $9x^2 + 4y^2 = 25$ y localizar los focos

SOLUCIÓN Como en el Ejemplo 1, la gráfica es una elipse con centro en el origen y focos en uno de los ejes coordenados. Para calcular las abscisas en el origen, se hace $y = 0$, y entonces tenemos

$$9x^2 = 25, \qquad \text{o sea} \qquad x = \pm\frac{5}{3}$$

FIGURA 11.19



Para calcular las ordenadas en el origen se hace $x = 0$, y así

$$4y^2 = 25, \qquad \text{o sea} \qquad y = \pm\tfrac{5}{2}.$$

Con estos cálculos se traza el esquema que se ve en la Fig. 11.19. Como $\frac{5}{3} < \frac{5}{2}$, el eje mayor está en el eje y.
Para determinar los focos, se hace $a = \frac{5}{2}$ y $b = \frac{5}{3}$, y se sustituye en

$$c^2 = a^2 - b^2 = (\tfrac{5}{2})^2 - (\tfrac{5}{3})^2 = \tfrac{125}{36}.$$

Así, $c = \sqrt{125/36} = 5\sqrt{5}/6 \approx 1.86$, y los focos están en $(0, \pm 5\sqrt{5}/6)$.

EJEMPLO 3 ***Ecuación de una elipse, dados sus vértices y sus focos***

Determinar la ecuación de la elipse que tiene vértices en $(\pm 4, 0)$ y focos en $(\pm 2, 0)$.

SOLUCIÓN Como los focos están en el eje x y son equidistantes del origen, el eje mayor está en el eje x y la elipse tiene su centro en $(0, 0)$. Para este caso, una ecuación general de la elipse es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Como los vértices están en $(\pm 4, 0)$, se llega a la conclusión que $a = 4$. Como los focos son $(\pm 2, 0)$, entonces $c = 2$. Por consiguiente,

$$b^2 = a^2 - c^2 = 4^2 - 2^2 = 12,$$

y una ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

En ciertos casos es necesario trabajar sólo con la mitad de una elipse. El ejemplo que sigue indica cómo determinar las ecuaciones en esos casos.

EJEMPLO 4 ***Ecuaciones para semielipses***

Determinar las ecuaciones de la mitad superior, mitad inferior, mitad izquierda y mitad derecha de la elipse $9x^2 + 4y^2 = 25$.

SOLUCIÓN En la Fig. 11.19 se ilustra la gráfica de la elipse entera. Para llegar a las ecuaciones de las mitades superior e inferior, se despeja y en función de x como sigue:

$$9x^2 + 4y^2 = 25 \qquad \text{ecuación dada}$$

$$y^2 = \frac{25 - 9x^2}{4} \qquad \text{se resta } 9x^2 \text{ y se divide entre 4}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{25 - 9x^2}{4}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{25 - 9x^2} \qquad \text{se saca raíz cuadrada}$$

Como $\sqrt{25-9x^2} \geq 0$, las ecuaciones de las semielipses superior e inferior deben ser $y = \frac{1}{2}\sqrt{25-9x^2}$ y $y = -\frac{1}{2}\sqrt{25-9x^2}$, respectivamente.

Para deducir las ecuaciones de las semielipses izquierda y derecha, se aplica un método semejante al anterior, y se despeja a x en función de y,

$$x = \pm\sqrt{\frac{25-4y^2}{9}} = \pm\frac{1}{3}\sqrt{25-4y^2}.$$

La mitad izquierda de la elipse tiene la ecuación $x = -\frac{1}{3}\sqrt{25-4y^2}$, y la mitad derecha, $x = \frac{1}{3}\sqrt{25-4y^2}$.

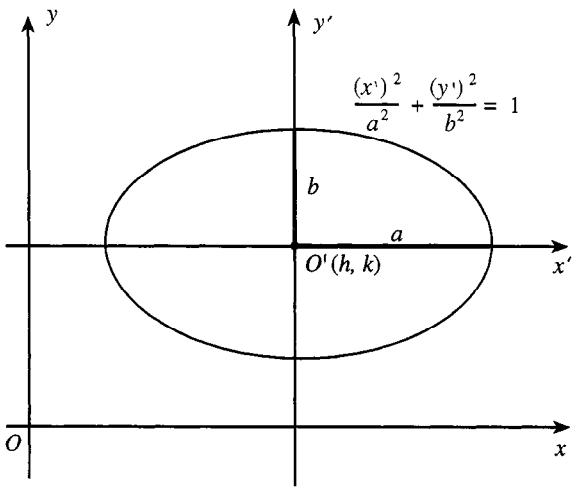
Se emplean las fórmulas de traslación de ejes de la sección anterior para ampliar las posibilidades a una elipse con centro en cualquier punto $C(h, k)$ del plano xy. Por ejemplo, como la gráfica de

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

es una elipse con centro en O' en un plano $x'y'$ (véase Fig. 11.20), su ecuación, en el sistema coordenado xy, es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

FIGURA 11.20



Elevando al cuadrado los términos de la última ecuación, y simplificando, se tiene una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

en la cual los coeficientes son números reales, y tanto A como C son positivos. Al contrario, si se parte de una ecuación como ésta, entonces, completando los cuadrados, se obtiene una forma que presente el centro de la elipse y las longitudes de los ejes mayor y menor. Esta técnica se aplica en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 ***Trazar una elipse con centro en (h, k)***

Analizar y trazar la gráfica de la ecuación

$$16x^2 + 9y^2 + 64x - 18y - 71 = 0.$$

SOLUCIÓN Se comienza agrupando los términos que contienen x y los que contienen y :

$$(16x^2 + 64x) + (9y^2 - 18y) = 71$$

A continuación, se factorizan los coeficientes de x^2 y y^2 como sigue:

$$16(x^2 + 4x \quad) + 9(y^2 - 2y \quad) = 71$$

Luego se completan los cuadrados de las expresiones que están entre paréntesis:

$$16(x^2 + 4x + 4) + 9(y^2 - 2y + 1) = 71 + 64 + 9$$

Al sumar 4 a la expresión dentro de los primeros paréntesis, se ha sumado 64 al primer miembro de la ecuación y, por consiguiente, se debe compensar sumando 64 al segundo miembro. Igualmente, al agregar 1 a la expresión dentro del segundo paréntesis, se ha sumado 9 al lado izquierdo y, por consiguiente, también se debe sumar 9 al lado derecho. La última ecuación se puede escribir del siguiente modo:

$$16(x + 2)^2 + 9(y - 1)^2 = 144.$$

Dividiendo entre 144, para obtener 1 en el segundo miembro, se tiene

$$\frac{(x + 2)^2}{9} + \frac{(y - 1)^2}{16} = 1,$$

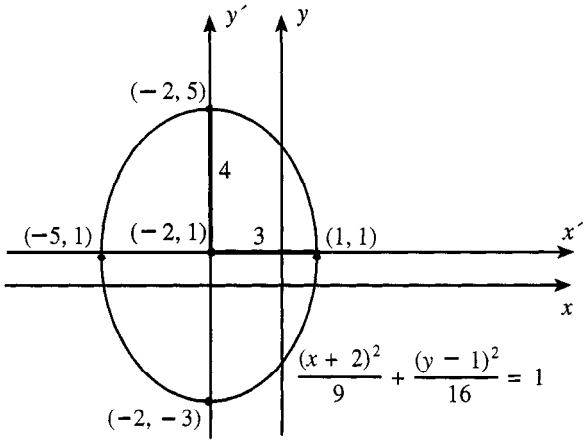
que tiene la forma

$$\frac{(x')^2}{9} + \frac{(y')^2}{16} = 1,$$

en la cual $x' = x + 2$, y $y' = y - 1$. Esto corresponde a que $h = -2$ y $k = 1$ en las fórmulas de traslación de ejes.

La gráfica de la ecuación $[(x')^2/9] + [(y')^2/16] = 1$ es una elipse con centro en el origen O' en el plano $x'y'$, con su eje mayor en el eje y'. Por lo tanto, la gráfica de la ecuación dada es una elipse con centro $C(-2, 1)$ en el plano xy, y su eje mayor en la recta vertical $x = -2$. Si $a = 4$ y $b = 3$, se obtiene la elipse de la Fig.11.21.

FIGURA 11.21



Para localizar los focos, se sustituye primero

$$c^2 = a^2 - b^2 = 4^2 - 3^2 = 7.$$

La distancia del centro de la elipse a los focos es $c = \sqrt{7}$. Como el centro está en $(-2, 1)$, los focos están en $(-2, 1 \pm \sqrt{7})$.

Las calculadoras graficadoras y los programas de computación con frecuencia no pueden realizar las gráficas de ecuaciones de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

como la que se analizó en el último ejemplo. En la mayor parte de los casos debemos despejar x o y de la ecuación, para después graficar las funciones resultantes, como se ilustra en el ejemplo a continuación.

EJEMPLO 6 ***Trazado de semielipses***

Trazar con una graficadora la representación de

$$3x^2 + 4y^2 + 12x - 8y + 9 = 0.$$

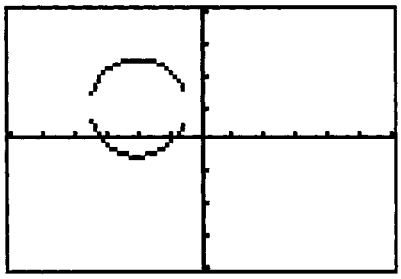
SOLUCIÓN Se puede considerar que la ecuación es cuadrática en y, con la forma $ay^2 + by + c = 0$, si se reordenan los términos como sigue:

$$4y^2 - 8y + (3x^2 + 12x + 9) = 0$$

Aplicando la fórmula cuadrática a esta ecuación, con $a = 4$, $b = -8$ y $c = 3x^2 + 12x + 9$, se tiene como resultado

$$\begin{aligned} y &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(4)(3x^2 + 12x + 9)}}{2(4)} \\ &= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 16(3x^2 + 12x + 9)}}{8} \\ &= 1 \pm \tfrac{1}{8}\sqrt{64 - 16(3x^2 + 12x + 9)}. \end{aligned}$$

FIGURA 11.22
[– 6, 6] por [– 4, 4]



Nótese que no se simplifica totalmente el radicando porque se usa una graficadora.
Como en el Ejemplo 6 de la sección anterior, se hacen las asignaciones

$$Y_1 = \tfrac{1}{8}\sqrt{64 - 16(3x^2 + 12x + 9)}, \quad Y_2 = 1 + Y_1, \quad \text{y} \quad Y_3 = 1 - Y_1.$$

Por último, se selecciona Y_2 y Y_3 para graficar, se escoge el rectángulo visual [– 6, 6] por [– 4, 4] y se obtiene una figura semejante a la de la Fig. 11.22.

Las elipses pueden ser muy alargadas o casi circulares. Para obtener información acerca de la *redondez* de una elipse, se usa el concepto de *excentricidad*. Si a, b y c representan lo mismo que se ha especificado antes, la excentricidad se define como sigue:

Definición de excentricidad

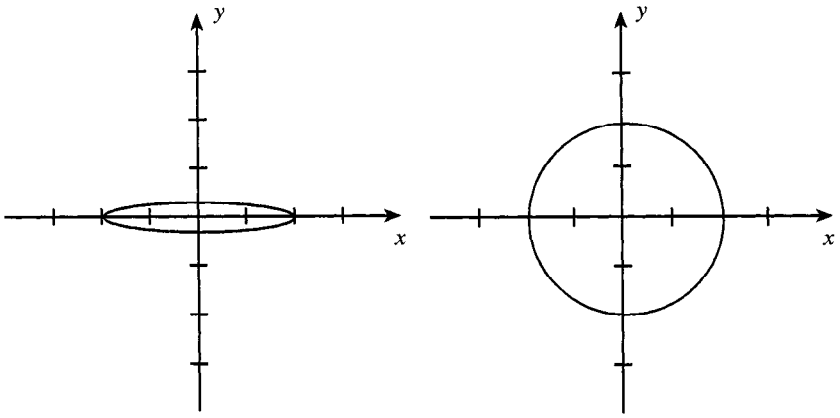
La **excentricidad** e de una elipse, es

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Considérese la elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$, y supóngase que la longitud del eje mayor $2a$ es fija, y que la del eje menor, $2b$, es variable. Nótese que $0 < b < a$. Como b^2 es positivo, $a^2 - b^2 < a^2$ y, por consiguiente, $\sqrt{a^2 - b^2} < a$. Al dividir entre a ambos miembros de la última desigualdad, se obtiene $\sqrt{a^2 - b^2}/a < 1$, o sea, $0 < e < 1$. Si b se acerca a 0, entonces $\sqrt{a^2 - b^2} \approx a$, $e \approx 1$, y la elipse es muy aplanada. Este caso se ve en la Fig. 11.23(a), en la que $a = 2$, $b = 0.3$ y $e \approx 0.99$. Si b se acerca a a, entonces $\sqrt{a^2 - b^2} \approx 0$, $e \approx 0$, y la elipse es casi circular. Es el caso que se ilustra en la Fig. 11.23(b), en el cual $a = 2$, $b = 1.9999$ y $e \approx 0.01$.

FIGURA 11.23

(a) Excentricidad cercana a 1 **(b)** Excentricidad cercana a 0



Después de muchos años de analizar una enorme cantidad de datos empíricos, Johannes Kepler (1571-1630), astrónomo alemán, formuló tres leyes que describen el movimiento de los planetas alrededor del Sol. La primera ley de Kepler dice que la órbita de cada planeta del sistema solar es una elipse en la que el Sol está en un foco. La mayor parte de esas órbitas es casi circular, de modo que sus excentricidades son cercanas a 0. Por ejemplo, para la Tierra, $e \approx 0.017$; para Marte, $e \approx 0.093$, y para Urano, $e \approx 0.046$. Las órbitas de Mercurio y Plutón son más alargadas, y sus excentricidades son 0.206 y 0.249, respectivamente.

Muchos cometas tienen órbitas elípticas en las que el Sol ocupa uno de los focos. En este caso, la excentricidad e se acerca a 1, y la elipse es muy larga. En el ejemplo siguiente se emplea la unidad astronómica (UA). Una unidad astronómica es la distancia media de la Tierra al Sol, aproximadamente igual a 150 millones de kilómetros, o a 93 millones de millas. Se utiliza la unidad astronómica para especificar grandes distancias.

EJEMPLO 7 *Distancias en una órbita elíptica*

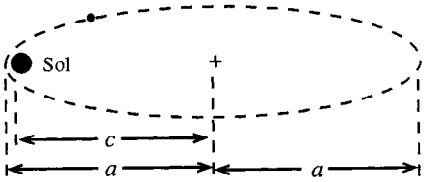
El cometa de Halley tiene una órbita elíptica de excentricidad $e = 0.967$. La distancia mínima de ese cometa al Sol es 0.587 UA. Calcular la distancia máxima del cometa al astro central, aproximando al décimo de UA más cercano.

SOLUCIÓN En la Fig. 11.24 se muestra la órbita del cometa; c es la distancia del centro de la elipse a un foco (el Sol), y $2a$ es la longitud del eje mayor.

Como $a - c$ es la distancia mínima del Sol al cometa, en unidades astronómicas se tiene

$$a - c = 0.587, \qquad \text{o bien,} \qquad a = c + 0.587.$$

FIGURA 11.24
Cometa de Halley



Como $e = c/a = 0.967$, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} c &= 0.967a && \text{se multiplica por } a \\ &= 0.967(c + 0.587) && \text{se sustituye } a \\ &\approx 0.967c + 0.568 && \text{por multiplicación} \\ c - 0.967c &\approx 0.568 && \text{se resta } 0.967c \\ c &\approx \frac{0.568}{0.033} \approx 17.2 && \text{se despeja } c \end{aligned}$$

Como $a = c + 0.587$, entonces

$$a \approx 17.2 + 0.587 \approx 17.8,$$

y la distancia máxima desde el Sol al cometa es

$$a + c \approx 17.8 + 17.2 = 35.0 \text{ AU}.$$

FIGURA 11.25

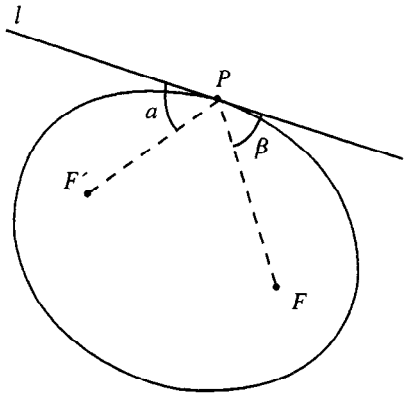
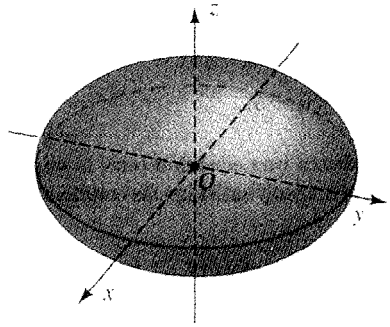


FIGURA 11.26



Las elipses tienen propiedades de reflexión análogas a las de la parábola, que se estudiaron al final de la sección anterior. Por ejemplo, sea l la tangente en el punto P de una elipse cuyos focos son F y F', como se ve en la Fig. 11.25. Si α es el ángulo agudo que forman $F'P$ y l, y si β es el ángulo agudo entre FP y l, se puede demostrar que $\alpha = \beta$. Entonces, si un rayo de luz, o un sonido emanan de uno de los focos, se reflejan y llegan al otro foco. Esa propiedad se emplea en el diseño de ciertos instrumentos ópticos.

Si la elipse con centro en O y focos F' y F en el eje x, gira alrededor del eje x, como se ve en la Fig. 11.26, se obtiene una superficie tridimensional llamada elipsoide. La mitad superior o la mitad inferior es un semielipsoide, al igual que la mitad derecha o la mitad izquierda. Las ondas sonoras u otros impulsos que se emiten desde el foco F' se reflejarán en el elipsoide y llegarán al foco F. Esta propiedad se emplea en el diseño de las *galerías de susurro* (estructuras con techos elipsoidales en las cuales se puede oír, en un foco, a una persona que susurre en el otro). Galerías como esa se pueden ver en la Rotonda del Capitolio, en Washington, D.C., o en el Tabernáculo de Mormón, en Salt Lake City, ambas en Estados Unidos.

La propiedad reflectora de los elipsoides y semielipsoides se emplea en medicina moderna en un aparato llamado *litotriptor*, que desintegra los cálculos renales mediante ondas intra-acuáticas de choque, de alta energía. Después de hacer mediciones extremadamente precisas, el operador coloca al paciente de modo que el cálculo quede en un foco. A continuación, en el otro se generan ondas de choque de frecuencia ultraalta, que se reflejan y deshacen el cálculo renal. Con esta técnica, el tiempo de convalecencia normal es de 3 a 4 días, en lugar de las 2 a 3 semanas que se necesitan con la cirugía usual. Además, la tasa de mortalidad es menor que 0.01%, en comparación con 2% a 3% que resulta quirúrgicamente..

EJERCICIOS 11.2

Ejercicios 1 – 14: Localice los vértices y los focos de la elipse. Trace la gráfica y muestre los focos.

1 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

2 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

3 $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{16} = 1$

4 $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{49} = 1$

5 $4x^2 + y^2 = 16$

6 $y^2 + 9x^2 = 9$

7 $4x^2 + 25y^2 = 1$

8 $10y^2 + x^2 = 5$

9 $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+4)^2}{9} = 1$

10 $\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$

11 $4x^2 + 9y^2 - 32x - 36y + 64 = 0$

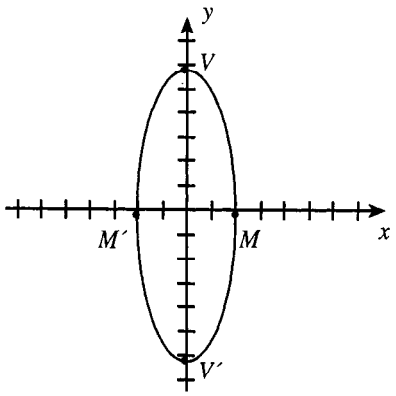
12 $x^2 + 2y^2 + 2x - 20y + 43 = 0$

13 $25x^2 + 4y^2 - 250x - 16y + 541 = 0$

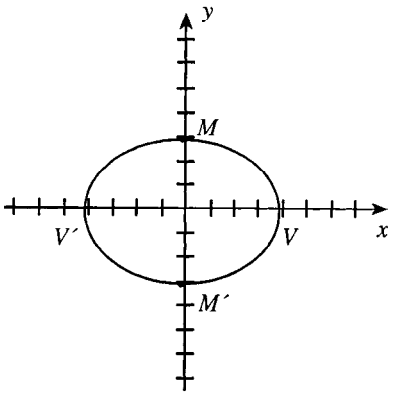
14 $4x^2 + y^2 = 2y$

Ejercicios 15 – 18: Determine la ecuación de la elipse que aparece en la figura.

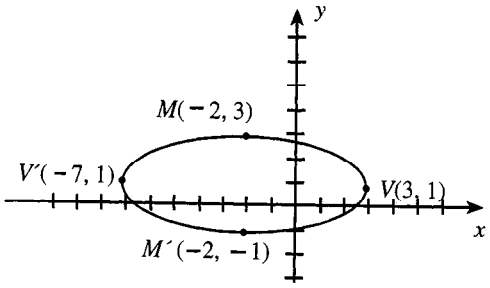
15



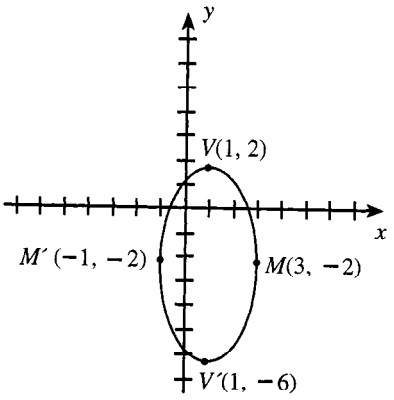
16



17



18



Ejercicios 19 – 30: Deduzca una ecuación para la elipse que tenga su centro en el origen y satisfaga las condiciones dadas.

19 Vértices $V(\pm 8, 0)$, focos $F(\pm 5, 0)$.

20 Vértices $V(0, \pm 7)$, focos $F(0, \pm 2)$.

21 Vértices $V(0, \pm 5)$, eje menor de longitud 3.

22 Focos $F(\pm 3, 0)$, eje menor de longitud 2.

23 Vértices $V(0, \pm 6)$, que pase por $(3, 2)$.

24 Que pase por $(2, 3)$ y $(6, 1)$.

25 Excentricidad $\frac{3}{4}$, vértices $V(0, \pm 4)$.

26 Excentricidad $\frac{1}{2}$, y vértices en el eje x, que pase por $(1, 3)$.

27 Abscisas en el origen ± 2, ordenadas en el origen $\pm \frac{1}{3}$.

28 Abscisas en el origen $\pm \frac{1}{2}$, ordenadas en el origen ± 4.

29 Eje mayor horizontal de longitud 8, eje menor de longitud 5.

30 Eje mayor vertical de longitud 7, eje menor de longitud 6.

Ejercicios 31 y 32: Calcule las coordenadas de los puntos de intersección de las gráficas de las ecuaciones. Trace ambas gráficas en el mismo plano de coordenadas, y muestre los puntos de intersección.

31 $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 20 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$

32 $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 36 \\ x^2 + y^2 = 12 \end{cases}$

Ejercicios 33 – 36: Deduzca una ecuación del conjunto de puntos en el plano xy tales que la suma de sus distancias a F y F' sea k.

33 $F(3, 0)$, $F'(-3, 0)$; $k = 10$

34 $F(12, 0)$, $F'(-12, 0)$; $k = 26$

35 $F(0, 15)$, $F'(0, -15)$; $k = 34$

36 $F(0, 8)$, $F'(0, -8)$; $k = 20$

Ejercicios 37 – 44: Determine si la gráfica de la ecuación dada es la mitad superior, inferior, izquierda o derecha de una elipse, y deduzca la ecuación de la elipse completa.

37 $y = 11\sqrt{1 - \frac{x^2}{49}}$

38 $y = -6\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}$

39 $x = -\frac{1}{3}\sqrt{9 - y^2}$

40 $x = \frac{4}{5}\sqrt{25 - y^2}$

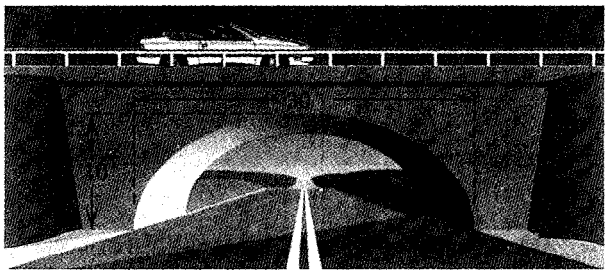
41 $x = 1 + 2\sqrt{1 - \frac{(y + 2)^2}{9}}$

42 $x = -2 - 5\sqrt{1 - \frac{(y - 1)^2}{16}}$

43 $y = 2 - 7\sqrt{1 - \frac{(x + 1)^2}{9}}$

44 $y = -1 + \sqrt{1 - \frac{(x - 3)^2}{16}}$

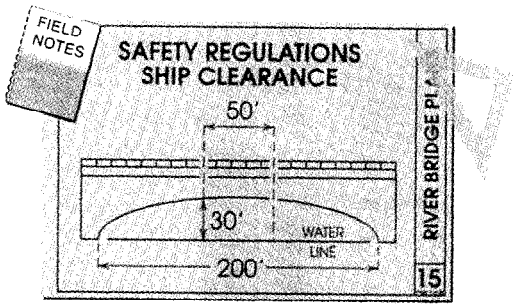
45 ***Dimensiones de un arco*** El arco de un puente es semielíptico, con su eje mayor horizontal. La base del arco mide 30 pies, y el punto más alto está a 10 pies sobre la carretera horizontal, como se ve en la figura. Calcule la altura del arco a 6 pies del centro de la base.



46 ***Diseño de un puente*** Se desea construir un puente para cruzar un río de 200 pies de ancho. El arco del puente debe ser semielíptico y tener tales dimensiones que pueda pasar por él un barco de menos de 50 pies de ancho y 30 de alto, como se ve en la figura.

(a) Deduzca una ecuación para el arco.

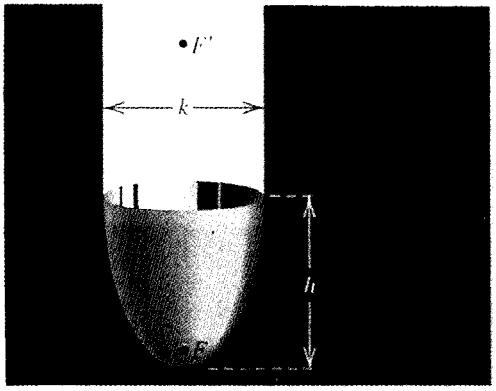
(b) Calcule aproximadamente la altura del arco a la mitad del puente.



47 ***Órbita de la Tierra*** Suponga que la longitud del eje mayor de la órbita de la Tierra es de 186 000 000 mi, y que la excentricidad es 0.017. Calcule, aproximando a la unidad de millar más cercana, las distancias máxima y mínima de la Tierra al Sol.

48 ***Órbita de Mercurio*** El planeta Mercurio sigue una órbita elíptica cuya excentricidad es de 0.206, y la distancia de su eje mayor es de 0.774 UA unidades astronómicas. Calcule las distancias máxima y mínima de Mercurio al Sol.

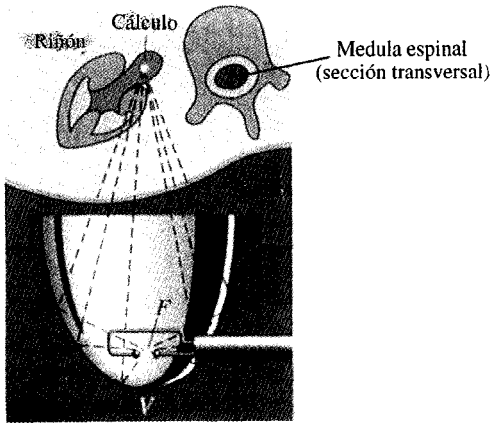
49 ***Reflector elíptico*** La forma básica de un reflector elíptico es un semielipsoide de altura h y diámetro k, como se ve en la figura. Las ondas emitidas desde el foco F se reflejarán en la superficie, y llegarán al foco F'.



(a) Exprese las distancias $d(V, F)$ y $d(V, F')$ en función de h y k.

(b) Se desea fabricar un reflector elíptico de 17 cm de modo que las ondas emitidas desde F se reflejen a un punto F' que está a 32 cm de V. Calcule el diámetro del reflector y el lugar de F.

50 ***Funcionamiento de un litotriptor*** Un litotriptor tiene 15 cm de altura y 18 cm de diámetro, y está dispuesto como muestra la figura. Desde el foco F se emiten ondas de choque intra-acuáticas, de alta energía. El foco F está a corta distancia del vértice V.

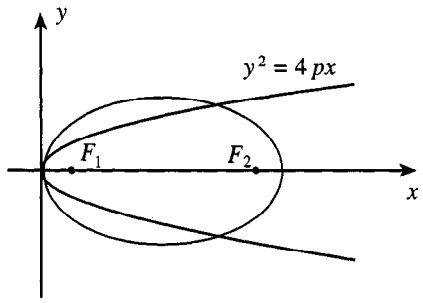


(a) Calcule la distancia de V a F.

(b) ¿A qué distancia de V, en dirección vertical, debe estar un cálculo renal?

51 ***Galería del murmullo*** El techo de una galería tiene forma de semielipsoide, como se ve en la Fig. 26. Su punto más alto está a 15 pies sobre el piso elíptico, y los vértices del elipsoide están a 50 pies de distancia. Si dos personas están de pie en los focos, F' y F, ¿a qué distancia de los vértices están sus pies?

52 Una elipse tiene un vértice en el origen, y sus focos son $F_1(p, 0)$ y $F_2(p + 2c, 0)$, como se ve en la figura. Si el foco F_1 es fijo, y si (x, y) está en la elipse, demuestre que y^2 tiende a $4px$ cuando $c \to \infty$. Así, cuando $c \to \infty$, la elipse tiende a la forma de una parábola.



C Ejercicios 53 – 56: Trace las elipses en el mismo plano coordenado, y determine sus puntos de intersección.

53 $\dfrac{x^2}{2.9} + \dfrac{y^2}{2.1} = 1$; $\dfrac{x^2}{4.3} + \dfrac{(y-2.1)^2}{4.9} = 1$

54 $\dfrac{x^2}{3.9} + \dfrac{y^2}{2.4} = 1$; $\dfrac{(x+1.9)^2}{4.1} + \dfrac{y^2}{2.5} = 1$

55 $\dfrac{(x+0.1)^2}{1.7} + \dfrac{y^2}{0.9} = 1$; $\dfrac{x^2}{0.9} + \dfrac{(y-0.25)^2}{1.8} = 1$

56 $\dfrac{x^2}{3.1} + \dfrac{(y-0.2)^2}{2.8} = 1$; $\dfrac{(x+0.23)^2}{1.8} + \dfrac{y^2}{4.2} = 1$

11.3 HIPÉRBOLAS

La definición de una hipérbola se parece a la de la elipse. El único cambio es que en vez de considerar la *suma* de distancias a dos puntos fijos, se emplea la *diferencia*.

Definición de una hipérbola

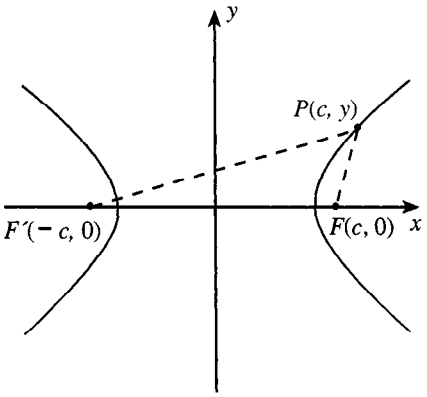
Una **hipérbola** es el conjunto de todos los puntos en un plano cuya *diferencia* de distancias a dos puntos fijos llamados **focos**, también en el plano, es una constante positiva.

Para deducir una ecuación sencilla de una hipérbola, se escoge un sistema de coordenadas tal que los focos sean $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$, y se representa la distancia (constante) mediante $2a$. El punto medio del segmento $F'F$, que está en el origen, se llama **centro** de la hipérbola. En la Fig. 11.27 se observa que un punto $P(x, y)$ está en la hipérbola si y sólo si alguna de las dos ecuaciones siguientes se cumple:

$$d(P, F') - d(P, F) = 2a$$

o si

$$d(P, F) - d(P, F') = 2a$$



Si P no está en el eje x, entonces se ve en la Fig.11.27 que

$$d(P, F) < d(F', F) + d(P, F'),$$

porque la longitud de un lado de un triángulo siempre es menor que la suma de las longitudes de los otros dos. Igualmente,

$$d(P, F') < d(F', F) + d(P, F).$$

Otras formas equivalentes de las dos desigualdades anteriores son

$$d(P, F) - d(P, F') < d(F', F)$$

y

$$d(P, F') - d(P, F) < d(F', F).$$

Como las diferencias de los primeros miembros de esas desigualdades son ambas iguales a $2a$, y como $d(F', F) = 2c$, de las dos últimas desigualdades, se tiene que $2a < 2c$, o sea, $a < c$. Recuérdese que para las elipses se tenía que $a > c$.

A continuación, las ecuaciones $d(P, F) - d(P, F') = 2a$, y $d(P, F') - d(P, F) = 2a$ se pueden remplazar por la ecuación única

$$|d(P, F) - d(P, F')| = 2a.$$

Con la fórmula de la distancia se determina $d(P, F)$ y $d(P, F')$, y se llega a una ecuación de la hipérbola:

$$|\sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} - \sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2}| = 2a$$

Al emplear el tipo de simplificación que sirve para deducir una de las ecuaciones de la elipse, es posible reordenar la ecuación anterior en la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

Por último, si

$$b^2 = c^2 - a^2 \quad \text{con } b > 0,$$

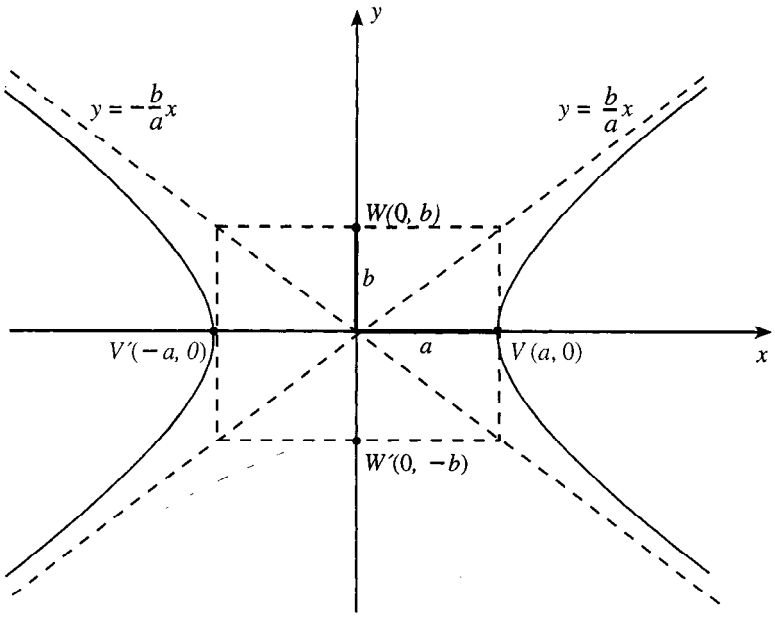
en la ecuación anterior, entonces

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Se ha demostrado que las coordenadas de todo punto (x, y) sobre la hipérbola de la Fig. 11.27 satisfacen la ecuación $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$. Recíprocamente, si (x, y) es una solución de esta ecuación, entonces, invirtiendo los pasos, se tiene que el punto (x, y) está en la hipérbola.

Al aplicar las pruebas de simetría, se observa que la hipérbola es simétrica con respecto a ambos ejes y al origen. Se pueden determinar las intersecciones de la hipérbola con el eje x haciendo $y = 0$ en la ecuación. Al hacerlo se obtiene $x^2/a^2 = 1$, o sea, $x^2 = a^2$. En consecuencia, las intersecciones con el eje x, o abscisas en el origen, son a y $-a$. Los puntos correspondientes, $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$ en la gráfica, se llaman **vértices** de la hipérbola (véase Fig. 11.28). El segmento de recta $V'V$ se denomina **eje transverso**. La gráfica no tiene ordenadas en el origen, porque la ecuación $-y^2/b^2 = 1$ tiene las soluciones *complejas* $y = \pm bi$. Los puntos $W(0, b)$ y $W'(0, -b)$ son los extremos del **eje conjugado** $W'W$. *Los puntos* W y W' no están en la hipérbola, sin embargo, como se explicará después, son útiles para trazar la gráfica.

FIGURA 11.28



Al despejar y de la ecuación $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ se obtiene

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Si $x^2 - a^2 < 0$, o lo que es lo mismo, $-a < x < a$, no hay puntos (x, y) en la gráfica. *Hay* puntos $P(x, y)$ en la gráfica si $x \geq a$, o si $x \leq -a$.

Se puede demostrar que *las rectas* $y = \pm (b/a)x$ *son asíntotas de la hipérbola.* Tales asíntotas son guías adecuadas para el trazo de la gráfica. Una manera cómoda de trazar las asíntotas es ubicar primero los vértices $V(a, 0)$, $V'(-a, 0)$, y los puntos $W(0, b)$, $W'(0, -b)$ (véase Fig. 11.28). Si se trazan rectas verticales y horizontales por esos puntos extremos de los ejes trans-

verso y conjugado, respectivamente, entonces las diagonales del rectángulo que se obtiene tienen pendientes b/a y $-b/a$. Por lo tanto, prolongando esas diagonales se obtienen las asíntotas $y = \pm (b/a)x$. A continuación se traza la hipérbola en la Fig. 11.28, usando las asíntotas como guías. Las dos partes que forman una hipérbola se llaman **rama derecha** y **rama izquierda**, en este caso.

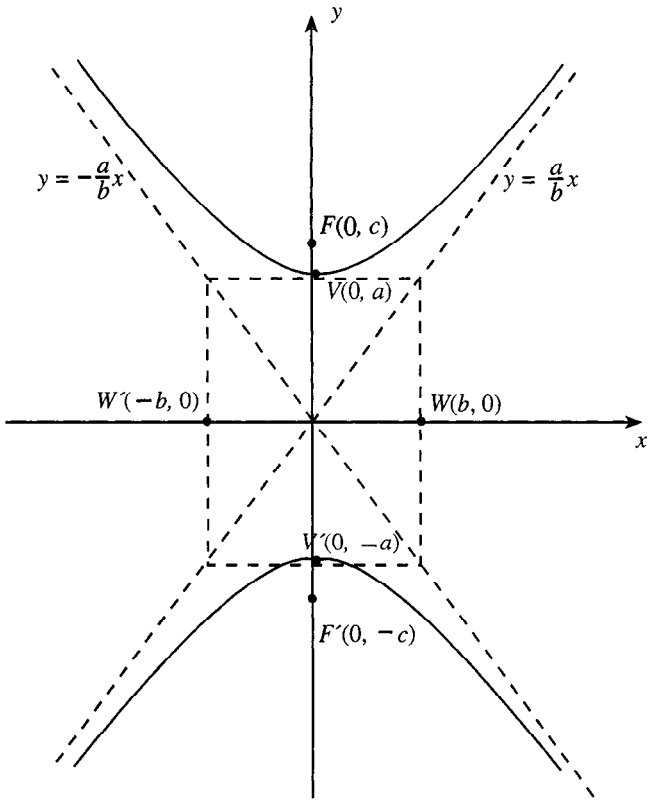
Igualmente, si los focos están en el eje y, se obtiene la ecuación

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

En este caso, los vértices de la hipérbola son $(0, \pm a)$, y los extremos del eje conjugado están en $(\pm b, 0)$, como se ve en la Fig. 11.29. Las asíntotas son $y = \pm (a/b)x$ [no $y = \pm (b/a)x$, como en el caso anterior], y en este caso se tiene una **rama superior** y una **rama inferior** de la hipérbola.

El análisis anterior se puede resumir como sigue.

FIGURA 11.29



Ecuaciones normales de la hipérbola con centro en el origen

La gráfica de

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{o bien} \quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

es una hipérbola con centro en el origen. La longitud del eje transverso es $2a$, y la del eje conjugado es $2b$. Los focos están a una distancia c del origen, y se tiene que $c^2 = a^2 + b^2$.

Se ha demostrado que una ecuación de la hipérbola con centro en el origen y focos en uno de los ejes coordenados se puede escribir siempre en la forma

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1, \quad \text{o bien} \quad qx^2 + py^2 = pq,$$

en la cual p y q tienen signos opuestos. Los vértices están en el eje x si p es positivo, o en el eje y si q es positivo.

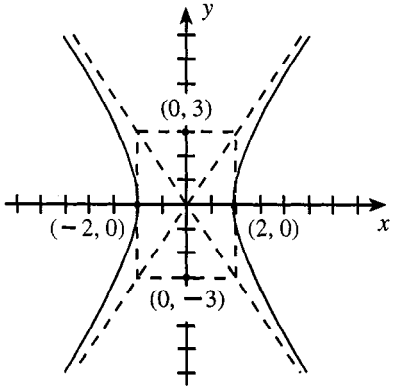
EJEMPLO 1 *Trazo de una hipérbola con centro en el origen*

Trazar la gráfica de $9x^2 - 4y^2 = 36$. Determinar los focos y las ecuaciones de las asíntotas.

SOLUCIÓN Según las indicaciones anteriores a este ejemplo, la gráfica es una hipérbola con centro en el origen. Para expresar la ecuación dada en forma normal, se dividen entre 36 ambos miembros y se simplifica, con lo cual se obtiene

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

FIGURA 11.30



Comparando $(x^2/4) - (y^2/9) = 1$ con $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$, se observa que $a^2 = 4$ y $b^2 = 9$, es decir, $a = 2$ y $b = 3$. La hipérbola tiene sus vértices en el eje x, porque hay abscisas en el origen, y no ordenadas en el origen. Los vértices $(\pm 2, 0)$ y los puntos extremos del eje conjugado $(0, \pm 3)$ determinan un rectángulo cuyas diagonales, al prolongarse, forman las asíntotas. La gráfica de la ecuación se presenta en la Fig. 11.30.

Para localizar los focos, se calcula c :

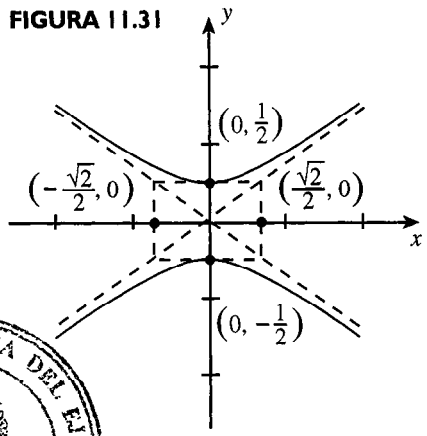
$$c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 9 = 13.$$

Entonces, $c = \sqrt{13}$, y los focos están en $(\pm\sqrt{13}, 0)$.

Las ecuaciones de las asíntotas son $y = \pm\frac{3}{2}x$, y se pueden determinar examinando la gráfica o las ecuaciones $y = \pm (b/a)x$.

El ejemplo anterior indica que, para la hipérbola, no siempre se cumple que $a > b$, como en el caso de la elipse. De hecho, puede ser que $a < b$, $a > b$, o bien $a = b$.

FIGURA 11.31



EJEMPLO 2 *Trazo de una hipérbola con centro en el origen*

Trazar la gráfica de $4y^2 - 2x^2 = 1$. Localizar los focos y deducir las ecuaciones de las asíntotas.

SOLUCIÓN Para expresar la ecuación en la forma normal, se escribe

$$\frac{y^2}{\frac{1}{4}} - \frac{x^2}{\frac{1}{2}} = 1.$$

Por tanto, $a^2 = \frac{1}{4}$, $b^2 = \frac{1}{2}$, $c^2 = a^2 + b^2 = \frac{3}{4}$,
y por consiguiente,

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad c = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

La hipérbola tiene sus vértices en el eje y, porque hay ordenadas en el origen, y no abscisas en el origen. Los vértices están en $(0, \pm\frac{1}{2})$, los extremos del eje conjugado están en $(\pm 1/\sqrt{2}, 0)$, y los focos en $(0, \pm\sqrt{3}/2)$. En la Fig. 11.31 se presenta la gráfica.

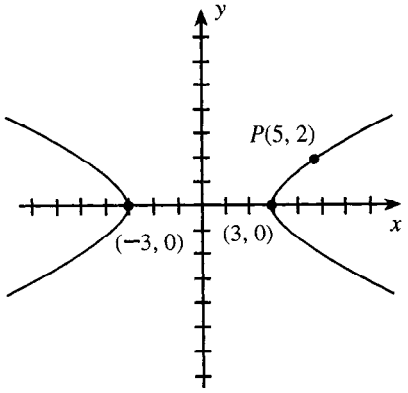
Para llegar a las ecuaciones de las asíntotas, se observa la figura o se aplica $y = \pm (a/b)x$, obteniéndose así $y = \pm (\sqrt{2}/2)x$.

EJEMPLO 3 ***Obtener la ecuación de una hipérbola que satisfaga las condiciones establecidas***

Una hipérbola tiene sus vértices en $(\pm 3, 0)$, y pasa por el punto $P(5, 2)$. Hallar su ecuación, y determinar sus focos y asíntotas.

SOLUCIÓN Se empieza haciendo el trazo de una hipérbola con vértices en $(\pm 3, 0)$ y que pase por el punto $P(5, 2)$, como en la Fig. 11.32.

FIGURA 11.32



La ecuación de la hipérbola tiene la forma

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Como $P(5, 2)$ está en la curva, su ordenada y su abscisa satisfacen la ecuación, es decir,

$$\frac{5^2}{3^2} - \frac{2^2}{b^2} = 1.$$

Se despeja b^2, y se obtiene $b^2 = \frac{9}{4}$. Por consiguiente, una ecuación de la hipérbola es

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1$$

o bien, equivalentemente, $x^2 - 4y^2 = 9$.

Para localizar los focos, primero se calcula c:

$$c^2 = a^2 + b^2 = 9 + \tfrac{9}{4} = \tfrac{45}{4}.$$

Por consiguiente, $c = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{5} \approx 3.35$, y los focos están en $(\pm\frac{3}{2}\sqrt{5}, 0)$.

Las ecuaciones generales de las asíntotas son $y = \pm (b/a)x$. Sustituyendo $a = 3$ y $b = \frac{3}{2}$ se obtiene $y = \pm\frac{1}{2}x$.

El ejemplo que sigue indica cómo deducir ecuaciones de ciertas partes de una hipérbola.

EJEMPLO 4 ***Deducir ecuaciones de partes de una hipérbola***

En el Ejemplo 1 se estudió la hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$. Resolver la ecuación como se indica y describir la gráfica que resulte.

(a) Despejando x en función de y. **(b)** Despejando y en función de x.

SOLUCIÓN

(a) Se despeja x en función de y como sigue:

$$9x^2 - 4y^2 = 36 \qquad \text{ecuación dada}$$

$$x^2 = \frac{36 + 4y^2}{9} \qquad \text{se suma } 4y^2 \text{ y se divide entre 9}$$

$$x = \pm\tfrac{2}{3}\sqrt{9 + y^2} \qquad \text{se factoriza 4 y se saca raíz cuadrada}$$

La gráfica de $x = \frac{2}{3}\sqrt{9 + y^2}$ es la rama derecha de la hipérbola que se muestra en la Fig. 11.30; la gráfica de $x = -\frac{2}{3}\sqrt{9 + y^2}$ es la rama izquierda.

(b) Se despeja y en función de x como sigue:

$$9x^2 - 4y^2 = 36 \qquad \text{ecuación dada}$$

$$4y^2 = 9x^2 - 36 \qquad \text{se suma } 4y^2 \text{ y se resta 36}$$

$$y^2 = \frac{9(x^2 - 4)}{4} \qquad \text{se saca 9 como factor y se divide entre 4}$$

$$y = \pm\tfrac{3}{2}\sqrt{x^2 - 4} \qquad \text{se extrae raíz cuadrada}$$

La gráfica de $y = \frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 4}$ es la mitad superior de las ramas derecha e izquierda, y la gráfica de $y = -\frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 4}$ es la mitad inferior de tales ramas.

Como en el caso de las elipses, es posible emplear las fórmulas de traslación de ejes para dar más amplitud a los trabajos. Con el ejemplo que sigue se ilustra esta técnica.

EJEMPLO 5 ***Trazo de una hipérbola con centro en*** (h, k)

Analizar y trazar la gráfica de la ecuación

$$9x^2 - 4y^2 - 54x - 16y + 29 = 0.$$

SOLUCIÓN Se ordena el trabajo siguiendo un procedimiento semejante al que se aplica para las elipses, en el Ejemplo 5 de la sección anterior:

$$(9x^2 - 54x) + (-4y^2 - 16y) = -29 \qquad \text{se agrupan términos}$$

$$9(x^2 - 6x\quad) - 4(y^2 + 4y\quad) = -29 \qquad \text{se sacan 9 y } -4 \text{ como factores}$$

$$9(x^2 - 6x + 9) - 4(y^2 + 4y + 4) = -29 + 81 - 16 \qquad \text{se completan los cuadrados}$$

$$9(x - 3)^2 - 4(y + 2)^2 = 36 \qquad \text{factorización}$$

$$\frac{(x - 3)^2}{4} - \frac{(y + 2)^2}{9} = 1 \qquad \text{se divide entre 36}$$

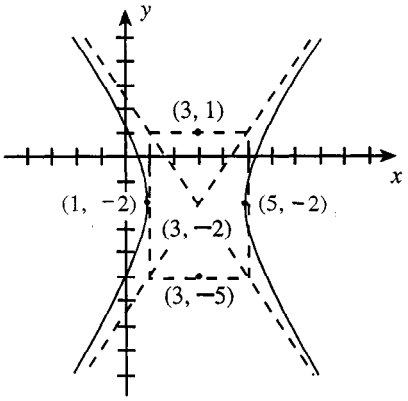
La última ecuación tiene la forma

$$\frac{(x')^2}{4} - \frac{(y')^2}{9} = 1,$$

en la cual $x' = x - 3$ y $y' = y + 2$. Se han trasladado los ejes x y y al nuevo origen, $C(3, -2)$. La gráfica es una hipérbola con sus vértices en el eje x', que es la recta $y = -2$. Se observa que

$$a^2 = 4, \qquad b^2 = 9, \qquad c^2 = a^2 + b^2 = 13.$$

FIGURA 11.33



Por consiguiente,

$$a = 2, \qquad b = 3, \qquad c = \sqrt{13}.$$

Como se ilustra en la Fig. 11.33, los vértices están en $(3 \pm 2, -2)$, es decir, en $(5, -2)$ y $(1, -2)$. Los extremos del eje conjugado se hallan en $(3, -2 \pm 3)$, o sea, $(3, 1)$ y $(3, -5)$. Los focos están en $(3 \pm \sqrt{13}, -2)$, y las ecuaciones de las asíntotas son

$$y + 2 = \pm\tfrac{3}{2}(x - 3).$$

Los resultados de las Secs. 11.1 a 11.3 muestran que la gráfica de toda ecuación que tenga la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

es una cónica, excepto en algunos casos degenerativos en los cuales se obtiene un punto, una o dos rectas, o no se obtiene nada. Aunque sólo se han visto algunos ejemplos especiales, se pueden aplicar estos métodos a cualquier ecuación de ese tipo. Si A y C son iguales y distintas de 0, la gráfica, cuando existe, es una circunferencia, o en casos excepcionales, un punto. Si A y C son distintos, pero tienen el mismo signo, entonces, completando los cuadrados y trasladando adecuadamente los ejes, se obtiene una ecuación cuya gráfica, cuando existe, es una elipse (o un punto). Si A y C tienen signos distintos, se obtiene una ecuación de una hipérbola o, posiblemente, en el caso degenerativo, dos rectas que se cortan. Si A o C son cero, pero no ambas, la gráfica es una parábola o, en algunos casos, un par de rectas paralelas.

Concluye esta sección con una aplicación en la que intervienen hipérbolas.

EJEMPLO 6 *Localización de un barco*

La estación A de guardacostas está 200 mi al este de otra estación B. Un barco navega en una línea paralela y 50 mi al norte de la recta que pasa por A y B. Se mandan señales de radio de A y B, a una velocidad de 980 pies/μs (pies por microsegundo). A la 1:00 P.M. la señal de B llega al barco 400 μs después de la señal de A. Determine la posición del buque a esa hora.

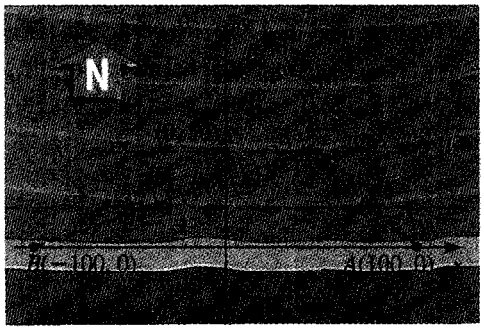
SOLUCIÓN Se introduce un sistema de coordenadas, como se ve en la Fig. 11.34(a), estando las estaciones en los puntos A y B del eje x, y el barco en P, en la recta $y = 50$. Como a la 1:00 P.M. la señal necesita 400 μs más para llegar desde B que lo que necesita desde A, la diferencia, $d_1 - d_2$ de las distancias indicadas a esa hora es

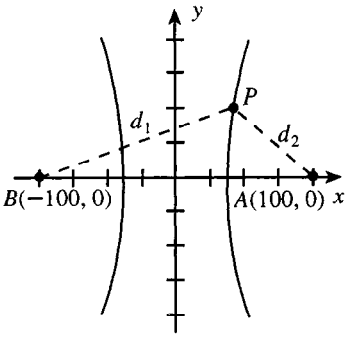
$$d_1 - d_2 = (980)(400) = 392{,}000 \text{ pies}$$

(continúa)

FIGURA 11.34

(a) (b)





Dividiendo entre 5280 pies/mi, se tiene

$$d_1 - d_2 = \frac{392{,}000}{5280} = 74.\overline{24} \text{ mi.}$$

A la 1:00 P.M., el punto P está en la rama derecha de una hipérbola cuya ecuación es $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ [véase la Fig. 11.34(b)], formada por todos los puntos tales que la diferencia de sus distancias a los focos B y A es $d_1 - d_2$. Al deducir la ecuación $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ se toma $d_1 - d_2 = 2a$; por consiguiente, para este caso,

$$a = \frac{74.\overline{24}}{2} = 37.\overline{12} \qquad \text{y} \qquad a^2 \approx 1378.$$

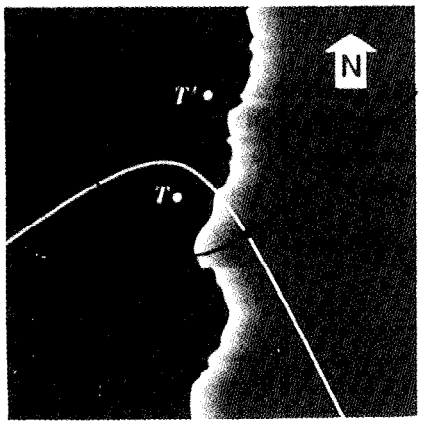
Como la distancia c del origen a cualquiera de los focos es 100,

$$b^2 = c^2 - a^2 \approx 10{,}000 - 1378, \qquad \text{o sea} \quad b^2 \approx 8622.$$

Por lo tanto, una ecuación aproximada de la hipérbola que tiene sus focos en A y B, y que pasa por P, es

$$\frac{x^2}{1378} - \frac{y^2}{8622} = 1.$$

FIGURA 11.35



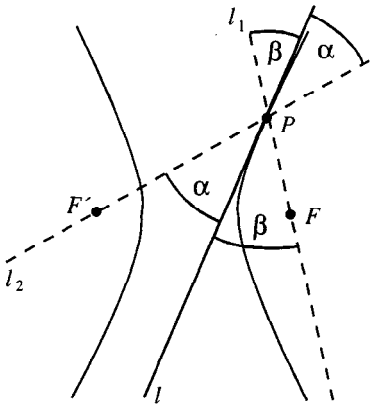
Si $y = 50$, que es la ordenada de P, se obtiene

$$\frac{x^2}{1378} - \frac{2500}{8622} = 1.$$

Despejando x se tiene que $x \approx 42.16$. Redondeando a la milla más cercana, resulta que las coordenadas aproximadas de P son (42, 50).

Una extensión del método que se aplicó en el Ejemplo 6 sirve de base para el sistema *loran* de navegación (acrónimo de *long range navigation*, navegación a grandes distancias). En este sistema intervienen dos pares de radiotransmisores, como los que se indican en T, T' y S, S' en la Fig. 11.35. Supóngase que los transmisores T y T' mandan señales que capta un radiorreceptor en un barco en un punto P. La diferencia de tiempos de llegada de las señales se puede emplear para calcular la diferencia de dis-

FIGURA 11.36



tancias de P a T y a T'. Entonces, P está en una rama de una hipérbola cuyos focos están en T y T'. Si se repite este proceso para el otro par de transmisores, se observa que P queda también en una rama de una hipérbola cuyos focos están en S y S'. La intersección de esas dos ramas determina la posición de P.

La hipérbola tiene propiedades de reflexión análogas a las de la elipse, que se analizaron al final de la sección anterior. Por ejemplo, sea l la tangente en un punto P de una hipérbola cuyos focos son F y F', como se muestra en la Fig. 11.36. Si α es el ángulo agudo entre $F'P$ y l, y si β es el ángulo agudo que forman FP y l, se puede demostrar que $\alpha = \beta$. Si se dirige un rayo de luz a lo largo de la recta l_1, hacia F, se reflejará en P a lo largo de l_2 hacia F'. Esta propiedad se aplica en el diseño de telescopios del tipo Cassegrain (véase el Ejercicio 52).

EJERCICIOS 11.3

Ejercicios 1 – 16: Determine los vértices y los focos, y deduzca las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola. Trace la gráfica que muestre las asíntotas y los focos.

1 $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

2 $\dfrac{y^2}{49} - \dfrac{x^2}{16} = 1$

3 $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{4} = 1$

4 $\dfrac{x^2}{49} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

5 $x^2 - \dfrac{y^2}{24} = 1$

6 $y^2 - \dfrac{x^2}{15} = 1$

7 $y^2 - 4x^2 = 16$

8 $x^2 - 2y^2 = 8$

9 $16x^2 - 36y^2 = 1$

10 $y^2 - 16x^2 = 1$

11 $\dfrac{(y+2)^2}{9} - \dfrac{(x+2)^2}{4} = 1$

12 $\dfrac{(x-3)^2}{25} - \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1$

13 $144x^2 - 25y^2 + 864x - 100y - 2404 = 0$

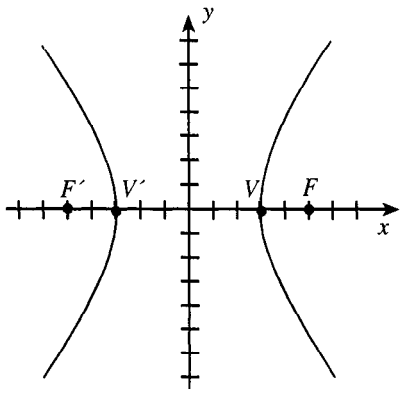
14 $y^2 - 4x^2 - 12y - 16x + 16 = 0$

15 $4y^2 - x^2 + 40y - 4x + 60 = 0$

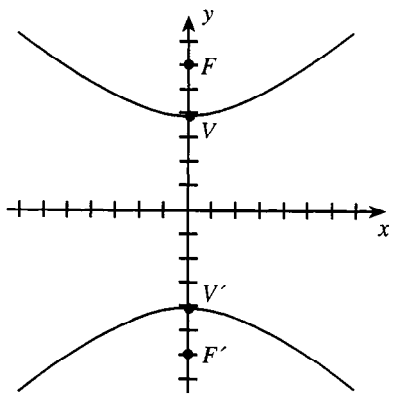
16 $25x^2 - 9y^2 + 100x - 54y + 10 = 0$

Ejercicios 17 – 20: Deduzca una ecuación de la hipérbola que aparece en la figura.

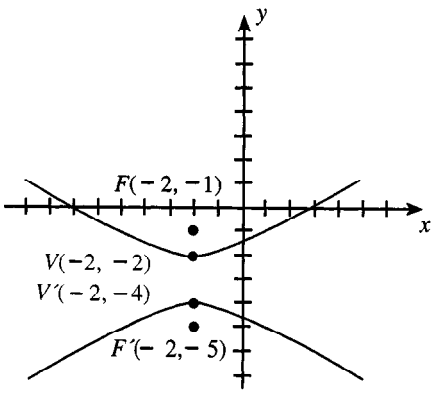
17



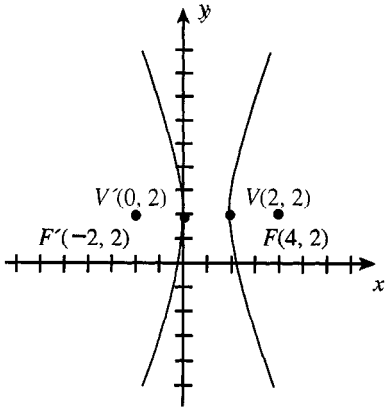
18



19



20



Ejercicios 21 – 32: Deduzca una ecuación de la hipérbola que tenga su centro en el origen y satisfaga las condiciones dadas.

21 Focos $F(0, \pm 4)$, vértices $V(0, \pm 1)$.

22 Focos $F(\pm 8, 0)$, vértices $V(\pm 5, 0)$.

23 Focos $F(\pm 5, 0)$, vértices $V(\pm 3, 0)$.

24 Focos $F(0, \pm 3)$, vértices $V(0, \pm 2)$.

25 Focos $F(0, \pm 5)$, eje conjugado de longitud 4.

26 Vértices $V(\pm 4, 0)$, y que pase por $(8, 2)$.

27 Vértices $V(3, 0)$, asíntotas $y = \pm 2x$

28 Focos $F(0, \pm 10)$, asíntotas $y = \pm \frac{1}{3}x$.

29 Abscisas en el origen ± 5, asíntotas $y = \pm 2x$.

30 Ordenadas en el origen ± 2, asíntotas $y = \pm \frac{1}{4}x$.

31 Longitud del eje transverso vertical, 10; longitud del eje conjugado, 14.

32 Longitud del eje transverso horizontal, 6; longitud del eje conjugado, 2.

Ejercicios 33 y 34: Localice los puntos de intersección de las gráficas de las ecuaciones. Trace ambas gráficas en el mismo plano coordenado, y muestre los puntos de intersección

33 $\begin{cases} y^2 - 4x^2 = 16 \\ y - x = 4 \end{cases}$

34 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ y^2 - 3x = 0 \end{cases}$

Ejercicios 35 – 38: Deduzca la ecuación del conjunto de puntos en el plano xy, tales que sea k la diferencia de sus distancias a F y a F'.

35 $F(13, 0)$, $F'(-13, 0)$; $k = 24$

36 $F(5, 0)$, $F'(-5, 0)$; $k = 8$

37 $F(0, 10)$, $F'(0, -10)$; $k = 16$

38 $F(0, 17)$, $F'(0, -17)$; $k = 30$

Ejercicios 39 – 46: Describa la parte de una hipérbola expresada por la ecuación.

39 $x = \frac{5}{4}\sqrt{y^2 + 16}$ **40** $x = -\frac{5}{4}\sqrt{y^2 + 16}$

41 $y = \frac{3}{7}\sqrt{x^2 + 49}$ **42** $y = -\frac{3}{7}\sqrt{x^2 + 49}$

43 $y = -\frac{9}{4}\sqrt{x^2 - 16}$ **44** $y = \frac{9}{4}\sqrt{x^2 - 16}$

45 $x = -\frac{2}{3}\sqrt{y^2 - 36}$ **46** $x = \frac{2}{3}\sqrt{y^2 - 36}$

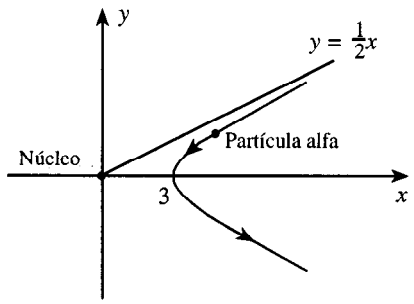
47 Las gráficas de las ecuaciones

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

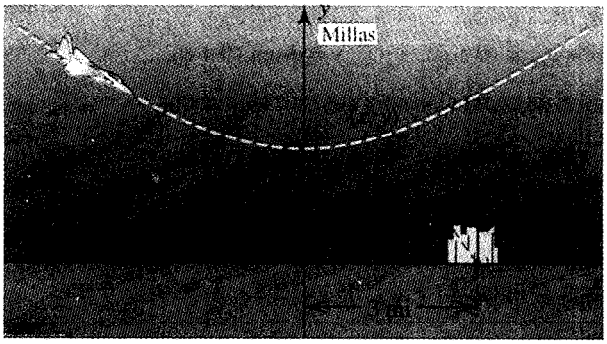
se llaman *hipérbolas conjugadas*. Trace las gráficas de ambas ecuaciones en el mismo plano coordenado, con $a = 5$ y $b = 3$. Describa la relación entre las dos curvas.

48 Deduzca una ecuación de la hipérbola cuyos focos están en $(h \pm c, k)$ y sus vértices en $(h \pm a, k)$, donde $0 < a < c$, y $c^2 = a^2 + b^2$.

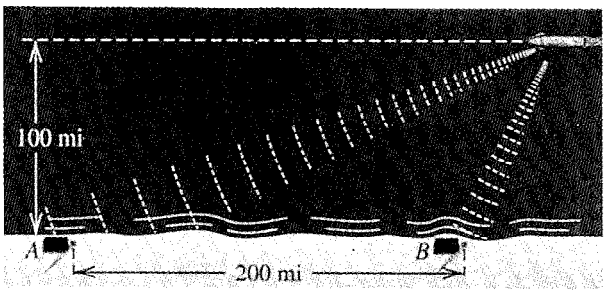
49 ***Partículas alfa*** En 1911, el físico Ernest Rutherford (1871–1937) descubrió que si se disparan partículas alfa hacia el núcleo de un átomo, a veces son repelidas y se alejan del núcleo, siguiendo trayectorias hiperbólicas. La figura muestra la trayectoria de una partícula que va hacia el origen por la recta $y = \frac{1}{2}x$, y llega a 3 unidades del núcleo. Deduzca la ecuación de esa trayectoria.



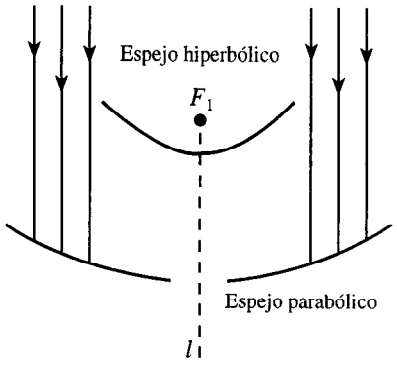
50 ***Maniobra de aeroplano*** Un avión vuela siguiendo la trayectoria hiperbólica que se ve en la figura. Si la ecuación de la trayectoria es $2y^2 - x^2 = 8$, determine a qué distancia mínima de una casa ubicada en (3, 0) llega el avión. [*Sugerencia:* Sea S el cuadrado de la distancia de un punto (x, y) en la trayectoria, al punto (3, 0), y calcule el valor mínimo de S.]



51 ***Localización de un barco*** Un barco navega por una ruta a 100 mi de la costa, en dirección paralela a ella. El barco manda una señal de auxilio, que reciben dos estaciones guardacostas, A y B, a 200 mi de distancia entre sí, como se ve en la figura. A partir de la diferencia entre tiempos de recepción de la señal, se calcula que la nave está 160 mi más cerca de B que de A. ¿Dónde está la embarcación?



52 ***Diseño de un telescopio*** En el telescopio Cassegrain, que se empezó a usar en 1672, se aplican las propiedades de reflexión de la parábola y la hipérbola. En la figura se ve el perfil de un reflector parabólico partido en el centro, cuyo foco está en F_1, y su eje en la recta l. También hay un segundo espejo, en este caso hiperbólico, uno de cuyos focos también está en F_1, y con su eje transverso a lo largo de l. ¿A dónde van finalmente las ondas luminosas que llegan del espacio paralelas al eje común?



C **Ejercicios 53 y 54: Trace las hipérbolas en el mismo plano de coordenadas, y localice su punto de intersección en el primer cuadrante.**

53 $\dfrac{(y-0.1)^2}{1.6} - \dfrac{(x+0.2)^2}{0.5} = 1$; $\dfrac{(y-0.5)^2}{2.7} - \dfrac{(x-0.1)^2}{5.3} = 1$

54 $\dfrac{(x-0.1)^2}{0.12} - \dfrac{y^2}{0.1} = 1$; $\dfrac{x^2}{0.9} - \dfrac{(y-0.3)^2}{2.1} = 1$

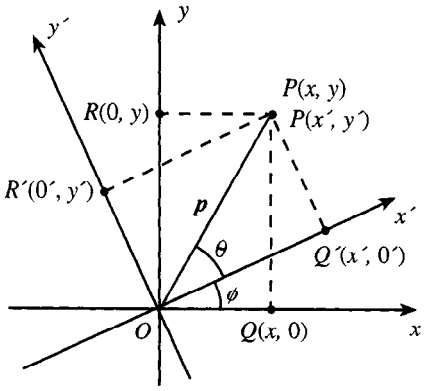
C **Ejercicios 55 y 56: Trace las hipérbolas en el mismo plano de coordenadas, y determine el número de puntos de intersección.**

55 $\dfrac{(x-0.3)^2}{1.3} - \dfrac{y^2}{2.7} = 1$; $\dfrac{y^2}{2.8} - \dfrac{(x-0.2)^2}{1.2} = 1$

56 $\dfrac{(x+0.2)^2}{1.75} - \dfrac{(y-0.5)^2}{1.6} = 1$; $\dfrac{(x-0.6)^2}{2.2} - \dfrac{(y+0.4)^2}{2.35} = 1$

11.4 ROTACIÓN DE EJES

FIGURA 11.37



Se puede obtener el plano $x'y'$ que se usó en una traslación de ejes desplazando el origen O del plano xy, a un nuevo lugar $C(h, k)$ sin cambiar las direcciones positivas de los ejes ni las unidades de longitud. Ahora se introducirá un nuevo plano de coordenadas obtenido manteniendo el origen O fijo, y girando los ejes x y y alrededor de O, hacia otra posición, representada por x' y y'. A una transformación de este tipo se la llama **rotación de ejes**.

Considere la rotación de ejes de la Fig. 11.37, y sea ϕ el ángulo agudo que debe girar el eje x positivo para que coincida con el eje x'. Si (x, y) son las coordenadas de un punto P en el plano xy, entonces (x', y') representarán sus coordenadas en el nuevo plano $x'y'$.

Se denotarán las proyecciones de P, sobre los diversos ejes, como se muestra en la Fig. 11.37, y sea θ el ángulo POQ'. Si $p = d(O, P)$, entonces

$$x' = p\cos\theta, \qquad y' = p\,\text{sen}\,\theta$$

$$x = p\cos(\theta + \phi), \qquad y = p\,\text{sen}\,(\theta + \phi).$$

Aplicando las fórmulas de suma al seno y coseno, vemos que

$$x = p\cos\theta\cos\phi - p\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi$$

$$y = p\,\text{sen}\,\theta\cos\phi + p\cos\theta\,\text{sen}\,\phi.$$

Puesto que $x' = p\cos\theta$ y $y' = p\,\text{sen}\,\theta$, se obtienen las ecuaciones (1) del siguiente teorema. Las ecuaciones (2) se obtienen a partir de las (1) despejando x' y y' de ellas.

Fórmulas para rotación de ejes

Si los ejes x y y se giran respecto al origen describiendo un ángulo agudo ϕ, entonces las coordenadas (x, y) y(x', y') de un punto P en los planos xy y $x'y'$ se relacionan como sigue:

(1) $x = x'\cos\phi - y'\,\text{sen}\,\phi, \qquad y = x'\,\text{sen}\,\phi + y'\cos\phi$

(2) $x' = x\cos\phi + y\,\text{sen}\,\phi, \qquad y' = -x\,\text{sen}\,\phi + y\cos\phi$

EJEMPLO 1 ***Uso de las fórmulas de rotación de ejes***

En la Fig. 11.38 se presenta la gráfica de $xy = 1$, o bien, de $y = 1/x$. Si se hacen girar los ejes coordenados un ángulo de 45°, deducir una ecuación de la gráfica en el nuevo plano $x'y'$.

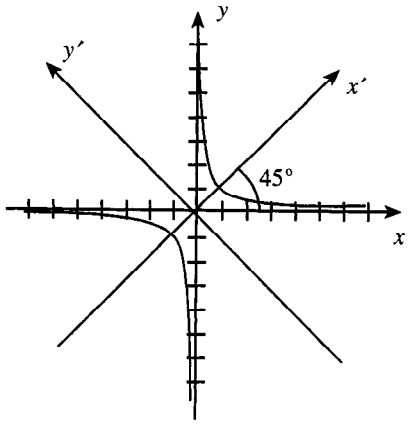
SOLUCIÓN Sea $\phi = 45°$ en las fórmulas (1) de la rotación de ejes:

$$x = x'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - y'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$$

$$y = x'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + y'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$$

FIGURA 11.38

$y = 1/x$



Sustituyendo x y y en la ecuación $xy = 1$, se tiene

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') = 1.$$

Esta ecuación se reduce a $\dfrac{(x')^2}{2} - \dfrac{(y')^2}{2} = 1,$

que es la ecuación de una hipérbola con vértices $(\pm\sqrt{2}, 0)$ en el eje x'. Nótese que las asíntotas de la hipérbola tienen como ecuaciones $y' = \pm x'$ en el nuevo sistema. Estas asíntotas corresponden a los ejes x y y originales.

En el Ejemplo 1 se ilustra un método para eliminar el término de una ecuación que contenga al producto xy. Este método puede servir para transformar cualquier ecuación de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

en la cual $B \neq 0$, en una ecuación en x' y y' que no contenga término en $x'y'$. Demostraremos que siempre se puede hacer lo anterior. Si hacemos girar los ejes un ángulo ϕ, entonces, con las fórmulas (1) de rotación de ejes, se sustituyen x, y, y resulta

$$\begin{aligned} &A(x' \cos\phi - y' \operatorname{sen}\phi)^2 + B(x' \cos\phi - y' \operatorname{sen}\phi)(x' \operatorname{sen}\phi + y' \cos\phi) \\ &\quad + C(x' \operatorname{sen}\phi + y' \cos\phi)^2 + D(x' \cos\phi - y' \operatorname{sen}\phi) \\ &\quad + E(x' \operatorname{sen}\phi + y' \cos\phi) + F \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 0. \end{aligned}$$

Al llevar a cabo las multiplicaciones y reordenar los términos, puede escribirse esta ecuación en la forma

$$A'(x')^2 + B'x'y' + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

donde

$$\begin{aligned} A' &= A\cos^2\phi + B\cos\phi \operatorname{sen}\phi + C\operatorname{sen}^2\phi \\ B' &= 2(C - A)\operatorname{sen}\phi\cos\phi + B(\cos^2\phi - \operatorname{sen}^2\phi) \\ C' &= A\operatorname{sen}^2\phi - B\operatorname{sen}\phi\cos\phi + C\cos^2\phi \\ D' &= D\cos\phi + E\operatorname{sen}\phi \\ E' &= -D\operatorname{sen}\phi + E\cos\phi \\ F' &= F. \end{aligned}$$

Para eliminar el término en $x'y'$, se debe seleccionar ϕ de modo que $B' = 0$, es decir, que

$$2(C - A)\operatorname{sen}\phi\cos\phi + B(\cos^2\phi - \operatorname{sen}^2\phi) = 0.$$

Empleando las fórmulas del doble de un ángulo, se escribe esta ecuación en la forma siguiente:

$$(C - A)\operatorname{sen}\phi + B\cos\phi = 0,$$

que equivale a

$$\cot 2\phi = \frac{A - C}{B}.$$

Esto demuestra el siguiente resultado.

Teorema para eliminar un término en xy

Para eliminar el término en xy de la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

en la cual $B \neq 0$, se selecciona un ángulo ϕ tal que

$$\cot 2\phi = \frac{A - C}{B}, \quad \text{siendo} \quad 0° < 2\phi < 180°$$

y se aplican las fórmulas de rotación de ejes.

La gráfica de cualquier ecuación en x, y del tipo que se presenta en las fórmulas anteriores es una cónica, con excepción de ciertos casos degenerativos.

Al hacer uso de las fórmulas anteriores, nótese que como $0° < 2\phi < 180°$, sen $2\phi > 0$. Además, como cot 2ϕ = cos 2ϕ/sen 2ϕ, siempre son iguales los signos de cot 2ϕ y cos 2ϕ.

EJEMPLO 2 ***Aplicación de las fórmulas de rotación de ejes***

Analizar y trazar la gráfica de la ecuación

$$41x^2 - 24xy + 34y^2 - 25 = 0.$$

SOLUCIÓN Con la notación del teorema anterior, se tiene que

$$A = 41, \quad B = -24, \quad C = 34, \quad F = -25$$

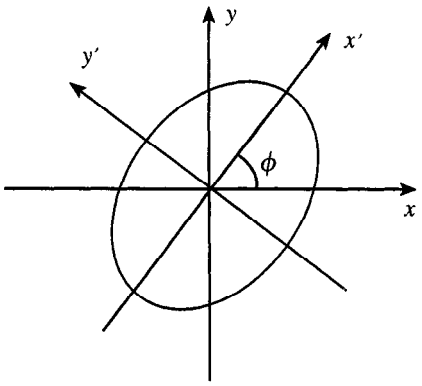
$$\cot 2\phi = \frac{41 - 34}{-24} = -\frac{7}{24}.$$

Como cot 2ϕ es negativa, se selecciona 2ϕ de manera que $90° < 2\phi < 180°$ y, por lo tanto, cos $2\phi = -\frac{7}{25}$. Ahora se aplican las fórmulas de la mitad del ángulo para obtener

$$\text{sen } \phi = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\phi}{2}} = \sqrt{\frac{1 - (-\frac{7}{25})}{2}} = \frac{4}{5}$$

$$\cos \phi = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\phi}{2}} = \sqrt{\frac{1 + (-\frac{7}{25})}{2}} = \frac{3}{5}.$$

FIGURA 11.39



Así, las fórmulas necesarias de rotación de ejes son

$$x = \tfrac{3}{5}x' - \tfrac{4}{5}y' \qquad \text{y} \qquad y = \tfrac{4}{5}x' + \tfrac{3}{5}y'.$$

Después de sustituir x y y en la ecuación dada, y simplificar, se llega a la ecuación

$$(x')^2 + 2(y')^2 = 1.$$

Por consiguiente, la gráfica es la de una elipse con vértices $(\pm 1, 0)$ en el eje x'. Como $\tan \phi = \text{sen } \phi/\cos \phi = (\frac{4}{5})/(\frac{3}{5}) = \frac{4}{3}$, entonces $\phi = \tan^{-1}(\frac{4}{3})$. Calculado hasta el minuto más cercano, $\phi \approx 53°8'$. En la Fig. 11.39 se presenta esta gráfica.

El teorema siguiente establece reglas que se aplican para identificar el tipo de cónica *antes* de girar los ejes.

Teorema de identificación

La gráfica de la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

es una cónica normal o una cónica degenerada. Si es cónica normal, entonces se trata de

(1) una parábola si $B^2 - 4AC = 0$
(2) una elipse si $B^2 - 4AC < 0$
(3) una hipérbola si $B^2 - 4AC > 0$

DEMOSTRACIÓN Si se giran los ejes x y y un ángulo ϕ, mediante las fórmulas de rotación de ejes se tiene

$$A'(x')^2 + B'x'y' + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0.$$

Con las fórmulas para A', B' y C' de la página 701, se puede demostrar que

$$(B')^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC.$$

Con una rotación adecuada de ejes, se hace que $B' = 0$ y

$$A'(x')^2 + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0.$$

Con excepción de los casos degenerativos, la gráfica de esta ecuación es una elipse si $A'C' > 0$ (A' y C' tienen el mismo signo); una hipérbola si $A'C' < 0$ (A' y C' tienen signos distintos); o una parábola si $A'C' = 0$ (ya que $A' = 0$, o $C' = 0$). Sin embargo, si $B' = 0$, entonces $B^2 - 4AC = -4A'C'$ y, por consiguiente, la gráfica será una elipse si $B^2 - 4AC < 0$; una hipérbola, si $B^2 - 4AC > 0$; o una parábola si $B^2 - 4AC = 0$. ■

La expresión $B^2 - 4AC$ se llama **discriminante** de la ecuación en el teorema de identificación. Se dice que el discriminante es **invariante** respecto de una rotación de ejes, porque no cambia su valor al girarlos.

EJEMPLO 3 ***Aplicación del teorema de identificación***

Con el teorema de identificación, determinar si la gráfica de la ecuación

$$41x^2 - 24xy + 34y^2 - 25 = 0$$

es una parábola, una elipse o una hipérbola.

SOLUCIÓN Se estudió la ecuación en el Ejemplo 2, donde se llevó a cabo una rotación de ejes. Como $A = 41$, $B = -24$ y $C = 34$, el discriminante es

$$B^2 - 4AC = (-24)^2 - 4(41)(34) = -5000 < 0.$$

Por consiguiente, según (2) del teorema de identificación, la gráfica es una elipse.

En algunos casos, después de eliminar el término en xy, es necesario trasladar los ejes del sistema coordenado $x'y'$ para trazar la gráfica, como se ve en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4 ***Empleo de las fórmulas de rotación de ejes***

Analizar y trazar la gráfica de la ecuación

$$x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 8\sqrt{3}x - 8y + 32 = 0.$$

SOLUCIÓN Haciendo $A = 1$, $B = 2\sqrt{3}$, y $C = 3$, entonces

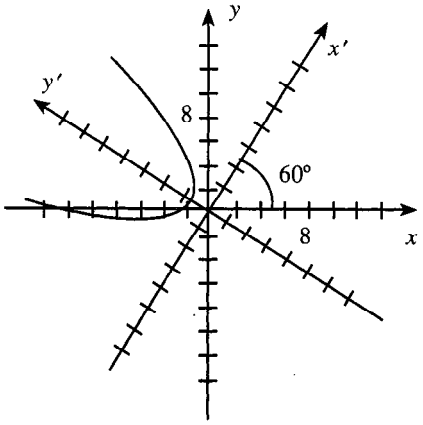
$$B^2 - 4AC = 12 - 12 = 0.$$

De acuerdo con (1) del teorema de identificación, la gráfica es una parábola.

Para aplicar una rotación de ejes, se define

$$\cot 2\phi = \frac{A - C}{B} = \frac{1 - 3}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

FIGURA 11.40



Por lo tanto, $2\phi = 120°$, $\phi = 60°$ y

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos\phi = \frac{1}{2}.$$

Las fórmulas (1) de rotación de ejes son como sigue:

$$x = \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' = \frac{1}{2}(x' - \sqrt{3}y')$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x' + y')$$

Sustituyendo x, y en la ecuación del problema, y simplificando, se llega a

$$4(x')^2 - 16y' + 32 = 0$$

o bien, de modo equivalente, $(x')^2 = 4(y' - 2)$.

En la Fig. 11.40 aparece la parábola. Cada marca representa dos unidades. Nótese que el vértice está en el punto (0, 2) del plano $x'y'$ y la gráfica es simétrica con respecto al eje y'.

EJERCICIOS 11.4

Ejercicios 1–13: (a) Con el teorema de identificación, determine si la gráfica de la ecuación dada es una parábola, una elipse o una hipérbola. (b) Haga una rotación de ejes adecuada para llegar a una ecuación de la gráfica en un plano $x'y'$, y trace la gráfica, identificando los vértices.

1 $x^2 - 2xy + y^2 - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y = 0$

2 $x^2 - 2xy + y^2 + 4x + 4y = 0$

3 $5x^2 - 8xy + 5y^2 = 9$ $\qquad x^2 - xy + y^2 = 3$

5 $11x^2 + 10\sqrt{3}xy + y^2 = 4$

6 $7x^2 - 48xy - 7y^2 = 225$

7 $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 60x - 80y + 100 = 0$

8 $x^2 + 4xy + 4y^2 + 6\sqrt{5}x - 18\sqrt{5}y + 45 = 0$

9 $40x^2 - 36xy + 25y^2 - 8\sqrt{13}x - 12\sqrt{13}y = 0$

10 $18x^2 - 48xy + 82y^2 + 6\sqrt{10}x + 2\sqrt{10}y - 80 = 0$

11 $5x^2 + 6\sqrt{3}xy - y^2 + 8x - 8\sqrt{3}y - 12 = 0$

12 $15x^2 + 20xy - 4\sqrt{5}x + 8\sqrt{5}y - 100 = 0$

13 $32x^2 - 72xy + 53y^2 = 80$

C **Ejercicios 14 – 16: Grafique la ecuación.**

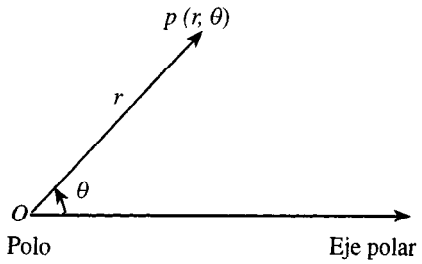
14 $1.1x^2 - 1.3xy + y^2 - 2.9x - 1.9y = 0$

15 $2.1x^2 - 4xy + 1.5y^2 - 4x + y - 1 = 0$

16 $3.2x^2 - 4\sqrt{2}xy + 2.5y^2 + 2.1y + 3x - 2.1 = 0$

11.5 COORDENADAS POLARES

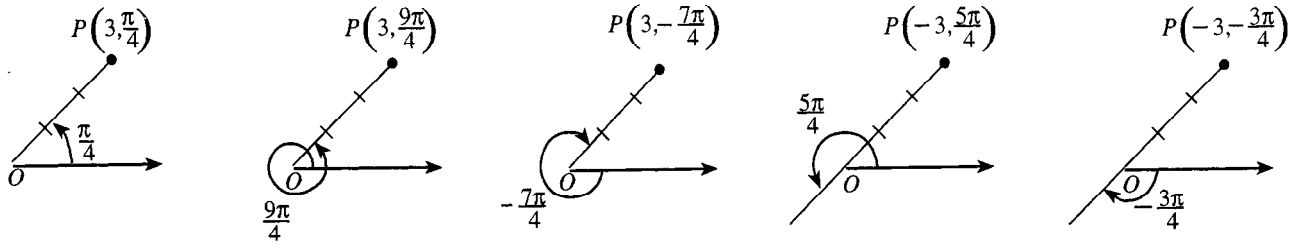
FIGURA 11.41



En un sistema de coordenadas rectangulares, el par ordenado (a, b) representa el punto cuyas distancias dirigidas desde los ejes x, y son a y b, respectivamente. Otro método de representar puntos es emplear *coordenadas polares*. Se empieza con un punto fijo O, el **polo** u **origen**, y una semirrecta dirigida (el **eje polar**) con su punto de partida en O. A continuación se considera cualquier punto P en el plano, distinto de O. Si, como se ve en la Fig. 11.41, $r = d(O, P)$, y θ indica la medida del ángulo determinado por el eje polar y OP, entonces r y θ son las **coordenadas polares** de P, y se usan los símbolos (r, θ), o bien $P(r, \theta)$ para representar P. Como de costumbre, se considera que θ es positivo si el ángulo se genera al girar la distancia polar en sentido contrario al de las manecillas del reloj, y negativo si el giro es en el sentido de ellas. Para medir θ se pueden usar radianes o grados.

Las coordenadas polares de un punto no son únicas. Por ejemplo, $(3, \pi/4)$, $(3, 9\pi/4)$ y $(3, -7\pi/4)$ representan todas al mismo punto (véase Fig. 11.42). También se puede hacer que r sea negativa. En este caso, en lugar de medir $|r|$ unidades a lo largo del lado terminal del ángulo θ, se mide a lo largo de la semirrecta con su punto de partida en O y que es prolongación en sentido *opuesto*, del lado terminal. Los puntos que corresponden a los pares $(-3, 5\pi/4)$ y $(-3, -3\pi/4)$ también aparecen en la Fig. 11.42.

FIGURA 11.42



Por convención, el polo O tiene coordenadas polares $(0, \theta)$ para *cualquier* θ. Una asignación de pares ordenados de la forma (r, θ) a los puntos de un plano es un **sistema coordenado polar** y el plano es un **plano $r\,\theta$.**

Una **ecuación polar** es la que tiene r y θ como variables. Una **solución** de una ecuación polar es un par ordenado (a, b) que produce una igualdad si r se sustituye por a y θ por b. La **gráfica** de una ecuación polar es el conjunto de todos los puntos (en un plano $r\,\theta$) que corresponden a las soluciones de ésta.

FIGURA 11.43

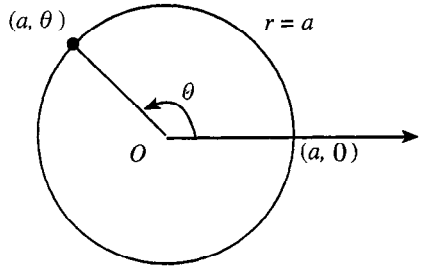
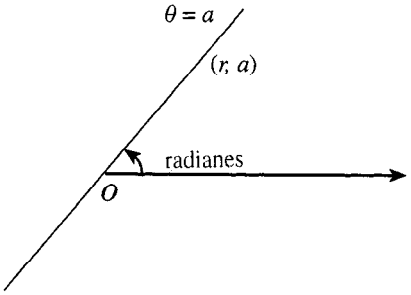


FIGURA 11.44



Las ecuaciones polares más sencillas son $r = a$ y $\theta = a$, donde a es un número real distinto de cero. Como las soluciones de la ecuación polar $r = a$ tienen la forma (a, θ) para *cualquier* ángulo θ, la gráfica de esa ecuación será una circunferencia de radio $|a|$ con centro en el polo. En la Fig. 11.43 se ilustra una gráfica en la que $a > 0$. Se obtiene la misma gráfica para $r = -a$.

Las soluciones de la ecuación polar $\theta = a$ tienen la forma (r, a) para *cualquier* número real r. Como la coordenada a (el ángulo) es constante, la gráfica es una recta que pasa por el origen, como se ve en la Fig. 11.44 para el caso $0 < a < \pi/2$.

En los ejemplos que siguen se trazan las gráficas de ecuaciones polares uniendo puntos. Al avanzar en esta sección, el lector debe tratar de identificar las formas de las ecuaciones polares, de modo que pueda trazar sus gráficas localizando pocos puntos o ninguno.

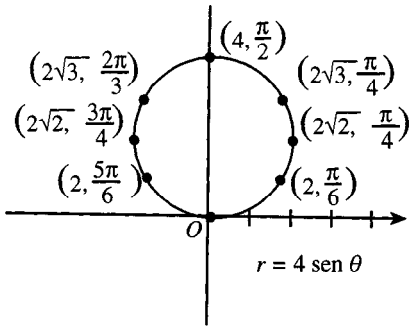
EJEMPLO 1 *Gráfica de una ecuación polar*

Trazar la gráfica de la ecuación $r = 4 \operatorname{sen} \theta$.

SOLUCIÓN En la tabla siguiente se presentan algunas soluciones de la ecuación. Se ha incluido un tercer reglón en ella, que contiene aproximaciones de r a una cifra decimal.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	0	2	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$	4	$2\sqrt{3}$	$2\sqrt{2}$	2	0
r (aprox.)	0	2	2.8	3.4	4	3.4	2.8	2	0

FIGURA 11.45



Los puntos del plano $r\theta$ que corresponden a los pares de la tabla parecen estar en una circunferencia de radio 2; de acuerdo con ello, se traza la gráfica (véase Fig. 11.45). Como ayuda en la graficación, se ha ampliado el eje polar en sentido negativo e introducido una vertical que pasa por el polo.

En el Ejemplo 8 se da la demostración de que la gráfica de $r = 4 \operatorname{sen} \theta$ es una circunferencia. Los puntos adicionales obtenidos haciendo que θ varíe de π a 2π quedan en la misma curva circular. Por ejemplo, la solución $(-2, 7\pi/6)$ es el mismo punto que $(2, \pi/6)$. El punto que corresponde a $(-2\sqrt{2}, 5\pi/4)$ es el mismo que se obtiene con $(2\sqrt{2}, \pi/4)$, y así sucesivamente. Si se incrementa gradualmente θ pasando por todos los números reales, se obtienen los mismos puntos una y otra vez, por la periodicidad de la función seno.

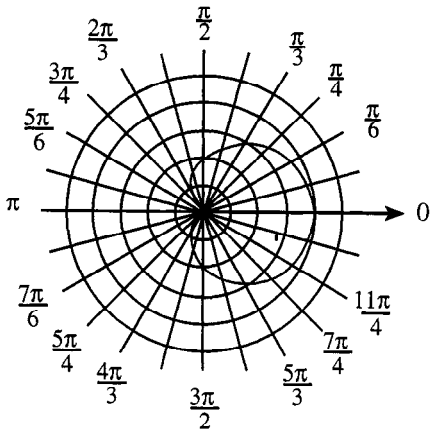
EJEMPLO 2 ***Trazo de la gráfica de una ecuación polar***

Trazar la gráfica de la ecuación $r = 2 + 2\cos\theta$.

SOLUCIÓN Como la función coseno decrece de 1 a -1 al pasar θ de 0 a π, entonces r decrece de 4 a 0 en este intervalo de θ. La tabla siguiente presenta algunas soluciones de $r = 2 + 2\cos\theta$, junto con aproximaciones de r a una cifra decimal.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	4	$2+\sqrt{3}$	$2+\sqrt{2}$	3	2	1	$2-\sqrt{2}$	$2-\sqrt{3}$	0
r (aprox.)	4	3.7	3.4	3	2	1	0.6	0.3	0

FIGURA 11.46



Al ubicar estos puntos en un plano $r\theta$ se obtiene la mitad superior de la gráfica que se tiene en la Fig. 11.46. Se ha usado papel para coordenadas polares, en el que hay líneas a varios ángulos, que pasan por O, y circunferencias con centro en el polo.

Si θ aumenta de π a 2π, entonces $\cos\theta$ aumena de -1 a 1 y, por lo tanto r aumenta de 0 a 4. Si se ubican los puntos en los que $\pi \le \theta \le 2\pi$, se llega a la mitad inferior de la gráfica.

Se obtiene esta misma representación (los mismos puntos) tomando otros intervalos de θ de longitud 2π.

La gráfica del Ejemplo 2, en forma de corazón, es una **cardioide**. En general, la gráfica de cualquiera de las siguientes ecuaciones polares, donde $a \neq 0$, es una cardioide:

$$r = a(1 + \cos\theta) \qquad r = a(1 + \operatorname{sen}\theta)$$

$$r = a(1 - \cos\theta) \qquad r = a(1 - \operatorname{sen}\theta)$$

Si a y b no son cero, las gráficas de las siguientes ecuaciones polares son **limazones** (o **caracoles**):

$$r = a + b\cos\theta \qquad r = a + b\operatorname{sen}\theta$$

Nótese que son cardioides los limazones especiales en los cuales $|a| = |b|$. Algunos tienen un lazo o rizo, como el del siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 ***Trazo de la gráfica de una ecuación polar***

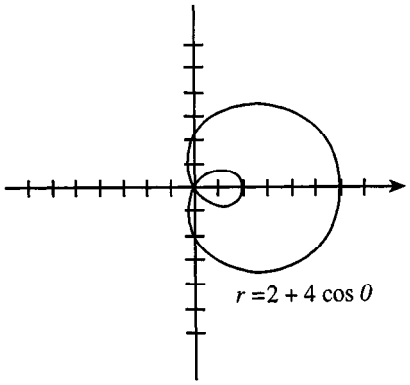
Trazar la gráfica de la ecuación $r = 2 + 4\cos\theta$.

SOLUCIÓN En la tabla siguiente se presentan las coordenadas de algunos puntos del plano $r\theta$ que corresponden a $0 \le \theta \le \pi$:

(continúa)

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	6	$2+2\sqrt{3}$	$2+2\sqrt{2}$	4	2	0	$2-2\sqrt{2}$	$2-2\sqrt{3}$	-2
r (aprox.)	6	5.4	4.8	4	2	0	-0.8	-1.4	-2

FIGURA 11.47



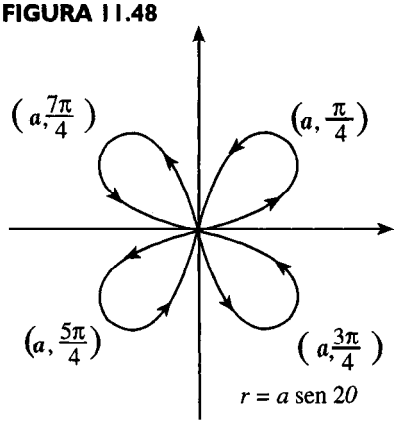
Nótese que $r = 0$ en $\theta = 2\pi/3$. Los valores de r son negativos si $2\pi/3 < \theta \leq \pi$, y ello conduce a la mitad inferior del lazo pequeño de la Fig. 11.47. Si se hace variar θ de π a 2π, se obtiene la mitad superior del rizo o bucle pequeño, y la mitad inferior del grande.

EJEMPLO 4 ***Trazo de la gráfica de una ecuación polar***

Trazar la gráfica de la ecuación $r = a$ sen 2θ, para $a > 0$.

SOLUCIÓN En vez de tabular soluciones, se puede razonar como sigue. Si θ aumenta de 0 a $\pi/4$, entonces 2θ varía de 0 a $\pi/2$ y, por consiguiente, sen 2θ aumenta de 0 a 1. Se deduce que r se incrementa de 0 a a en el intervalo de θ $[0, \pi/4]$. Si a continuación se incrementa θ de $\pi/4$ a $\pi/2$, entonces 2θ cambia de $\pi/2$ a π y, por consiguiente, sen 2θ, decrece de 1 a 0. Entonces, r decrece de a a 0 en el intervalo $[\pi/4, \pi/2]$ de θ. Los puntos correspondientes en la gráfica forman el rizo del primer cuadrante de la Fig. 11.48. Nótese que el punto $P(r, \theta)$ traza el bucle en sentido *contrario* al de las manecillas del reloj (lo que indican las flechas) al aumentar θ de 0 a $\pi/2$.

FIGURA 11.48



Si $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$, entonces $\pi \leq 2\theta \leq 2\pi$ y, por lo tanto, $r = a$ sen $2\theta \leq 0$. Así, si $\pi/2 < \theta < \pi$, *entonces r es negativa y los puntos* $P(r, \theta)$ *están en el cuarto cuadrante.* Si θ aumenta de $\pi/2$ a π, se puede demostrar entonces, localizando los puntos, que $P(r, \theta)$ describe, en sentido contrario al del reloj, la rama que se ve en el cuarto cuadrante.

De igual manera se obtiene, para $\pi \leq \theta \leq 3\pi/2$, el lazo del tercer cuadrante, y para $3\pi/2 \leq \theta \leq 2\pi$, se obtiene el del segundo cuadrante. Ambos lazos se trazan en sentido contrario al del reloj al aumentar θ. El lector debe comprobar lo anterior localizando algunos puntos; por ejemplo, con $a = 1$. En la Fig. 11.48 se presentan sólo aquellos puntos que corresponden a los valores numéricos máximos de r.

La gráfica del Ejemplo 4 es una **roseta de cuatro pétalos**. Por lo general, una ecuación polar de la forma

$$r = a \text{ sen } n\theta, \qquad \text{o bien} \qquad r = a \cos n\theta$$

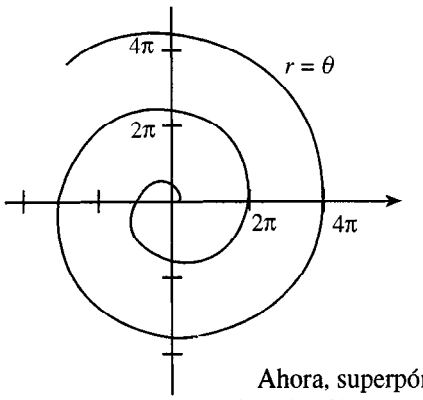
para todo entero positivo n mayor que 1, y para todo número real a diferente de cero, tiene una gráfica formada por varios lazos que parten del origen. Si n es par, hay $2n$ lazos, y si n es impar, hay n.

La gráfica de la ecuación polar $r = a\theta$, para cualquier número real a distinto de cero es una **espiral de Arquímedes**. En el siguiente ejemplo se ilustra el caso en el que $a = 1$.

EJEMPLO 5 *Trazo de una espiral de Arquímedes*

Trazar la gráfica de la ecuación $r = \theta$, para $\theta \geq 0$.

FIGURA 11.49



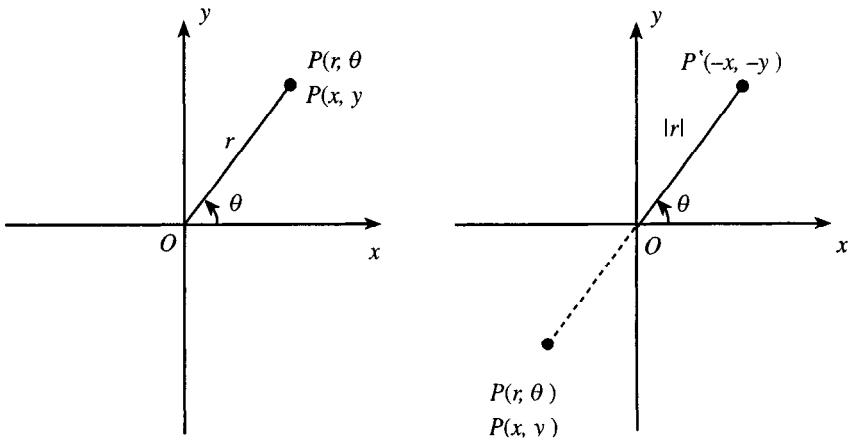
SOLUCIÓN La gráfica consiste en todos los puntos cuyas coordenadas polares tengan la forma (c, c) para todo número real $c \geq 0$. Por consiguiente, la gráfica contiene los puntos $(0, 0)$, $(\pi/2, \pi/2)$, (π, π), etcétera. Al aumentar θ, r aumenta con la misma rapidez, y la espiral se curva alrededor del origen en sentido contrario al del reloj, cortando al eje polar en $0, 2\pi, 4\pi, \ldots$, como se ve en la Fig. 11.49.

Si se permite que θ sea negativa, entonces, al decrecer θ pasando por valores negativos, la espiral que resulta se enrolla alrededor del origen y es la imagen simétrica, con respecto al eje vertical, de la curva de la Fig. 11.49.

Ahora, superpóngase un plano xy en uno $r\theta$, de modo que el eje x positivo coincida con el eje polar. Entonces, a todo punto P en el plano se le pueden asignar las coordenadas rectangulares (x, y), o las coordenadas polares (r, θ). Si $r > 0$, se tiene un caso semejante al que se ve en la Fig. 11.50(a). Si $r < 0$, se tiene el caso que se muestra en (b) de la misma figura. En la Fig. 11.50(b) se ha localizado también, para fines posteriores, el punto P' cuyas coordenadas polares son $(|r|, \theta)$ y cuyas coordenadas rectangulares son $(-x, -y)$.

FIGURA 11.50

(a) $r > 0$ **(b)** $r < 0$



El resultado siguiente especifica las relaciones entre (x, y) y (r, θ), donde se ha supuesto que el eje x positivo coincide con el eje polar.

Relaciones entre coordenadas rectangulares y polares

Las coordenadas rectangulares (x, y) y las coordenadas polares (r, θ) de un punto P, se relacionan como sigue:

(1) $x = r\cos\theta, \qquad y = r\operatorname{sen}\theta$

(2) $r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = \dfrac{y}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0$

DEMOSTRACIÓN Aunque se ha representado a θ como ángulo agudo en la Fig. 11.50, el análisis que sigue es válido para todos los ángulos. Si $r > 0$, como en la Fig. 11.50(a), entonces $\cos\theta = x/r$, y $\operatorname{sen}\theta = y/r$; por consiguiente,

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\operatorname{sen}\theta.$$

Si $r < 0$, entonces $|r| = -r$, y según la Fig. 11.50(b), se tiene que

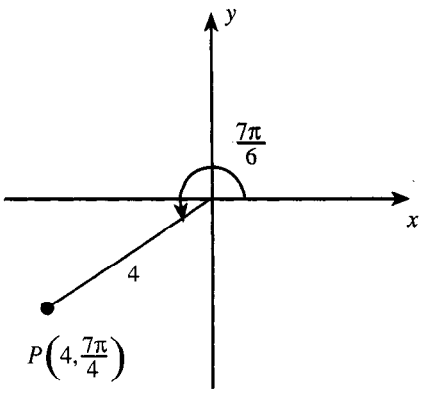
$$\cos\theta = \frac{-x}{|r|} = \frac{-x}{-r} = \frac{x}{r}, \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{-y}{|r|} = \frac{-y}{-r} = \frac{y}{r}.$$

Al multiplicar por r se llega a la ecuación (1) y, por lo tanto, esas fórmulas son válidas si r es positivo o negativo. Si $r = 0$, entonces el punto es el polo, y se observa de nuevo que son válidas las fórmulas en (1).

Las fórmulas de (2) son consecuencia de la Fig. 11.50. ■

Se puede usar el resultado anterior para pasar de un sistema de coordenadas a otro.

FIGURA 11.51



EJEMPLO 6 ***Transformación de coordenadas polares a coordenadas rectangulares***

Si las coordenadas polares de un punto P son $(4, 7\pi/6)$, calcular las coordenadas rectangulares de ese punto.

SOLUCIÓN En la Fig. 11.51 se localiza el punto P. Sustituyendo $r = 4$ y $\theta = 7\pi/6$ en la fórmula (1) de las relaciones anteriores, se obtiene lo siguiente:

$$x = r\cos\theta = 4\cos(7\pi/6) = 4(-\sqrt{3}/2) = -2\sqrt{3}$$

$$y = r\operatorname{sen}\theta = 4\operatorname{sen}(7\pi/6) = 4(-1/2) = -2$$

Por lo tanto, las coordenadas rectangulares de P son $(-2\sqrt{3}, -2)$.

EJEMPLO 7 ***Paso de coordenadas rectangulares a coordenadas polares***

Si $(-1, \sqrt{3})$ son las coordenadas rectangulares de un punto P, calcular tres pares distintos de coordenadas polares (r, θ) de P.

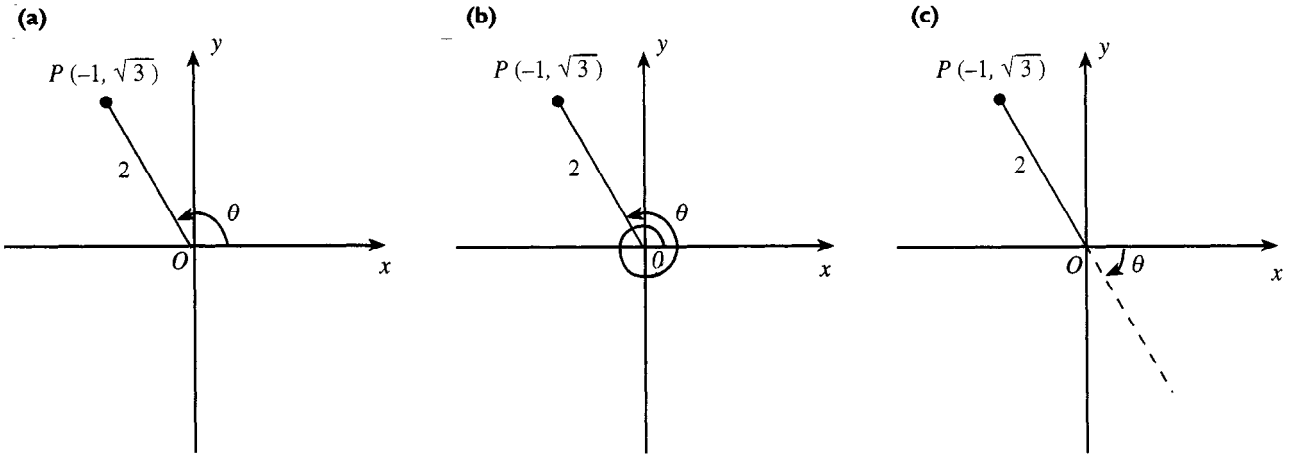
SOLUCIÓN En las Figs. 11.52(a) a (c) se dan tres posibilidades de θ. Si se utiliza $x = -1$ y $y = \sqrt{3}$ en la ecuación (2) de las relaciones anteriores, se obtiene

$$r^2 = x^2 + y^2 = (-1)^2 + (\sqrt{3})^2 = 4,$$

y, como r es positivo en la Fig. 11.52(a), resulta que $r = 2$. Si se utiliza

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3},$$

FIGURA 11.52



vemos que el ángulo de referencia para θ es $\theta_R = \pi/3$, de donde

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

De modo que, $(2, 2\pi/3)$ es un par de coordenadas polares de P.

Al referirse a la Fig. 11.52(b) y con los valores obtenidos para (a), se llega a

$$r = 2 \qquad \text{y} \qquad \theta = \frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{8\pi}{3}.$$

Por consiguiente, $(2, 8\pi/3)$ es otro par de coordenadas polares de P.

En la Fig. 11.52(c), $\theta = -\pi/3$. En este caso, se emplea $r = -2$ para obtener $(-2, -\pi/3)$, un tercer par de coordenadas polares de P.

Podemos emplear las relaciones entre coordenadas rectangulares y polares para transformar una ecuación polar en una ecuación en x, y, y viceversa. El procedimiento se ilustra en los tres ejemplos que siguen.

EJEMPLO 8 ***Transformación de una ecuación polar en una ecuación en x, y***

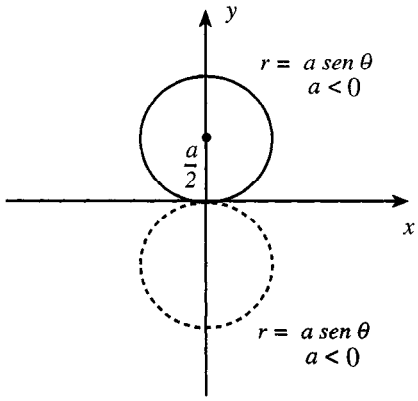
Deducir una ecuación en x, y que tenga la misma gráfica que la de la ecuación polar $r = a$ sen θ, donde $a \neq 0$. Trazar la gráfica.

SOLUCIÓN De la fórmula (1) del resultado anterior, una relación entre sen θ y y es $y = r$ sen θ. Para introducir la expresión r sen θ en la ecuación $r = a$ sen θ, se multiplican por r ambos lados, y se obtiene

$$r^2 = ar \text{ sen } \theta.$$

(continúa)

FIGURA 11.53



A continuación, empleando $r^2 = x^2 + y^2$, así como $y = r \operatorname{sen} \theta$, se tiene

$$x^2 + y^2 = ay,$$

o bien,

$$x^2 + y^2 - ay = 0.$$

Completando el cuadrado en y, resulta

$$x^2 + y^2 - ay + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

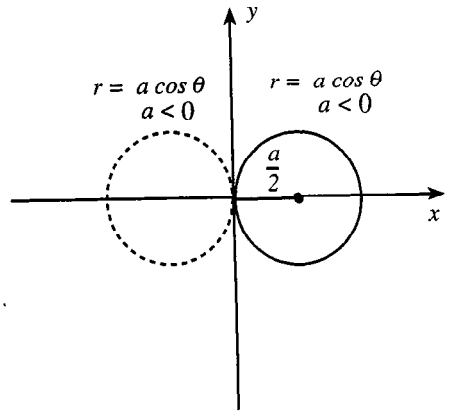
o sea,

$$x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

En el plano xy, la gráfica de esta última ecuación es una circunferencia con centro en $(0, a/2)$ y radio igual a $|a|/2$, como se ve en la Fig. 11.53, para el caso $a > 0$ (la circunferencia de línea continua), y para cuando $a < 0$ (la circunferencia de línea discontinua).

Con este mismo método se puede demostrar que la gráfica de $r = a \cos \theta$, donde $a \neq 0$, es una circunferencia de radio $a/2$, del tipo que se ve en la Fig. 11.54.

FIGURA 11.54



EJEMPLO 9 ***Transformación de una ecuación en x y y en una ecuación polar***

Determinar la ecuación polar de la hipérbola $x^2 - y^2 = 16$.

SOLUCIÓN Si se aplican las fórmulas $x = r \cos \theta$ y $y = r \operatorname{sen} \theta$, se obtienen las siguientes ecuaciones polares:

$(r \cos \theta)^2 - (r \operatorname{sen} \theta)^2 = 16$	ecuación dada
$r^2 \cos^2 \theta - r^2 \operatorname{sen}^2 \theta = 16$	se elevan al cuadrado los términos
$r^2(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) = 16$	se saca r^2 como factor común
$r^2 \cos 2\theta = 16$	fórmula del doble de un ángulo
$r^2 = \dfrac{16}{\cos 2\theta}$	se divide entre $\cos 2\theta$
$r^2 = 16 \sec 2\theta$	identidad recíproca

Se permite dividir entre $\cos 2\theta$ porque $\cos 2\theta \neq 0$. Nótese que si $\cos 2\theta = 0$, entonces $r^2 \cos 2\theta \neq 16$.

EJEMPLO 10 ***Deducción de la ecuación polar de una recta***

Determinar la ecuación polar de una recta arbitraria.

SOLUCIÓN Toda recta en el plano coordenado xy es la gráfica de una ecuación lineal de la forma $ax + by = c$. Mediante las fórmulas $x = r \cos \theta$ y $y = r \operatorname{sen} \theta$, se obtienen las siguientes ecuaciones polares equivalentes:

$$ar\cos\theta + br\,\text{sen}\,\theta = c \quad \text{se sustituyen } x \text{ y } y$$

$$r(a\cos\theta + b\,\text{sen}\,\theta) = c \quad \text{se saca } r \text{ como factor común}$$

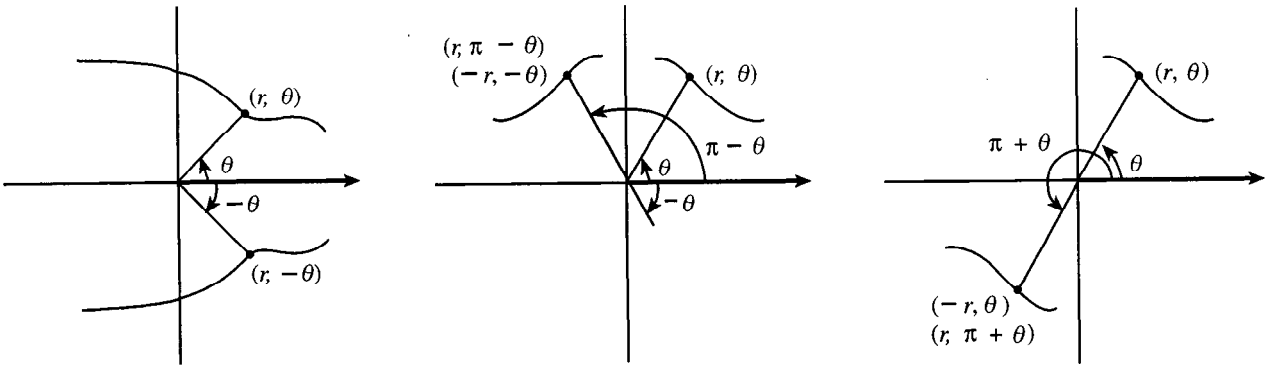
Si $a\cos\theta + b\,\text{sen}\,\theta \neq 0$, se puede escribir como sigue la última ecuación:

$$r = \frac{c}{a\cos\theta + b\,\text{sen}\,\theta}$$

Si se superpone un plano xy en uno $r\,\theta$, la gráfica de una ecuación polar puede ser simétrica con respecto al eje x (el eje polar), al eje y (la recta $\theta = \pi/2$), o al origen (el polo). En la Fig. 11.55 se muestran algunas simetrías comunes. El siguiente resultado resume tales simetrías.

FIGURA 11.55 Gráfica de simetrías de ecuaciones polares

(a) Eje polar **(b)** Recta $\theta = \pi/2$ **(c)** Polo



Pruebas de simetría

(1) La gráfica de $r = f(\theta)$ es simétrica con respecto al eje polar si al sustituir θ por $-\theta$ se obtiene una ecuación equivalente.

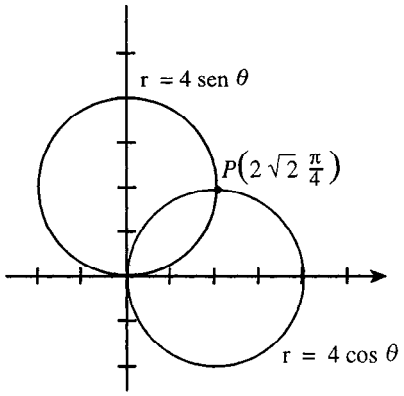
(2) La gráfica de $r = f(\theta)$ es simétrica con respecto a la recta vertical $\theta = \pi/2$, si al sustituir (a) θ por $\pi - \theta$, o bien (b) r por $-r$ y θ por $-\theta$, se obtiene una ecuación equivalente.

(3) La gráfica de $r = f(\theta)$ es simétrica con respecto al polo si, al sustituir (a) θ por $\pi + \theta$, o bien (b) r por $-r$, se obtiene una ecuación equivalente.

Por ejemplo, como $\cos(-\theta) = \cos\theta$, la gráfica de la ecuación polar $r = 2 + 4\cos\theta$ del Ejemplo 3 es simétrica con respecto al eje polar, según la prueba (1). Como $\text{sen}(\pi - \theta) = \text{sen}\,\theta$, la gráfica del Ejemplo 1 es simétrica con respecto a la recta $\theta = \pi/2$, según la prueba (2). La roseta de cuatro pétalos del Ejemplo 4 es simétrica respecto al eje polar, la recta $\theta = \pi/2$ y el polo. Se pueden definir otras pruebas de simetría; sin embargo, las que aparecen en la lista son las de aplicación más fácil.

A diferencia de la gráfica de una ecuación en x, y, la de una ecuación polar $r = f(\theta)$ puede ser simétrica con respecto al eje polar, a la recta $\theta = \pi/2$, o al polo *sin* satisfacer alguna de las pruebas anteriores de simetría. Esto sucede debido a tantos modos distintos de especificar un punto en coordenadas polares.

FIGURA 11.56



Otra diferencia entre sistemas de coordenadas polares y rectangulares es que no siempre se pueden localizar los puntos de intersección resolviendo simultáneamente ecuaciones polares. Para ilustrar lo anterior, en el Ejemplo 1, la gráfica de $r = 4 \operatorname{sen} \theta$ es una circunferencia de diámetro 4 con centro en $(2, \pi/2)$ (véase Fig. 11.56). Igualmente, la gráfica de $r = 4 \cos \theta$ es una circunferencia de diámetro 4 con centro en $(2, 0)$, en el eje polar. Viendo la Fig. 11.56, las coordenadas del punto de intersección, $P(2\sqrt{2}, \pi/4)$ del cuadrante I satisfacen ambas ecuaciones; sin embargo, el origen O que está en las dos circunferencias, *no se puede* determinar resolviendo simultáneamente las ecuaciones. Así, al buscar puntos de intersección de gráficas polares, a veces es necesario referirse a las propias gráficas, *además* de resolver las dos ecuaciones en forma simultánea. Otro método es emplear distintas ecuaciones (equivalentes) de las gráficas.

EJERCICIOS 11.5

Ejercicios 1 – 34: Trace la gráfica de la ecuación polar.

1 $r = 5$

2 $r = -2$

3 $\theta = -\pi/6$

4 $\theta = \pi/4$

5 $r = 3 \cos \theta$

6 $r = -2 \operatorname{sen} \theta$

7 $r = 4 \cos \theta + 2 \operatorname{sen} \theta$

8 $r = 6 \cos \theta - 2 \operatorname{sen} \theta$

9 $r = 4(1 - \operatorname{sen} \theta)$

10 $r = 3(1 + \cos \theta)$

11 $r = -6(1 + \cos \theta)$

12 $r = 2(1 + \operatorname{sen} \theta)$

13 $r = 2 + 4 \operatorname{sen} \theta$

14 $r = 1 + 2 \cos \theta$

15 $r = \sqrt{3} - 2 \operatorname{sen} \theta$

16 $r = 2\sqrt{3} - 4 \cos \theta$

17 $r = 2 - \cos \theta$

18 $r = 5 + 3 \operatorname{sen} \theta$

19 $r = 4 \csc \theta$

20 $r = -3 \sec \theta$

21 $r = 8 \cos 3\theta$

22 $r = 2 \operatorname{sen} 4\theta$

23 $r = 3 \operatorname{sen} 2\theta$

24 $r = 8 \cos 5\theta$

25 $r^2 = 4 \cos 2\theta$ (lemniscato)

26 $r^2 = -16 \operatorname{sen} 2\theta$

27 $r = 2^\theta$, $\theta \geq 0$ (espiral)

28 $r = e^{2\theta}$, $\theta \geq 0$ (espiral logarítmica)

29 $r = 2\theta$, $\theta \geq 0$

30 $r\theta = 1$, $\theta > 0$ (espiral)

31 $r = 6 \operatorname{sen}^2 (\theta/2)$

32 $r = -4 \cos^2 (\theta/2)$

33 $r = 2 + 2 \sec \theta$ (concoide)

34 $r = 1 - \csc \theta$

Ejercicios 35 – 40: Pase las coordenadas polares a coordenadas rectangulares.

35 **(a)** $(\ , \pi/4)$ **(b)** $(-1, 2\pi/3)$

36 **(a)** $(5, 5\pi/6)$ **(b)** $(-6, 7\pi/3)$

37 **(a)** $(8, -2\pi/3)$ **(b)** $(-3, 5\pi/3)$

38 **(a)** $(4, -\pi/4)$ **(b)** $(-2, 7\pi/6)$

39 $(6, \arctan \frac{3}{4})$

40 $(10, \arccos(-\frac{1}{3}))$

Ejercicios 41 – 44: Pase de coordenadas rectangulares a coordenadas polares, con $r > 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$.

41 **(a)** $(-1, 1)$ **(b)** $(-2\sqrt{3}, -2)$

42 **(a)** $(3\sqrt{3}, 3)$ **(b)** $(2, -2)$

43 **(a)** $(7, -7\sqrt{3})$ **(b)** $(5, 5)$

44 **(a)** $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ **(b)** $(-4, 4\sqrt{3})$

45 ¿Qué coordenadas polares representan al mismo punto que $(3, \pi/3)$?

(a) $(3, 7\pi/3)$ **(b)** $(3, -\pi/3)$ **(c)** $(-3, 4\pi/3)$
(d) $(3, -2\pi/3)$ **(e)** $(-3, -2\pi/3)$ **(f)** $(-3, -\pi/3)$

46 ¿Qué coordenadas polares representan al mismo punto que $(4, -\pi/2)$?

(a) $(4, 5\pi/2)$ **(b)** $(4, 7\pi/2)$ **(c)** $(-4, -\pi/2)$
(d) $(4, -5\pi/2)$ **(e)** $(-4, -3\pi/2)$ **(f)** $(-4, \pi/2)$

Ejercicios 47–56: Deduzca una ecuación polar que tenga la misma gráfica que la ecuación en x, y.

47 $x = -3$ **48** $y = 2$

49 $x^2 + y^2 = 16$ **50** $x^2 = 8y$

51 $2y = -x$ **52** $y = 6x$

53 $y^2 - x^2 = 4$ **54** $xy = 8$

55 $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ **56** $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 13$

Ejercicios 57–74: Deduzca una ecuación en x, y que tenga la misma gráfica que la ecuación polar. Úsela para trazar la gráfica en un plano $r\,\theta$.

57 $r \cos \theta = 5$ **58** $r \operatorname{sen} \theta = -2$

59 $r - 6 \operatorname{sen} \theta = 0$ **60** $r = 2$

61 $\theta = \pi/4$ **62** $r = 4 \sec \theta$

63 $r^2(4 \operatorname{sen}^2 \theta - 9 \cos^2 \theta) = 36$

64 $r^2(\cos^2 \theta + 4 \operatorname{sen}^2 \theta) = 16$

65 $r^2 \cos 2\theta = 1$ **66** $r^2 \operatorname{sen} 2\theta = 4$

67 $r(\operatorname{sen} \theta - 2 \cos \theta) = 6$ **68** $r(3 \cos \theta - 4 \operatorname{sen} \theta) = 12$

69 $r(\operatorname{sen} \theta + r \cos^2 \theta) = 1$ **70** $r(r \operatorname{sen}^2 \theta - \cos \theta) = 3$

71 $r = 8 \operatorname{sen} \theta - 2 \cos \theta$ **72** $r = 2 \cos \theta - 4 \operatorname{sen} \theta$

73 $r = \tan \theta$ $r = 6 \cot \theta$

75 Si $P_1(r_1, \theta_1)$ y $P_2(r_2, \theta_2)$ son puntos en un plano $r\,\theta$, con la ley de los cosenos demuestre que

$$[d(P_1, P_2)]^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1).$$

76 Demuestre que la gráfica de cada ecuación polar es una circunferencia, localice su centro y calcule su radio.

(a) $r = \operatorname{sen} \theta$, $a \neq 0$

(b) $r = b \cos \theta$, $b \neq 0$

(c) $r = a \operatorname{sen} \theta + b \cos \theta$, $a \neq 0$ y $b \neq 0$

C Ejercicios 77 y 78: Grafique la ecuación polar para los valores indicados de θ, y use la gráfica para determinar simetrías.

77 $r = 2 \operatorname{sen}^2 \theta \tan^2 \theta$; $-\pi/3 \leq \pi/3$

78 $r = \dfrac{4}{1 + \operatorname{sen}^2 \theta}$; $0 \leq \theta \leq 2\pi$

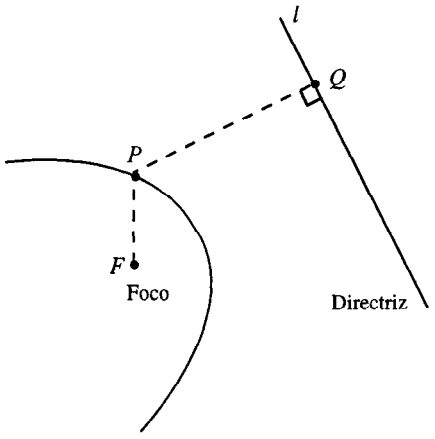
C Ejercicios 79 y 80: Grafique las ecuaciones polares en el mismo plano coordenado, y determine los puntos de intersección de las gráficas.

79 $r = 8 \cos 3\theta$, $r = 4 - 2.5 \cos \theta$

80 $r = 2 \operatorname{sen}^2 \theta$, $r = \frac{3}{4}(\theta + \cos^2 \theta)$

11.6 ECUACIONES POLARES DE LAS CÓNICAS

FIGURA 11.57



El siguiente teorema combina las definiciones de parábola, elipse e hipérbola en una explicación unificada de las secciones cónicas. En el enunciado del teorema, la constante e es la **excentricidad** de la cónica. El punto F es un **foco** de la cónica, y la recta l es una **directriz**. Las posiciones posibles de F y l se ven en la Fig. 11.57.

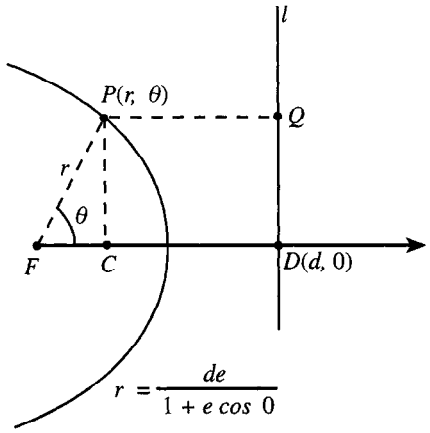
Teorema de las cónicas

Sea F un punto fijo, y l una recta fija en un plano. El conjunto de todos los puntos P del plano, tales que la relación $d(P, F)/d(P, Q)$ es igual a una constante positiva e, con $d(P, Q)$ la distancia de P a l, es una *sección cónica*. La cónica es una parábola si $e = 1$; una elipse si $0 < e < 1$; y una hipérbola si $e > 1$.

DEMOSTRACIÓN Si $e = 1$, entonces $d(P, F) = d(P, Q)$ y, por definición, la cónica resultante es una parábola con foco F y directriz l.

A continuación supóngase que $0 < e < 1$. Es conveniente introducir un sistema de coordenadas polares en el plano, con F como polo y l como

FIGURA 11.58



perpendicular al eje polar en el punto $D(d, 0)$, para $d > 0$, como se ve en la Fig. 11.58. Si $P(r, \theta)$ es un punto en el plano tal que $d(P, F)/d(P, Q) = e < 1$, entonces P queda a la izquierda de l. Sea C la proyección de P sobre el eje polar. Como

$$d(P, F) = r \qquad \text{y} \qquad d(P, Q) = d - r\cos\theta,$$

se infiere que P satisface la condición del teorema si y sólo si lo siguiente es válido:

$$\frac{r}{d - r\cos\theta} = e$$

$$r = de - er\cos\theta$$

$$r(1 + e\cos\theta) = de$$

$$r = \frac{de}{1 + e\cos\theta}$$

Se obtienen las mismas ecuaciones si $e = 1$. Sin embargo, si $1 + \cos\theta = 0$ no se obtiene punto (r, θ) en la gráfica.

Una ecuación en x y y que corresponde a $r = de - er\cos\theta$ es

$$\sqrt{x^2 + y^2} = de - ex.$$

Elevando ambos términos al cuadrado y reordenando los términos,

$$(1 - e^2)x^2 + 2de^2x + y^2 = d^2e^2.$$

Luego se completa el cuadrado y se simplifica para obtener

$$\left(x + \frac{de^2}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{d^2e^2}{(1 - e^2)^2}.$$

Finalmente, dividiendo ambos lados entre $d^2e^2/(1 - e^2)^2$, se obtiene una ecuación de la forma

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

en la que $h = -de^2/(1 - e^2)$. En consecuencia, la gráfica es una elipse con centro en el punto $(h, 0)$ en el eje x, en la cual

$$a^2 = \frac{d^2e^2}{(1 - e^2)^2} \qquad \text{y} \qquad b^2 = \frac{d^2e^2}{1 - e^2}.$$

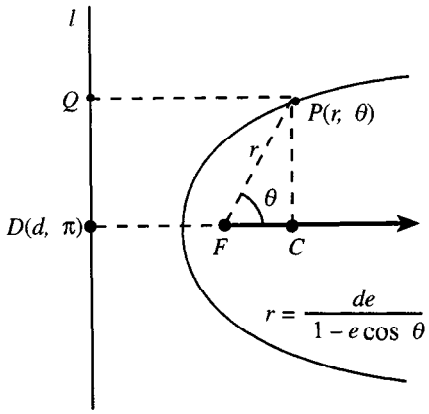
Ya que

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{d^2e^4}{(1 - e^2)^2},$$

el resultado es $c = de^2/(1 - e^2)$ y, en consecuencia $|h| = c$. Esto demuestra que F es un foco de la elipse. También se concluye que $e = c/a$. Para el caso en el cual $e > 1$ se puede presentar una demostración semejante. ■

Asimismo, puede demostrarse que toda cónica que no esté degenerada se puede describir mediante el enunciado del teorema de las cónicas. Lo anterior proporciona una formulación de las secciones cónicas que es equivalente a la que se usó con anterioridad. Como el teorema incluye los tres tipos de curvas cónicas, a veces se le considera como definición de las citadas secciones.

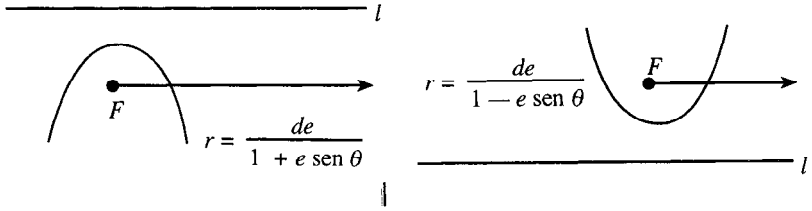
FIGURA 11.59



Si se hubiera elegido que el foco F estuviera *a la derecha* de la directriz, como se ve en la Fig. 11.59, con $d > 0$, entonces se habría obtenido la ecuación $r = de/(1 - e\cos\theta)$. Nótese el signo menos, en vez del signo más. Si se permite que d sea negativa se tendrán otros cambios de signo.

Si se hubiera tomado l *paralela* al eje polar, pasando por uno de los puntos $(d, \pi/2)$ o bien $(d, 3\pi/2)$, como se ve en la Fig. 11.60, entonces las ecuaciones correspondientes hubieran contenido sen θ, en lugar de cos θ.

FIGURA 11.60



El teorema siguiente resume la explicación anterior.

Teorema de las ecuaciones polares de las cónicas

Una ecuación polar que tenga cualquiera de las cuatro formas siguientes:

$$r = \frac{de}{1 \pm e\cos\theta}, \quad r = \frac{de}{1 \pm e\,\text{sen}\,\theta}$$

representa una sección cónica. La cónica es una parábola si $e = 1$; elipse si $0 < e < 1$; o hipérbola si $e > 1$.

EJEMPLO 1 ***Trazo de la gráfica de una ecuación polar de la elipse***

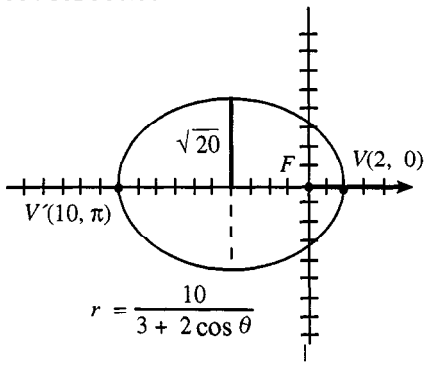
Describa y grafique la ecuación polar

$$r = \frac{10}{3 + 2\cos\theta}.$$

SOLUCIÓN Primero se dividen entre 3 el numerador y el denominador de la fracción para obtener el término constante 1 en el denominador:

$$r = \frac{\frac{10}{3}}{1 + \frac{2}{3}\cos\theta}$$

FIGURA 11.61



Esta ecuación tiene la forma de una de las ecuaciones del teorema anterior, en la cual $e = \frac{2}{3}$. Así, la gráfica es una elipse con el foco F en el polo y el eje mayor a lo largo del eje polar. Se localizan los extremos del eje mayor con $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. Con ello se obtienen los puntos $V(2, 0)$ y $V'(10, \pi)$. Por lo tanto,

$$2a = d(V', V) = 12, \quad \text{o sea,} \quad a = 6.$$

El centro de la elipse es el punto medio $(4, \pi)$, del segmento $V'V$. Si se usa el hecho de que $e = c/a$, se obtiene

$$c = ae = 6(\tfrac{2}{3}) = 4.$$

Por consiguiente, $b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 16 = 20.$

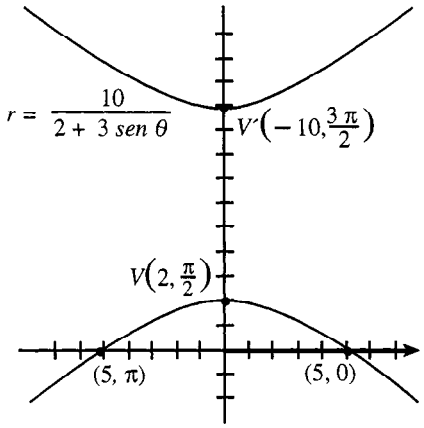
Así, $b = \sqrt{20}$. En la Fig. 11.61 se ve la gráfica. Como referencia, se ha superpuesto al sistema polar un sistema coordenado xy.

EJEMPLO 2 ***Trazo de la gráfica de una ecuación polar de una hipérbola***

Describa y trace la gráfica de la ecuación polar

$$r = \frac{10}{2 + 3 \operatorname{sen} \theta}.$$

FIGURA 11.62



SOLUCIÓN Para expresar la ecuación en forma adecuada, se dividen entre 2 el numerador y el denominador de la fracción.

$$r = \frac{5}{1 + \frac{3}{2} \operatorname{sen} \theta}$$

Así, $e = \frac{3}{2}$, y, de acuerdo con el teorema de ecuaciones polares de las cónicas, la gráfica es una hipérbola con un foco en el polo. La expresión sen θ establece que el eje transversal de la hipérbola es perpendicular al eje polar. Para localizar los vértices, se hace $\theta = \pi/2$ y $\theta = 3\pi/2$ en la ecuación dada. Se obtienen así los puntos $V(2, \pi/2)$ y $V'(-10, 3\pi/2)$. Por consiguiente,

$$2a = d(V, V') = 8, \quad \text{o sea,} \quad a = 4.$$

Los puntos (5, 0) y (5, π) en la gráfica pueden servir para trazar la rama inferior de la hipérbola. La rama superior se obtiene por simetría, como se ve en la Fig. 11.62. Si se desea más exactitud, o más información, se calcula

$$c = ae = 4\left(\tfrac{3}{2}\right) = 6$$

y

$$b^2 = c^2 - a^2 = 36 - 16 = 20.$$

A continuación se pueden trazar las asíntotas del modo acostumbrado.

EJEMPLO 3 ***Trazo de la gráfica de una ecuación polar de una parábola***

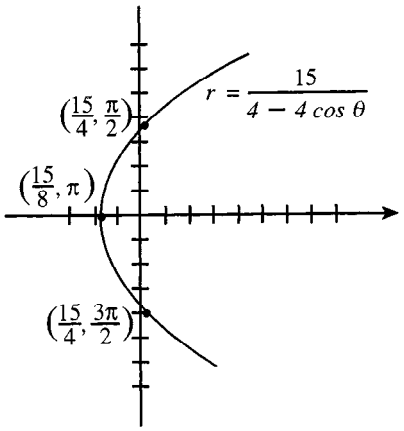
Trace la gráfica de la ecuación polar

$$r = \frac{15}{4 - 4 \cos \theta}.$$

SOLUCIÓN Para llegar a la forma adecuada, numerador y denominador se dividen entre 4:

$$r = \frac{\frac{15}{4}}{1 - \cos \theta}$$

FIGURA 11.63



En consecuencia, $e = 1$, y de acuerdo con el teorema de ecuaciones polares de las cónicas, la gráfica es una parábola con foco en el polo. Se puede tener un trazo localizando los puntos que correspondan a ángulos cuadrantales, como se ve en la tabla siguiente:

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
r	indefinido	$\frac{15}{4}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{15}{4}$

Nótese que no hay punto de la gráfica que corresponda a $\theta = 0$, ya que el denominador $1 - \cos\theta$ es 0 para ese valor. Al graficar los tres puntos, y como la gráfica es una parábola con foco en el polo, se obtiene el esquema de la Fig. 11.63.

Si sólo se desea un esquema aproximado, entonces se recomienda la técnica del Ejemplo 3. Para usar este método, se localizan (si es posible) puntos que correspondan a $\theta = 0$, $\pi/2$, π y $3\pi/2$. Esos puntos, junto con el tipo de cónica, obtenido con el valor de e, conducen fácilmente al trazo.

EJEMPLO 4 *Expresar una ecuación polar de una cónica en función de x y y*

Obtenga una ecuación en x, y que tenga la misma gráfica que la ecuación polar

$$r = \frac{15}{4 - 4\,\text{sen}\,\theta}.$$

SOLUCIÓN Se multiplican ambos lados de la ecuación polar por el mínimo común denominador, $4 - 4\,\text{sen}\,\theta$, y a continuación se recurre a las relaciones entre coordenadas rectangulares y polares como sigue:

$$r(4 - 4\,\text{sen}\,\theta) = 15$$

$$4r = 15 + 4r\,\text{sen}\,\theta$$

$$4(\pm\sqrt{x^2 + y^2}) = 15 + 4y$$

Elevando al cuadrado ambos lados, y simplificando, se obtiene

$$16(x^2 + y^2) = 225 + 120y + 16y^2$$

$$16x^2 = 120y + 225.$$

EJEMPLO 5 *Obtención de la ecuación polar de una cónica que satisfaga las condiciones prescritas*

Deduzca una ecuación polar de la cónica que tenga foco en el polo, excentricidad $e = \frac{1}{2}$, y cuya directriz sea $r = -3\sec\theta$.

SOLUCIÓN La ecuación $r = -3 \sec \theta$ de la directriz se puede escribir en la forma $r \cos \theta = -3$, que equivale a $x = -3$ en un sistema de coordenadas rectangulares. Lo anterior conduce al caso que muestra la Fig. 11.59, con $d = 3$. Por lo tanto, una ecuación polar tiene la forma

$$r = \frac{de}{1 - e \cos \theta}.$$

A continuación se hace la sustitución $d = 3$ y $e = \frac{1}{2}$:

$$r = \frac{3(\frac{1}{2})}{1 - \frac{1}{2} \cos \theta}$$

$$r = \frac{3}{2 - \cos \theta}$$

EJERCICIOS 11.6

Ejercicios 1 – 12: Calcule la excentricidad y clasifique la cónica. Trace la gráfica e indique los vértices.

1 $r = \dfrac{12}{6 + 2 \operatorname{sen} \theta}$ **2** $r = \dfrac{12}{6 - 2 \operatorname{sen} \theta}$

3 $r = \dfrac{12}{2 - 6 \cos \theta}$ **4** $r = \dfrac{12}{2 + 6 \cos \theta}$

5 $r = \dfrac{3}{2 + 2 \cos \theta}$ **6** $r = \dfrac{3}{2 - 2 \sin \theta}$

7 $r = \dfrac{4}{\cos \theta - 2}$ **8** $r = \dfrac{4 \sec \theta}{2 \sec \theta - 1}$

9 $r = \dfrac{6 \csc \theta}{2 \csc \theta + 3}$ **10** $r = \dfrac{8 \csc \theta}{2 \csc \theta - 5}$

11 $r = \dfrac{4 \csc \theta}{1 + \csc \theta}$

12 $r = \csc \theta (\csc \theta - \cot \theta)$

Ejercicios 13 – 24: Deduzca ecuaciones en x, y correspondientes a las ecuaciones polares de los ejercicios 1 – 12.

Ejercicios 25–32: Deduzca una ecuación polar de la cónica que tenga foco en el cono y la excentricidad y la ecuación de la directriz dadas.

25 $e = \frac{1}{3}$, $r = 2 \sec \theta$ **26** $e = 1$, $r \cos \theta = 5$

27 $e = \frac{4}{3}$, $r \cos \theta = -3$ **28** $e = 3$, $r = -4 \sec \theta$

29 $e = 1$, $r \operatorname{sen} \theta = -2$ **30** $e = 4$, $r = -3 \csc \theta$

31 $e = \frac{2}{5}$, $r = 4 \csc \theta$ **32** $e = \frac{3}{4}$, $r \operatorname{sen} \theta = 5$

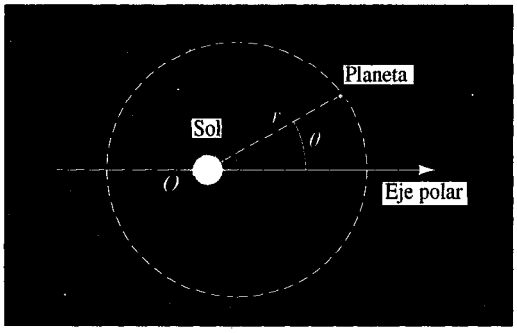
Ejercicios 33 y 34: Deduzca una ecuación polar de la parábola que tenga su foco en el polo y el vértice dado.

33 $V\left(4, \frac{\pi}{2}\right)$ **34** $V(5, 0)$

Ejercicios 35 y 36: Una elipse tiene un foco en el polo, y el centro C y vértice V dados. (a) Calcule la excentricidad y (b) deduzca una ecuación polar de la elipse.

35 $C\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$, $V\left(1, \frac{3\pi}{2}\right)$ **36** $C(2, \pi)$, $V(1, 0)$

37 ***Primera ley de Kepler*** La primera ley de Kepler establece que los planetas viajan en órbitas elípticas en las que el Sol ocupa uno de los focos. Para determinar una ecuación de una órbita, se coloca el polo O en el centro del Sol y el eje polar en el eje mayor de la elipse (véase la figura)



ECNICA DEL E

(a) Demuestre que una ecuación de la órbita es

$$r = \frac{(1 - e^2)a}{1 - e\cos\theta},$$

donde e es la excentricidad y $2a$ es la longitud del eje mayor.

(b) La distancia al perihelio, r_{per}, y la distancia al afelio, r_{af}, se definen como las distancias mínima y máxima, respectivamente, de un planeta al Sol. Demuestre que $r_{per} = a(1 - e)$ y que $r_{af} = a(1 + e)$

38 ***Primera ley de Kepler*** En el Ejercicio 37, el planeta Plutón viaja en órbita elíptica de 0.249 de excentricidad. Si la distancia en el perihelio es 29.62 UA, deduzca una ecuación polar de la órbita y calcule la distancia al afelio.

11.7 CURVAS PLANAS Y ECUACIONES PARAMÉTRICAS

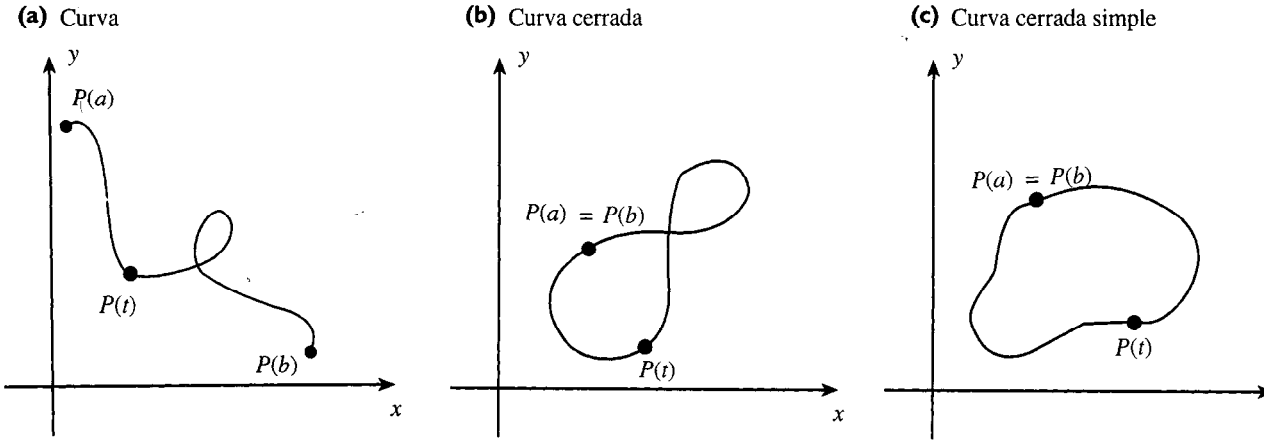
Si f es una función, con frecuencia se llama convencionalmente *curva plana* a la gráfica de $y = f(x)$. Sin embargo, esta definición es restrictiva, porque excluye muchas gráficas útiles. La siguiente definición es más general.

Definición de curva plana

Una **curva plana** es un conjunto C de pares ordenados, $(f(t), g(t))$, donde $f(g)$ y $g(t)$ funciones definidas en un intervalo I.

Para simplificar, con frecuencia se llamará sólo **curva** a una curva plana. La **gráfica** de C en la definición precedente consiste en todos los puntos $P(t) = (f(t), g(t))$ en un plano xy, cuando t está en I. A veces se considera que el punto $P(t)$ describe la curva C cuando t varía en el intervalo I.

FIGURA 11.65



En la Fig. 11.65 se presentan varias curvas, donde I es un intervalo cerrado $[a, b]$. En el inciso (a) de la figura, $P(a) \neq P(b)$; se tiene que $P(a)$ y $P(b)$ son los **extremos** de C. La curva en (a) se corta a sí misma; es decir, dos valores distintos de t producen el mismo punto. Si $P(a) = P(b)$, como en la Fig. 11.65(b), entonces C es una **curva cerrada**. Si $P(a) = P(b)$ y C no se corta en ningún otro punto, como en la Fig. 11.65(c), se dice que C es una **curva cerrada simple.**

Un modo conveniente de representar curvas se da en la definición siguiente.

Definición de ecuaciones paramétricas

Sea C la curva formada por todos los pares ordenados $(f(t), g(t))$, en las que f y g están definidas en un intervalo I. Las ecuaciones.

$$x = f(t), y = g(t),$$

cuando t está en I, se llaman **ecuaciones paramétricas** de C con parámetro t.

A la curva C en esta definición se la llama **curva parametrizada**, y las ecuaciones paramétricas son una **parametrización** de C. Con frecuencia se emplea la notación

$$x = f(t), \quad y = g(t); \quad t \text{ en } I$$

para indicar el dominio I, de f y g. A veces será posible eliminar el parámetro y obtener una ecuación normal en x, y para C. En los casos sencillos se puede obtener la gráfica de una curva parametrizada al unir los puntos en orden de t creciente, como se verá en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 1 ***Trazo de la gráfica de una curva parametrizada***

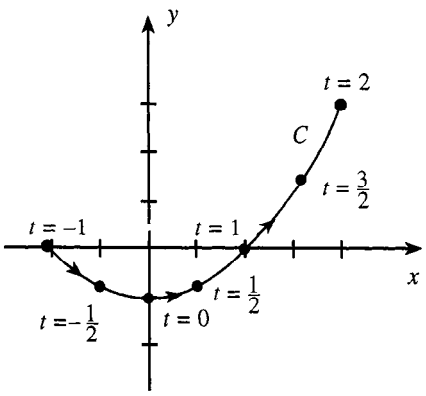
Trace la gráfica de la curva C, cuya parametrización es

$$x = 2t, \quad y = t^2 - 1; \quad -1 \le t \le 2.$$

SOLUCIÓN Se usarán las ecuaciones paramétricas para tabular las coordenadas de los puntos $P(x, y)$ de C como sigue:

t	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	0	$-\frac{3}{4}$	-1	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	3

FIGURA 11.66
$x = 2t, y = t^2 - 1; -1 \le t \le 2$



Al situar los puntos se obtiene el trazo de la Fig. 11.66. Las flechas en la gráfica indican el sentido en el cual $P(x, y)$ describe la curva *cuando t aumenta* de -1 a 2.

Es posible obtener una descripción más clara de la gráfica al eliminar el parámetro. Despejando t de la primera ecuación paramétrica, se obtiene $t = \frac{1}{2}x$. Al sustituir esta expresión en la segunda ecuación se llega a

$$y = (\tfrac{1}{2}x)^2 - 1.$$

La gráfica de esta ecuación en x, y es una parábola simétrica con respecto al eje y, que tiene su vértice en $(0, -1)$. Sin embargo, como $x = 2t$ y $-1 \le t \le 2$, se observa que $-2 \le x \le 4$ para puntos (x, y) en C, y por lo tanto C es la parte de la parábola que queda entre los puntos $(-2, 0)$ y $(4, 3)$, como se muestra en la Fig. 11.66.

Según indican las flechas de la Fig. 11.66, el punto $P(x, y)$ describe la curva C de *izquierda a derecha* al aumentar t. Las ecuaciones paramétricas

$$x = -2t, \quad y = t^2 - 1; \quad -2 \le t \le 1$$

producen la misma gráfica. Sin embargo, al aumentar t, se tiene que $P(x, y)$ describe la curva de *derecha a izquierda*. Para otras parametrizaciones, el punto $P(x, y)$ puede oscilar de un lado a otro al aumentar t.

La **orientación** de una curva parametrizada C es la dirección general determinada por valores *crecientes* del parámetro. Con frecuencia se indica la orientación mediante flechas en C, como en la Fig. 11.66. Si $P(x, y)$ se mueve de un lado a otro al aumentar t, se pueden poner las flechas *a lo largo* de C.

Como ya se ha visto, una curva puede tener varias orientaciones, dependiendo de la parametrización. La curva C del Ejemplo 1 está dada paramétricamente por cualquiera de los grupos de ecuaciones siguientes:

$$x = 2t, \quad y = t^2 - 1; \quad -1 \le t \le 2$$
$$x = t, \quad y = \tfrac{1}{4}t^2 - 1; \quad -2 \le t \le 4$$
$$x = t^3, \quad y = \tfrac{1}{4}t^6 - 1; \quad \sqrt[3]{-2} \le t \le \sqrt[3]{4}$$

El ejemplo siguiente demuestra que a veces es útil eliminar el parámetro *antes* de localizar los puntos.

EJEMPLO 2 *Descripción del movimiento de un punto*

Un punto se mueve en un plano de tal modo que su posición $P(x, y)$ en el instante t está expresada por

$$x = a \cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t; \quad t \text{ en } \mathbb{R},$$

en las cuales $a > 0$. Describa el movimiento del punto.

SOLUCIÓN Se puede eliminar el parámetro expresando las ecuaciones paramétricas en la forma siguiente:

$$\frac{x}{a} = \cos t, \qquad \frac{y}{a} = \operatorname{sen} t$$

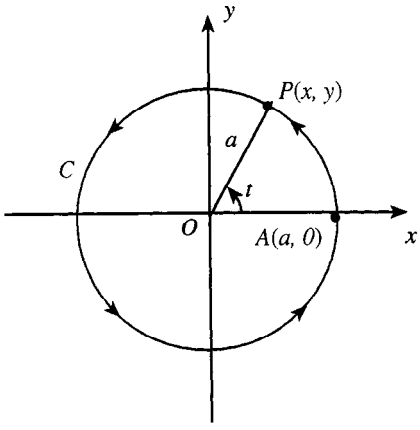
y usar la identidad $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$, para obtener

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1,$$

o sea,

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

FIGURA 11.67
$x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$; t en $\mathbb{R}$



Esto muestra que el punto $P(x, y)$ se mueve en la circunferencia C de radio a con centro en el origen (véase Fig. 11.67). El punto está en $A(a, 0)$ cuando $t = 0$; en $(0, a)$ cuando $t = \pi/2$; en $(-a, 0)$ cuando $t = \pi$; en $(0, -a)$ cuando $t = 3\pi/2$, y de vuelta en $A(a, 0)$ cuando $t = 2\pi$. De este modo, P se mueve sobre C en sentido contrario al de las manecillas del reloj, completando una revolución cada 2π unidades de tiempo. La orientación de C está indicada por las flechas en la figura.

Nótese que en este ejemplo es posible interpretar geométricamente a t como la medida del ángulo, en radianes, generado por el segmento de recta OP.

EJEMPLO 3 ***Trazar una curva parametrizada***

Trace la gráfica C que tiene la parametrización

$$x = -2 + t^2, \qquad y = 1 + 2t^2; \quad t \text{ en } \mathbb{R},$$

e indicar la orientación.

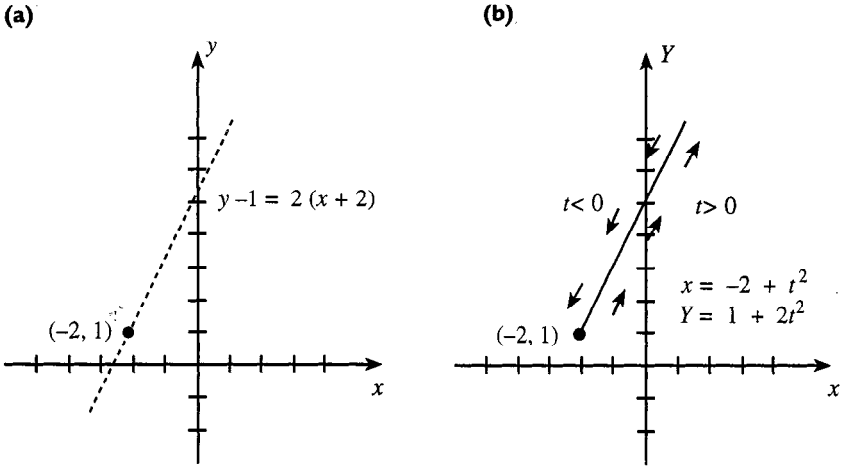
SOLUCIÓN Para eliminar el parámetro se usará la primera ecuación, con lo cual se obtiene $t^2 = x + 2$, y a continuación se sustituye t^2 en la segunda. Así,

$$y = 1 + 2(x + 2).$$

La gráfica de la última ecuación es la recta de pendiente 2 que pasa por el punto (–2, 1), como se indica con línea punteada en la Fig. 11.68(a). Sin embargo, como $t^2 = 0$, se observa en las ecuaciones paramétricas de C que

$$x = -2 + t^2 \geq -2 \qquad \text{y} \qquad y = 1 + 2t^2 \geq 1.$$

FIGURA 11.68



De modo que la gráfica de C es la parte de la recta a la derecha de (– 2, 1), el punto que corresponde a $t = 0$, como se ve en la Fig. 11.68(b). Las flechas a lo largo de C indican la orientación. Al aumentar t en el intervalo $(-\infty, 0]$, $P(x, y)$ desciende por la gráfica (rectilínea) hacia el punto (– 2, 1). Cuando t aumenta en $[0, \infty)$, entonces $P(x, y)$ asciende por la gráfica alejándose de (– 2, 1).

Si se describe una curva C con una ecuación $y = f(x)$, para determinada función f, una manera fácil de obtener ecuaciones paramétricas de C es considerar

$$x = t, \qquad y = f(t),$$

en la cual t está en el dominio de f. Por ejemplo, si $y = x^3$, entonces las ecuaciones paramétricas son

$$x = t, \qquad y = t^3; \qquad t \text{ en } \mathbb{R}.$$

Es posible emplear muchas sustituciones distintas para x, siempre que x asuma todo valor en el dominio de f, cuando t varíe dentro de determinado intervalo. Así, la gráfica de $y = x^3$ también está expresada por

$$x = t^{1/3}, \qquad y = t; \quad t \text{ en } \mathbb{R}.$$

Sin embargo, observe que las ecuaciones paramétricas

$$x = \operatorname{sen} t, \qquad y = \operatorname{sen}^3 t; \quad t \text{ en } \mathbb{R}$$

sólo expresan la parte de la gráfica de $y = x^3$ que está entre los puntos $(-1, -1)$ y $(1, 1)$.

EJEMPLO 4 *Deducción de las ecuaciones paramétricas de una recta*

Deduzca tres parametrizaciones para la recta de pendiente m que pasa por el punto (x_1, y_1).

SOLUCIÓN De acuerdo con la forma de punto y pendiente, una ecuación de la recta es

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Si se hace que $x = t$, entonces $y - y_1 = m(t - x_1)$ y se obtiene la parametrización

$$x = t, \qquad y = y_1 + m(t - x_1); \quad t \text{ en } \mathbb{R}.$$

Se obtiene otra parametrización si $x - x_1 = t$. En ese caso, $y - y_1 = mt$, y se tiene que

$$x = x_1 + t, \qquad y = y_1 + mt; \quad t \text{ en } \mathbb{R}.$$

Como tercer ejemplo, si $x - x_1 = \tan t$, entonces

$$x = x_1 + \tan t, \qquad y = y_1 + m \tan t; \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}.$$

Hay muchas otras formas de parametrizar esta recta.

Las ecuaciones paramétricas de la forma

$$x = a \operatorname{sen} \omega_1 t, \qquad y = b \cos \omega_2 t; \quad t \geq 0,$$

en las cuales a, b, ω_1 y ω_2 son constantes, se encuentran en el estudio de la electricidad. Las variables x, y, por lo general representan valores de tensiones o corrientes en el instante t. Con frecuencia la curva resultante es difícil de trazar; sin embargo, con un osciloscopio y aplicando voltajes o corrientes a sus terminales, se puede representar la gráfica, una **figura de Lissajous**, en la pantalla. También las computadoras ayudan a obtener esas complicadas gráficas.

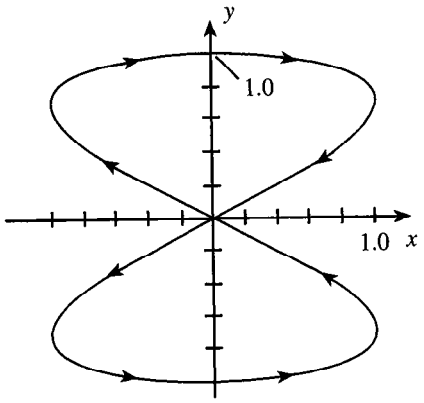
EJEMPLO 5 *Investigación de una figura de Lissajous*

En la Fig. 11.69 se muestra la gráfica de una figura de Lissajous

$$x = \operatorname{sen} 2t, \qquad y = \cos t; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

en la cual las flechas indican la orientación. Compruebe la orientación y deduzca una ecuación en x, y de la curva.

FIGURA 11.69
$x = \text{sen } 2t$, $y = \cos t$; $0 \le t \le 2\pi$.



SOLUCIÓN Examinando las ecuaciones paramétricas, se observa que cuando t aumenta de 0 a $\pi/2$, el punto $P(x, y)$ parte de (0,1) y describe la parte de la curva en el cuadrante I (en el sentido de las manecillas del reloj). Cuando t aumenta de $\pi/2$ a π, entonces $P(x, y)$ recorre la parte del cuadrante III, en sentido contrario al del reloj. Para $\pi \le t \le 3\pi/2$ se obtiene la parte del cuadrante IV, y cuando $3\pi/2 \le t \le 2\pi$ resulta la parte del cuadrante II.

Se puede deducir una ecuación en x, y para la curva mediante identidades trigonométricas y operaciones algebraicas, como sigue:

$x = \text{sen } 2t$	ecuación dada
$x = 2 \text{ sen } t \cos t$	fórmula del doble de un ángulo
$x^2 = 4 \text{sen}^2 t \cos^2 t$	se elevan ambos lados al cuadrado
$x^2 = 4(1 - \cos^2 t) \cos^2 t$	identidad de Pitágoras
$x^2 = 4(1 - y^2)y^2$	$y = \cos t$
$4y^4 - 4y^2 + x^2 = 0$	ecuación equivalente
$y^2 = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 16x^2}}{8}$	uso de la fórmula cuadrática para despejar y^2
$= \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - x^2}}{2}$	se simplifica
$y = \pm\sqrt{\dfrac{1 \pm \sqrt{1 - x^2}}{2}}$	se extrae raíz cuadrada

Esas ecuaciones complicadas indican la ventaja de expresar la curva en forma paramétrica.

EJEMPLO 6 ***Deducción de las ecuaciones paramétricas de una cicloide***

La curva que describe un punto fijo P de una circunferencia que rueda sobre una recta en un plano se llama **cicloide**. Deduzca ecuaciones paramétricas de la cicloide.

SOLUCIÓN Suponga que la circunferencia tiene radio a y que rueda a lo largo y sobre el eje x, en sentido positivo. Si una de las posiciones de P es el origen, entonces la Fig. 11.70 presenta parte de la curva y una posición posible de la curva circular. Cada parte en forma puntiaguda de la curva, como en $x = 2\pi a$, se llama **cúspide**.

FIGURA 11.70

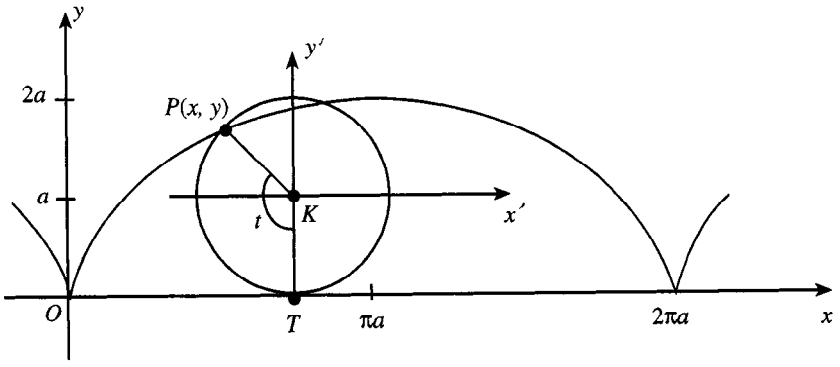
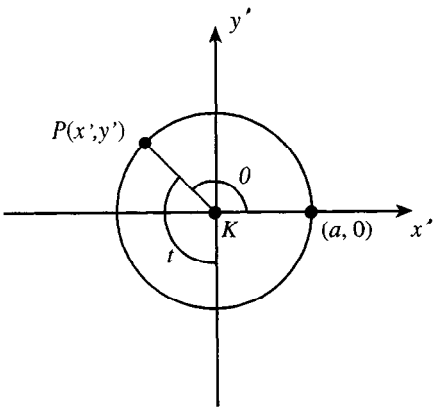


FIGURA 11.71



Sea K el centro de la circunferencia rodante y T el punto de tangencia con el eje x. Se introducirá, como parámetro t, la medida del ángulo TKP en radianes. La distancia en que ha rodado la curva circular es $d(O, T) = at$. En consecuencia, las coordenadas de K son (at, a). Si se considera un sistema coordenado $x'y'$ con el origen en $K(at, a)$ y si $P(x', y')$ representa el punto P en relación con este sistema, entonces, de acuerdo con las fórmulas de traslación de ejes y haciendo $h = at$ y $k = a$,

$$x = at + x', \qquad y = a + y'.$$

Si, como vemos en la Fig. 11.71, θ representa un ángulo en posición normal en el plano $x'y'$, entonces $\theta = (3\pi/2) - t$. Por lo tanto,

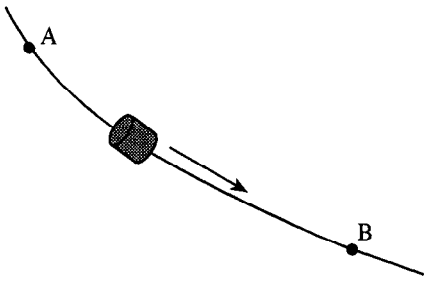
$$x' = a\cos\theta = a\cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -a\,\text{sen}\,t$$

$$y' = a\,\text{sen}\,\theta = a\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -a\cos t,$$

y la sustitución en $x = at + x'$, $y = a + y'$ da como resultado las ecuaciones paramétricas de la cicloide:

$$x = a(t - \text{sen}\,t), \qquad y = a(1 - \cos t); \quad t \text{ en } \mathbb{R}$$

Si $a < 0$, entonces la gráfica de $x = a(t - \text{sen}\,t)$, $y = a(1 - \cos t)$ es la cicloide invertida que se obtiene si la circunferencia del Ejemplo 6 rueda *por abajo* del eje x. Esta curva tiene varias propiedades físicas importantes. Por ejemplo supóngase que un alambre delgado pasa por dos puntos fijos A y B, como se muestra en la Fig. 11.72, y que la forma del alambre se puede cambiar al doblarlo de alguna manera. Además, supóngase que se permite deslizar sobre él una cuenta, y que la única fuerza que actúa sobre ella es la gravedad. Ahora se pregunta cuál de todas las trayectorias posibles permitirá que la cuenta llegue de A a B en el tiempo mínimo posible. Es natural creer que la trayectoria deseada es el segmento de recta de A a B. Sin embargo, no es así. La trayectoria que requiere el tiempo mínimo coincide con la gráfica de una cicloide invertida, estando A en el origen. Como la velocidad de la cuenta aumenta más rápidamente en la cicloide que en la recta de A a B, llega a B más rápidamente, aun cuando la distancia sea mayor.



Hay otra propiedad interesante de esta **curva de descenso mínimo**. Supóngase que A está en el origen y que B es el punto cuya abscisa es $\pi\,|\,a\,|$, es decir, el punto más bajo de la cicloide en el primer arco a la derecha de A. Si se suelta la cuenta en *cualquier* punto entre A y B, se puede demostrar que el tiempo que necesita para llegar a B siempre es el mismo.

En las aplicaciones se encuentran variantes de la cicloide. Por ejemplo, si una rueda de motocicleta corre por un camino recto, la curva que traza un punto fijo en uno de los rayos es cicloidal. En este caso, la curva no tiene cúspides, ni corta a la línea del pavimento (el eje x), como lo hace la gráfica de la cicloide. Si la rueda de un tren va por una vía recta, la curva que describe un punto fijo en la periferia de la ceja de la rueda, que pasa por abajo del nivel del riel, tiene bucles a intervalos regulares. En los Ejercicios 29 y 30 se definen otras cicloides.

EJERCICIOS 11.7

Ejercicios 1 – 22: Deduzca una ecuación en x, y en cuya gráfica estén los puntos de la curva C. Trace la gráfica de C e indique su orientación.

1 $x = t - 2$, $y = 2t + 3$; $0 \le t \le 5$

2 $x = 1 - 2t$, $y = 1 + t$; $-1 \le t \le 4$

3 $x = t^2 + 1$, $y = t^2 - 1$; $-2 \le t \le 2$

4 $x = t^3 + 1$, $y = t^3 - 1$; $-2 \le t \le 2$

5 $x = 4t^2 - 5$, $y = 2t + 3$; t en $\mathbb{R}$

6 $x = t^3$, $y = t^2$; t en $\mathbb{R}$

7 $x = e^t$, $y = e^{-2t}$; t en $\mathbb{R}$

8 $x = \sqrt{t}$, $y = 3t + 4$; $t \ge 0$

9 $x = 2 \operatorname{sen} t$, $y = 3 \cos t$; $0 \le t \le 2\pi$

10 $x = \cos t - 2$, $y = \operatorname{sen} t + 3$; $0 \le t \le 2\pi$

11 $x = \sec t$, $y = \tan t$; $-\pi/2 < t < \pi/2$

12 $x = \cos 2t$, $y = \operatorname{sen} t$; $-\pi \le t \le \pi$

13 $x = t^2$, $y = 2 \ln t$; $t > 0$

14 $x = \cos^3 t$, $y = \operatorname{sen}^3 t$; $0 \le t \le 2\pi$

15 $x = \operatorname{sen} t$, $y = \csc t$; $0 < t \le \pi/2$

16 $x = e^t$, $y = e^{-t}$; t en $\mathbb{R}$

17 $x = t$, $y = \sqrt{t^2 - 1}$; $|t| \ge 1$

18 $x = -2\sqrt{1 - t^2}$, $y = t$; $|t| \le 1$

19 $x = t$, $y = \sqrt{t^2 - 2t + 1}$; $0 \le t \le 4$

20 $x = 2t$, $y = 8t^3$; $-1 \le t \le 1$

21 $x = (t + 1)^3$, $y = (t + 2)^2$; $0 \le t \le 2$

22 $x = \tan t$, $y = 1$; $-\pi/2 < t < \pi/2$

Ejercicios 23 y 24: Se presentan paramétricamente las curvas C_1, C_2, C_3 y C_4 para t en R. Trace su representación e indique sus orientaciones.

23 C_1: $x = t^2$, $y = t$
C_2: $x = t^4$, $y = t^2$
C_3: $x = \operatorname{sen}^2 t$, $y = \operatorname{sen} t$
C_4: $x = e^{2t}$, $y = -e^t$

24 C_1: $x = t$, $y = 1 - t$
C_2: $x = 1 - t^2$, $y = t^2$
C_3: $x = \cos^2 t$, $y = \operatorname{sen}^2 t$
C_4: $x = \ln t - t$, $y = 1 + t - \ln t$; $t > 0$

Ejercicios 25 y 26: Las ecuaciones paramétricas especifican la posición de un punto $P(x, y)$ en movimiento, en el instante t. Trace la gráfica e indique el movimiento de P al aumentar t.

25 **(a)** $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$; $0 \le t \le \pi$

(b) $x = \operatorname{sen} t$, $y = \cos t$; $0 \le t \le \pi$

(c) $x = t$, $y = \sqrt{1 - t^2}$; $-1 \le t \le 1$

26 **(a)** $x = t^2$, $y = 1 - t^2$; $0 \le t \le 1$

(b) $x = 1 - \ln t$, $y = \ln t$; $1 \le t \le e$

(c) $x = \cos^2 t$, $y = \operatorname{sen}^2 t$; $0 \le t \le 2\pi$

27 Demuestre que

$$x = a \cos t + h, \quad y = b \operatorname{sen} t + k; \quad 0 \le t \le 2\pi$$

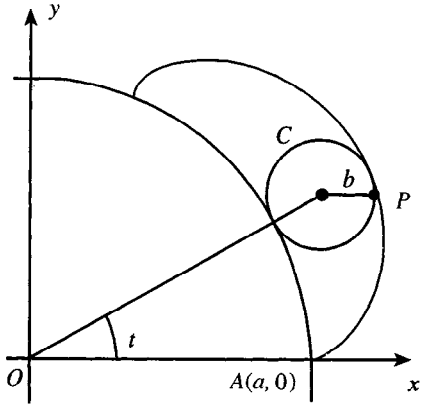
son ecuaciones paramétricas de una elipse con centro en (h, k) y ejes de longitudes $2a$ y $2b$.

28 Demuestre que

$$x = a \sec t + h, \quad y = b \tan t + k; \quad -\pi/2 < t < 3\pi/2 \text{ y } t \ne \pi/2$$

son ecuaciones paramétricas de una hipérbola con centro en (h, k), eje transverso de longitud $2a$, y eje conjugado de longitud $2b$. Calcule los valores de t para cada rama.

29 Una circunferencia C de radio b rueda sin resbalar por el exterior de otra $x^2 + y^2 = a^2$, y $b < a$. Sea P un punto fijo en C y sea $A(a, 0)$ la posición inicial de P, como se muestra en la figura. Si el parámetro t es el ángulo que forman el eje x positivo con el segmento de O al centro de C, demuestre que las ecuaciones paramétricas de la



curva que describe P (una *epicicloide*) son

$$x = (a + b)\cos t - b\cos\left(\frac{a+b}{b}t\right)$$

$$y = (a + b)\operatorname{sen} t - b\operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{b}t\right);$$

$$0 \le t \le 2\pi.$$

30 Si la circunferencia C del Ejercicio 29 rueda por el interior de la otra curva circular (véase la figura), entonces la curva que describe P es una *hipocicloide*.

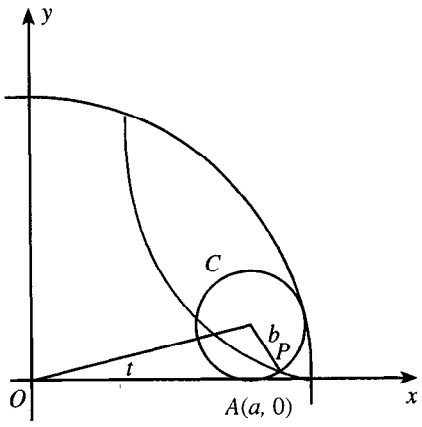
(a) Demuestre que las ecuaciones paramétricas de esta curva son:

$$x = (a - b)\cos t + b\cos\left(\frac{a-b}{b}t\right)$$

$$y = (a - b)\operatorname{sen} t - b\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{b}t\right);$$

$$0 \le t \le 2\pi.$$

(b) Si $b = \frac{1}{4}a$, demuestre que $x = a\cos^3 t$, $y = a\operatorname{sen}^3 t$, y trace la gráfica.



31 Si $b = \frac{1}{3}a$ en el Ejercicio 29, deduzca las ecuaciones paramétricas de la epicicloide y trace la gráfica.

32 El radio de la circunferencia B es la tercera parte de la circunferencia A. ¿Cuántas revoluciones da la circunferencia B al rodar por A hasta que llega al punto de partida? (*Sugerencia:* Vea los resultados del Ejercicio 31).

33 Véase el ejemplo 5.

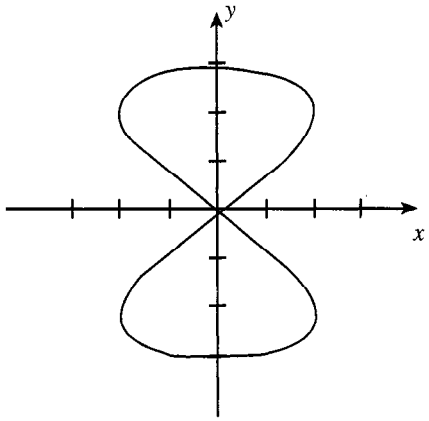
(a) Describa la figura de Lissajous representada por $f(t) = a\operatorname{sen}\omega t$, y $g(t) = b\cos\omega t$, para $t \ge 0$ y $a \ne b$.

(b) Suponga que $f(t) = a\operatorname{sen}\omega_1 t$ y $g(t) = b\operatorname{sen}\omega_2 t$, siendo ω_1 y ω_2 números racionales positivos, y exprese ω_2/ω_1 en forma m/n, para enteros positivos m y n. Demuestre que si $p = 2\pi n/\omega_1$, entonces $f(t + p) = f(t)$ y $g(t + p) = g(t)$. Concluya que la curva se vuelve a trazar cada p unidades de tiempo.

34 En la figura se ve la gráfica de Lissajous representada por

$$x = 2\operatorname{sen} 3t, \quad y = 3\operatorname{sen} 1.5t; \quad t \ge 0.$$

Calcule el periodo de la figura; es decir, la duración del intervalo mínimo de t en el que se recorre la figura.



C **Ejercicios 35 – 38: Trace la curva o gráfica respectiva.**

35 $x = 3\operatorname{sen}^5 t, \quad y = 3\cos^5 t; \quad 0 \le t \le 2\pi$

36 $x = 8\cos t - 2\cos 4t, \quad y = 8\operatorname{sen} t - 2\operatorname{sen} 4t; \quad 0 \le t \le 2\pi$

37 $x = 3t - 2\operatorname{sen} t, y = 3 - 2\cos t; \quad -8 \le t \le 8$

38 $x = 2t - 3\operatorname{sen} t, y = 2 - 3\cos t; \quad -8 \le t \le 8$

C **Ejercicios 39 – 42: Trace las curvas correspondientes en el mismo plano coordenado y describa la forma de la figura resultante.**

39 C_1: $x = 2\operatorname{sen} 3t$, $y = 3\cos 2t$; $-\pi/2 \le t \le \pi/2$
C_2: $x = \frac{1}{4}\cos t + \frac{3}{4}$, $y = \frac{1}{4}\operatorname{sen} t + \frac{3}{2}$; $0 \le t \le 2\pi$
C_3: $x = \frac{1}{4}\cos t - \frac{3}{4}$, $y = \frac{1}{4}\operatorname{sen} t + \frac{3}{2}$; $0 \le t \le 2\pi$
C_4: $x = \frac{3}{4}\cos t$, $y = \frac{1}{4}\operatorname{sen} t$; $0 \le t \le 2\pi$
C_5: $x = \frac{1}{4}\cos t$, $y = \frac{1}{8}\operatorname{sen} t + \frac{3}{4}$; $\pi \le t \le 2\pi$

40 C_1: $x = \frac{3}{2}\cos t + 1$, $y = \operatorname{sen} t - 1$; $-\pi/2 \le t \le \pi/2$
C_2: $x = \frac{3}{2}\cos t + 1$, $y = \operatorname{sen} t + 1$; $-\pi/2 \le t \le \pi/2$
C_3: $x = 1$, $y = 2\tan t$; $-\pi/4 \le t \le \pi/4$

41 C_1: $x = \tan t$, $y = 3\tan t$; $0 \le t \le \pi/4$
C_2: $x = 1 + \tan t$, $y = 3 - 3\tan t$; $0 \le t \le \pi/4$
C_3: $x = \frac{1}{2} + \tan t$, $y = \frac{3}{2}$; $0 \le t \le \pi/4$

42 C_1: $x = 1 + \cos t$, $y = 1 + \operatorname{sen} t$; $\pi/3 \le t \le 2\pi$
C_2: $x = 1 + \tan t$, $y = 1$; $0 \le t \le \pi/4$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 11

Ejercicios 1 – 16: Localice los vértices y focos de la cónica, y trace su gráfica.

1 $y^2 = 64x$

2 $y = 8x^2 + 32x + 33$

3 $9y^2 = 144 - 16x^2$

4 $9y^2 = 144 + 16x^2$

5 $x^2 - y^2 - 4 = 0$

6 $25x^2 + 36y^2 = 1$

7 $25y = 100 - x^2$

8 $3x^2 + 4y^2 - 18x + 8y + 19 = 0$

9 $x^2 - 9y^2 + 8x + 90y - 210 = 0$

10 $x = 2y^2 + 8y + 3$

11 $4x^2 + 9y^2 + 24x - 36y + 36 = 0$

12 $4x^2 - y^2 - 40x - 8y + 88 = 0$

13 $y^2 - 8x + 8y + 32 = 0$

14 $4x^2 + y^2 - 24x + 4y + 36 = 0$

15 $x^2 - 9y^2 + 8x + 7 = 0$

16 $y^2 - 2x^2 + 6y + 8x - 3 = 0$

Ejercicios 17 – 18: Deduzca la ecuación normal de una parábola que tenga eje vertical y que satisfaga la condición dada.

17 Abscisas en el origen –10 y – 4; ordenada en el origen 80.

18 Abscisas en el origen –11 y 3, y que pase por (2, 39).

Ejercicios 19 – 28: Deduzca una ecuación de la cónica que satisfaga las condiciones dadas.

19 Hipérbola, con vértices $V(0, \pm 7)$ y extremos del eje conjugado $(\pm 3, 0)$.

20 Parábola, con foco $F(-4, 0)$ y directriz $x = 4$.

21 Parábola, con foco $F(0, -10)$ y directriz $y = 10$.

22 Parábola, con vértice en el origen, que sea simétrica al eje x y que pase por el punto $(5, -1)$.

23 Elipse, con vértices $V(0, \pm 10)$ y focos $F(0, \pm 5)$.

24 Hipérbola, con focos $F(\pm 10, 0)$ y vértices $V(\pm 5, 0)$.

25 Hipérbola, con vértices $V(0, \pm 6)$ y asíntotas $y = \pm 9x$.

26 Elipse, con focos $F(\pm 2, 0)$, y que pase por el punto $(2, \sqrt{2})$.

27 Elipse, con excentricidad $\frac{2}{3}$ y extremos del eje menor $(\pm 5, 0)$.

28 Elipse, con excentricidad 3/4 y focos $F(\pm 12, 0)$

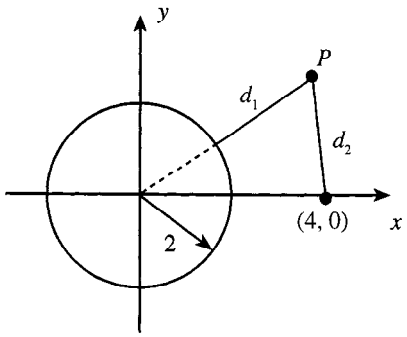
29 **(a)** Calcule A de modo que el punto $(2, -3)$ esté en la cónica $Ax^2 + 2y^2 = 4$.

(b) ¿Es la cónica una elipse o una hipérbola?

30 Si se inscribe un cuadrado con lados paralelos a los ejes coordenados en la elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$, exprese el área A del cuadrado, en términos de a y b.

31 Deduzca la ecuación normal de la circunferencia que tenga centro en el foco de la parábola $y = \frac{1}{8}x^2$ y que pase por el origen

32 Un punto $P(x, y)$ está a la misma distancia de $(4, 0)$ que de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, como se ve en la figura. Demuestre que el conjunto de esos puntos forma una rama de una hipérbola y trace su gráfica.



Ejercicios 33 – 35: Emplee una rotación adecuada de ejes para deducir una ecuación para la gráfica en un plano $x'y'$ y trace la curva, identificando los vértices.

33 $x^2 - 8xy + 16y^2 - 12\sqrt{17}x - 3\sqrt{17}y = 0$

34 $8x^2 + 12xy + 17y^2 - 16\sqrt{5}x - 12\sqrt{5}y = 0$

35 $11x^2 - 10\sqrt{3}xy + y^2 = 20$

36 Mediante el discriminante, identifique la gráfica de cada ecuación. (No trace la curva).

(a) $2x^2 - 3xy + 4y^2 + 6x - 2y - 6 = 0$

(b) $3x^2 + 2xy - y^2 - 2x + y + 4 = 0$

(c) $x^2 - 6xy + 9y^2 + x - 3y + 5 = 0$

37 Pase $(5, 7\pi/4)$ a coordenadas rectangulares.

38 Pase $(2\sqrt{3}, -2)$ a coordenadas polares, con $r > 0$ y $0 \le \theta < 2\pi$.

Ejercicios 39 – 50: Trace la gráfica de la ecuación polar.

39 $r = -4 \operatorname{sen} \theta$

40 $r = 8 \sec \theta$

41 $r = 3 \operatorname{sen} 5\theta$

42 $r = 6 - 3 \cos \theta$

43 $r = 3 - 3 \operatorname{sen} \theta$

44 $r = 2 + 4 \cos \theta$

45 $r^2 = 9 \operatorname{sen} 2\theta$

46 $2r = \theta$

47 $r = \dfrac{8}{1 - 3 \operatorname{sen} \theta}$

48 $r = 6 - r \cos \theta$

49 $r = \dfrac{6}{3 + 2 \cos \theta}$

50 $r = \dfrac{-6 \csc \theta}{1 - 2 \csc \theta}$

Ejercicios 51 – 54: Deduzca una ecuación polar que tenga la misma gráfica que la ecuación en x, y.

51 $y^2 = 4x$

52 $x^2 + y^2 - 3x + 4y = 0$

53 $2x - 3y = 8$

54 $x^2 + y^2 = 2xy$

Ejercicios 55 – 60: Deduzca una ecuación en x, y que tenga la misma gráfica que la ecuación polar.

55 $r^2 = \tan \theta$

56 $r = 2 \cos \theta + 3 \operatorname{sen} \theta$

57 $r^2 = 4 \operatorname{sen} 2\theta$

58 $\theta = \sqrt{3}$

59 $r = 5 \sec \theta + 3r \sec \theta$

60 $r^2 \operatorname{sen} \theta = 6 \csc \theta + r \cot \theta$

Ejercicios 61 – 65: Deduzca una ecuación en x, y, cuya gráfica contenga los puntos de la curva C. Trace la gráfica e indique la orientación.

61 $x = 3 + 4t, \quad y = t - 1; \quad -2 \le t \le 2$

62 $x = \sqrt{-t}, \quad y = t^2 - 4; \quad t \le 0$

63 $x = \cos^2 t - 2, \quad y = \operatorname{sen} t + 1; \quad 0 \le t \le 2\pi$

64 $x = \sqrt{t}, \quad y = 2^{-t}; \quad t \ge 0$

65 $x = \dfrac{1}{t} + 1, \quad y = \dfrac{2}{t} - t; \quad 0 < t \le 4$

66 A continuación se dan las representaciones paramétricas de las curvas C_1, C_2, C_3 y C_4, para t en $\mathbb{R}$. Trace sus gráficas y describa sus semejanzas y diferencias.

C_1: $x = t, \quad y = \sqrt{16 - t^2}$

C_2: $x = -\sqrt{16 - t}, \quad y = -\sqrt{t}$

C_3: $x = 4 \cos t, \quad y = 4 \operatorname{sen} t$

C_4: $x = e^t, \quad y = -\sqrt{16 - e^{2t}}$

APÉNDICES

A.1 USO DE LAS TABLAS LOGARÍTMICAS Y TRIGONOMÉTRICAS

En este apéndice se explica cómo usar las tablas de logaritmos y de funciones trigonométricas.

Tabla I: Valores de los logaritmos comunes (de base 10)

Si x es cualquier número positivo real y se escribe $x = c \cdot 10^k$ para $1 \le c < 10$, donde k es un entero, se aplican entonces las leyes de los logaritmos, y se obtiene

$$\log x = \log c + \log 10^k = \log c + k.$$

En esta ecuación se observa que para determinar $\log x$ para cualquier número positivo real x, basta conocer los logaritmos de los números entre 1 y 10. El número $\log c$, donde $1 \le c < 10$, es la **mantisa**, y el entero k es la **característica** de $\log x$.

Si $1 \le c < 10$, entonces, como $\log x$ aumenta cuando x se incrementa, $\log 1 \le \log c < \log 10$, o bien, en forma equivalente, $0 \le \log c < 1$. Por lo tanto, la mantisa de un logaritmo es un número entre 0 y 1.

En problemas numéricos es necesario, por lo general, aproximar los logaritmos. Por ejemplo, $\log 2 = 0.3010299957\ldots$, donde los decimales no son repetitivos ni terminantes. Con frecuencia se redondean los logaritmos a 4 cifras decimales y se escribe $\log 2 \approx 0.3010$. Si se expresa un número de 0 a 1 como decimal finito, se le llama **fracción decimal**. Entonces, la ecuación $\log x = \log c + k$ significa que si x es cualquier número positivo real, entonces $\log x$ *se puede aproximar mediante la suma de una fracción decimal positiva (la mantisa) y un entero* k *(la característica)*. A esta representación se le llama **forma normal** de $\log x$.

Se han calculado los logaritmos comunes, o logaritmos decimales, de muchos números de 1 a 10. La Tabla I del apéndice A. II presenta los logaritmos de números entre 1.00 y 9.99, a intervalos de 0.01, con aproximación a 4 decimales. Se puede usar esta tabla para determinar el logaritmo decimal de cualquier número de 3 dígitos, con precisión de 4 decimales. En los siguientes ejemplos se muestra el empleo de dicha tabla.

EJEMPLO 1

Determinar (con aproximación) el logaritmo:

(a) log 43.6 **(b)** log 43,600 **(c)** log 0.0436

SOLUCIÓN

(a) Como $43.6 = (4.36)10^1$, la característica de log 43.6 es 1. Al consultar la Tabla 1 se observa que la mantisa de log 4.36 puede determinarse aproximadamente por la fracción decimal 0.6395. Por consiguiente, como ya se estableció,

$$\log 43.6 \approx 0.6395 + 1$$

$$\log 43.6 \approx 1.6395.$$

(b) Como $43\,600 = (4.36)10^4$; la mantisa es igual que en la parte (a); sin embargo, la característica es 4. Por lo tanto,

$$\log 43{,}600 \approx 0.6395 + 4$$

$$\log 43{,}600 \approx 4.6395.$$

(c) Si se escribe $0.0436 = (4.36)10^{-2}$, entonces

$$\log 0.0436 = \log 4.36 + (-2).$$

Por consiguiente, la forma normal es

$$\log 0.0436 \approx 0.6395 + (-2).$$

Si de 0.6395 se resta 2, se tiene

$$\log 0.0436 \approx -1.3605.$$

Nótese que esta no es la forma normal, porque $-1.3605 = -0.3605 + (-1)$, número en el cual la parte decimal es *negativa.*

En el Ejemplo 1, después de haber obtenido $\log 0.0436 \approx 0.6395 + (-2)$, un error que se comete con frecuencia es expresar la respuesta como -2.6395. Esto es incorrecto, ya que

$$-2.6395 = -0.6395 + (-2),$$

que no es lo mismo que $0.6395 + (-2)$.

Si un logaritmo tiene característica negativa, se puede dejar en su forma normal, o expresarlo de modo que la parte decimal siga siendo positiva. Para ilustrar el segundo caso, súmese y réstese 8 al segundo miembro de la ecuación como sigue:

$$\log 0.0436 \approx 0.6395 + (-2)$$

$$\log 0.0436 \approx 0.6395 + (8 - 8) + (-2)$$

$$\log 0.0436 \approx 8.6395 - 10$$

También se podría escribir

$$\log 0.0436 \approx 18.6395 - 20$$

$$\log 0.0436 \approx 28.6395 - 30$$

$$\log 0.0436 \approx 43.6395 - 45$$

etc., siempre y cuando la suma del entero positivo a la izquierda del punto decimal y el entero negativo a la extrema derecha sea igual a la característica del logaritmo.

EJEMPLO 2

Calcular aproximadamente:

(a) $\log (0.00652)^2$ **(b)** $\log (0.00652)^{-2}$ **(c)** $\log (0.00652)^{1/2}$

SOLUCIÓN

(a) De acuerdo con (3) en las leyes de los logaritmos (véase Secc. 5.4),

$$\log (0.00652)^2 = 2 \log 0.00652.$$

Ya que $0.00652 = (6.52)10^{-3}$,

$$\log 0.00652 = \log 6.52 + (-3).$$

Según la Tabla 1, se encuentra que $\log 6.52 \approx 0.8142$, y por consiguiente

$$\log 0.00652 \approx 0.8142 + (-3).$$

Por lo tanto,

$$\log (0.00652)^2 = 2 \log 0.00652$$
$$\log (0.00652)^2 \approx 2[0.8142 + (-3)]$$
$$\log (0.00652)^2 \approx 1.6284 + (-6)$$
$$\log (0.00652)^2 \approx 0.6284 + (-5).$$

El último número es la forma normal del logaritmo.

(b) Nuevamente se aplica la ley (3) y el valor de $\log 0.00652$ que se ve en la parte (a):

$$\log (0.00652)^{-2} = -2 \log 0.00652$$
$$\log (0.00652)^{-2} \approx -2[0.8142 + (-3)]$$
$$\log (0.00652)^{-2} \approx -1.6284 + 6$$

Es importante hacer notar que -1.6284 quiere decir $-0.6284 + (-1)$ y, en consecuencia la parte decimal es negativa. Para llegar a la forma normal se escribe

$$-1.6284 + 6 = 6.0000 - 1.6284$$
$$= 4.3716.$$

Esto indica que la mantisa es 0.3716 y la característica es 4.

(c) Según la ley (3),

$$\log (0.00652)^{1/2} = \tfrac{1}{2} \log 0.00652$$
$$\log (0.00652)^{1/2} \approx \tfrac{1}{2}[0.8142 + (-3)].$$

Si se multiplica por $\frac{1}{2}$ no se llega a la forma normal, porque el número en la suma que resulta no es la característica. Para evitarlo, se ajusta la expresión entre corchetes sumando y restando un número adecuado. Si se usa 1 con este fin, se obtiene

$$\log (0.00652)^{1/2} \approx \tfrac{1}{2}[1.8142 + (-4)]$$
$$\log (0.00652)^{1/2} \approx 0.9071 + (-2).$$

También se podría haber sumado y restado algún otro número distinto de 1. Por ejemplo,

$$\tfrac{1}{2}[0.8142 + (-3)] = \tfrac{1}{2}[17.8142 + (-20)]$$
$$= 8.9071 + (-10).$$

Si el dato es $\log x$, se usa la Tabla 1 para determinar aproximadamente a x, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3

Calcular un valor aproximado de x:

(a) $\log x = 1.7959$ **(b)** $\log x = -3.5918$

SOLUCIÓN

(a) La mantisa 0.7959 determina la sucesión de dígitos en x, y la característica determina la posición del punto decimal. Si se examina *el contenido* de la Tabla 1, se encuentra que la mantisa 0.7959 es el logaritmo de 6.25. Como la característica es 1, se sabe que x está entre 10 y 100, y por lo tanto, $x \approx 62.5$.

(b) Para determinar x con la Tabla 1, se debe expresar $\log x$ en su forma normal. Para pasar $\log x = -3.5918$ a la forma normal, se suma y se resta 4; entonces

$$\log x = (4 - 3.5918) - 4$$
$$= 0.4082 - 4.$$

Mediante la Tabla 1, se ve que la mantisa 0.4082 es el logaritmo de 2.56. Como la característica de $\log x$ es -4, se deduce que $x \approx 0.000256$.

Si se utiliza una calculadora con tecla [LOG] para determinar logaritmos comunes, entonces se obtiene la forma normal si $x \geq 1$. Por ejemplo, para determinar log 43.6 en una calculadora común, se teclea 43.6 y se oprime [LOG], y aparece la forma normal

Si del mismo modo tratamos de determinar log 0.0436, entonces aparecerá en la pantalla lo siguiente:

No es la forma normal del logaritmo, ya que la parte decimal es negativa, compárese con el Ejemplo 1(c). Para llegar a la forma normal se podría sumar 2 al logaritmo, usando la calculadora, y restar después 2, como sigue:

$$\log 0.0436 \approx -1.3605135$$
$$\log 0.0436 \approx (-1.3605135 + 2) - 2$$
$$\log 0.0436 \approx 0.6394865 - 2$$
$$\log 0.0436 \approx 0.6394865 + (-2)$$

Los únicos logaritmos comunes que se pueden obtener en la Tabla 1 *directamente*, son los logaritmos de los números que cuando mucho contengan 3 dígitos distintos de cero. Si hay *cuatro* dígitos distintos de cero, o más, es posible obtener un valor aproximado utilizando el método de interpolación lineal que se explica a continuación. Se emplea el término **interpolación lineal** porque, como se verá, el método se basa en aproximar por segmentos rectilíneos, partes de la gráfica de $y = \log x$.

FIGURA A.1

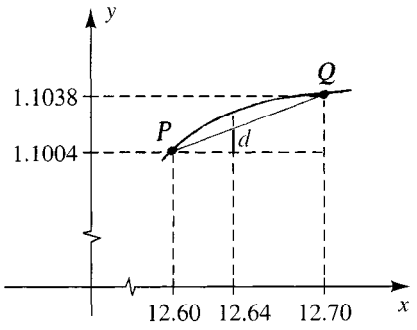
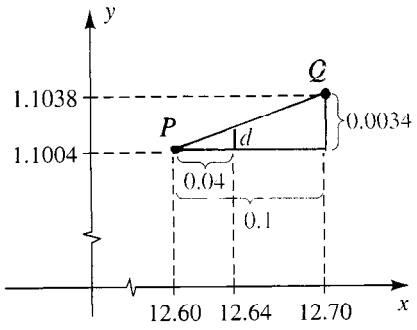


FIGURA A.2



Para ilustrar el proceso de interpolación lineal y, al mismo tiempo, justificarlo parcialmente, se estudia el ejemplo específico de log 12.64. Como la función logarítmica con base 10 es creciente, este número está entre log 12.60 ≈ 1.1004 y log 12.70 ≈ 1.1038. Al examinar la gráfica de $y = \log x$, tenemos el caso que aparece en la Fig. A.1, en la cual se han distorsionado las unidades en los ejes x, y, y también la parte de la gráfica. (Un dibujo más preciso indicaría que la gráfica de $y = \log x$ está mucho más cerca del segmento de recta que une a $P(12.60, 1.1004)$ con $Q(12.70, 1.1038)$ que lo que indica la figura.) Como log 12.64 es la ordenada del punto en la gráfica que tiene abscisa 12.64, se puede aproximar mediante la ordenada del punto cuya abscisa es 12.64 y está en *el segmento rectilíneo PQ*. Consultando la Fig. A.1 se observa que tal ordenada es $1.1004 + d$. El número d se puede aproximar mediante triángulos semejantes. En la Fig. A.2, en la cual se ha omitido la gráfica de $y = \log x$, se forma la siguiente proporción:

$$\frac{d}{0.0034} = \frac{0.04}{0.1}$$

Por consiguiente,
$$d = \frac{(0.04)(0.0034)}{0.1} = 0.00136.$$

Cuando se usa esta técnica, siempre se redondean los decimales al mismo número de cifras que hay en la tabla. Por lo tanto, $d \approx 0.0014$ y

$$\log 12.64 \approx 1.1004 + 0.0014$$

$$\log 12.64 \approx 1.1018.$$

En adelante ya no se presentará el esquema cuando se interpole, sino que se efectuará el procedimiento que se muestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4

Calcular log 572.6

SOLUCIÓN Conviene ordenar el trabajo como sigue:

$$1.0\left\{\begin{array}{l}0.6\left\{\begin{array}{l}\log 572.0 \approx 2.7574\\ \log 572.6 = ?\end{array}\right\}d\\ \log 573.0 \approx 2.7582\end{array}\right\}0.0008$$

Se han indicado diferencias junto a las llaves. Esto conduce a lo siguiente:

$$\frac{d}{0.0008} = \frac{0.6}{1.0} = \frac{6}{10}$$

$$d = \tfrac{6}{10}(0.0008) = 0.00048 \approx 0.0005$$

Por lo tanto,

$$\log 572.6 \approx 2.7574 + 0.0005$$

$$\log 572.6 \approx 2.7579.$$

Otro modo de manejar problemas de este tipo es considerar que como 572.6 está a $\frac{6}{10}$ partes del intervalo entre 572.0 y 573.0, entonces log 572.6 (está aproximadamente) a $\frac{6}{10}$ partes del intervalo entre 2.7574 y 2.7582. Por consiguiente,

$$\log 572.6 \approx 2.7574 + \tfrac{6}{10}(0.0008)$$

$$\log 572.6 \approx 2.7574 + 0.0005$$

$$\log 572.6 \approx 2.7579.$$

EJEMPLO 5

Calcular, aproximadamente, log 0.003678.

SOLUCIÓN Se empieza por ordenar el trabajo como en el Ejemplo 1. De modo que

$$10\left\{\begin{array}{l}8\left\{\begin{array}{l}\log 0.003670 \approx 0.5647 + (-3)\\ \log 0.003678 = ?\end{array}\right\}d\\ \log 0.003680 \approx 0.5658 + (-3)\end{array}\right\}0.0011$$

Como sólo importa la proporción, se han empleado los números 8 y 10 en el lado izquierdo porque su relación es la misma que la de 0.000008 a 0.000010. Esto conduce a lo siguiente:

$$\frac{d}{0.0011} = \frac{8}{10} = 0.8$$

$$d = (0.0011)(0.8) = 0.00088 \approx 0.0009$$

Por consiguiente,

$$\log 0.003678 \approx [0.5647 + (-3)] + 0.0009$$

$$\log 0.003678 = 0.5656 + (-3).$$

Si se escribe un número x en la forma $x = c \cdot 10^k$, donde $1 \leq c < 10$, entonces, antes de utilizar la Tabla 1 para calcular log x por interpolación, se debe redondear c a 3 decimales. Otro modo de decir lo mismo es que x se debe redondear a cuatro **cifras significativas**. Con algunos ejem-

plos se aclara el procedimiento. Si $x = 36.4635$, antes de determinar $\log x$ lo redondeamos a 36.46. El número 684 279 se debe redondear a 684 300. Para un número decimal como 0.096202, se usa 0.09620. La razón de hacerlo es que en la Tabla 1 no se garantiza una precisión mayor que 4 dígitos, porque las mantisas que aparecen en ella son aproximaciones. Esto quiere decir que si en un problema se necesita una precisión *mayor* que la de 4 dígitos, no se puede emplear la Tabla 1. Si se puede encontrar el logaritmo de un número de n dígitos en tablas más extensas, se permite la interpolación para números que tengan $n + 1$ dígitos, y los números se deben redondear a n dígitos.

También es posible usar el método de interpolación para calcular x cuando se da $\log x$. Si se usa la Tabla 1, se puede determinar x con 4 cifras significativas. En este caso, el dato es la *ordenada* de un punto en la gráfica de $y = \log x$, y se pide determinar la *abscisa*. Puede usarse un argumento geométrico semejante al presentado antes para justificar el procedimiento que se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 6

Determinar x con 4 cifras significativas, si $\log x = 1.7949$.

SOLUCIÓN La mantisa 0.7949 no aparece en la Tabla 1, pero es factible localizarla entre elementos adyacentes: los de las mantisas que corresponden a 6.230 y 6.240. Se ordena el trabajo como sigue:

$$0.1\left\{\begin{array}{l} r\left\{\begin{array}{l}\log 62.30 \approx 1.7945\\ \log x \quad\ \approx 1.7949\end{array}\right\}0.0004\\ \log 62.40 \approx 1.7952\end{array}\right\}0.0007$$

Esto lleva a la proporción

$$\frac{r}{0.1} = \frac{0.0004}{0.0007} = \frac{4}{7}$$

$$r = (0.1)\left(\tfrac{4}{7}\right) \approx 0.06.$$

Por lo tanto,

$$x \approx 62.30 + 0.06$$

$$x \approx 62.36.$$

Tabla 4: Valores de las funciones trigonométricas

Se pueden aplicar métodos de Cálculo para determinar, con un cierto grado de precisión, todos los valores de las funciones trigonométricas en el intervalo $[0, \pi/2]$ de t, o bien, lo que es equivalente, en el intervalo $[0°, 90°]$. En la Tabla 4, de la cual se reproduce a continuación una parte, se presentan aproximaciones a esos valores con 4 decimales.

En dicha tabla, $0 \le t \le 1.5708$. El número 1.5708 es una aproximación a $\pi/2$ con cuatro decimales. La tabla está ordenada de modo que sea posible encontrar directamente los valores de la función que corresponden a ángulos en grados. Las medidas angulares se presentan de 0° a 90°, en intervalos de 10′. La razón por la que t varía en intervalos aproximados de 0.0029 es que $10' \approx 0.0029$ radianes.

t	t grados	sen t	cos t	tan t	cot t	sec t	csç t		
.4887	**28°00′**	.4695	.8829	.5317	1.881	1.133	2.130	**62°00′**	1.0821
.4916	10	.4720	.8816	.5354	1.868	1.134	2.118	50	1.0792
.4945	20	.4746	.8802	.5392	1.855	1.136	2.107	40	1.0763
.4974	30	.4772	.8788	.5430	1.842	1.138	2.096	30	1.0734
.5003	40	.4797	.8774	.5467	1.829	1.140	2.085	20	1.0705
.5032	50	.4823	.8760	.5505	1.816	1.142	2.074	10	1.0676
.5061	**29°00′**	.4848	.8746	.5543	1.804	1.143	2.063	**61°00′**	1.0647
.5091	10	.4874	.8732	.5581	1.792	1.145	2.052	50	1.0617
.5120	20	.4899	.8718	.5619	1.780	1.147	2.041	40	1.0588
.5149	30	.4924	.8704	.5658	1.767	1.149	2.031	30	1.0559
.5178	40	.4950	.8689	.5696	1.756	1.151	2.020	20	1.0530
.5207	50	.4975	.8675	.5735	1.744	1.153	2.010	10	1.0501
.5236	**30°00′**	.5000	.8660	.5774	1.732	1.155	2.000	**60°00′**	1.0472
.5265	10	.5025	.8646	.5812	1.720	1.157	1.990	50	1.0443
.5294	20	.5050	.8631	.5851	1.709	1.159	1.980	40	1.0414
.5323	30	.5075	.8616	.5890	1.698	1.161	1.970	30	1.0385
.5352	40	.5100	.8601	.5930	1.686	1.163	1.961	20	1.0356
.5381	50	.5125	.8587	.5969	1.675	1.165	1.951	10	1.0327
		cos t	sen t	cot t	tan t	csc t	sec t	t grados	t

Para localizar los valores de las funciones trigonométricas si $0 \le t \le 0.7854 \approx \pi/4$, o bien $0° \le \theta \le 45°$ se emplean los encabezados *superiores* de las columnas. Por ejemplo, en la parte presentada de la tabla,

$$\operatorname{sen} 0.5003 \approx 0.4797 \qquad \tan 28°30' \approx 0.5430$$
$$\cos 0.4945 \approx 0.8802 \qquad \sec 29°00' \approx 1.143$$
$$\cot 0.5120 \approx 1.780 \qquad \csc 29°40' \approx 2.020.$$

Si $0.7854 \le t \le 1.5708$, o bien si $45° \le \theta \le 90°$, se utilizan los letreros *inferiores* de las columnas. Por ejemplo,

$$\operatorname{sen} 1.0705 \approx 0.8774 \qquad \csc 62°00' \approx 1.133$$
$$\cos 1.0530 \approx 0.4950 \qquad \cot 61°10' \approx 0.5505$$
$$\tan 1.0821 \approx 1.881 \qquad \sec 60°30' \approx 2.031.$$

La razón por la cual esa tabla está dispuesta como aparece, es consecuencia del hecho de que

$$\operatorname{sen} t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right), \qquad \cot t = \tan\left(\frac{\pi}{2} - t\right), \qquad \csc t = \sec\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$$

o bien, equivalentemente,

$$\operatorname{sen}\theta = \cos(90° - \theta), \qquad \cot\theta = \tan(90° - \theta), \qquad \csc\theta = \sec(90° - \theta).$$

Por ejemplo, como se ve en la tabla,

$$\operatorname{sen} 29° = \cos(90° - 29°) = \cos 61°$$
$$\cot 28°20' = \tan(90° - 28°20') = \tan 61°40'.$$

Para determinar los valores de funciones cuando t queda *entre* números que aparezcan en la tabla, se recurre a la interpolación lineal. Igualmente, dado un valor como sen $t = 0.6371$, se consulta el contenido de la Tabla 4 y se usa la citada interpolación, en caso necesario, para obtener la aproximación a t. Si t está expresada en grados, se redondea al minuto más cercano.

En los ejemplos siguientes se ilustra el empleo de la interpolación en la Tabla 4.

EJEMPLO 7

Calcular, aproximadamente, tan 24°16′.

SOLUCIÓN Se consulta la Tabla 4 y se interpola:

$$10' \left\{ \begin{array}{l} 6' \left\{ \begin{array}{l} \tan 24°10' \approx 0.4487 \\ \tan 24°16' = \ ? \end{array} \right\} d \\ \tan 24°20' \approx 0.4522 \end{array} \right\} 0.0035$$

$$\frac{d}{0.0035} = \frac{6}{10}$$

$$d = \tfrac{6}{10}(0.0035) \approx 0.0021$$

Así,

$$\tan 24°16' \approx 0.4487 + 0.0021$$

$$\tan 24°16' \approx 0.4508.$$

EJEMPLO 8

Determinar cos (− 117°47′).

SOLUCIÓN El ángulo queda en el cuadrante III. El lector debe comprobar que el ángulo de referencia sea 62°13′. Por lo tanto, cos (− 117°47′) = − cos 62°13′. Acto seguido, se interpola entre valores de la Tabla 4:

$$10' \left\{ \begin{array}{l} 3' \left\{ \begin{array}{l} \cos 62°10' \approx 0.4669 \\ \cos 62°13' = \ ? \end{array} \right\} d \\ \cos 62°20' \approx 0.4643 \end{array} \right\} 0.0026$$

$$\frac{d}{0.0026} = \frac{3}{10}$$

$$d = \tfrac{3}{10}(0.0026) \approx 0.0008$$

Como la función coseno es decreciente,

$$\cos 62°13' \approx 0.4669 - 0.0008$$

$$\cos 62°13' \approx 0.4661$$

$$\cos (-117°47') \approx -0.4661.$$

EJEMPLO 9

Determinar el número real positivo mínimo t, aproximadamente, tal que sen $t = 0.6635$.

SOLUCIÓN Se ubica a 0.6635 entre elementos sucesivos de la columna seno en la Tabla 4, y luego se interpola:

$$0.0029\left\{\begin{array}{l} d\left\{\begin{array}{ll}\operatorname{sen} 0.7243 & \approx 0.6626\\ \operatorname{sen} t & = 0.6635\end{array}\right\}0.0009 \\ \operatorname{sen} 0.7272 \approx 0.6648 \end{array}\right\} 0.0022$$

$$\frac{d}{0.0029} = \frac{0.0009}{0.0022}$$

$$d = \tfrac{9}{22}(0.0029) \approx 0.0012$$

Por lo tanto,

$$t \approx 0.7243 + 0.0012$$

$$t \approx 0.7255.$$

EJEMPLO 10

En sen $\theta = -0.7963$, aproximar el valor en grados de todos los ángulos θ que estén en el intervalo $[0°, 360°]$.

SOLUCIÓN Sea θ' el ángulo de referencia, tal que sen $\theta' = 0.7963$. Se interpola en la Tabla 4:

$$10'\left\{\begin{array}{l} d\left\{\begin{array}{ll}\operatorname{sen} 52°40' & \approx 0.7951\\ \operatorname{sen} \theta' & = 0.7963\end{array}\right\}0.0012 \\ \operatorname{sen} 52°50' \approx 0.7969 \end{array}\right\} 0.0018$$

$$\frac{d}{10} = \frac{0.0012}{0.0018}$$

$$d = 10(\tfrac{12}{18}) \approx 7'$$

Por lo tanto,

$$\theta' \approx 52°47'.$$

Como sen θ es negativo, el ángulo θ queda en el cuadrante III o en el IV. Con el ángulo de referencia $52°47'$, se tiene que

$$\theta \approx 180° + 52°47', \quad \text{o bien} \quad \theta \approx 232°47'$$

$$\theta \approx 360° - 52°47', \quad \text{o bien} \quad \theta \approx 307°13'.$$

EJERCICIOS *A.1*

Ejercicios 1 – 16: Con la Tabla 1 y las leyes de los logaritmos, obtenga un valor aproximado de los logaritmos comunes de los números dados.

1 347; 0.00347; 3.47 **2** 86.2; 8620; 0.862

3 0.54; 540; 540,000 **4** 208; 2.08; 20,800

5 60.2; 0.0000602; 602 **6** 5; 0.5; 0.0005

7 $(44.9)^2$; $(44.9)^{1/2}$; $(44.9)^{-2}$

8 $(1810)^4$; $(1810)^{40}$; $(1810)^{1/4}$

9 $(0.943)^3$; $(0.943)^{-3}$; $(9.943)^{1/3}$

10 $(0.017)^{10}$; $10^{0.017}$; $10^{1.43}$

11 $(638)(17.3)$

12 $\dfrac{(2.73)(78.5)}{621}$

13 $\dfrac{(47.4)^3}{(29.5)^2}$

14 $\dfrac{(897)^4}{\sqrt{17.8}}$

15 $\sqrt[3]{20.6}(371)^3$

16 $\dfrac{(0.0048)^{10}}{\sqrt{0.29}}$

Ejercicios 17 – 30: Use la Tabla 1 para determinar un valor decimal aproximado de x.

17 $\log x = 3.6274$

18 $\log x = 1.8965$

19 $\log x = 0.9469$

20 $\log x = 0.5729$

21 $\log x = 5.2095$

22 $\log x = 6.7300 - 10$

23 $\log x = 9.7348 - 10$

24 $\log x = 7.6739 - 10$

25 $\log x = 8.8306 - 10$

26 $\log x = 4.9680$

27 $\log x = 2.2765$

28 $\log x = 3.0043$

29 $\log x = -1.6253$

30 $\log x = -2.2118$

Ejercicios 31 – 50: Con interpolaciones en la Tabla 1, obtenga el valor aproximado del logaritmo común del número.

31 25.48

32 421.6

33 5363

34 0.3817

35 0.001259

36 69,450

37 123,400

38 0.02129

39 0.7786

40 1.203

41 384.7

42 54.44

43 0.9462

44 7259

45 66,590

46 0.001428

47 0.04321

48 400,100

49 3.003

50 9.786

Ejercicios 51 – 70: Aproxime x mediante interpolación en la Tabla 1.

51 $\log x = 1.4437$

52 $\log x = 3.7455$

53 $\log x = 4.6931$

54 $\log x = 0.5883$

55 $\log x = 9.1664 - 10$

56 $\log x = 8.3902 - 10$

57 $\log x = 3.8153 - 6$

58 $\log x = 5.9306 - 9$

59 $\log x = 2.3705$

60 $\log x = 4.2867$

61 $\log x = 0.1358$

62 $\log x = 0.0194$

63 $\log x = 8.9752 - 10$

64 $\log x = 2.4979 - 5$

65 $\log x = 5.0409$

66 $\log x = 1.3796$

67 $\log x = -2.8712$

68 $\log x = -1.8164$

69 $\log x = -0.6123$

70 $\log x = -3.1426$

Ejercicios 71 – 82: Aproxime el número mediante interpolación en la Tabla 4.

71 sen 0.46

72 cos 0.82

73 tan 3

74 cot 6

75 sec $\frac{1}{4}$

76 csc 1.54

77 cos 37°43′

78 sen 22°34′

79 cot 62°27′

80 tan 57°16′

81 csc 16°55′

82 sec 9°12′

Ejercicios 83 – 88: Mediante interpolación en la Tabla 4, obtenga el valor aproximado del número positivo mínimo, t, para el cual sea cierta la igualdad.

83 $\cos t = 0.8620$

84 $\operatorname{sen} t = 0.6612$

85 $\tan t = 4.501$

86 $\sec t = 3.641$

87 $\csc t = 1.436$

88 $\cot t = 1.165$

Ejercicios 89 – 96: Con interpolación en la Tabla 4, aproxime al minuto más cercano la medida, en grados, de todos los ángulos θ que estén en el intervalo $[0°, 360°)$.

89 $\operatorname{sen} \theta = 0.3672$

90 $\cos \theta = 0.8426$

91 $\tan \theta = 0.5042$

92 $\cot \theta = 1.348$

93 $\cos \theta = 0.3465$

94 $\csc \theta = 1.219$

95 $\sec \theta = 1.385$

96 $\operatorname{sen} \theta = 0.7534$

A.II TABLAS DE LOGARITMOS Y FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Tabla I: Logaritmos comunes

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3927	.3945	.3962
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298
2.7	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222
4.2	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425
4.4	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712
4.7	.6721	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551
5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627
5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701
5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774
6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987
6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122
6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189
6.6	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254
6.7	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8299	.8306	.8312	.8319
6.8	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382
6.9	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445
7.0	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506
7.1	.8513	.8519	.8525	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567
7.2	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627
7.3	.8633	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8669	.8675	.8681	.8686
7.4	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745
7.5	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802
7.6	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859
7.7	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915
7.8	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8971
7.9	.8976	.8982	.8987	.8993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025
8.0	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079
8.1	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133
8.2	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186
8.3	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238
8.4	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289
8.5	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340
8.6	.9345	.9350	.9355	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390
8.7	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440
8.8	.9445	.9450	.9455	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489
8.9	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.9523	.9528	.9533	.9538
9.0	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586
9.1	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633
9.2	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9666	.9671	.9675	.9680
9.3	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727
9.4	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773
9.5	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818
9.6	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863
9.7	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908
9.8	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952
9.9	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996

Tabla 2: Valores de la función exponencial natural

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
0.00	1.0000	1.0000	2.50	12.182	0.0821
0.05	1.0513	0.9512	2.60	13.464	0.0743
0.10	1.1052	0.9048	2.70	14.880	0.0672
0.15	1.1618	0.8607	2.80	16.445	0.0608
0.20	1.2214	0.8187	2.90	18.174	0.0550
0.25	1.2840	0.7788	3.00	20.086	0.0498
0.30	1.3499	0.7408	3.10	22.198	0.0450
0.35	1.4191	0.7047	3.20	24.533	0.0408
0.40	1.4918	0.6703	3.30	27.113	0.0369
0.45	1.5683	0.6376	3.40	29.964	0.0334
0.50	1.6487	0.6065	3.50	33.115	0.0302
0.55	1.7333	0.5769	3.60	36.598	0.0273
0.60	1.8221	0.5488	3.70	40.447	0.0247
0.65	1.9155	0.5220	3.80	44.701	0.0224
0.70	2.0138	0.4966	3.90	49.402	0.0202
0.75	2.1170	0.4724	4.00	54.598	0.0183
0.80	2.2255	0.4493	4.10	60.340	0.0166
0.85	2.3396	0.4274	4.20	66.686	0.0150
0.90	2.4596	0.4066	4.30	73.700	0.0136
0.95	2.5857	0.3867	4.40	81.451	0.0123
1.00	2.7183	0.3679	4.50	99.017	0.0111
1.10	3.0042	0.3329	4.60	99.484	0.0101
1.20	3.3201	0.3012	4.70	109.95	0.0091
1.30	3.6693	0.2725	4.80	121.51	0.0082
1.40	4.0552	0.2466	4.90	134.29	0.0074
1.50	4.4817	0.2231	5.00	148.41	0.0067
1.60	4.9530	0.2019	6.00	403.43	0.0025
1.70	5.4739	0.1827	7.00	1096.6	0.0009
1.80	6.0496	0.1653	8.00	2981.0	0.0003
1.90	6.6859	0.1496	9.00	8103.1	0.0001
2.00	7.3891	0.1353	10.00	22026.0	0.00005
2.10	8.1662	0.1225			
2.20	9.0250	0.1108			
2.30	9.9742	0.1003			
2.40	11.0232	0.0907			

Tabla 3: Logaritmos naturales

n	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0*		7.697	8.391	8.796	9.084	9.307	9.489	9.643	9.777	9.895
1	0.000	0.095	0.182	0.262	0.336	0.405	0.470	0.531	0.588	0.642
2	0.693	0.742	0.788	0.833	0.875	0.916	0.956	0.993	1.030	1.065
3	1.099	1.131	1.163	1.194	1.224	1.253	1.281	1.308	1.335	1.361
4	1.386	1.411	1.435	1.459	1.482	1.504	1.526	1.548	1.569	1.589
5	1.609	1.629	1.649	1.668	1.686	1.705	1.723	1.740	1.758	1.775
6	1.792	1.808	1.825	1.841	1.856	1.872	1.887	1.902	1.917	1.932
7	1.946	1.960	1.974	1.988	2.001	2.015	2.028	2.041	2.054	2.067
8	2.079	2.092	2.104	2.116	2.128	2.140	2.152	2.163	2.175	2.186
9	2.197	2.208	2.219	2.230	2.241	2.251	2.262	2.272	2.282	2.293
10	2.303	2.313	2.322	2.332	2.342	2.351	2.361	2.370	2.380	2.389

* Restar 10 si $n < 1$. Por ejemplo, $\ln 0.3 \approx 8.796 - 10 = -1.204$.

Tabla 4: Valores de las funciones trigonométricas

t	t grados	sen t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc t		
.0000	**0°00′**	.0000	1.0000	.0000		1.000		**90°00′**	1.5708
.0029	10	.0029	1.0000	.0029	343.8	1.000	343.8	50	1.5679
.0058	20	.0058	1.0000	.0058	171.9	1.000	171.9	40	1.5650
.0087	30	.0087	1.0000	.0087	114.6	1.000	114.6	30	1.5621
.0116	40	.0116	.9999	.0116	85.94	1.000	85.95	20	1.5592
.0145	50	.0145	.9999	.0145	68.75	1.000	68.76	10	1.5563
.0175	**1°00′**	.0175	.9998	.0175	57.29	1.000	57.30	**89°00′**	1.5533
.0204	10	.0204	.9998	.0204	49.10	1.000	49.11	50	1.5504
.0233	20	.0233	.9997	.0233	42.96	1.000	42.98	40	1.5475
.0262	30	.0262	.9997	.0262	38.19	1.000	38.20	30	1.5446
.0291	40	.0291	.9996	.0291	34.37	1.000	34.38	20	1.5417
.0320	50	.0320	.9995	.0320	31.24	1.001	31.26	10	1.5388
.0349	**2°00′**	.0349	.9994	.0349	28.64	1.001	28.65	**88°00′**	1.5359
.0378	10	.0378	.9993	.0378	26.43	1.001	26.45	50	1.5330
.0407	20	.0407	.9992	.0407	24.54	1.001	24.56	40	1.5301
.0436	30	.0436	.9990	.0437	22.90	1.001	22.93	30	1.5272
.0465	40	.0465	.9989	.0466	21.47	1.001	21.49	20	1.5243
.0495	50	.0494	.9988	.0495	20.21	1.001	20.23	10	1.5213
.0524	**3°00′**	.0523	.9986	.0524	19.08	1.001	19.11	**87°00′**	1.5184
.0553	10	.0552	.9985	.0553	18.07	1.002	18.10	50	1.5155
.0582	20	.0581	.9983	.0582	17.17	1.002	17.20	40	1.5126
.0611	30	.0610	.9981	.0612	16.35	1.002	16.38	30	1.5097
.0640	40	.0640	.9980	.0641	15.60	1.002	15.64	20	1.5068
.0669	50	.0669	.9978	.0670	14.92	1.002	14.96	10	1.5039
.0698	**4°00′**	.0698	.9976	.0699	14.30	1.002	14.34	**86°00′**	1.5010
.0727	10	.0727	.9974	.0729	13.73	1.003	13.76	50	1.4981
.0756	20	.0756	.9971	.0758	13.20	1.003	13.23	40	1.4952
.0785	30	.0785	.9969	.0787	12.71	1.003	12.75	30	1.4923
.0814	40	.0814	.9967	.0816	12.25	1.003	12.29	20	1.4893
.0844	50	.0843	.9964	.0846	11.83	1.004	11.87	10	1.4864
.0873	**5°00′**	.0872	.9962	.0875	11.43	1.004	11.47	**85°00′**	1.4835
.0902	10	.0901	.9959	.0904	11.06	1.004	11.10	50	1.4806
.0931	20	.0929	.9957	.0934	10.71	1.004	10.76	40	1.4777
.0960	30	.0958	.9954	.0963	10.39	1.005	10.43	30	1.4748
.0989	40	.0987	.9951	.0992	10.08	1.005	10.13	20	1.4719
.1018	50	.1016	.9948	.1022	9.788	1.005	9.839	10	1.4690
.1047	**6°00′**	.1045	.9945	.1051	9.514	1.006	9.567	**84°00′**	1.4661
.1076	10	.1074	.9942	.1080	9.255	1.006	9.309	50	1.4632
.1105	20	.1103	.9939	.1110	9.010	1.006	9.065	40	1.4603
.1134	30	.1132	.9936	.1139	8.777	1.006	8.834	30	1.4573
.1164	40	.1161	.9932	.1169	8.556	1.007	8.614	20	1.4544
.1193	50	.1190	.9929	.1198	8.345	1.007	8.405	10	1.4515
.1222	**7°00′**	.1219	.9925	.1228	8.144	1.008	8.206	**83°00′**	1.4486
		cos t	sen t	cot t	tan t	csc t	sec t	t grados	t

t	t grados	sen t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc t		
.1222	**7°00′**	.1219	.9925	.1228	8.144	1.008	8.206	**83°00′**	1.4486
.1251	10	.1248	.9922	.1257	7.953	1.008	8.016	50	1.4457
.1280	20	.1276	.9918	.1287	7.770	1.008	7.834	40	1.4428
.1309	30	.1305	.9914	.1317	7.596	1.009	7.661	30	1.4399
.1338	40	.1334	.9911	.1346	7.429	1.009	7.496	20	1.4370
.1367	50	.1363	.9907	.1376	7.269	1.009	7.337	10	1.4341
.1396	**8°00′**	.1392	.9903	.1405	7.115	1.010	7.185	**82°00′**	1.4312
.1425	10	.1421	.9899	.1435	6.968	1.010	7.040	50	1.4283
.1454	20	.1449	.9894	.1465	6.827	1.011	6.900	40	1.4254
.1484	30	.1478	.9890	.1495	6.691	1.011	6.765	30	1.4224
.1513	40	.1507	.9886	.1524	6.561	1.012	6.636	20	1.4195
.1542	50	.1536	.9881	.1554	6.435	1.012	6.512	10	1.4166
.1571	**9°00′**	.1564	.9877	.1584	6.314	1.012	6.392	**81°00′**	1.4137
.1600	10	.1593	.9872	.1614	6.197	1.013	6.277	50	1.4108
.1629	20	.1622	.9868	.1644	6.084	1.013	6.166	40	1.4079
.1658	30	.1650	.9863	.1673	5.976	1.014	6.059	30	1.4050
.1687	40	.1679	.9858	.1703	5.871	1.014	5.955	20	1.4021
.1716	50	.1708	.9853	.1733	5.769	1.015	5.855	10	1.3992
.1745	**10°00′**	.1736	.9848	.1763	5.671	1.015	5.759	**80°00′**	1.3963
.1774	10	.1765	.9843	.1793	5.576	1.016	5.665	50	1.3934
.1804	20	.1794	.9838	.1823	5.485	1.016	5.575	40	1.3904
.1833	30	.1822	.9833	.1853	5.396	1.017	5.487	50	1.3875
.1862	40	.1851	.9827	.1883	5.309	1.018	5.403	20	1.3846
.1891	50	.1880	.9822	.1914	5.226	1.018	5.320	10	1.3817
.1920	**11°00′**	.1908	.9816	.1944	5.145	1.019	5.241	**79°00′**	1.3788
.1949	10	.1937	.9811	.1974	5.066	1.019	5.164	50	1.3759
.1978	20	.1965	.9805	.2004	4.989	1.020	5.089	40	1.3730
.2007	30	.1994	.9799	.2035	4.915	1.020	5.016	30	1.3701
.2036	40	.2022	.9793	.2065	4.843	1.021	4.945	20	1.3672
.2065	50	.2051	.9787	.2095	4.773	1.022	4.876	10	1.3643
.2094	**12°00′**	.2079	.9781	.2126	4.705	1.022	4.810	**78°00′**	1.3614
.2123	10	.2108	.9775	.2156	4.638	1.023	4.745	50	1.3584
.2153	20	.2136	.9769	.2186	4.574	1.024	4.682	40	1.3555
.2182	30	.2164	.9763	.2217	4.511	1.024	4.620	30	1.3526
.2211	40	.2193	.9757	.2247	4.449	1.025	4.560	20	1.3497
.2240	50	.2221	.9750	.2278	4.390	1.026	4.502	10	1.3468
.2269	**13°00′**	.2250	.9744	.2309	4.331	1.026	4.445	**77°00′**	1.3439
.2298	10	.2278	.9737	.2339	4.275	1.027	4.390	50	1.3410
.2327	20	.2306	.9730	.2370	4.219	1.028	4.336	40	1.3381
.2356	30	.2334	.9724	.2401	4.165	1.028	4.284	30	1.3352
.2385	40	.2363	.9717	.2432	4.113	1.029	4.232	20	1.3323
.2414	50	.2391	.9710	.2462	4.061	1.030	4.182	10	1.3294
.2443	**14°00′**	.2419	.9703	.2493	4.011	1.031	4.134	**76°00′**	1.3265
		cos t	sen t	cot t	tan t	csc t	sec t	t grados	t

Tabla 4: Valores de las funciones trigonométricas (cont.)

t	t grados	sen t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc t		
.2443	**14°00′**	.2419	.9703	.2493	4.011	1.031	4.134	**76°00′**	1.3265
.2473	10	.2447	.9696	.2524	3.962	1.031	4.086	50	1.3235
.2502	20	.2476	.9689	.2555	3.914	1.032	4.039	40	1.3206
.2531	30	.2504	.9681	.2586	3.867	1.033	3.994	30	1.3177
.2560	40	.2532	.9674	.2617	3.821	1.034	3.950	20	1.3148
.2589	50	.2560	.9667	.2648	3.776	1.034	3.906	10	1.3119
.2618	**15°00′**	.2588	.9659	.2679	3.732	1.035	3.864	**75°00′**	1.3090
.2647	10	.2616	.9652	.2711	3.689	1.036	3.822	50	1.3061
.2676	20	.2644	.9644	.2742	3.647	1.037	3.782	40	1.3032
.2705	30	.2672	.9636	.2773	3.606	1.038	3.742	30	1.3003
.2734	40	.2700	.9628	.2805	3.566	1.039	3.703	20	1.2974
.2763	50	.2728	.9621	.2836	3.526	1.039	3.665	10	1.2945
.2793	**16°00′**	.2756	.9613	.2867	3.487	1.040	3.628	**74°00′**	1.2915
.2822	10	.2784	.9605	.2899	3.450	1.041	3.592	50	1.2886
.2851	20	.2812	.9596	.2931	3.412	1.042	3.556	40	1.2857
.2880	30	.2840	.9588	.2962	3.376	1.043	3.521	30	1.2828
.2909	40	.2868	.9580	.2994	3.340	1.044	3.487	20	1.2799
.2938	50	.2896	.9572	.3026	3.305	1.045	3.453	10	1.2770
.2967	**17°00′**	.2924	.9563	.3057	3.271	1.046	3.420	**73°00′**	1.2741
.2996	10	.2952	.9555	.3089	3.237	1.047	3.388	50	1.2712
.3025	20	.2979	.9546	.3121	3.204	1.048	3.356	40	1.2683
.3054	30	.3007	.9537	.3153	3.172	1.049	3.326	30	1.2654
.3083	40	.3035	.9528	.3185	3.140	1.049	3.295	20	1.2625
.3113	50	.3062	.9520	.3217	3.108	1.050	3.265	10	1.2595
.3142	**18°00′**	.3090	.9511	.3249	3.078	1.051	3.236	**72°00′**	1.2566
.3171	10	.3118	.9502	.3281	3.047	1.052	3.207	50	1.2537
.3200	20	.3145	.9492	.3314	3.018	1.053	3.179	40	1.2508
.3229	30	.3173	.9483	.3346	2.989	1.054	3.152	30	1.2479
.3258	40	.3201	.9474	.3378	2.960	1.056	3.124	20	1.2450
.3287	50	.3228	.9465	.3411	2.932	1.057	3.098	10	1.2421
.3316	**19°00′**	.3256	.9455	.3443	2.904	1.058	3.072	**71°00′**	1.2392
.3345	10	.3283	.9446	.3476	2.877	1.059	3.046	50	1.2363
.3374	20	.3311	.9436	.3508	2.850	1.060	3.021	40	1.2334
.3403	30	.3338	.9426	.3541	2.824	1.061	2.996	30	1.2305
.3432	40	.3365	.9417	.3574	2.798	1.062	2.971	20	1.2275
.3462	50	.3393	.9407	.3607	2.773	1.063	2.947	10	1.2246
.3491	**20°00′**	.3420	.9397	.3640	2.747	1.064	2.924	**70°00′**	1.2217
.3520	10	.3448	.9387	.3673	2.723	1.065	2.901	50	1.2188
.3549	20	.3475	.9377	.3706	2.699	1.066	2.878	40	1.2159
.3578	30	.3502	.9367	.3739	2.675	1.068	2.855	30	1.2130
.3607	40	.3529	.9356	.3772	2.651	1.069	2.833	20	1.2101
.3636	50	.3557	.9346	.3805	2.628	1.070	2.812	10	1.2072
.3665	**21°00′**	.3584	.9336	.3839	2.605	1.071	2.790	**69°00′**	1.2043
		cos t	sen t	cot t	tan t	csc t	sec t	t grados	t

t	t grados	sen t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc t		
.3665	**21°00′**	.3584	.9336	.3839	2.605	1.071	2.790	**69°00′**	1.2043
.3694	10	.3611	.9325	.3872	2.583	1.072	2.769	50	1.2014
.3723	20	.3638	.9315	.3906	2.560	1.074	2.749	40	1.1985
.3752	30	.3665	.9304	.3939	2.539	1.075	2.729	30	1.1956
.3782	40	.3692	.9293	.3973	2.517	1.076	2.709	20	1.1926
.3811	50	.3719	.9283	.4006	2.496	1.077	2.689	10	1.1897
.3840	**22°00′**	.3746	.9272	.4040	2.475	1.079	2.669	**68°00′**	1.1868
.3869	10	.3773	.9261	.4074	2.455	1.080	2.650	50	1.1839
.3898	20	.3800	.9250	.4108	2.434	1.081	2.632	40	1.1810
.3927	30	.3827	.9239	.4142	2.414	1.082	2.613	30	1.1781
.3956	40	.3854	.9228	.4176	2.394	1.084	2.595	20	1.1752
.3985	50	.3881	.9216	.4210	2.375	1.085	2.577	10	1.1723
.4014	**23°00′**	.3907	.9205	.4245	2.356	1.086	2.559	**67°00′**	1.1694
.4043	10	.3934	.9194	.4279	2.337	1.088	2.542	50	1.1665
.4072	20	.3961	.9182	.4314	2.318	1.089	2.525	40	1.1636
.4102	30	.3987	.9771	.4348	2.300	1.090	2.508	30	1.1606
.4131	40	.4014	.9159	.4383	2.282	1.092	2.491	20	1.1577
.4160	50	.4041	.9147	.4417	2.264	1.093	2.475	10	1.1548
.4189	**24°00′**	.4067	.9135	.4452	2.246	1.095	2.459	**66°00′**	1.1519
.4218	10	.4094	.9124	.4487	2.229	1.096	2.443	50	1.1490
.4247	20	.4120	.9112	.4522	2.211	1.097	2.427	40	1.1461
.4276	30	.4147	.9100	.4557	2.194	1.099	2.411	30	1.1432
.4305	40	.4173	.9088	.4592	2.177	1.100	2.396	20	1.1403
.4334	50	.4200	.9075	.4628	2.161	1.102	2.381	10	1.1374
.4363	**25°00′**	.4226	.9063	.4663	2.145	1.103	2.366	**65°00′**	1.1345
.4392	10	.4253	.9051	.4699	2.128	1.105	2.352	50	1.1316
.4422	20	.4279	.9038	.4734	2.112	1.106	2.337	40	1.1286
.4451	30	.4305	.9026	.4770	2.097	1.108	2.323	30	1.1257
.4480	40	.4331	.9013	.4806	2.081	1.109	2.309	20	1.1228
.4509	50	.4358	.9001	.4841	2.066	1.111	2.295	10	1.1199
.4538	**26°00′**	.4384	.8988	.4877	2.050	1.113	2.281	**64°00′**	1.1170
.4567	10	.4410	.8975	.4913	2.035	1.114	2.268	50	1.1141
.4596	20	.4436	.8962	.4950	2.020	1.116	2.254	40	1.1112
.4625	30	.4462	.8949	.4986	2.006	1.117	2.241	30	1.1083
.4654	40	.4488	.8936	.5022	1.991	1.119	2.228	20	1.1054
.4683	50	.4514	.8923	.5059	1.977	1.121	2.215	10	1.1025
.4712	**27°00′**	.4540	.8910	.5095	1.963	1.122	2.203	**63°00′**	1.0996
.4741	10	.4566	.8897	.5132	1.949	1.124	2.190	50	1.0966
.4771	20	.4592	.8884	.5169	1.935	1.126	2.178	40	1.0937
.4800	30	.4617	.8870	.5206	1.921	1.127	2.166	30	1.0908
.4829	40	.4643	.8857	.5243	1.907	1.129	2.154	20	1.0879
.4858	50	.4669	.8843	.5280	1.894	1.131	2.142	10	1.0850
.4887	**28°00′**	.4695	.8829	.5317	1.881	1.133	2.130	**62°00′**	1.0821
		cos t	sen t	cot t	tan t	csc t	sec t	t grados	t

Tabla 4: Valores de las funciones trigonométricas (cont.)

t	t grados	sen t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc t		
.4887	**28°00′**	.4695	.8829	.5317	1.881	1.133	2.130	**62°00′**	1.0821
.4916	10	.4720	.8816	.5354	1.868	1.134	2.118	50	1.0792
.4945	20	.4746	.8802	.5392	1.855	1.136	2.107	40	1.0763
.4974	30	.4772	.8788	.5430	1.842	1.138	2.096	30	1.0734
.5003	40	.4797	.8774	.5467	1.829	1.140	2.085	20	1.0705
.5032	50	.4823	.8760	.5505	1.816	1.142	2.074	10	1.0676
.5061	**29°00′**	.4848	.8746	.5543	1.804	1.143	2.063	**61°00′**	1.0647
.5091	10	.4874	.8732	.5581	1.792	1.145	2.052	50	1.0617
.5120	20	.4899	.8718	.5619	1.780	1.147	2.041	40	1.0588
.5149	30	.4924	.8704	.5658	1.767	1.149	2.031	30	1.0559
.5178	40	.4950	.8689	.5696	1.756	1.151	2.020	20	1.0530
.5207	50	.4975	.8675	.5735	1.744	1.153	2.010	10	1.0501
.5236	**30°00′**	.5000	.8660	.5774	1.732	1.155	2.000	**60°00′**	1.0472
.5265	10	.5025	.8646	.5812	1.720	1.157	1.990	50	1.0443
.5294	20	.5050	.8631	.5851	1.709	1.159	1.980	40	1.0414
.5323	30	.5075	.8616	.5890	1.698	1.161	1.970	30	1.0385
.5352	40	.5100	.8601	.5930	1.686	1.163	1.961	20	1.0356
.5381	50	.5125	.8587	.5969	1.675	1.165	1.951	10	1.0327
.5411	**31°00′**	.5150	.8572	.6009	1.664	1.167	1.942	**59°00′**	1.0297
.5440	10	.5175	.8557	.6048	1.653	1.169	1.932	50	1.0268
.5469	20	.5200	.8542	.6088	1.643	1.171	1.923	40	1.0239
.5498	30	.5225	.8526	.6128	1.632	1.173	1.914	30	1.0210
.5527	40	.5250	.8511	.6168	1.621	1.175	1.905	20	1.0181
.5556	50	.5275	.8496	.6208	1.611	1.177	1.896	10	1.0152
.5585	**32°00′**	.5299	.8480	.6249	1.600	1.179	1.887	**58°00′**	1.0123
.5614	10	.5324	.8465	.6289	1.590	1.181	1.878	50	1.0094
.5643	20	.5348	.8450	.6330	1.580	1.184	1.870	40	1.0065
.5672	30	.5373	.8434	.6371	1.570	1.186	1.861	30	1.0036
.5701	40	.5398	.8418	.6412	1.560	1.188	1.853	20	1.0007
.5730	50	.5422	.8403	.6453	1.550	1.190	1.844	10	.9977
.5760	**33°00′**	.5446	.8387	.6494	1.540	1.192	1.836	**57°00′**	.9948
.5789	10	.5471	.8371	.6536	1.530	1.195	1.828	50	.9919
.5818	20	.5495	.8355	.6577	1.520	1.197	1.820	40	.9890
.5847	30	.5519	.8339	.6619	1.511	1.199	1.812	30	.9861
.5876	40	.5544	.8323	.6661	1.501	1.202	1.804	20	.9832
.5905	50	.5568	.8307	.6703	1.492	1.204	1.796	10	.9803
.5934	**34°00′**	.5592	.8290	.6745	1.483	1.206	1.788	**56°00′**	.9774
.5963	10	.5616	.8274	.6787	1.473	1.209	1.781	50	.9745
.5992	20	.5640	.8258	.6830	1.464	1.211	1.773	40	.9716
.6021	30	.5664	.8241	.6873	1.455	1.213	1.766	30	.9687
.6050	40	.5688	.8225	.6916	1.446	1.216	1.758	20	.9657
.6080	50	.5712	.8208	.6959	1.437	1.218	1.751	10	.9628
.6109	**35°00′**	.5736	.8192	.7002	1.428	1.221	1.743	**55°00′**	.9599
		cos t	sen t	cot t	tan t	csc t	sec t	t grados	t

t	t grados	sen t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc t		
.6109	**35°00′**	.5736	.8192	.7002	1.428	1.221	1.743	**55°00′**	.9599
.6138	10	.5760	.8175	.7046	1.419	1.223	1.736	50	.9570
.6167	20	.5783	.8158	.7089	1.411	1.226	1.729	40	.9541
.6196	30	.5807	.8141	.7133	1.402	1.228	1.722	30	.9512
.6225	40	.5831	.8124	.7177	1.393	1.231	1.715	20	.9483
.6254	50	.5854	.8107	.7221	1.385	1.233	1.708	10	.9454
.6283	**36°00′**	.5878	.8090	.7265	1.376	1.236	1.701	**54°00′**	.9425
.6312	10	.5901	.8073	.7310	1.368	1.239	1.695	50	.9396
.6341	20	.5925	.8056	.7355	1.360	1.241	1.688	40	.9367
.6370	30	.5948	.8039	.7400	1.351	1.244	1.681	30	.9338
.6400	40	.5972	.8021	.7445	1.343	1.247	1.675	20	.9308
.6429	50	.5995	.8004	.7490	1.335	1.249	1.668	10	.9279
.6458	**37°00′**	.6018	.7986	.7536	1.327	1.252	1.662	**53°00′**	.9250
.6487	10	.6041	.7969	.7581	1.319	1.255	1.655	50	.9221
.6516	20	.6065	.7951	.7627	1.311	1.258	1.649	40	.9192
.6545	30	.6088	.7934	.7673	1.303	1.260	1.643	30	.9163
.6574	40	.6111	.7916	.7720	1.295	1.263	1.636	20	.9134
.6603	50	.6134	.7898	.7766	1.288	1.266	1.630	10	.9105
.6632	**38°00′**	.6157	.7880	.7813	1.280	1.269	1.624	**52°00′**	.9076
.6661	10	.6180	.7862	.7860	1.272	1.272	1.618	50	.9047
.6690	20	.6202	.7844	.7907	1.265	1.275	1.612	40	.0918
.6720	30	.6225	.7826	.7954	1.257	1.278	1.606	30	.8988
.6749	40	.6248	.7808	.8002	1.250	1.281	1.601	20	.8959
.6778	50	.6271	.7790	.8050	1.242	1.284	1.595	10	.8930
.6807	**39°00′**	.6293	.7771	.8098	1.235	1.287	1.589	**51°00′**	.8901
.6836	10	.6316	.7753	.8146	1.228	1.290	1.583	*o*0	.8872
.6865	20	.6338	.7735	.8195	1.220	1.293	1.578	40	.8843
.6894	30	.6361	.7716	.8243	1.213	1.296	1.572	30	.8814
.6923	40	.6383	.7698	.8292	1.206	1.299	1.567	20	.8785
.6952	50	.6406	.7679	.8342	1.199	1.302	1.561	10	.8756
.6981	**40°00′**	.6428	.7660	.8391	1.192	1.305	1.556	**50°00′**	.8727
.7010	10	.6450	.7642	.8441	1.185	1.309	1.550	50	.8698
.7039	20	.6472	.7623	.8491	1.178	1.312	1.545	40	.8668
.7069	30	.6494	.7604	.8541	1.171	1.315	1.540	30	.8639
.7098	40	.6417	.7585	.8591	1.164	1.318	1.535	20	.8610
.7127	50	.6539	.7566	.8642	1.157	1.322	1.529	10	.8581
.7156	**41°00′**	.6561	.7547	.8693	1.150	1.325	1.524	**49°00′**	.8552
.7185	10	.6583	.7528	.8744	1.144	1.328	1.519	50	.8523
.7214	20	.6604	.7509	.8796	1.137	1.332	1.514	40	.8494
.7243	30	.6626	.7490	.8847	1.130	1.335	1.509	30	.8465
.7272	40	.6648	.7470	.8899	1.124	1.339	1.504	20	.8436
.7301	50	.6670	.7451	.8952	1.117	1.342	1.499	10	.8407
.7330	**42°00′**	.6691	.7431	.9004	1.111	1.346	1.494	**48°00′**	.8378
		cos t	sen t	cot t	tan t	csc t	sec t	t grados	t

Tabla 4: Valores de las funciones trigonométricas (cont.)

t	t grados	sen t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc t		
.7330	**42°00′**	.6691	.7431	.9004	1.111	1.346	1.494	**48°00′**	.8378
.7359	10	.6713	.7412	.9057	1.104	1.349	1.490	50	.8348
.7389	20	.6734	.7392	.9110	1.098	1.353	1.485	40	.8319
.7418	30	.6756	.7373	.9163	1.091	1.356	1.480	30	.8290
.7447	40	.6777	.7353	.9217	1.085	1.360	1.476	20	.8261
.7476	50	.6799	.7333	.9271	1.079	1.364	1.471	10	.8232
.7505	**43°00′**	.6820	.7314	.9325	1.072	1.367	1.466	**47°00′**	.8203
.7534	10	.6841	.7294	.9380	1.066	1.371	1.462	50	.8174
.7563	20	.6862	.7274	.9435	1.060	1.375	1.457	40	.8145
.7592	30	.6884	.7254	.9490	1.054	1.379	1.453	30	.8116
.7621	40	.6905	.7234	.9545	1.048	1.382	1.448	20	.8087
.7650	50	.6926	.7214	.9601	1.042	1.386	1.444	10	.8058
.7679	**44°00′**	.6947	.7193	.9657	1.036	1.390	1.440	**46°00′**	.8029
.7709	10	.6967	.7173	.9713	1.030	1.394	1.435	50	.7999
.7738	20	.6988	.7153	.9770	1.024	1.398	1.431	40	.7970
.7767	30	.7009	.7133	.9827	1.018	1.402	1.427	30	.7941
.7796	40	.7030	.7112	.9884	1.012	1.406	1.423	20	.7912
.7825	50	.7050	.7092	.9942	1.006	1.410	1.418	10	.7883
.7854	**45°00′**	.7071	.7071	1.0000	1.0000	1.414	1.414	**45°00′**	.7854
		cos t	sen t	cot t	tan t	csc t	sec t	t grados	t

Tabla 5: Funciones trigonométricas de medidas angulares en radianes o de números reales

t	sen t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc t
.00	.0000	1.0000	.0000	—	1.000	—
.01	.0100	1.0000	.0100	99.997	1.000	100.00
.02	.0200	.9998	.0200	49.993	1.000	50.00
.03	.0300	.9996	.0300	33.323	1.000	33.34
.04	.0400	.9992	.0400	24.987	1.001	25.01
.05	.0500	.9988	.0500	19.983	1.001	20.01
.06	.0600	.9982	.0601	16.647	1.002	16.68
.07	.0699	.9976	.0701	14.262	1.002	14.30
.08	.0799	.9968	.0802	12.473	1.003	12.51
.09	.0899	.9960	.0902	11.081	1.004	11.13
.10	.0998	.9950	.1003	9.967	1.005	10.02
.11	.1098	.9940	.1104	9.054	1.006	9.109
.12	.1197	.9928	.1206	8.293	1.007	8.353
.13	.1296	.9916	.1307	7.649	1.009	7.714
.14	.1395	.9902	.1409	7.096	1.010	7.166
.15	.1494	.9888	.1511	6.617	1.011	6.692
.16	.1593	.9872	.1614	6.197	1.013	6.277
.17	.1692	.9856	.1717	5.826	1.015	5.911
.18	.1790	.9838	.1820	5.495	1.016	5.586
.19	.1889	.9820	.1923	5.200	1.018	5.295
.20	.1987	.9801	.2027	4.933	1.020	5.033
.21	.2085	.9780	.2131	4.692	1.022	4.797
.22	.2182	.9759	.2236	4.472	1.025	4.582
.23	.2280	.9737	.2341	4.271	1.027	4.386
.24	.2377	.9713	.2447	4.086	1.030	4.207
.25	.2474	.9689	.2553	3.916	1.032	4.042
.26	.2571	.9664	.2660	3.759	1.035	3.890
.27	.2667	.9638	.2768	3.613	1.038	3.749
.28	.2764	.9611	.2876	3.478	1.041	3.619
.29	.2860	.9582	.2984	3.351	1.044	3.497
.30	.2955	.9553	.3093	3.233	1.047	3.384
.31	.3051	.9523	.3203	3.122	1.050	3.278
.32	.3146	.9492	.3314	3.018	1.053	3.179
.33	.3240	.9460	.3425	2.920	1.057	3.086
.34	.3335	.9428	.3537	2.827	1.061	2.999
.35	.3429	.9394	.3650	2.740	1.065	2.916
.36	.3523	.9359	.3764	2.657	1.068	2.839
.37	.3616	.9323	.3879	2.578	4.073	2.765
.38	.3709	.9287	.3994	2.504	1.077	2.696
.39	.3802	.9249	.4111	2.433	1.081	2.630

t	sen t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc t
.40	.3894	.9211	.4228	2.365	1.086	2.568
.41	.3986	.9171	.4346	2.301	1.090	2.509
.42	.4078	.9131	.4466	2.239	1.095	2.452
.43	.4169	.9090	.4586	2.180	1.100	2.399
.44	.4259	.9048	.4708	2.124	1.105	2.348
.45	.4350	.9004	.4831	2.070	1.111	2.299
.46	.4439	.8961	.4954	2.018	1.116	2.253
.47	.4529	.8916	.5080	1.969	1.122	2.208
.48	.4618	.8870	.5206	1.921	1.127	2.166
.49	.4706	.8823	.5334	1.875	1.133	2.125
.50	.4794	.8776	.5463	1.830	1.139	2.086
.51	.4882	.8727	.5594	1.788	1.146	2.048
.52	.4969	.8678	.5726	1.747	1.152	2.013
.53	.5055	.8628	.5859	1.707	1.159	1.978
.54	.5141	.8577	.5994	1.668	1.166	1.945
.55	.5227	.8525	.6131	1.631	1.173	1.913
.56	.5312	.8473	.6269	1.595	1.180	1.883
.57	.5396	.8419	.6410	1.560	1.188	1.853
.58	.5480	.8365	.6552	1.526	1.196	1.825
.59	.5564	.8309	.6696	1.494	1.203	1.797
.60	.5646	.8253	.6841	1.462	1.212	1.771
.61	.5729	.8196	.6989	1.431	1.220	1.746
.62	.5810	.8139	.7139	1.401	1.229	1.721
.63	.5891	.8080	.7291	1.372	1.238	1.697
.64	.5972	.8021	.7445	1.343	1.247	1.674
.65	.6052	.7961	.7602	1.315	1.256	1.652
.66	.6131	.7900	.7761	1.288	1.266	1.631
.67	.6210	.7838	.7923	1.262	1.276	1.610
.68	.6288	.7776	.8087	1.237	1.286	1.590
.69	.6365	.7712	.8253	1.212	1.297	1.571
.70	.6442	.7648	.8423	1.187	1.307	1.552
.71	.6518	.7584	.8595	1.163	1.319	1.534
.72	.6594	.7518	.8771	1.140	1.330	1.517
.73	.6669	.7452	.8949	1.117	1.342	1.500
.74	.6743	.7385	.9131	1.095	1.354	1.483
.75	.6816	.7317	.9316	1.073	1.367	1.467
.76	.6889	.7248	.9505	1.052	1.380	1.452
.77	.6961	.7179	.9697	1.031	1.393	1.437
.78	.7033	.7109	.9893	1.011	1.407	1.422
.79	.7104	.7038	1.009	.9908	1.421	1.408

Tabla 5: Funciones trigonométricas de medidas angulares en radianes o de números reales (cont.)

t	sen t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc t
.80	.7174	.6967	1.030	.9712	1.435	1.394
.81	.7243	.6895	1.050	.9520	1.450	1.381
.82	.7311	.6822	1.072	.9331	1.466	1.368
.83	.7379	.6749	1.093	.9146	1.482	1.355
.84	.7446	.6675	1.116	.8964	1.498	1.343
.85	.7513	.6600	1.138	.8785	1.515	1.331
.86	.7578	.6524	1.162	.8609	1.533	1.320
.87	.7643	.6448	1.185	.8437	1.551	1.308
.88	.7707	.6372	1.210	.8267	1.569	1.297
.89	.7771	.6294	1.235	.8100	1.589	1.287
.90	.7833	.6216	1.260	.7936	1.609	1.277
.91	.7895	.6137	1.286	.7774	1.629	1.267
.92	.7956	.6058	1.313	.7615	1.651	1.257
.93	.8016	.5978	1.341	.7458	1.673	1.247
.94	.8076	.5898	1.369	.7303	1.696	1.238
.95	.8134	.5817	1.398	.7151	1.719	1.229
.96	.8192	.5735	1.428	.7001	1.744	1.221
.97	.8249	.5653	1.459	.6853	1.769	1.212
.98	.8305	.5570	1.491	.6707	1.795	1.204
.99	.8360	.5487	1.524	.6563	1.823	1.196
1.00	.8415	.5403	1.557	.6421	1.851	1.188
1.01	.8468	.5319	1.592	.6281	1.880	1.181
1.02	.8521	.5234	1.628	.6142	1.911	1.174
1.03	.8573	.5148	1.665	.6005	1.942	1.166
1.04	.8624	.5062	1.704	.5870	1.975	1.160
1.05	.8674	.4976	1.743	.5736	2.010	1.153
1.06	.8724	.4889	1.784	.5604	2.046	1.146
1.07	.8772	.4801	1.827	.5473	2.083	1.140
1.08	.8820	.4713	1.871	.5344	2.122	1.134
1.09	.8866	.4625	1.917	.5216	2.162	1.128
1.10	.8912	.4536	1.965	.5090	2.205	1.122
1.11	.8957	.4447	2.014	.4964	2.249	1.116
1.12	.9001	.4357	2.066	.4840	2.295	1.111
1.13	.9044	.4267	2.120	.4718	2.344	1.106
1.14	.9086	.4176	2.176	.4596	2.395	1.101
1.15	.9128	.4085	2.234	.4475	2.448	1.096
1.16	.9168	.3993	2.296	.4356	2.504	1.091
1.17	.9208	.3902	2.360	.4237	2.563	1.086
1.18	.9246	.3809	2.427	.4120	2.625	1.082
1.19	.9284	.3717	2.498	.4003	2.691	1.077

t	sen t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc t
1.20	.9320	.3624	2.572	.3888	2.760	1.073
1.21	.9356	.3530	2.650	.3773	2.833	1.069
1.22	.9391	.3436	2.733	.3659	2.910	1.065
1.23	.9425	.3342	2.820	.3546	2.992	1.061
1.24	.9458	.3248	2.912	.3434	3.079	1.057
1.25	.9490	.3153	3.010	.3323	3.171	1.054
1.26	.9521	.3058	3.113	.3212	3.270	1.050
1.27	.9551	.2963	3.224	.3102	3.375	1.047
1.28	.9580	.2867	3.341	.2993	3.488	1.044
1.29	.9608	.2771	3.467	.2884	3.609	1.041
1.30	.9636	.2675	3.602	.2776	3.738	1.038
1.31	.9662	.2579	3.747	.2669	3.878	1.035
1.32	.9687	.2482	3.903	.2562	4.029	1.032
1.33	.9711	.2385	4.072	.2456	4.193	1.030
1.34	.9735	.2288	4.256	.2350	4.372	1.027
1.35	.9757	.2190	4.455	.2245	4.566	1.025
1.36	.9779	.2092	4.673	.2140	4.779	1.023
1.37	.9799	.1994	4.913	.2035	5.014	1.021
1.38	.9819	.1896	5.177	.1931	5.273	1.018
1.39	.9837	.1798	5.471	.1828	5.561	1.017
1.40	.9854	.1700	5.798	.1725	5.883	1.015
1.41	.9871	.1601	6.165	.1622	6.246	1.013
1.42	.9887	.1502	6.581	.1519	6.657	1.011
1.43	.9901	.1403	7.055	.1417	7.126	1.010
1.44	.9915	.1304	7.602	.1315	7.667	1.009
1.45	.9927	.1205	8.238	.1214	8.299	1.007
1.46	.9939	.1106	8.989	.1113	9.044	1.006
1.47	.9949	.1006	9.887	.1011	9.938	1.005
1.48	.9959	.0907	10.983	.0910	11.029	1.004
1.49	.9967	.0807	12.350	.0810	12.390	1.003
1.50	.9975	.0707	14.101	.0709	14.137	1.003
1.51	.9982	.0608	16.428	.0609	16.458	1.002
1.52	.9987	.0508	19.670	.0508	19.695	1.001
1.53	.9992	.0408	24.498	.0408	24.519	1.001
1.54	.9995	.0308	32.461	.0308	32.476	1.000
1.55	.9998	.0208	48.078	.0208	48.089	1.000
1.56	.9999	.0108	92.620	.0108	92.626	1.000
1.57	1.0000	.0008	1255.8	.0008	1255.8	1.000

A.III UNIDADES DE MEDIDA. EL S.I.*

En la educación en matemáticas conviene tener un conocimiento básico de las unidades de medida, ya que constituyen un lenguaje esencial para la aplicación de la ciencia matemática, en la ciencia general y en la tecnología.

En casi todo el mundo se utiliza el llamado ***Sistema Internacional de Unidades (SI)***, derivado del Sistema Métrico Decimal, y que abarca toda la física. Se basa en las unidades, de longitud: *metro* (m); de masa: *kilogramo* (kg); de tiempo: *segundo* (s), y otras. [La unidad de fuerza se llama *newton* (N)].

En Estados Unidos de América se emplean aún las antiguas unidades inglesas de nombre pulgada, pie, milla, libra, etc. En la versión en español de este libro se han aplicado las normas metrológicas del SI, vigentes en los países de habla española, y las recomendaciones de la U.S. Metric Association, organismo que impulsa la metrificación en aquel país.

Reglas para el uso de las unidades de medida

Valores numéricos Se emplea la marca decimal (un punto o una coma) y a uno y otro lado de ella —cuando es el caso— los periodos de tres cifras se separan sólo con un pequeño espacio. Tratándose de cantidades menores que la unidad, se indica la ausencia de tal valor con un cero. Por ejemplo, se escribe 0.125 y no .125; y en otros casos se escribiría, también como ejemplo, 90 347. 668 45, 5 890 347. 668 432. En el caso de cuatro cifras se admite la omisión del espacio, como en 1996, 0.6684.

Símbolos de unidad Se tiene un símbolo estándar para cada unidad, el cual no cambia en el plural: 1 kg y 10 kg. No se deben emplear nombres completos de unidad después del valor numérico. Por ejemplo, 100 m, y no "100 metros", excepto en expresiones como "100 y 50 metros". Los símbolos en unidades compuestas se combinan con los signos de multiplicar (·) y de dividir (/). Por ejemplo, en metro-newton (m · N), kilogramo por metro cúbico (kg/m^3).

Los múltiplos de algunas unidades se forman con prefijos especiales: kilo (k), mega (M), giga (G), etc., que valen —respectivamente— 10^3, 10^6, 10^9, etc. Los submúltiplos se simbolizan con mili (m), micro (μ), nano (n), etc., cuyos valores respectivos son 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-9}, etc. Se utilizan sólo a veces los prefijos deci (d, 10^{-1}), centi (c, 10^{-2}).

El símbolo de una unidad es un signo universal, el mismo en todos los idiomas, ya sea que empleen el alfabeto latino, o bien caracteres propios (como el ruso, el japonés, el chino, etc.). La magnitud de una cantidad física se expresa siempre como un valor numérico *en cifras arábigas y con el sistema decimal de numeración*, seguido del símbolo de unidad SI *en caracteres latinos*. La estructura general del SI está determinada y actualizada por la Organización Internacional de Normalización (ISO) con sede en Ginebra, Suiza.

Las principales unidades básicas son el metro, el kilogramo, el segundo, el kelvin (K, para la temperatura absoluta), el ampere (A, para la corriente eléctrica), la candela (cd, para la intensidad luminosa) y el radián (rad, para el ángulo; su símbolo a veces no se indica). Para el uso común y en la tecnología se admite el empleo de unidades como grado (°), minuto (min), hora (h), día (d), litro (L), grado Celsius o centígrado (°C), y otras. En el caso de la magnitud física fuerza, se admite aún, por necesidad de comunicación técnica, el uso del kilogramo fuerza (kgf).

---

* Por **Francisco Paniagua B.** — Comunicación educativa en ciencia matemática y física. Autor de "Las unidades SI y otros sistemas".

Unidades inglesas usuales en Estados Unidos Se aplican reglas semejantes a las del SI. En países métricos que tienen que considerar tales unidades —como México— se adopta la regla de emplear los símbolos usuales en inglés, y a veces los formados en español que se adoptaron para facilitar su comprensión. Por ejemplo, pulgada (pulg, o bien, in, de *inch*), pie (pie, o bien, ft, de *foot*). La milla (mi), libra (lb), galón (gal), caballo (hp), grado Fahrenheit (°F), etc., se simbolizan como en inglés. Conviene diferenciar bien entre libra (lb), unidad de masa, y libra fuerza(lbf), unidad de esta magnitud.

Uso del SI En manuales y libros de texto recientes de física, química, biología, ingeniería, etc., se describen y definen casi siempre en algún sitio, las unidades de medida mundiales del SI, cuyo nombre oficial es *Systéme International d'Unités*, en francés.

Otras cantidades físicas tienen unidades SI como sigue: joule (J; trabajo y energía), watt (W; potencia), hertz (Hz; frecuencia, un ciclo por segundo), volt (V; potencial eléctrico), ohm (Ω; resistencia eléctrica), farad (F; capacitancia eléctrica), henry (H; inductancia eléctrica), lumen (lm; flujo lumínico), lux (lx: iluminancia o iluminación).

Conversión de temperaturas La conversión entre grados centígrados o Celsius, y grados Fahrenheit se realiza con las fórmulas siguientes (t, temperatura en la unidad indicada):

$$t\,(°C) = \frac{t\,(°F) - 32}{1.8}$$

$$t\,(°F) = 1.8\,t\,(°C) + 32$$

Para la temperatura termodinámicaa absoluta:

$$T(\text{K}) \text{ (en kelvins)} = t\,(°C) + 273$$

En manuales y textos se pueden encontrar tablas de equivalencias de unidades, como la presentada en el material complementario de este libro (en las guardas).

RESPUESTAS A EJERCICIOS SELECCIONADOS

CAPÍTULO 1

EJERCICIOS 1.1

1 (a) Negativo (b) Positivo (c) Negativo (d) Positivo

3 (a) $<$ (b) $>$ (c) $=$

5 (a) $>$ (b) $>$ (c) $>$

7 (a) $x < 0$ (b) $y \geq 0$ (c) $q \leq \pi$ (d) $2 < d < 4$ (e) $t \geq 5$ (f) $-z \leq 3$ (g) $\frac{p}{q} \leq 7$ (h) $\frac{1}{w} \geq 9$ (i) $|x| > 7$

9 (a) 5 (b) 3 (c) 11

11 (a) -15 (b) -3 (c) 11

13 (a) $4 - \pi$ (b) $4 - \pi$ (c) $1.5 - \sqrt{2}$

15 (a) 4 (b) 12 (c) 12 (d) 8

17 (a) 10 (b) 9 (c) 9 (d) 19

19 $|7 - x| < 5$ **21** $|-3 - x| \geq 8$ **23** $|x - 4| \leq 3$

25 $-x - 3$ **27** $2 - x$ **29** $b - a$ **31** $x^2 + 4$

33 $\neq$ **35** $=$ **37** $\neq$ **39** $=$

41 Trace un triángulo rectángulo con catetos de longitudes $\sqrt{2}$ y 1. La hipotenusa tendrá la longitud $\sqrt{3}$. A continuación, forme un triángulo rectángulo con catetos $\sqrt{3}$ y $\sqrt{2}$. La hipotenusa tendrá la longitud $\sqrt{5}$.

43 El rectángulo grande tiene área $a(b + c)$. La suma de las áreas de los dos rectángulos pequeños es $ab + ac$.

45 (a) 4.27×10^5 (b) 9.8×10^{-8} (c) 8.1×10^8

47 (a) 830,000 (b) 0.000 000 000 002 9 (c) 563,000,000

49 1.7×10^{-24}

51 5.87×10^{12}

53 1.678×10^{-24} g

55 4.1472×10^6 cuadros **57** (a) 125 (b) 21

EJERCICIOS 1.2

1 $\frac{16}{81}$ **3** $\frac{9}{8}$ **5** $\frac{-47}{3}$ **7** $\frac{1}{8}$ **9** $\frac{1}{25}$ **11** $8x^9$

13 $\frac{6}{x}$ **15** $-2a^{14}$ **17** $\frac{9}{2}$ **19** $\frac{12u^{11}}{v^2}$ **21** $\frac{4}{xy}$

23 $\frac{9y^6}{x^8}$ **25** $\frac{81}{64}y^6$ **27** $\frac{s^6}{4r^8}$ **29** $\frac{20y}{x^3}$ **31** $9x^{10}y^{14}$

33 $8a^2$ **35** $24x^{3/2}$ **37** $\frac{1}{9a^4}$ **39** $\frac{8}{x^{1/2}}$ **41** $4x^2y^4$

43 $\frac{3}{x^3y^2}$ **45** 1 **47** $x^{3/4}$ **49** $(a + b)^{2/3}$

51 $(x^2 + y^2)^{1/2}$ **53** (a) $4x\sqrt{x}$ (b) $8x\sqrt{x}$

55 (a) $8 - \sqrt[3]{y}$ (b) $\sqrt[3]{8 - y}$ **57** 9

59 $-2\sqrt[5]{2}$ **61** $\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$ **63** $\frac{3y^3}{x^2}$ **65** $\frac{2a^2}{b}$

67 $\frac{1}{2y^2}\sqrt{6xy}$ **69** $\frac{xy}{3}\sqrt[3]{6y}$ **71** $\frac{x}{3}\sqrt[4]{15x^2y^3}$

73 $\frac{1}{2}\sqrt[5]{20x^4y^2}$ **75** $\frac{3x^5}{y^2}$ **77** $\frac{2x}{y^2}\sqrt[5]{x^2y^4}$

79 $-3tv^2$ **81** $|x^3|y^2$ **83** $|x(y-1)|\sqrt[4]{x(y-1)^2}$

85 $\neq$; $(a^r)^2 = a^{2r} \neq a^{(r^2)}$ **87** $\neq$; $(ab)^{xy} = a^{xy}b^{xy} \neq a^x b^y$

89 $=$; $\sqrt[n]{\frac{1}{c}} = \left(\frac{1}{c}\right)^{1/n} = \frac{1^{1/n}}{c^{1/n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{c}}$ **91** \$232,825.78

93 2.82 m **95** El levantador de 120 kg

EJERCICIOS 1.3

1 $12x^3 - 13x + 1$ **3** $x^3 - 2x^2 + 4$

5 $6x^2 + x - 35$ **7** $15x^2 + 31xy + 14y^2$

9 $6u^2 - 13u - 12$ **11** $6x^3 + 37x^2 + 30x - 25$

13 $3t^4 + 5t^3 - 15t^2 + 9t - 10$

15 $2x^6 + 2x^5 - 2x^4 + 8x^3 + 10x^2 - 10x - 10$
17 $4y^2 - 5x$ **19** $3v^2 - 2u^2 + uv^2$ **21** $4x^2 - 9y^2$
23 $x^4 - 4y^2$ **25** $x^4 + 5x^2 - 36$
27 $9x^2 + 12xy + 4y^2$ **29** $x^4 - 6x^2y^2 + 9y^4$
31 $x^4 - 8x^2 + 16$ **33** $x - y$ **35** $x - y$
37 $x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$
39 $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$
41 $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$
43 $4x^2 + y^2 + 9z^2 + 4xy - 12xz - 6yz$ **45** $s(r + 4t)$
47 $3a^2b(b - 2)$ **49** $3x^2y^2(y - 3x)$
51 $5x^3y^2(3y^3 - 5x + 2x^3y^2)$ **53** $(8x + 3)(x - 7)$
55 Irreducible **57** $(3x - 4)(2x + 5)$
59 $(3x - 5)(4x - 3)$ **61** $(2x - 5)^2$ **63** $(5z + 3)^2$
65 $(5x + 2y)(9x + 4y)$ **67** $(6r + 5t)(6r - 5t)$
69 $(z^2 + 8w)(z^2 - 8w)$ **71** $x^2(x + 2)(x - 2)$
73 Irreducible **75** $3(5x + 4y)(5x - 4y)$
77 $(4x + 3)(16x^2 - 12x + 9)$
79 $(4x - y^2)(16x^2 + 4xy^2 + y^4)$
81 $(7x + y^3)(49x^2 - 7xy^3 + y^6)$ **83** $(2x + y)(a - 3b)$
85 $3(x + 3)(x - 3)(x + 1)$
87 $(x - 1)(x + 2)(x^2 + x + 1)$ **89** $(a^2 + b^2)(a - b)$
91 $(a + b)(a - b)(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$
93 $(x + 2 + 3y)(x + 2 - 3y)$ **95** $(y + 4 + x)(y + 4 - x)$
97 $(y + 2)(y^2 - 2y + 4)(y - 1)(y^2 + y + 1)$
99 $(x^8 + 1)(x^4 + 1)(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$
101 El área de I es $(x - y)x$; el área de II es $(x - y)y$, y
$A = x^2 - y^2 = (x - y)x + (x - y)y = (x - y)(x + y)$.

EJERCICIOS 1.4

1 $\frac{22}{75}$ **3** $\frac{7}{120}$ **5** $\frac{x+3}{x-4}$ **7** $\frac{y+5}{y^2+5y+25}$
9 $\frac{4-r}{r^2}$ **11** $\frac{x}{x-1}$ **13** $\frac{a}{(a^2+4)(5a+2)}$ **15** $\frac{-3}{x+2}$
17 $\frac{6s-7}{(3s+1)^2}$ **19** $\frac{5x^2+2}{x^3}$ **21** $\frac{4(2t+5)}{t+2}$
23 $\frac{2(2x+3)}{3x-4}$ **25** $\frac{2x-1}{x}$ **27** $\frac{p^2+2p+4}{p-3}$
29 $\frac{11u^2+18u+5}{u(3u+1)}$ **31** $-\frac{x+5}{(x+2)^2}$ **33** $a + b$
35 $\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}$ **37** $\frac{2x^2+7x+15}{x^2+10x+7}$ **39** $2x + h - 3$
41 $-\frac{3x^2+3xh+h^2}{x^3(x+h)^3}$ **43** $\frac{-12}{(3x+3h-1)(3x-1)}$
45 $\frac{t+10\sqrt{t}+25}{t-25}$ **47** $(9x + 4y)(3\sqrt{x} + 2\sqrt{y})$
49 $\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a-b}$ **51** $\frac{1}{(a+b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$
53 $\frac{2}{\sqrt{2(x+h)+1}+\sqrt{2x+1}}$ **55** $\frac{-1}{\sqrt{1-x-h}+\sqrt{1-x}}$
57 $4x^{4/3} - x^{1/3} + 5x^{-2/3}$ **59** $x^{-1} + 4x^{-3} + 4x^{-5}$
61 $\frac{1+x^5}{x^3}$ **63** $\frac{1-x^2}{x^{1/2}}$ **65** $(3x + 2)^3(36x^2 - 37x + 6)$
67 $\frac{(2x+1)^2(8x^2+x-24)}{(x^2-4)^{1/2}}$ **69** $\frac{(3x+1)^5(39x-89)}{(2x-5)^{1/2}}$
71 $\frac{27x^2-24x+2}{(6x+1)^4}$ **73** $\frac{x^2+12}{(x^2+4)^{4/3}}$ **75** $\frac{6(3-2x)}{(4x^2+9)^{3/2}}$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 1

1 (a) $-\frac{5}{12}$ (b) $\frac{39}{20}$ (c) $-\frac{13}{56}$ (d) $\frac{5}{8}$
2 (a) $<$ (b) $>$ (c) $>$
3 (a) $x < 0$ (b) $\frac{1}{3} < a < \frac{1}{2}$ (c) $|x| \le 4$
4 (a) 7 (b) -1 (c) $\frac{1}{6}$ **5** (a) 5 (b) 5 (c) 7
6 (a) No (b) No (c) Sí
7 (a) 9.37×10^{10} (b) 4.02×10^{-6}
8 (a) 68,000,000 (b) 0.000 73
9 $-x - 3$ **10** $-(x - 2)(x - 3)$ **11** $\frac{-71}{9}$ **12** $\frac{1}{8}$
13 $18a^5b^5$ **14** $\frac{3y}{r^2}$ **15** $\frac{xy^5}{9}$ **16** $\frac{b^3}{a^8}$ **17** $-\frac{p^8}{2q}$
18 $c^{1/3}$ **19** $\frac{x^3z}{y^{10}}$ **20** $\frac{16x^2}{z^4y^6}$ **21** $\frac{b^6}{a^2}$ **22** $\frac{27u^2v^{27}}{16w^{20}}$
23 $s + r$ **24** $u + v$ **25** s **26** $\frac{y-x^2}{x^2y}$ **27** $\frac{x^8}{y^2}$
28 $2xyz\sqrt[3]{x^2z}$ **29** $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$ **30** $\frac{ab}{c}\sqrt{bc}$ **31** $2x^2y\sqrt[3]{x}$
32 $2ab\sqrt{ac}$ **33** $\frac{1-\sqrt{t}}{t}$ **34** c^2d^4 **35** $\frac{2x}{y^2}$
36 $a + 2b$ **37** $\frac{1}{2\pi}\sqrt[3]{4\pi}$ **38** $\frac{1}{3y}\sqrt[3]{3x^2y^2}$
39 $\frac{1-2\sqrt{x}+x}{1-x}$ **40** $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-2}}{2}$
41 $(9x + y)(3\sqrt{x} - \sqrt{y})$ **42** $\frac{x+6\sqrt{x}+9}{9-x}$
43 $x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$ **44** $3z^4 - 4z^3 - 3z^2 + 4z + 1$
45 $-x^2 + 18x + 7$ **46** $8x^3 + 2x^2 - 43x + 35$
47 $3y^5 - 2y^4 - 8y^3 + 10y^2 - 3y - 12$
48 $15x^3 - 53x^2 - 102x - 40$ **49** $a^4 - b^4$
50 $3p^2q - 2q^2 + \frac{5}{3}p$ **51** $6a^2 + 11ab - 35b^2$
52 $16r^4 - 24r^2s + 9s^2$ **53** $169a^4 - 16b^2$
54 $a^6 - 2a^5 + a^4$ **55** $8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$
56 $c^6 - 3c^4d^2 + 3c^2d^4 - d^6$ **57** $81x^4 - 72x^2y^2 + 16y^4$
58 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$
59 $10w(6x + 7)$ **60** $2r^2s^3(r + 2s)(r - 2s)$
61 $(14x + 9)(2x - 1)$ **62** $(4a^2 + 3b^2)^2$
63 $(y - 4z)(2w + 3x)$ **64** $(2c^2 + 3)(c - 6)$

65 $8(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)$
66 $u^3v(v - u)(v^2 + uv + u^2)$
67 $(p^4 + q^4)(p^2 + q^2)(p + q)(p - q)$ **68** $x^2(x - 4)^2$
69 $(w^2 + 1)(w^4 - w^2 + 1)$ **70** $3(x + 2)$
71 Irreducible **72** $(x - 7 + 7y)(x - 7 - 7y)$
73 $(x - 2)(x + 2)^2(x^2 - 2x + 4)$ **74** $4x^2(x^2 + 3x + 5)$
75 $\frac{3x - 5}{2x + 1}$ **76** $\frac{r^2 + rt + t^2}{r + t}$ **77** $\frac{3x + 2}{x(x - 2)}$
78 $\frac{27}{(4x - 5)(10x + 1)}$ **79** $\frac{5x^2 - 6x - 20}{x(x + 2)^2}$ **80** $\frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$
81 $\frac{-2x^2 - x - 3}{x(x + 1)(x + 3)}$ **82** $\frac{ab}{a + b}$ **83** $x + 5$ **84** $\frac{1}{x + 3}$
85 $(x^2 + 1)^{1/2}(x + 5)^3(7x^2 + 15x + 4)$
86 $\frac{2(5x^2 + x + 4)}{(6x + 1)^{2/3}(4 - x^2)^2}$ **87** 2.236068 **88** 4.242641
89 2.75×10^{13} células
90 Entre 2.94×10^9 y 3.78×10^9 latidos.
91 0.54 m^2 **92** 0.913 din·cm.

CAPÍTULO 2

EJERCICIOS 2.1

1 $\frac{5}{3}$ **3** 1 **5** $\frac{26}{7}$ **7** $\frac{35}{17}$ **9** $\frac{23}{18}$ **11** $-\frac{1}{40}$
13 $\frac{49}{4}$ **15** $\frac{4}{3}$ **17** $-\frac{24}{29}$ **19** $\frac{7}{31}$ **21** $-\frac{3}{61}$
23 $\frac{29}{4}$ **25** $\frac{31}{18}$ **27** No hay solución
29 Todos los números reales excepto $\frac{1}{2}$ **31** $\frac{5}{9}$ **33** $-\frac{2}{3}$
35 No hay solución **37** 0
39 Todos los números reales excepto ± 2
41 No hay solución **43** No hay solución
45 $(4x - 3)^2 - 16x^2 = (16x^2 - 24x + 9) - 16x^2 = 9 - 24x$
47 $\frac{x^2 - 9}{x + 3} = \frac{(x + 3)(x - 3)}{x + 3} = x - 3$
49 $\frac{3x^2 + 8}{x} = \frac{3x^2}{x} + \frac{8}{x} = \frac{8}{x} + 3x$ **51** $-\frac{19}{3}$
53 **(a)** Sí
(b) No, 5 no es solución de la primera ecuación.
55 Escoja cualaesquiera a y b tales que $b = -\frac{5}{3}a$.
57 $x + 1 = x + 2$ **59** $P = \frac{I}{rt}$ **61** $h = \frac{2A}{b}$
63 $m = \frac{Fd^2}{gM}$ **65** $w = \frac{P - 2l}{2}$ **67** $b_1 = \frac{2A - hb_2}{h}$
69 $q = \frac{p(1 - S)}{S(1 - p)}$ **71** $q = \frac{fp}{p - f}$

EJERCICIOS 2.2

1 88 **3** \$820 **5** 180 meses o sea 15 años
7 No es posible **9** 200 niños
11 $\frac{14}{3}$ oz (onza)de solución de glucosa al 30%, y $\frac{7}{3}$ de oz de agua
13 194.6 g de plata esterlina y 5.4 g de cobre
15 **(a)** Después de 64 s
(b) 96 m y 128 m, respectivamente
17 6 mi/h **19** **(a)** $\frac{5}{9}$ mi/h **(b)** $2\frac{2}{9}$ mi **21** 1237.5 pies
23 **(a)** 4050 $pies^2$ **(b)** 2592 $pies^2$ **(c)** 3600 $pies^2$
25 $\frac{19}{2} - \frac{3\pi}{8} \approx 8.32$ pies **27** 55 pies **29** 36 min
31 36 min **33** Después de 50 juegos más.

EJERCICIOS 2.3

1 $-\frac{3}{2}, \frac{4}{3}$ **3** $-\frac{6}{5}, \frac{2}{3}$ **5** $-\frac{9}{2}, \frac{3}{4}$ **7** $-\frac{2}{3}, \frac{1}{5}$
9 $-\frac{5}{2}$ **11** $-\frac{1}{2}$ **13** $-\frac{34}{5}$
15 **(a)** No, -4 no es solución de $x = 4$. **(b)** Sí
17 ± 13 **19** $\pm\frac{3}{5}$ **21** $3 \pm \sqrt{17}$ **23** $-2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{11}$
25 **(a)** $\frac{81}{4}$ **(b)** 16 **(c)** ± 12 **(d)** ± 7
27 $-3 \pm \sqrt{2}$ **29** $\frac{3}{2} \pm \sqrt{5}$ **31** $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$
33 $-2 \pm \sqrt{2}$ **35** $\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{41}$ **37** $\frac{4}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{22}$
39 $\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{15}$ **41** $\frac{9}{2}$ **43** No hay soluciones reales
45 **(a)** $x = \frac{y \pm \sqrt{2y^2 - 1}}{2}$ **(b)** $y = -2x \pm \sqrt{8x^2 + 1}$
47 $v = \sqrt{\frac{2K}{m}}$ **49** $r = \frac{-\pi h + \sqrt{\pi^2 h^2 + 2\pi A}}{2\pi}$
51 $r = r_0\sqrt{1 - (V/V_{max})}$ **53** $\sqrt{150/\pi} \approx 6.9$ cm
55 **(a)** Después de 1s y después de 3s **(b)** A los 4s.
57 **(a)** 4320 m **(b)** 96.86°C **59** 2 pies
61 12 × 12 pies
63 $3 + \frac{1}{2}\sqrt{14} \approx 4.9$ millas o bien $3 - \frac{1}{2}\sqrt{14} \approx 1.1$ mi
65 **(a)** $d = 100\sqrt{20t^2 + 4t + 1}$ **(b)** 3:30 P.M.
67 14 × 27 pulg. **69** 7 mi/h **71** 300 pares
73 2 pies **75** 15.89 s
77 **(a)** 0; $-4{,}500{,}000$ **(b)** 2.13×10^{-7}

EJERCICIOS 2.4

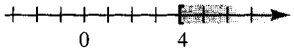
1 $2+4i$ **3** $18-3i$ **5** $41-11i$ **7** $17-i$
9 $21-20i$ **11** $-24-7i$ **13** 25 **15** $-i$
17 i **19** $\frac{3}{10}-\frac{3}{5}i$ **21** $\frac{1}{2}-i$ **23** $\frac{34}{53}+\frac{40}{53}i$
25 $\frac{2}{5}+\frac{4}{5}i$ **27** $-142-65i$ **29** $-2-14i$
31 $-\frac{44}{113}+\frac{95}{113}i$ **33** $\frac{21}{2}i$ **35** $x=4,\ y=-16$
37 $x=1,\ y=3$ **39** $3\pm 2i$ **41** $-2\pm 3i$
43 $\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{55}i$ **45** $-\frac{1}{8}\pm\frac{1}{8}\sqrt{47}i$ **47** $-5,\ \frac{5}{2}\pm\frac{5}{2}\sqrt{3}i$
49 $\pm 4,\ \pm 4i$ **51** $\pm 2i,\ \pm\frac{3}{2}i$ **53** $0,\ -\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{7}i$
55 Si $w=c+di$, entonces $\overline{z+w}=\overline{(a+bi)+(c+di)}$
$=\overline{(a+c)+(b+d)i}=(a+c)-(b+d)i$
$=(a-bi)+(c-di)=\bar{z}+\bar{w}.$
57 $\overline{z\cdot w}=\overline{(a+bi)\cdot(c+di)}=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}$
$=(ac-bd)-(ad+bc)i=ac-adi-bd-bci$
$=a(c-di)-bi(c-di)=(a-bi)\cdot(c-di)=\bar{z}\cdot\bar{w}$
59 Si $\bar{z}=z$, entonces $a-bi=a+bi$ y, por consiguiente, $-bi=bi$, o sea $2bi=0$. Entonces, $b=0$ y $z=a$ es real. Recíprocamente, si z es real, entonces $b=0$ y, por lo tanto, $\bar{z}=\overline{a+0i}=a-0i=a+0i=z$.

EJERCICIOS 2.5

1 $-15,\ 7$ **3** $-\frac{2}{3},\ 2$ **5** No tiene solución **7** $\pm\frac{2}{3},\ 2$
9 $\pm\frac{1}{2}\sqrt{6},\ -\frac{5}{2},\ 0$ **11** $0,\ 25$ **13** $-\frac{57}{5}$ **15** $\frac{9}{5}$
17 $\pm\frac{1}{2}\sqrt{62}$ **19** 6 **21** 6 **23** $5,\ 7$ **25** -3
27 -1 **29** $-\frac{5}{4}$ **31** 3 **33** $0,\ 4$ **35** $\pm 3,\ \pm 4$
37 $\pm\frac{1}{10}\sqrt{70\pm 10\sqrt{29}}$ **39** $\pm 2,\ \pm 3$ **41** $\frac{8}{27},\ -8$
43 $\frac{25}{4},\ \frac{16}{9}$ **45** $-\frac{4}{3},\ -\frac{2}{3}$ **47** $\frac{5}{2}$ **49** $0,\ 4096$
51 **(a)** 8 **(b)** ± 8 **(c)** No hay soluciones reales
(d) 625 **(e)** No hay soluciones reales
53 $l=\frac{gT^2}{4\pi^2}$ **55** $h=\frac{1}{\pi r}\sqrt{S^2-\pi^2r^4}$ **57** 9.16 pies/s
59 \$4.00 **61** $2\sqrt[3]{\frac{432}{\pi}}\approx 10.3$ cm **63** 53.4%
65 Hay dos trayectorias posibles, que corresponden a $x\approx 0.6743$ mi y $x\approx 2.2887$ mi
67 2.4493

EJERCICIOS 2.6

1 **(a)** $-2<2$ **(b)** $-11<-7$ **(c)** $-\frac{7}{3}<-1$
(d) $1<\frac{7}{3}$
3 $(-\infty,-2)$

5 $[4,\infty)$


7 $(-2,4]$

9 $[3,7]$

11 $[-2,5)$

13 $-5<x\le 8$ **15** $-4\le x\le -1$ **17** $x\ge 4$
19 $x<-5$ **21** $\left(\frac{16}{3},\infty\right)$ **23** $\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right]$
25 $(12,\infty)$ **27** $[-6,\infty)$ **29** $(1,6)$ **31** $[9,19)$
33 $\left(-\frac{26}{3},\frac{16}{3}\right]$ **35** $(6,12]$ **37** $\left(-\infty,\frac{8}{53}\right]$
39 $\left(-\infty,\frac{4}{5}\right)$ **41** $\left(-\frac{2}{3},\infty\right)$ **43** $\left(\frac{4}{3},\infty\right)$
45 Todos los números reales excepto 1 **47** $(-3,3)$
49 $(-\infty,-5]\cup[5,\infty)$ **51** $(-3.01,-2.99)$
53 $(-\infty,-2.1]\cup[-1.9,\infty)$ **55** $\left(-\frac{9}{2},-\frac{1}{2}\right)$
57 $\left[\frac{3}{5},\frac{9}{5}\right]$ **59** $(-\infty,\infty)$ **61** $(-\infty,3)\cup(3,\infty)$
63 $\left(-\infty,-\frac{8}{3}\right]\cup[4,\infty)$ **65** $\left(-\infty,\frac{7}{4}\right)\cup\left(\frac{13}{4},\infty\right)$
67 $(-2,1)\cup(3,6)$
69 **(a)** $-8,\ -2$ **(b)** $-8<x<-2$
(c) $(-\infty,-8)\cup(-2,\infty)$
71 $|w-148|\le 2$ **73** $5<|T_1-T_2|<10$
75 $86\le F\le 104$ **77** $R\ge 11$ **79** $4\le p<6$
81 $6\frac{2}{3}$ años

EJERCICIOS 2.7

1 $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$ **3** $[-2,1]\cup[4,\infty)$ **5** $(-2,3)$
7 $(-\infty,-2)\cup(4,\infty)$ **9** $\left(-\infty,-\frac{5}{2}\right]\cup[1,\infty)$
11 $(2,4)$ **13** $(-4,4)$ **15** $\left(-\frac{3}{5},\frac{3}{5}\right)$
17 $(-\infty,0]\cup\left[\frac{9}{16},\infty\right)$ **19** $(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$

21 $\{-2\} \cup [2, \infty)$ **23** $(-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup \{0\}$
25 $(-2, 0) \cup (0, 1]$ **27** $(-2, 2] \cup (5, \infty)$
29 $(-\infty, -3) \cup (0, 3)$ **31** $\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{3}\right)$
33 $(-\infty, -1) \cup \left(2, \frac{7}{2}\right]$ **35** $\left(-1, \frac{2}{3}\right) \cup [4, \infty)$
37 $\left(1, \frac{5}{3}\right) \cup [2, 5]$ **39** $(-1, 0) \cup (1, \infty)$
41 $[0, 2] \cup [3, 5]$ **43** $\frac{1}{2}$ s **45** $0 \le v < 30$
47 $0 < S < 4000$ **49** altura > 25 600 km

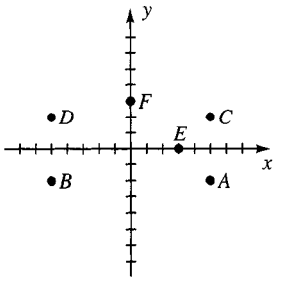
EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 2

1 $-\frac{5}{6}$ **2** 5 **3** -32 **4** No tiene solución
5 Para toda $x > 0$ **6** $-4, \frac{3}{2}$ **7** $-\frac{2}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{19}$
8 $\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{29}$ **9** $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{21}$ **10** $\pm\frac{5}{2}, \pm\sqrt{2}$
11 $-27, 125$ **12** $\pm\frac{1}{2}\sqrt{7}, -\frac{2}{5}$ **13** $\frac{1}{5} \pm \frac{1}{5}\sqrt{14}i$
14 $-\frac{1}{6} \pm \frac{1}{6}\sqrt{71}i$ **15** $\pm\frac{1}{2}\sqrt{14}i, \pm\frac{2}{3}\sqrt{3}i$
16 $\pm\frac{1}{2}\sqrt{6 \pm 2\sqrt{5}}$ **17** $-\frac{3}{2}, 2$ **18** $-5, 4$ **19** $\frac{1}{4}, \frac{1}{9}$
20 $\frac{13}{4}$ **21** 2 **22** $-3, 1$ **23** 5 **24** ± 8
25 $2 \pm \sqrt{3}$ **26** $-5 \pm \sqrt{13}i$ **27** 3 **28** $\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$
29 $\left(-\frac{11}{4}, \frac{9}{4}\right)$ **30** $\left[\frac{13}{23}, \infty\right)$ **31** $\left(-\infty, -\frac{3}{10}\right)$
32 $\left(-7, \frac{7}{2}\right)$ **33** $(-\infty, 1) \cup (5, \infty)$ **34** $[0, 6]$
35 $\left(-\infty, \frac{11}{3}\right] \cup [7, \infty)$ **36** $(2, 4) \cup (8, 10)$
37 $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{2}{5}, \infty\right)$ **38** $[-2, 5]$
39 $(-\infty, -2) \cup \{0\} \cup [3, \infty)$ **40** $(-3, -1) \cup (-1, 2]$
41 $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup (2, 9)$ **42** $(-\infty, -5) \cup [-1, 5)$
43 $(1, \infty)$ **44** $(0, 1) \cup (2, 3)$ **45** $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$
46 $R = \sqrt[4]{\frac{8FVL}{\pi P}}$ **47** $h = R \pm \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - c^2}$
48 $r = \frac{-\pi hR + \sqrt{12\pi hV - 3\pi^2 h^2 R^2}}{2\pi h}$ **49** $15 + 2i$
50 $-28 + 6i$ **51** $-55 + 48i$ **52** $\frac{9}{85} + \frac{2}{85}i$
53 $-\frac{9}{53} - \frac{48}{53}i$ **54** $-2 - 5i$ **55** $R_2 = \frac{10}{3}$ ohms
56 11.055% **57** 60.3 g
58 6 oz de verduras y 4 oz de carne
59 315.8 g de alcohol etílico y 84.2 g de agua
60 80 gal de solución al 20% y 40 gal de solución al 50%
61 75 mi **62** 2 **63** 64 mi/h **64** $\frac{640}{11} \approx 58.2$ mi/h
65 1 hr 40 min **66** 165 mi **67** $10 - 5\sqrt{3} \approx 1.34$ mi
68 $3\sqrt{5} - 6 \approx 0.71$ micras
69 **(a)** $d = \sqrt{2900t^2 - 200t + 4}$
(b) $t = \frac{5 + 2\sqrt{19,603}}{145} \approx 1.97$, o aproximadamente a las 11:58 A.M.
70 Hay 2 disposiciones: 40 pies × 25 pies, y 50 pies × 20 pies
71 **(a)** $2\sqrt{2}$ pies **(b)** 2 pies **72** 12×48 pies
73 10×4 pies **74** Pasados $7\frac{2}{3}$ años **75** $4 \le p \le 8$
76 Más de \$100 000 **77** $T > 279.57$K
78 $\frac{\pi}{5}\sqrt{10} \le T \le \frac{2\pi}{7}\sqrt{5}$
79 $v < \frac{626.4}{\sqrt{6472}} \approx 7.786$ km/s
80 $20 \le w \le 25$ **81** 36 a 38 árboles por acre
82 \$320 a \$340

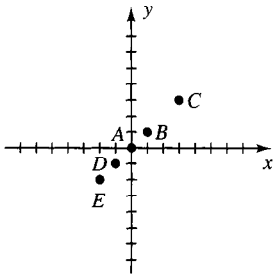
CAPÍTULO 3

EJERCICIOS 3.1

1



3 La línea que biseca los cuadrantes I y III



5 $A(3, 3)$, $B(-3, 3)$, $C(-3, -3)$, $D(3, -3)$, $E(3, 0)$, $F(0, 3)$

7 **(a)** La paralela al eje y que corta al eje x en $(-2, 0)$
(b) La paralela al eje x que corta al eje y en $(0, 3)$
(c) Todos los puntos en el eje y y a la derecha de él
(d) Todos los puntos en los cuadrantes I y III
(e) Todos los puntos abajo del eje x
(f) Todos los puntos en el eje y

9 **(a)** $\sqrt{29}$ **(b)** $\left(5, -\frac{1}{2}\right)$

11 **(a)** $\sqrt{13}$ **(b)** $\left(-\frac{7}{2}, -1\right)$ **13** **(a)** 4 **(b)** $(5, -3)$

15 $d(A, C)^2 = d(A, B)^2 + d(B, C)^2$; area = 28

17 $d(A, B) = d(B, C) = d(C, D) = d(D, A)$ y $d(A, C)^2 = d(A, B)^2 + d(B, C)^2$

19 $(13, -28)$ **21** $d(A, C) = d(B, C) = \sqrt{145}$

23 $5x + 2y = 3$

25 $\sqrt{x^2 + y^2} = 5$; circunferencia de radio 5 con centro en el origen

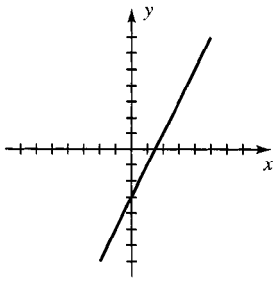
27 $(0, 3 + \sqrt{11})$, $(0, 3 - \sqrt{11})$ **29** $(-2, -1)$

31 $a < \frac{2}{5}$ o bien $a > 4$

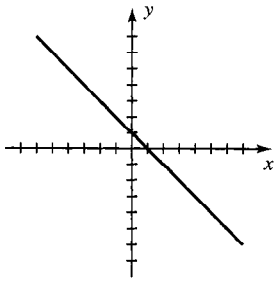
33 Sea M el punto medio de la hipotenusa. Demuestre que $d(A, M) = d(B, M) = d(O, M) = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$.

EJERCICIOS 3.2

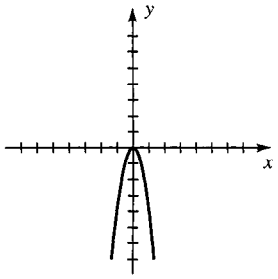
1



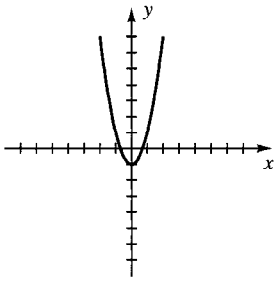
3



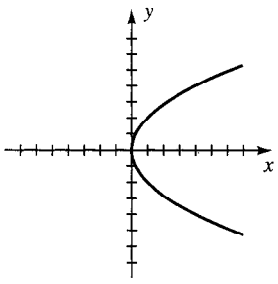
5



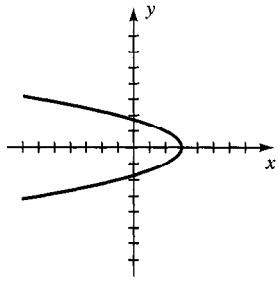
7



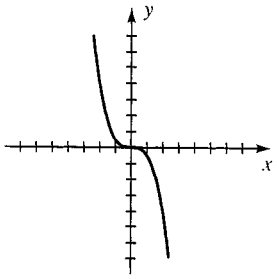
9



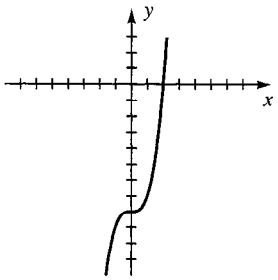
11



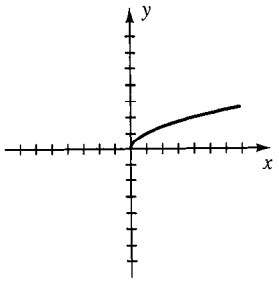
13



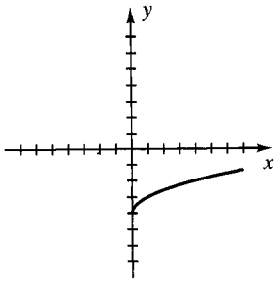
15



17

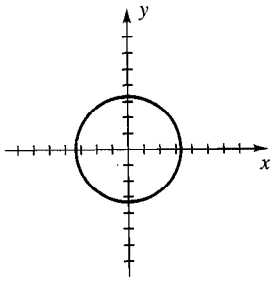


19

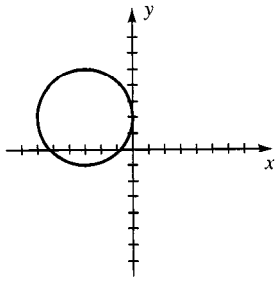


21 **(a)** 5, 7 **(b)** 9, 11 **(c)** 13

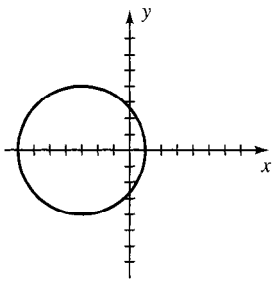
23



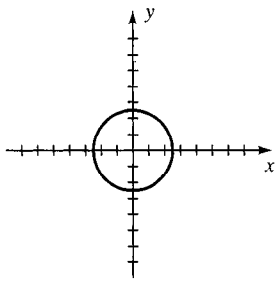
25



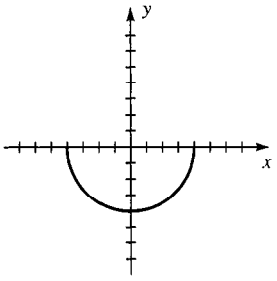
27



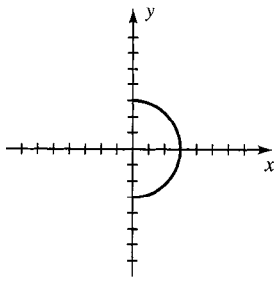
29



31



33



35 $(x-2)^2+(y+3)^2=25$ **37** $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+y^2=5$

39 $(x+4)^2+(y-6)^2=41$ **41** $(x+3)^2+(y-6)^2=9$

43 $(x+4)^2+(y-4)^2=16$

45 $(x-1)^2+(y-2)^2=34$ **47** $C(2,-3)$; $r=7$

49 $C(0,-2)$; $r=11$ **51** $C(3,-1)$; $r=\frac{1}{2}\sqrt{70}$

53 $C(-2,1)$; $r=0$ (un punto)

55 No es una circunferencia, porque r^2 no puede ser igual a -2

57 $y=\sqrt{36-x^2}$; $y=-\sqrt{36-x^2}$; $x=\sqrt{36-y^2}$; $x=-\sqrt{36-y^2}$

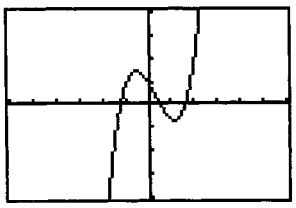
59 $y=-1+\sqrt{49-(x-2)^2}$; $y=-1-\sqrt{49-(x-2)^2}$; $x=2+\sqrt{49-(y+1)^2}$; $x=2-\sqrt{49-(y+1)^2}$

61 **(a)** Interior **(b)** En **(c)** Exterior

63 **(a)** 2 **(b)** $3\pm\sqrt{5}$ **65** $(x+2)^2+(y-3)^2=25$

67 $[-15,-3)\cup(2,15]$ **69** $(-1,0)\cup(0,1)$

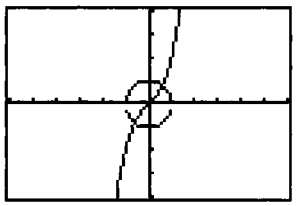
71



[– 6, 6] por [– 4, 4]

-1.2, 0.5, 1.6

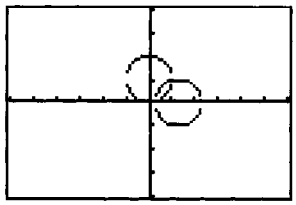
73



[– 6, 6] por [– 4, 4]

(0.6, 0.8), $(-0.6,-0.8)$

75

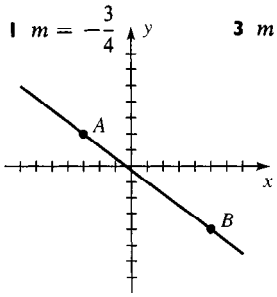


[– 6, 6] por [– 4, 4]

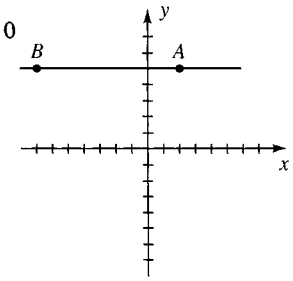
(0.999, 0.968), (0.251, 0.032)

EJERCICIOS 3.3

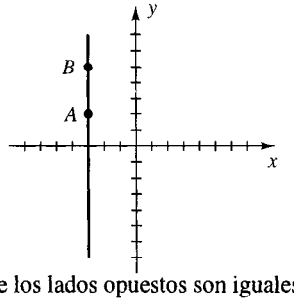
1 $m=-\frac{3}{4}$



3 $m=0$



5 m es indefinida

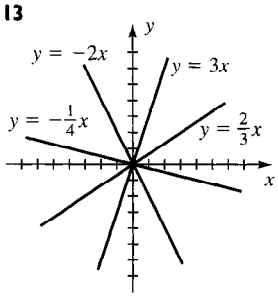


7 Las pendientes de los lados opuestos son iguales.

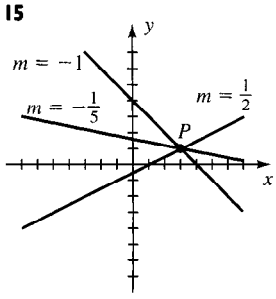
9 Las pendientes de los lados opuestos son iguales, y las de dos lados adyacentes son negativas y recíprocas entre sí.

11 $(-12,0)$

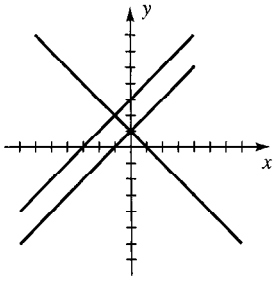
13



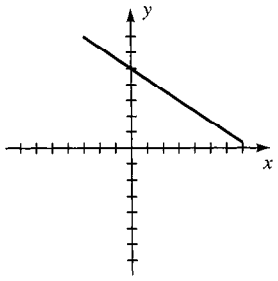
15

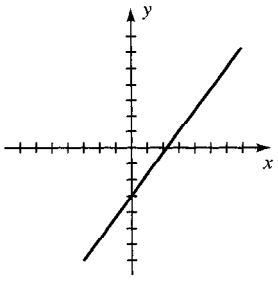


17

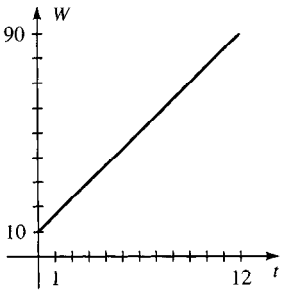


19 (a) $x = 5$ (b) $y = -2$ **21** $4x + y = 17$
23 $3x + y = 12$ **25** $11x + 7y = 9$ **27** $5x - 2y = 18$
29 $5x + 2y = 29$ **31** $y = \frac{3}{4}x - 3$ **33** $y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$
35 $5x - 7y = -15$ **37** $y = -x$
39 $m = -\frac{2}{3}$, $b = 5$ **41** $m = \frac{4}{3}$, $b = -3$





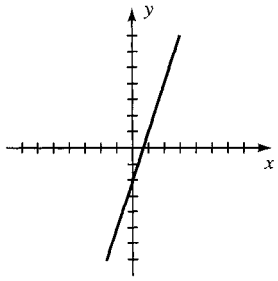
43 (a) $y = 3$ (b) $y = -\frac{1}{2}x$ (c) $y = -\frac{3}{2}x + 1$
(d) $y + 2 = -(x - 3)$
45 $\frac{x}{3/2} + \frac{y}{-3} = 1$ **47** $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 49$
49 23 semanas, aproximadamente
51 (a) 25.2 toneladas b) Hasta 3.4 toneladas
53 (a) $y = \frac{5}{14}x$ (b) 58
55 (a) $W = \frac{20}{3}t + 10$ (d)



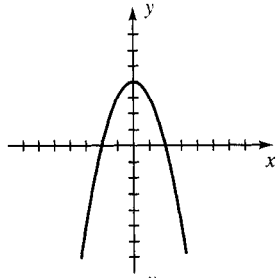
(b) 50 lb
(c) 9 años
57 $H = -\frac{8}{3}T + \frac{7520}{3}$
59 (a) $T = 0.032t + 13.5$ (b) 16.22 °C
61 (a) $E = 0.55R + 3600$ (b) $P = 0.45R - 3600$
(c) \$8000
63 (a) Sí: la creatura en $x = 3$ (b) No
65 34.95 mi/h
67 (– 0.8, – 0.6), (4.8, – 3.4), (2, 5); triángulo rectángulo isósceles
69 $a = 0.321$; $b = -0.9425$

EJERCICIOS 3.4

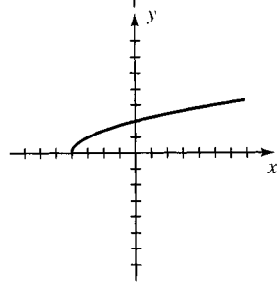
1 $-6, -4, -24$ **3** $-12, -22, -36$
5 (a) $5a - 2$ (b) $-5a - 2$ (c) $-5a + 2$
(d) $5a + 5h - 2$ (e) $5a + 5h - 4$ (f) 5
7 (a) $a^2 - a + 3$ (b) $a^2 + a + 3$ (c) $-a^2 + a - 3$
(d) $a^2 + 2ah + h^2 - a - h + 3$
(e) $a^2 + h^2 - a - h + 6$ (f) $2a + h - 1$
9 (a) $\frac{4}{a^2}$ (b) $\frac{1}{4a^2}$ (c) $4a$ (d) $2a$
11 (a) $\frac{2a}{a^2 + 1}$ (b) $\frac{a^2 + 1}{2a}$ (c) $\frac{2\sqrt{a}}{a + 1}$ (d) $\frac{\sqrt{2a^3 + 2a}}{a^2 + 1}$
13 (a) $[-3, 4]$ (b) $[-2, 2]$ (c) 0 (d) $-1, \frac{1}{2}, 2$
(e) $\left(-1, \frac{1}{2}\right) \cup (2, 4]$
15 $\left[-\frac{7}{2}, \infty\right)$ **17** $[-3, 3]$
19 Todos los números reales excepto –2, 0 y 2
21 $\left[\frac{3}{2}, 4\right) \cup (4, \infty)$ **23** $(2, \infty)$ **25** $[-2, 2]$
27 (a)



(b) $D = (-\infty, \infty)$, $R = (-\infty, \infty)$
(c) Creciente en $(-\infty, \infty)$
29 (a)

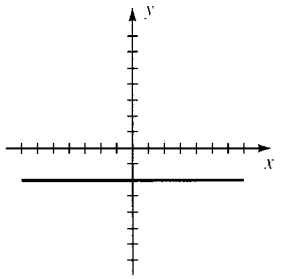


(b) $D = (-\infty, \infty)$, $R = (-\infty, 4]$
(c) Creciente en $(-\infty, 0]$, decreciente en $[0, \infty)$
31 (a)



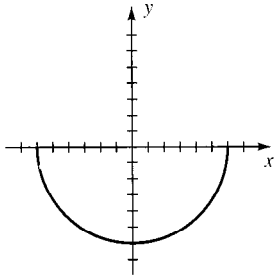
(b) $D = [-4, \infty)$, $R = [0, \infty)$
(c) Creciente en $[-4, \infty)$

33 (a)



(b) $D = (-\infty, \infty)$, $R = \{-2\}$
(c) Constante en $(-\infty, \infty)$

35 (a)



(b) $D = [-6, 6]$, $R = [-6, 0]$
(c) Decreciente en $[-6, 0]$, creciente en $[0, 6]$

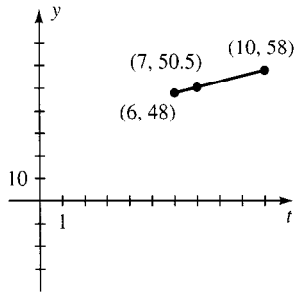
37 $f(x) = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$ **39** Sí **41** No **43** Sí

45 No **47** No **49** $V = 4x(15 - x)(10 - x)$

51 (a) $y = \frac{500}{x}$ **(b)** $C = 300x + \frac{100{,}000}{x} - 600$

53 (a) $y = 2.5t + 33$

(b)



Aumento anual de altura

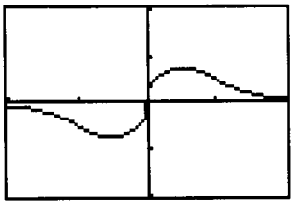
(c) 58 pulg

55 $d = 2\sqrt{t^2 + 2500}$

57 (a) $y = \sqrt{h^2 + 2hr}$ **(b)** 1280.6 mi

59 $d = \sqrt{90{,}400 + x^2}$

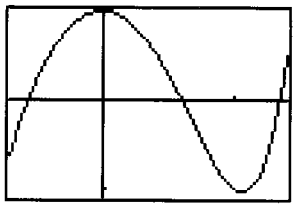
61 (a)



[– 2, 2] por [– 2, 2]

(b) $[-0.75, 0.75]$
(c) Decreciente en $[-2, -0.55]$ y en $[0.55, 2]$, creciente en $[-0.55, 0.55]$

63 (a)



[–0.7, 1.4] por [–1.1, 1]

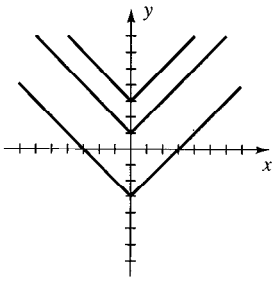
(b) $[-1.03, 1]$
(c) Creciente en $[-0.7, 0]$ y en $[1.06, 1.4]$, decreciente en $[0, 1.06]$

65 (a) 8 **(b)** ± 8 **(c)** No hay soluciones reales
(d) 625 **(e)** No hay soluciones reales

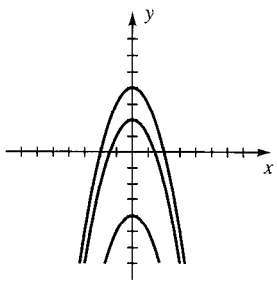
EJERCICIOS 3.5

1 Impar **3** Par
5 Ni uno, ni otro **7** Par **9** Impar

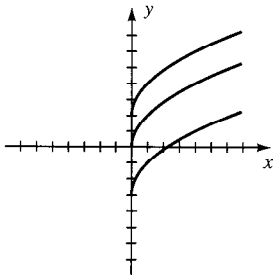
11



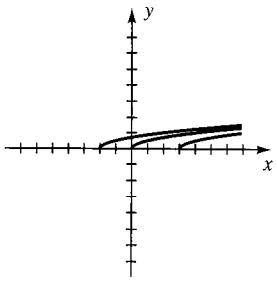
13



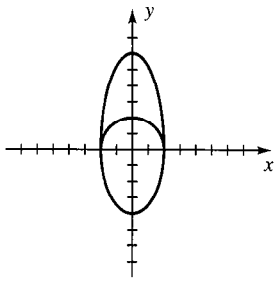
15



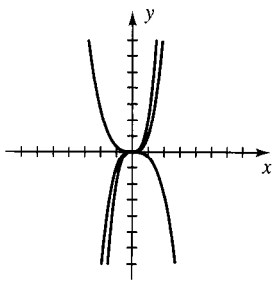
17



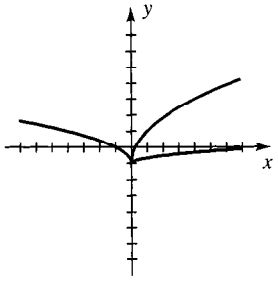
19



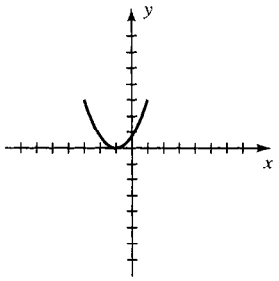
21



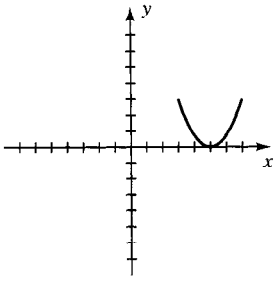
23



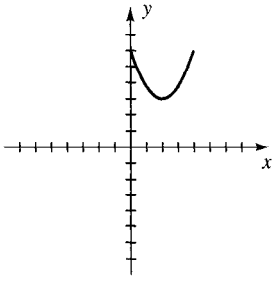
25 **(a)**



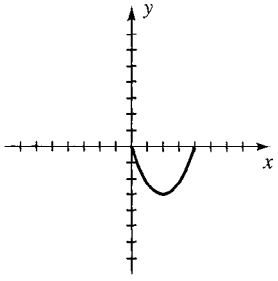
(b)



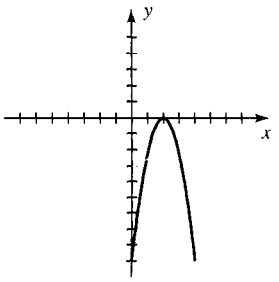
(c)



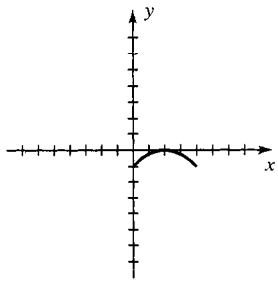
(d)



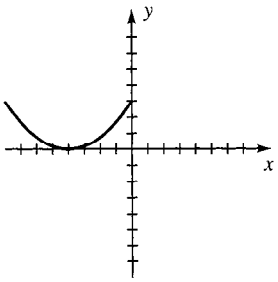
(e)



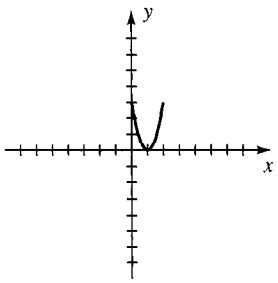
(f)



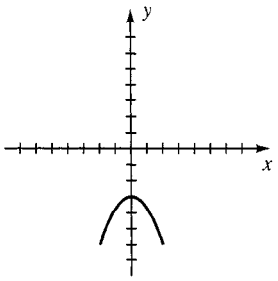
(g)



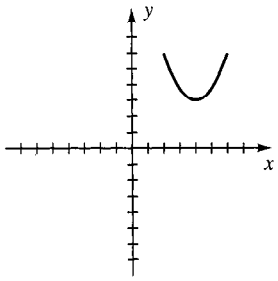
(h)



(i)



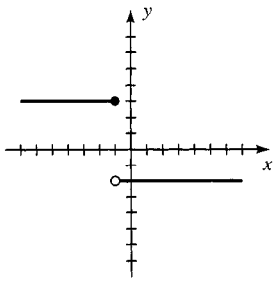
(j)



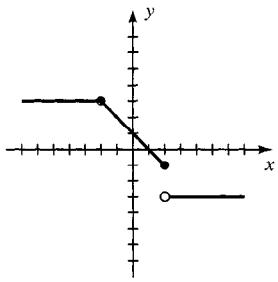
27 **(a)** $y = f(x + 9) + 1$ **(b)** $y = -f(x)$
(c) $y = -f(x + 7) - 1$

29 **(a)** $y = f(x + 4)$ **(b)** $y = f(x) + 1$
(c) $y = f(-x)$

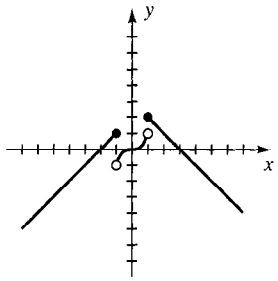
31



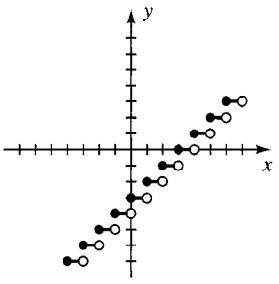
33



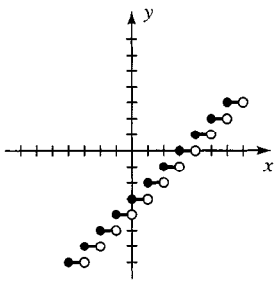
35



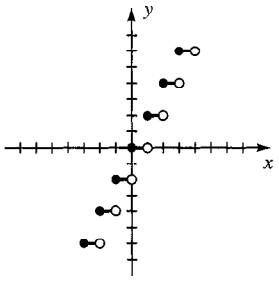
37 (a)



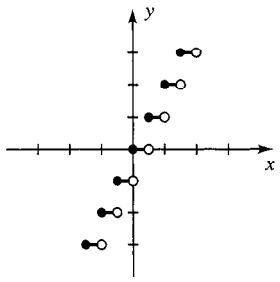
(b)



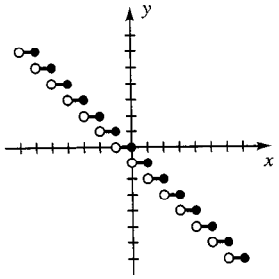
(c)



(d)



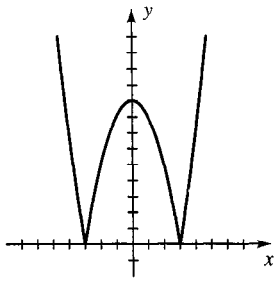
(e)



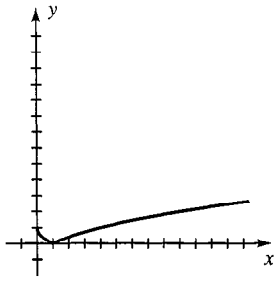
39 Si $x > 0$, dos puntos distintos en la gráfica tienen abscisa x.

41 Impar

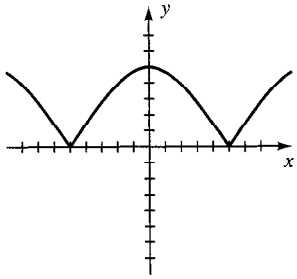
43



45



47



49 $T(x) = \begin{cases} 0.15x & \text{si } x \le 20{,}000 \\ 0.20x - 1000 & \text{si } x > 20{,}000 \end{cases}$

51 $\begin{cases} 1.20x & \text{si } 0 \le x \le 10{,}000 \\ 1.50x - 3000 & \text{si } 10{,}000 < x \le 15{,}000 \\ 1.80x - 7500 & \text{si } x > 15{,}000 \end{cases}$

53 $(-3.12, 22.00)$

55 $(-\infty, -3) \cup (-3, 1.87) \cup (4.13, \infty)$

EJERCICIOS 3.6

1 $y = a(x + 3)^2 + 1$ **3** $y = ax^2 - 3$

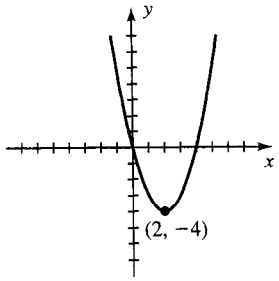
5 $f(x) = -(x + 2)^2 - 4$ **7** $f(x) = 2(x - 3)^2 + 4$

9 $f(x) = -3(x + 1)^2 - 2$ **11** $f(x) = -\frac{3}{4}(x - 6)^2 - 7$

13 (a) Mín: $f(2) = -4$

(b) 0, 4

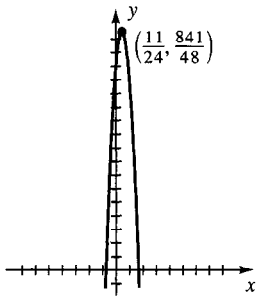
(c)



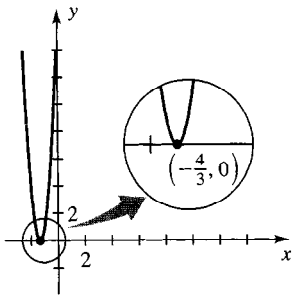
15 (a) Max: $f\left(\frac{11}{24}\right) = \frac{841}{48}$

(b) $-\frac{3}{4}, \frac{5}{3}$

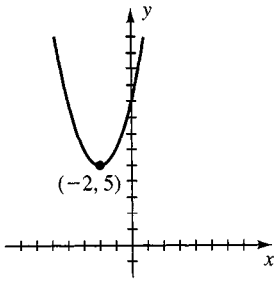
(c)



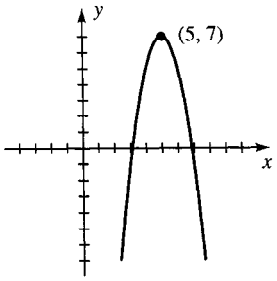
17 **(a)** Mín: $f\left(-\frac{4}{3}\right) = 0$ **(b)** $-\frac{4}{3}$ **(c)**



19 **(a)** Mín: $f(-2) = 5$ **(b)** Ni uno, ni otra cosa **(c)**



21 **(a)** Máx: $f(5) = 7$ **(b)** $5 \pm \frac{1}{2}\sqrt{14} \approx 6.87, 3.13$ **(c)**



23 $y = \frac{1}{8}(x-4)^2 - 1$ **25** $y = -\frac{4}{9}(x+2)^2 + 4$

27 $y = 3(x-0)^2 - 2$ **29** $y = -\frac{5}{9}(x-3)^2 + 5$

31 $y = -\frac{1}{4}(x-1)^2 + 4$ **33** 24.72 km **35** 10.5 lb

37 **(a)** 424 pies **(b)** 100 pies **39** 20 y 20

41 **(a)** $y = 250 - \frac{3}{4}x$ **(b)** $A = x\left(250 - \frac{3}{4}x\right)$

(c) $166\frac{2}{3}$ pies × 125 pies

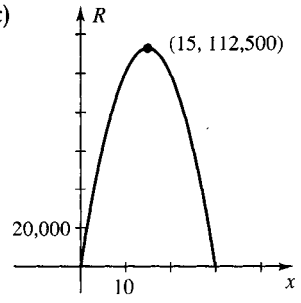
43 $y = -\frac{4}{27}\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + 3$

45 **(a)** $y = \frac{1}{500}x^2 + 10$ **(b)** 282 pies **47** 2 pies

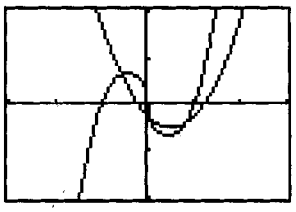
49 500 pares

51 **(a)** $R(x) = 500x(30 - x)$

(b) \$15



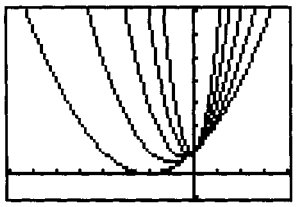
53



(−0.57, 0.64), (0.02, −0.27), (0.81, −0.41)

[−3, 3] por [−2, 2]

55



Los valores pequeños de a producen una parábola más abierta; los valores grandes de a producen una parábola más cerrada.

[−8, 4] por [−1, 7]

EJERCICIOS 3.7

1 **(a)** 15 **(b)** −3 **(c)** 54 **(d)** $\frac{2}{3}$

3 **(a)** $3x^2 + 1$; $3 - x^2$; $2x^4 + 3x^2 - 2$; $\frac{x^2+2}{2x^2-1}$

(b) $\mathbb{R}$ **(c)** Todos los números reales excepto $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$

5 **(a)** $2\sqrt{x+5}$; 0; $x + 5$; 1 **(b)** $[-5, \infty)$

(c) $(-5, \infty)$

7 **(a)** $\frac{3x^2+6x}{(x-4)(x+5)}$; $\frac{x^2+14x}{(x-4)(x+5)}$; $\frac{2x^2}{(x-4)(x+5)}$; $\frac{2(x+5)}{x-4}$

(b) Todos los números reales excepto −5 y 4

(c) Todos los números reales excepto −5, 0 y 4

9 **(a)** $-2x^2 - 1$ **(b)** $-4x^2 + 4x - 1$ **(c)** $4x - 3$

(d) $-x^4$

11 **(a)** $6x + 9$ **(b)** $6x - 8$ **(c)** -3 **(d)** 10

13 **(a)** $75x^2 + 4$ **(b)** $15x^2 + 20$ **(c)** 304 **(d)** 155

15 **(a)** $8x^2 - 2x - 5$ **(b)** $4x^2 + 6x - 9$ **(c)** 31

(d) 45

17 **(a)** $8x^3 - 20x$ **(b)** $128x^3 - 20x$ **(c)** −24

(d) 3396

19 **(a)** 7 **(b)** −7 **(c)** 7 **(d)** −7

21 **(a)** $x + 2 - 3\sqrt{x+2}$; $[-2, \infty)$

(b) $\sqrt{x^2 - 3x + 2}$; $(-\infty, 1] \cup [2, \infty)$

23 **(a)** $3x - 4$; $[0, \infty)$

(b) $\sqrt{3x^2 - 12}$; $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

25 **(a)** $\sqrt{\sqrt{x+5} - 2}$; $[-1, \infty)$

(b) $\sqrt{\sqrt{x-2} + 5}$; $[2, \infty)$

27 **(a)** $\sqrt{3 - \sqrt{x^2 - 16}}$; $[-5, -4] \cup [4, 5]$

(b) $\sqrt{-x - 13}$; $(-\infty, -13]$

29 **(a)** x; $\mathbb{R}$ **(b)** x; $\mathbb{R}$

31 **(a)** $\frac{1}{x^6}$; todos los números reales distintos de cero

(b) $\frac{1}{x^6}$; todos los números reales distintos de cero

33 (a) $\frac{1}{5-x}$; todos los números reales excepto 4 y 5

(b) $\frac{-2x+5}{-3x+7}$; todos los números reales excepto 2 y $\frac{7}{3}$

35 $-3 \pm \sqrt{2}$ **37 (a)** 5 **(b)** 6 **(c)** 6 **(d)** 5

39 $20\sqrt{x^2+1}$ **41** $A = 36\pi t^2$ **43** $r = 9\sqrt[3]{t}$

45 $h = 5\sqrt{t^2+8t}$ **47** $d = \sqrt{90{,}400 + (500+150t)^2}$

Ejercicios 49 – 56: Las respuestas no son únicas.

49 $u = x^2 + 3x$, $y = u^{1/3}$ **51** $u = x - 3$, $y = u^{-4}$

53 $u = x^4 - 2x^2 + 5$, $y = u^5$

55 $u = \sqrt{x+4}$, $y = \frac{u-2}{u+2}$ **57** 5×10^{-13}

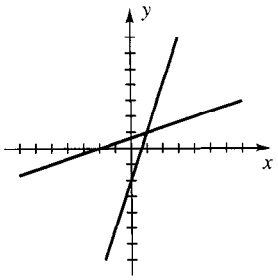
EJERCICIOS 3.8

1 Sí **3** No **5** Sí **7** No **9** No

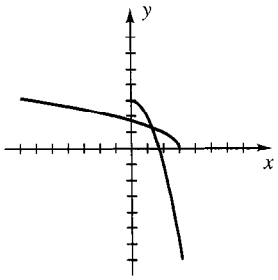
11 Sí

Ejercicios 13 – 15: Demuestre que $f(g(x)) = x = g(f(x))$.

13



15



17 $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{3}$ **19** $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{3x}$

21 $f^{-1}(x) = \frac{5x+2}{2x-3}$ **23** $f^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{2-x}{3}}$

25 $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x+5}{2}}$ **27** $f^{-1}(x) = 3 - x^2,\ x \geq 0$

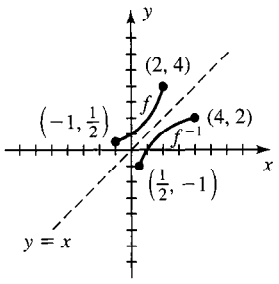
29 $f^{-1}(x) = (x-1)^3$ **31** $f^{-1}(x) = x$

33 (a) Como f es biunívoca, existe una inversa;

$$f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$$

(b) No; no es biunívoca

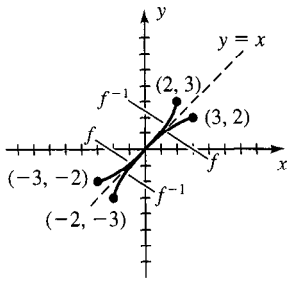
35 (a)



(b) $D = [-1, 2]$; $R = \left[\frac{1}{2}, 4\right]$

(c) $D_1 = \left[\frac{1}{2}, 4\right]$; $R_1 = [-1, 2]$

37 (a)



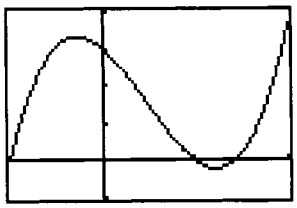
(b) $D = [-3, 3]$; $R = [-2, 2]$

(c) $D_1 = [-2, 2]$; $R_1 = [-3, 3]$

39 (c) La gráfica de f es simétrica con respecto a la recta $y = x$. Por consiguiente, $f(x) = f^{-1}(x)$.

41 Sí

43



[−1, 2] por [−1, 4]

(a) [−0.27, 1.22]

(b) [−0.20, 3.31]; [−0.27, 1.22]

45 $x = \frac{0.4996 + \sqrt{(-0.4996)^2 - 4(0.0833)(3.5491 - D)}}{2(0.0833)}$

EJERCICIOS 3.9

1 $u = kv$; $k = \frac{2}{5}$ **3** $r = k\frac{s}{t}$; $k = -14$

5 $y = k\frac{x^2}{z^3}$; $k = 27$ **7** $z = kx^2y^3$; $k = -\frac{2}{49}$

9 $y = k\frac{x}{z^2}$; $k = 36$ **11** $y = k\frac{\sqrt{x}}{z^3}$; $k = \frac{40}{3}$

13 (a) $P = kd$ **(b)** 59 **(c)** 295 lb/pie^2 (o lb/ft^2)

15 (a) $R = k\frac{l}{d^2}$ **(b)** $\frac{1}{40{,}000}$ **(c)** $\frac{50}{9}$ ohms

17 (a) $P = k\sqrt{l}$ **(b)** $\frac{3}{4}\sqrt{2}$ **(c)** $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ s

19 (a) $T = kd^{3/2}$ (b) $\frac{365}{(93)^{3/2}}$ (c) 223.2 días

21 (a) $V = k\sqrt{L}$ (b) $\frac{7}{2}\sqrt{2}$ (c) 60.6 mi/h

23 (a) $W = kh^3$ (b) $\frac{25}{27}$ (c) 154 lb

25 (a) $F = kPr^4$

(b) Aproximadamente 2.05 veces más duro

27 Aumenta 250% **29** $y = 1.2x$ **31** $y = -\frac{10.1}{x^2}$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 3

1 Los puntos de los cuadrantes II y IV

2 $d(A, B)^2 + d(A, C)^2 = d(B, C)^2$; área = 10

3 (a) $\sqrt{265}$ (b) $\left(-\frac{13}{2}, 1\right)$ (c) $(-11, -23)$

4 (0, 1), (0, 11) **5** $-2 < a < 1$

6 $(x - 7)^2 + (y + 4)^2 = 149$

7 $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 169$ **8** $x = -2 - \sqrt{9 - y^2}$

9 $-\frac{11}{19}$ **10** La pendiente de AD y BC es $\frac{2}{3}$.

11 (a) $18x + 6y = 7$ (b) $2x - 6y = 3$

12 $y = -\frac{8}{3}x + 8$ **13** $(x + 5)^2 + (y + 1)^2 = 81$

14 $x + y = -3$ **15** $5x - y = 23$ **16** $2x - 3y = 5$

17 $C(0, 6); r = \sqrt{5}$ **18** $C(-3, 2); r = \frac{1}{2}\sqrt{13}$

19 (a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) 0 (d) $-\frac{x}{\sqrt{3 - x}}$

(e) $-\frac{x}{\sqrt{x + 3}}$ (f) $\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 3}}$ (g) $\frac{x^2}{x + 3}$

20 (a) $\left[\frac{4}{3}, \infty\right)$; $[0, \infty)$

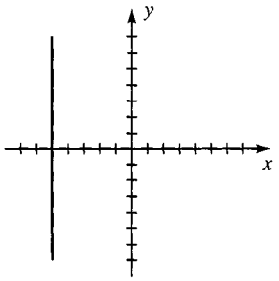
(b) Todos los números reales excepto -3; $(0, \infty)$

21 $-2a - h + 1$ **22** $-\frac{1}{(a + h + 2)(a + 2)}$

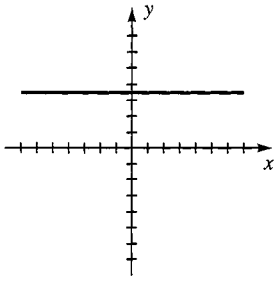
23 $f(x) = \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$

24 (a) Impar (b) Ni uno, ni otro (c) Par

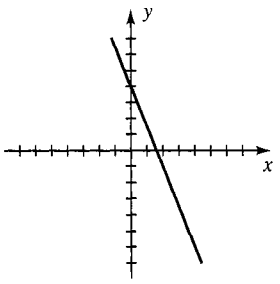
25



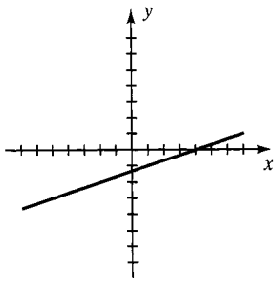
26



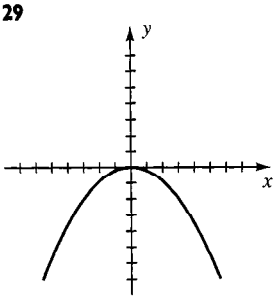
27



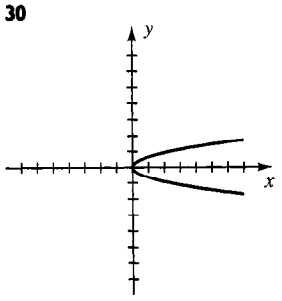
28



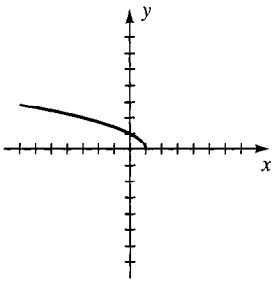
29



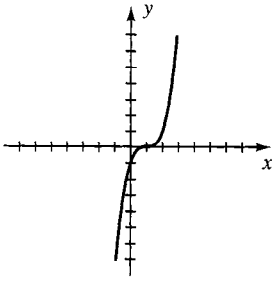
30



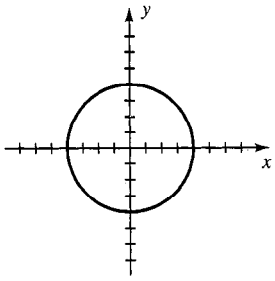
31



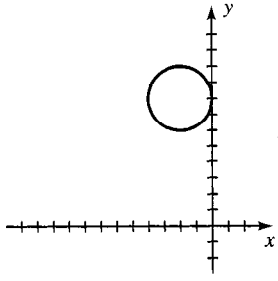
32



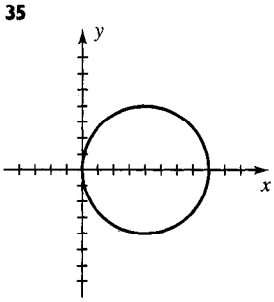
33



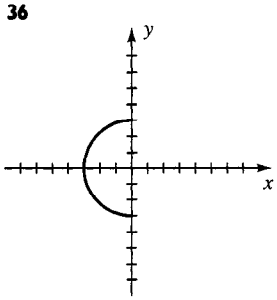
34



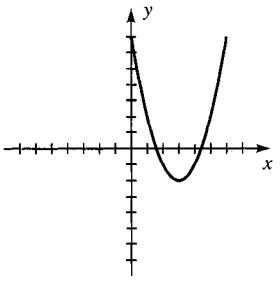
35



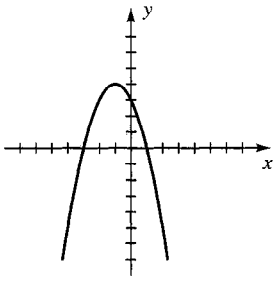
36



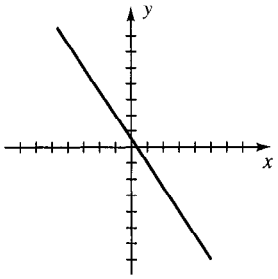
37



38

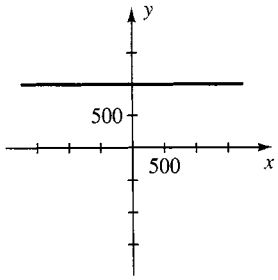


39 (a)



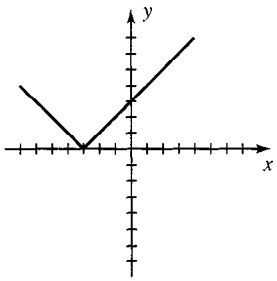
(b) $D = \mathbb{R}$; $R = \mathbb{R}$
(c) Decrecicnte en $(-\infty, \infty)$

40 (a)



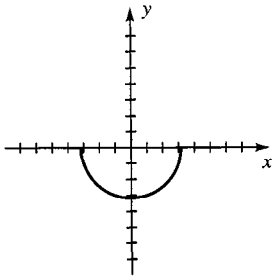
(b) $D = \mathbb{R}$; $R = \{1000\}$
(c) Constante en $(-\infty, \infty)$

41 (a)



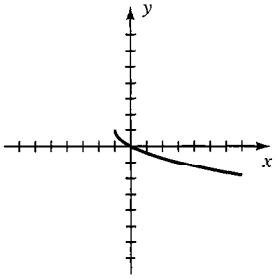
(b) $D = \mathbb{R}$; $R = [0, \infty)$
(c) Decreciente en $(-\infty, -3]$, creciente en $[-3, \infty)$

42 (a)



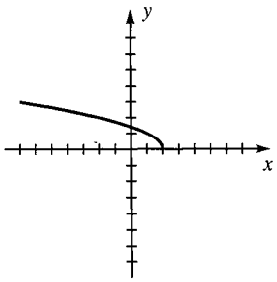
(b) $D = [-\sqrt{10}, \sqrt{10}]$; $R = [-\sqrt{10}, 0]$
(c) Decreciente en $[-\sqrt{10}, 0]$, creciente en $[0, \sqrt{10}]$

43 (a)



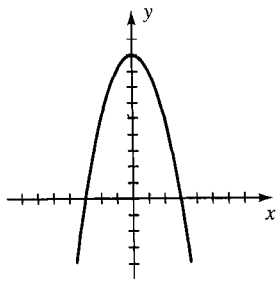
(b) $D = [-1, \infty)$; $R = (-\infty, 1]$
(c) Decreciente en $[-1, \infty)$

44 (a)



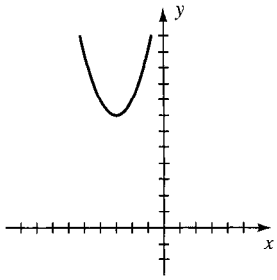
(b) $D = (-\infty, 2]$; $R = [0, \infty)$
(c) Decreciente en $(-\infty, 2]$

45 (a)



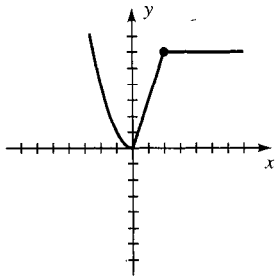
(b) $D = \mathbb{R}$; $R = (-\infty, 9]$
(c) Creciente en $(-\infty, 0]$, decreciente en $[0, \infty)$

46 (a)



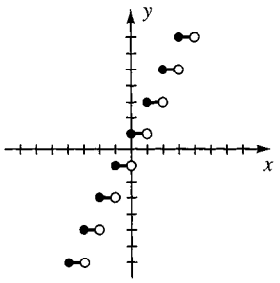
(b) $D = \mathbb{R}$; $R = [7, \infty)$
(c) Decreciente en $(-\infty, -3]$, creciente en $[-3, \infty)$

47 (a)



(b) $D = \mathbb{R}$; $R = [0, \infty)$
(c) Decreciente en $(-\infty, 0]$, creciente en $[0, 2]$, constante en $[2, \infty)$

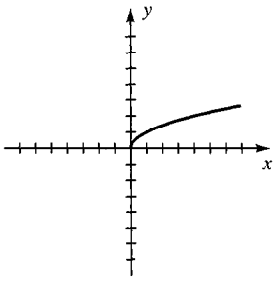
48 (a)



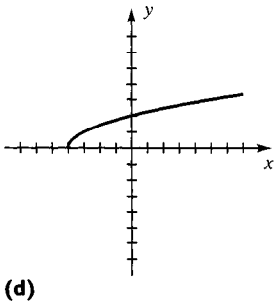
(b) $D = \mathbb{R}$; $R = \{\ldots, -3, -1, 1, 3, \ldots\}$

(c) Constante en $[n, n+1)$, donde n es cualquier entero.

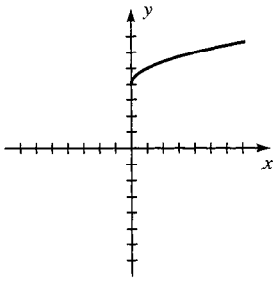
49 (a)



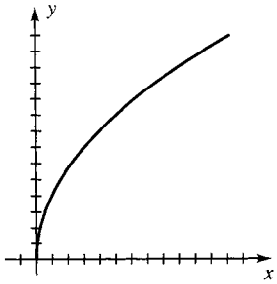
(b)



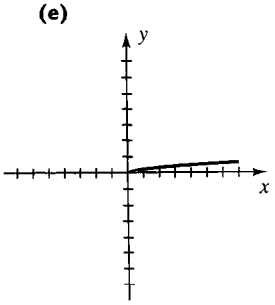
(c)



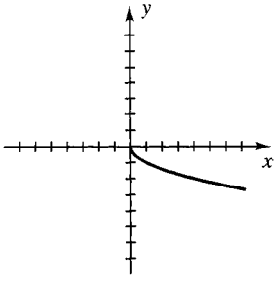
(d)



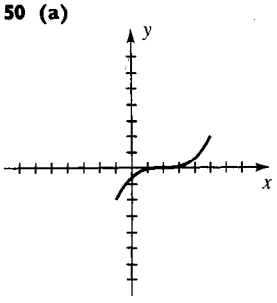
(e)



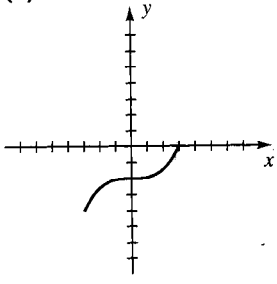
(f)



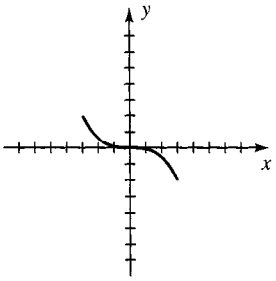
50 (a)



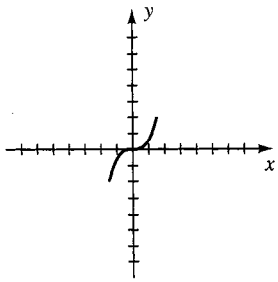
(b)



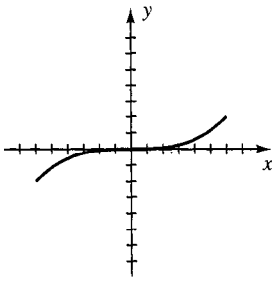
(c)



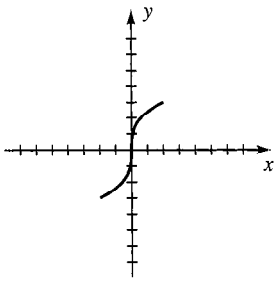
(d)



(e)



(f)



51 $2x - 5y = 10$ **52** $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$

53 $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 4$ **54** $y = -|x-2| - 1$

55 Mín: $f(-3) = 4$ **56** Máx: $f(5) = -7$

57 $f(x) = -2(x-3)^2 + 4$ **58** $y = \frac{3}{2}(x-3)^2 - 2$

59 (a) $[0, 2]$ **(b)** $(0, 2]$ **60 (a)** -1 **(b)** $\sqrt{13}$

61 (a) $18x^2 + 9x - 1$ **(b)** $6x^2 - 15x + 5$

62 (a) $\sqrt{\dfrac{3+2x^2}{x^2}}$ **(b)** $\dfrac{1}{3x+2}$

63 (a) $\sqrt{28-x}$; $[3, 28]$ **(b)** $\sqrt{\sqrt{25-x^2}-3}$; $[-4, 4]$

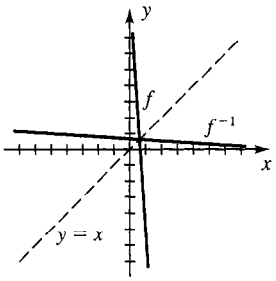
64 (a) $\dfrac{1}{x+3}$; todos los números reales excepto -3 y 0

(b) $\dfrac{6x+4}{x}$; todos los números reales excepto $-\frac{2}{3}$ y 0

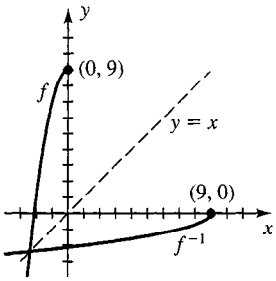
65 $u = x^2 - 5x$, $y = \sqrt[3]{u}$ **66** Sí

67 (a) $f^{-1}(x) = \dfrac{10-x}{15}$ **68 (a)** $f^{-1}(x) = -\sqrt{\dfrac{9-x}{2}}$

(b)



(b)



69 27 **70** **(a)** 259 pies **(b)** 2002

71 **(a)** $V = 6000t + 89{,}000$ **(b)** $2\frac{1}{3}$

72 **(a)** $F = \frac{9}{5}C + 32$ **(b)** 1.8 °F

73 **(a)** $C_1(x) = \frac{1}{16}x$ **(b)** $C_2(x) = \frac{5}{88}x + 50$ **(c)** 8800

74 **(a)** $y = -\frac{4}{5}x + 20$ **(b)** $V = 4x\left(-\frac{4}{5}x + 20\right)$

75 $C = \dfrac{3\pi(r^3 + 16)}{10r}$

76 **(a)** $V = 10t$

(b) $V = 200h^2$ para $0 \le h \le 6$; $V = 7200 + 3200(h - 6)$ para $6 < h \le 9$

(c) $h = \sqrt{\frac{t}{20}}$ para $0 \le t \le 720$; $h = 6 + \dfrac{t - 720}{320}$ para $720 < t \le 1680$

77 **(a)** $r = \frac{1}{2}x$ **(b)** $y = \frac{5}{4\pi} - \frac{1}{48}x^3$

78 **(a)** $y = \dfrac{bh}{a - b}$ **(b)** $V = \frac{1}{3}\pi h(a^2 + ab + b^2)$

(c) $\frac{200}{7\pi} \approx 9.1$ ft (o pies)

79 $\frac{18}{13}$ horas después de la 1:00 P.M., o sea, aproximadamente a las 2:23 **P.M.**

80 El radio de la semicircunferencia es $\frac{1}{8\pi}$ millas; la longitud del rectángulo es $\frac{1}{8}$ millas.

81 **(a)** 1 sec **(b)** 4 pies **(c)** En la Luna, 6 s y 24 pies

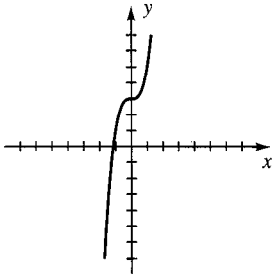
82 **(a)** (87.5, 17.5) **(b)** 30.625 unidades **83** 375

84 10,125 w (watts)

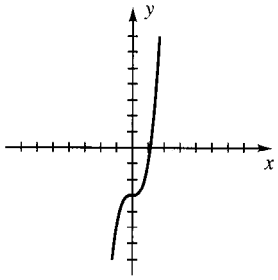
CAPÍTULO 4

EJERCICIOS 4.1

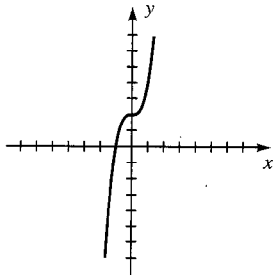
1 **(a)**



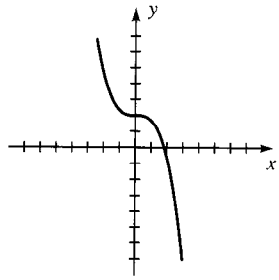
(b)



3 **(a)**



(b)

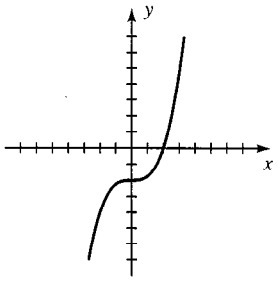


5 $f(3) = -2 < 0$, $f(4) = 10 > 0$

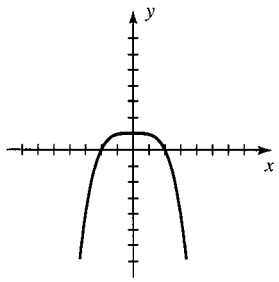
7 $f(2) = 5 > 0$, $f(3) = -5 < 0$

9 $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{19}{32} > 0$, $f(-1) = -1 < 0$

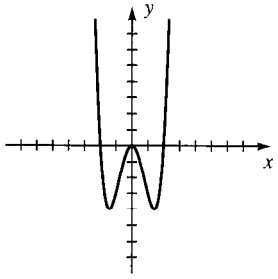
11 $f(x) > 0$ si $x > 2$, $f(x) < 0$ si $x < 2$



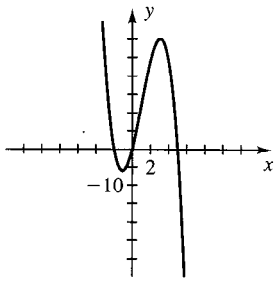
13 $f(x) > 0$ si $|x| < 2$, $f(x) < 0$ si $|x| > 2$



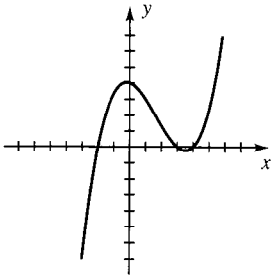
15 $f(x) > 0$ si $|x| > 2$, $f(x) < 0$ si $0 < |x| < 2$



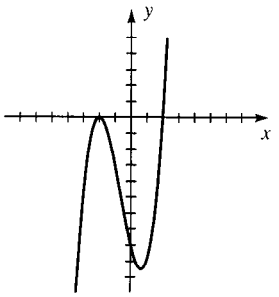
17 $f(x) > 0$ si $x < -2$ o $0 < x < 5$, $f(x) < 0$ si $-2 < x < 0$ o $x > 5$



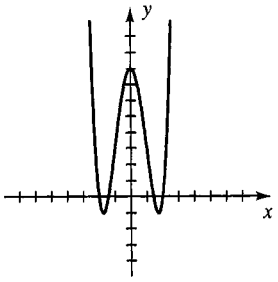
19 $f(x) > 0$ si $-2 < x < 3$ o $x > 4$, $f(x) < 0$ si $x < -2$ o $3 < x < 4$



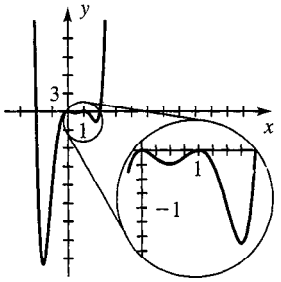
21 $f(x) > 0$ si $x > 2$, $f(x) < 0$ si $x < -2$ o $|x| < 2$



23 $f(x) > 0$ si $|x| > 2$ o $|x| < \sqrt{2}$, $f(x) < 0$ si $\sqrt{2} < |x| < 2$



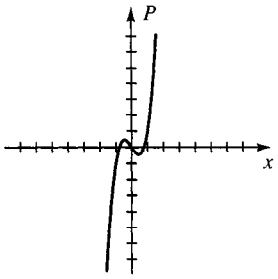
25 $f(x) > 0$ si $|x| > 2$, $f(x) < 0$ si $|x| < 2$, $x \neq 0$, $x \neq 1$



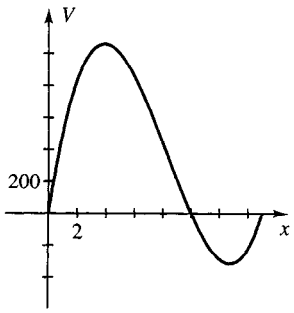
27 Si n es par, entonces $(-x)^n = x^n$ y, por lo tanto, $f(-x) = f(x)$. Por consiguiente, f es función par.

29 $-\frac{4}{3}$

31 $P(x) > 0$ en $\left(-\frac{1}{5}\sqrt{15}, 0\right)$ y $\left(\frac{1}{5}\sqrt{15}, \infty\right)$;
$P(x) < 0$ en $\left(-\infty, -\frac{1}{5}\sqrt{15}\right)$ y $\left(0, \frac{1}{5}\sqrt{15}\right)$

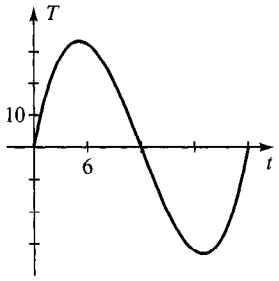


33 **(b)** $V(x) > 0$ en $(0, 10)$ y $(15, \infty)$; los valores admisibles de x están en $(0,10)$.



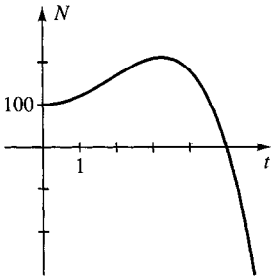
35 **(a)** $T > 0$ para $0 < t < 12$; $T < 0$ para $12 < t < 24$

(b)



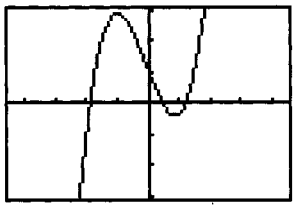
(c) $T(6) = 32.4 > 32$, $T(7) = 29.75 < 32$

37 **(a)** $N(t) > 0$ para $0 < t < 5$



(b) La población se extíngue a los 5 años.

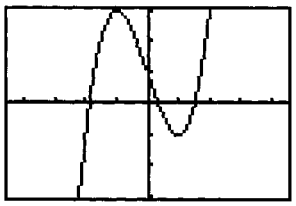
39



$-1.89, 0.49, 1.20$

[−4.5, 4.5] por [− 3, 3]

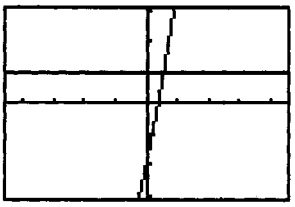
41



$-1.88, 0.35,$ y 1.53

[− 4.5, 4.5] por [− 3, 3]

43



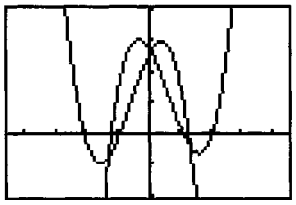
$(0.56, \infty)$

[− 4.5, 4.5] por [− 3, 3]

45

$(-1.10, \infty)$

[– 4.5, 4.5] por [– 3, 3]

47 

$(-1.29, -0.77)$, $(0.085, 2.66)$, $(1.36, -0.42)$

[– 4.5, 4.5] por [– 2, 4]

EJERCICIOS 4.2

1 $2x^2 - x + 3$; $4x - 3$ **3** $\frac{3}{2}x$; $\frac{1}{2}x - 4$ **5** 0; $7x + 2$

7 $\frac{9}{2}$; $\frac{53}{2}$ **9** 26 **11** 7 **13** $f(-3) = 0$

15 $f(-2) = 0$ **17** $x^3 - 3x^2 - 10x$

19 $x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 2x + 8$ **21** $2x^2 + x + 6$; 7

23 $x^2 - 3x + 1$; -8

25 $3x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 18x + 36$; -65

27 $4x^3 + 2x^2 - 4x - 2$; 0 **29** 73 **31** -0.0444

33 $8 + 7\sqrt{3}$ **35** $f(-2) = 0$ **37** $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

39 3, 5 **41** $f(c) > 0$ **43** -14

45 Si $f(x) = x^n - y^n$ y n es par, entonces $f(-y) = 0$.

47 **(a)** $V = \pi x^2(6 - x)$ **(b)** $\left(\frac{1}{2}(5 + \sqrt{45}), \frac{1}{2}(7 - \sqrt{45})\right)$

49 **(a)** $A = 8x - 2x^3$ **(b)** $\sqrt{13} - 1 \approx 2.61$ **51** 27

53 $f(x) = ((((2x + 3)x - 6)x - 4)x + 1)x - 9$; -8.9719

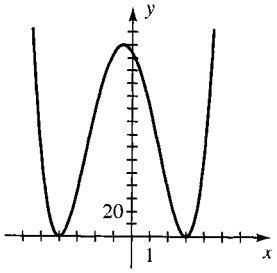
55 -9.55 **57** -0.75, 1.96

EJERCICIOS 4.3

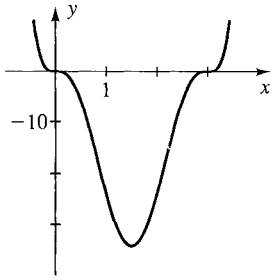
1 $-4x^3 + 16x^2 - 4x - 24$ **3** $3x^3 + 3x^2 - 36x$

5 $-2x^3 + 6x^2 - 8x + 24$

7 $x^4 + 2x^3 - 23x^2 - 24x + 144$



9 $3x^6 - 27x^5 + 81x^4 - 81x^3$



11 $f(x) = \frac{7}{9}(x + 1)\left(x - \frac{3}{2}\right)(x - 3)$

13 $f(x) = -1(x - 1)^2(x - 3)$

15 $-\frac{2}{3}$ (multiplicidad 1); 0 (multiplicidad 2); $\frac{5}{2}$ (multiplicidad 3)

17 $-\frac{3}{2}$ (multiplicidad 2); 0 (multiplicidad 3)

19 – 4 (multiplicidad 3); –3 (multiplicidad 2); 3 (multiplicidad 5)

21 $\pm 4i, \pm 3$ (cada una de multiplicidad 1)

23 $f(x) = (x + 3)^2(x + 2)(x - 1)$

25 $f(x) = (x - 1)^5(x + 1)$

Ejercicios 27 – 34: Los tipos de soluciones posibles aparecen en el orden: positiva, negativa y compleja no real.

27 3, 0, 0 o bien 1, 0, 2 **29** 0, 1, 2

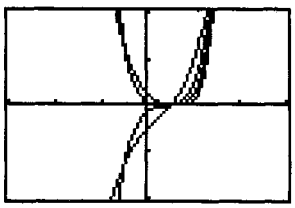
31 2, 2, 0; 2, 0, 2; 0, 2, 2; 0, 0, 4

33 2, 3, 0; 2, 1, 2; 0, 3, 2; 0, 1, 4

35 Superior 5, inferior –2 **37** Superior 2, inferior –2

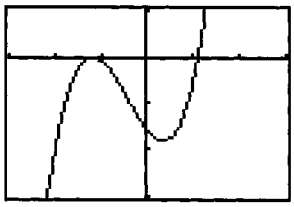
39 Superior 3, inferior –3

41 $f(t) = \frac{5}{3528}t(t - 5)(t - 19)(t - 24)$

43 

[– 3.3,] por [– 2, 2]

Al aumentar la multiplicidad, la gráfica se hace más horizontal en (0.5, 0).

45 
[−3, 3] por [−3, 1]

−1.2 (multiplicidad 2); 1.1 (multiplicidad 1)

47 Sí: $1.5(x - 2)(x - 5.2)(x - 10.1)$

49 2008 (cuando $t \approx 27.1$)

EJERCICIOS 4.4

1 $x^2 - 6x + 13$ **3** $(x - 2)(x^2 + 4x + 29)$

5 $x(x + 1)(x^2 - 6x + 10)$

7 $(x^2 - 8x + 25)(x^2 + 4x + 5)$

9 $x(x^2 + 4)(x^2 - 2x + 2)$

Ejercicios 11–14: Demuestre que ninguna de las raíces racionales posibles satisfacen la ecuación.

11 $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ **13** $\pm 1, \pm 2$ **15** $-2, -1, 4$

17 $-3, 2, \frac{5}{2}$ **19** $-7, \pm\sqrt{2}, 4$

21 $-3, -\frac{2}{3}, 0$ (multiplicidad 2), $\frac{1}{2}$ **23** $-\frac{3}{4}, -\frac{3}{4} \pm \frac{3}{4}\sqrt{7}i$

25 No. Si i es raíz, entonces $-i$ también es raíz. Por lo tanto, el polinomio tendría factores $x - 1, x + 1, x - i, x + i$. Y, por consiguiente, sería de un grado mayor que 3.

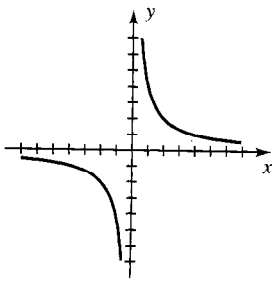
27 Como n es impar y hay raíces complejas, no reales, en pares conjugados para polinomios con coeficientes reales, debe haber cuando menos una raíz real.

29 **(a)** Las dos cajas corresponden a $x = 5$ y $x = 5(2 - \sqrt{2})$.
(b) La caja correspondiente a $x = 5$

31 **(c)** En pies: 5,12 y 13. 3 **33** **(b)** 4 pies

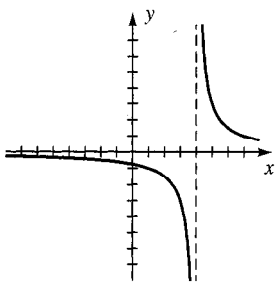
35 Ninguno **37** $-1.2, 0.8, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **39** 10,200 m

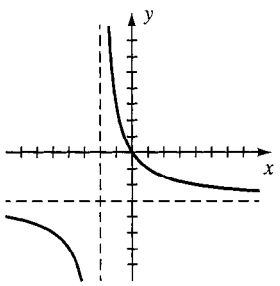
EJERCICIOS 4.5

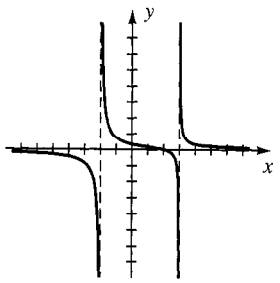
1 **(a)** 

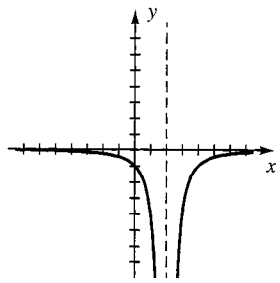
(b) D = todos los números reales distintos de 0; $R = D$

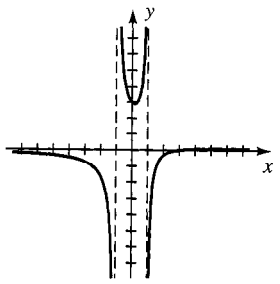
(c) Decreciente en $(-\infty, 0)$ y en $(0, \infty)$

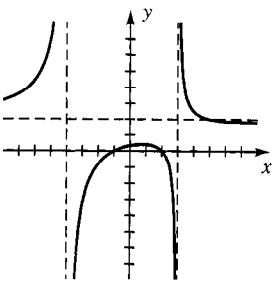
3 

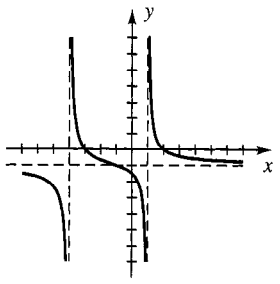
5 

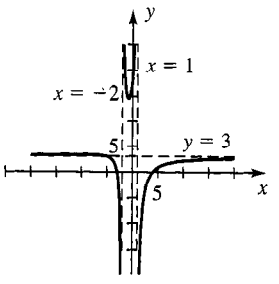
7 

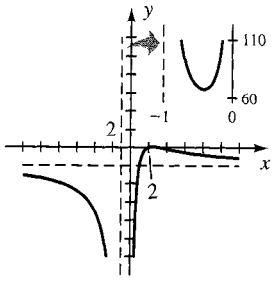
9 

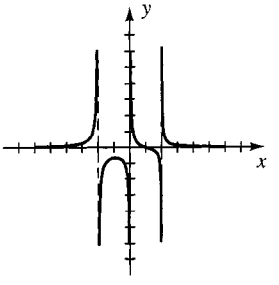
11 

13 

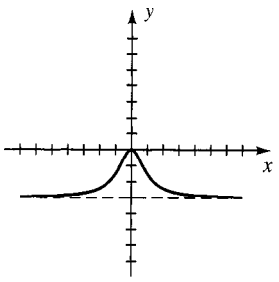
15 

17 

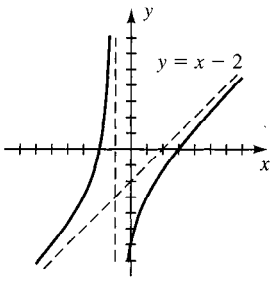
19 

21 

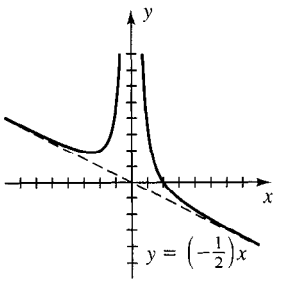
23



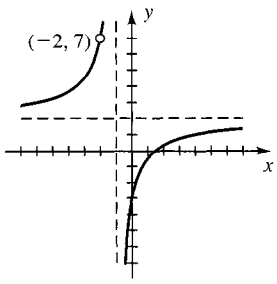
25 $y = x - 2$



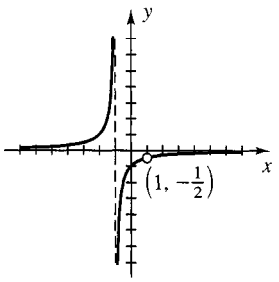
27 $y = -\frac{1}{2}x$



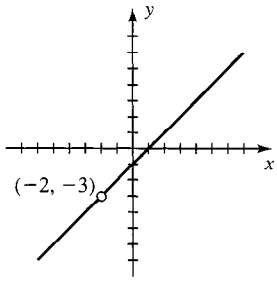
29 $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$ para $x \neq -2$



31 $f(x) = \dfrac{-1}{x+1}$ para $x \neq 1$



33 $f(x) = x - 1$ para $x \neq -2$



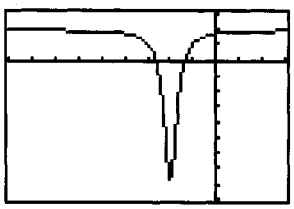
35 **(a)** $h = \dfrac{16}{(r+0.5)^2} - 1$ **(b)** $V(r) = \pi r^2 h$

(c) Excluya $r \leq 0$ y $r \geq 3.5$.

37 **(a)** $V(t) = 50 + 5t$, $A(t) = 0.5t$ **(b)** $\dfrac{t}{10t + 100}$

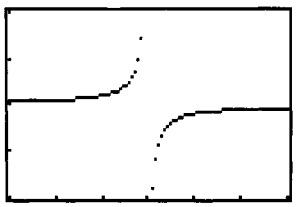
(c) Cuando $t \to \infty$, $c(t) \to 0.1$ lb de sal por galón

39



[−9, 3] por [−9, 3]

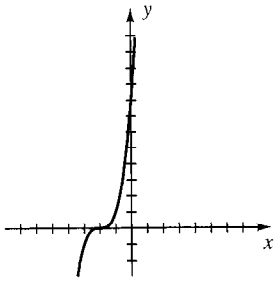
41



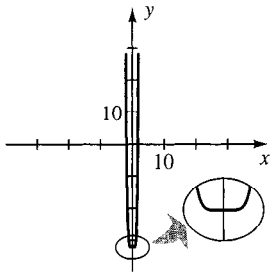
[0.7, 1.3] por [0.8, 1.2]

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 4

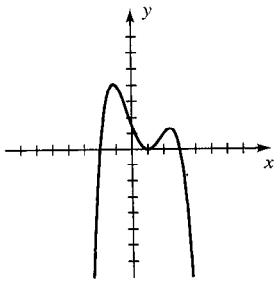
1 $f(x) > 0$ si $x > -2$, $f(x) < 0$ si $x < -2$



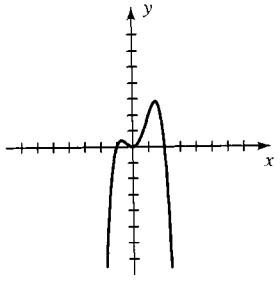
2 $f(x) > 0$ si $x < -\sqrt[6]{32}$ o $x > \sqrt[6]{32}$, $f(x) < 0$ si $-\sqrt[6]{32} < x < \sqrt[6]{32}$



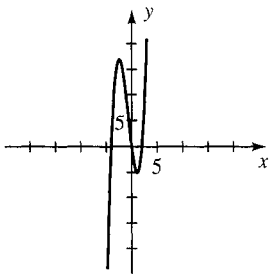
3 $f(x) > 0$ si $-2 < x < 1$ o $1 < x < 3$, $f(x) < 0$ si $x < -2$ o $x > 3$



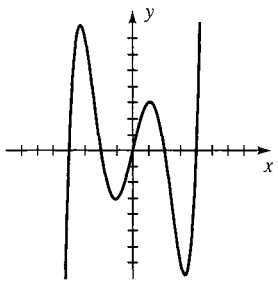
4 $f(x) > 0$ si $-1 < x < 0$ o $0 < x < 2$, $f(x) < 0$ si $x < -1$ o $x > 2$



5 $f(x) > 0$ si $-4 < x < 0$ o $x > 2$, $f(x) < 0$ si $x < -4$ o $0 < x < 2$.



6 $f(x) > 0$ si $-4 < x < -2$, $0 < x < 2$, o $x > 4$, $f(x) < 0$ si $x < -4$, $-2 < x < 0$, o $2 < x < 4$



7 $f(0) = -9 < 100$ y $f(10) = 561 > 100$. Según el teorema del valor intermedio para funciones polinomiales, f asume todos los valores entre -9 y 561. Por lo tanto, hay cuando menos un número real a en $[0, 10]$ tal que $f(a) = 100$.

8 Sea $f(x) = x^5 - 3x^4 - 2x^3 - x + 1$. $f(0) = 1 > 0$ y $f(1) = -4 < 0$. Según el teorema del valor intermedio para funciones polinomiales, f asume todos los valores entre -4 y 1. Por lo tanto, hay cuando menos un número real a en $[0, 1]$, tal que $f(a) = 0$.

9 $3x^2 + 2$; $-21x^2 + 5x - 9$ **10** $4x - 1$; $2x - 1$

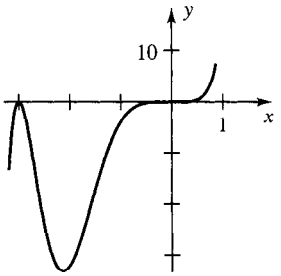
11 -132 **12** $f(3) = 0$

13 $6x^4 - 12x^3 + 24x^2 - 52x + 104$; -200

14 $2x^2 + (5 + 2\sqrt{2})x + (2 + 5\sqrt{2})$; $11 + 2\sqrt{2}$

15 $\frac{2}{41}(x^2 + 6x + 34)(x + 1)$ **16** $\frac{1}{4}x(x^2 - 2x + 2)(x - 3)$

17 $x^7 + 6x^6 + 9x^5$



18 $(x - 2)^3(x + 3)(x - 1)$

19 1 (multiplicidad 5); -3 (multiplicidad 1)

20 $0, \pm i$ (todas con multiplicidad 2)

21 **(a)** 3 positivas y 1 negativa; o bien 1 positiva, 1 negativa y 2 complejas

(b) Cota superior 3; cota inferior -1

22 **(a)** 2 positivas y 3 negativas; o 2 positivas, 1 negativa y 2 complejas; o 3 negativas y 2 complejas; o también 1 negativa y 4 complejas.

(b) Cota superior 2; cota inferior -3

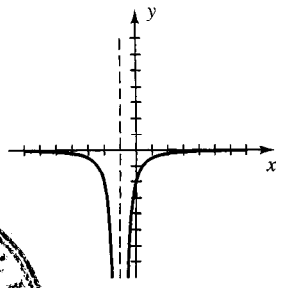
23 Como sólo hay potencias pares, $7x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 10 \geq 10$ para todo número real x.

24 $-3, -2, -2 \pm i$

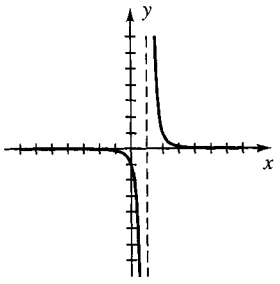
25 $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{2}$

26 $\pm\sqrt{6}, \pm 1$

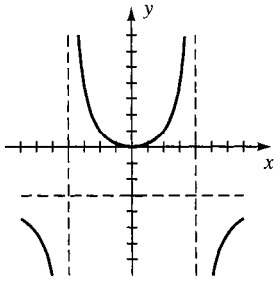
27



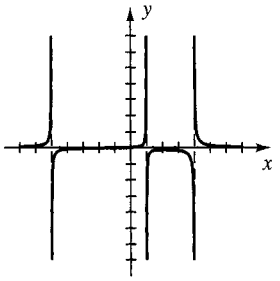
28



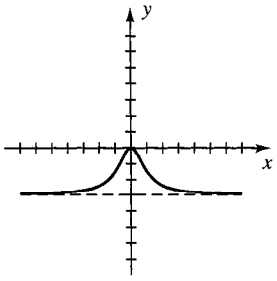
29



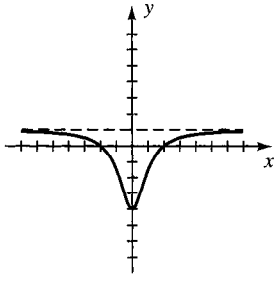
30



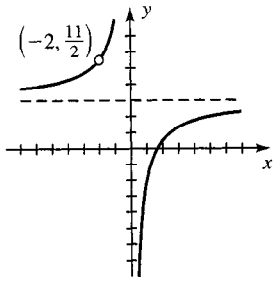
31



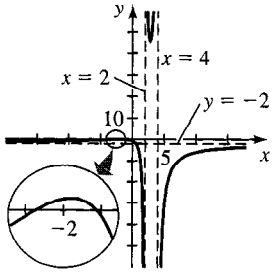
32



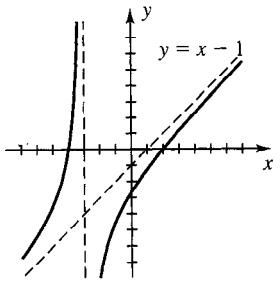
33



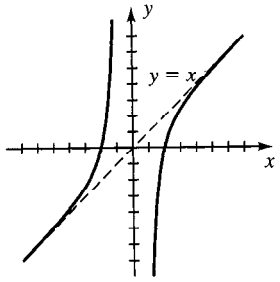
34



35



36



37 **(a)** $\frac{1}{15{,}000}$

(b) $y \approx 0.9754 < 1$ si $x = 6.1$, y también $y \approx 1.0006 > 1$ si $x = 6.2$

38 **(a)** $V = \frac{1}{4\pi}x(l^2 - x^2)$

38 **(b)** Si $x > 0$, $V > 0$ cuando $0 < x < l$.

39 $t = 4$ (10:00 A.M.) y $t = 16 - 4\sqrt{6} \approx 6.2020$ (12:12 P.M.)

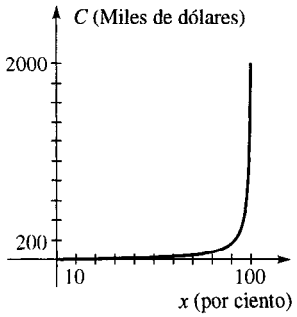
40 $\sqrt{5} < t < 4$

41 **(a)** $R = k$

(b) k es la máxima rapidez con la que el hígado puede eliminar alcohol del flujo sanguíneo.

42 **(a)** $C(100) = \$2\,000\,000.00$ y $C(90) \approx \$163\,636.36$

(b)

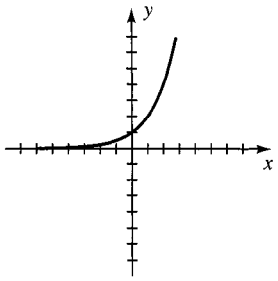


CAPÍTULO 5

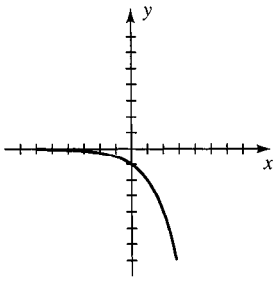
EJERCICIOS 5.1

1 5 **3** $-1, 3$ **5** $-\frac{4}{99}$ **7** $\frac{18}{5}$

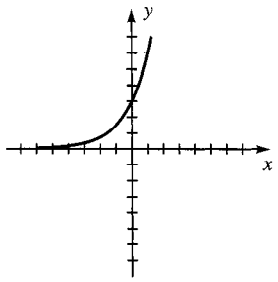
9 **(a)**



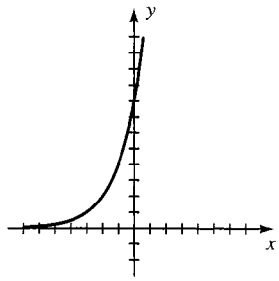
(b)



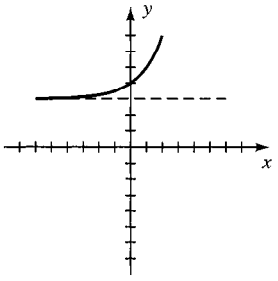
(c)



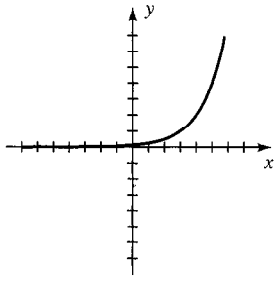
(d)



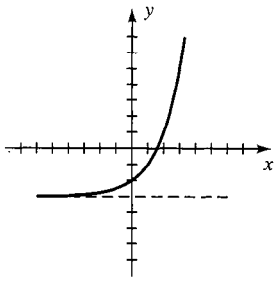
(e)



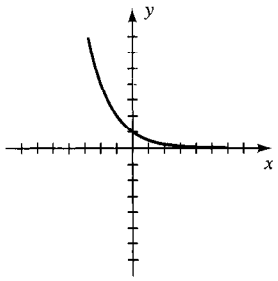
(f)



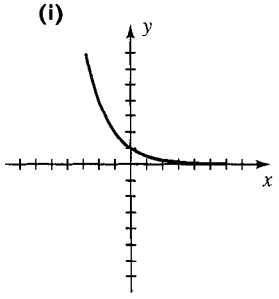
(g)



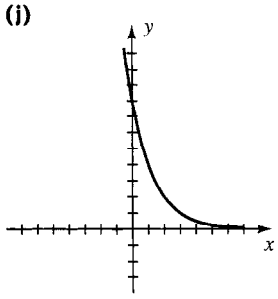
(h)



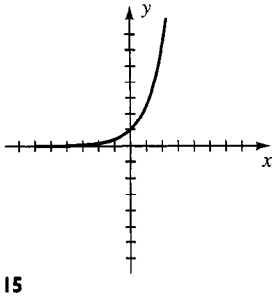
(i)



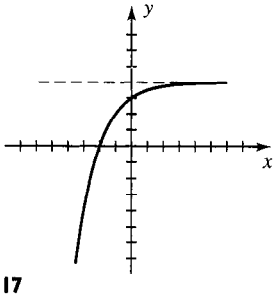
(j)



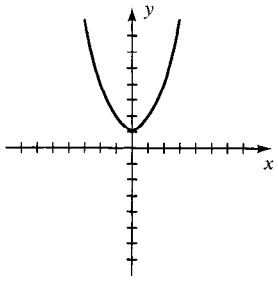
11



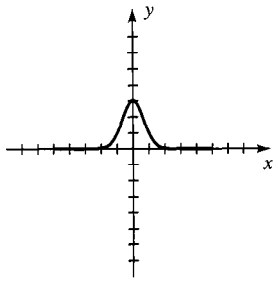
13



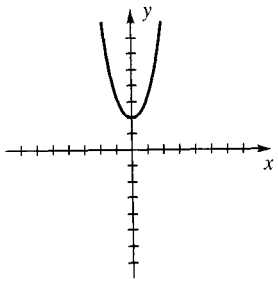
15



17



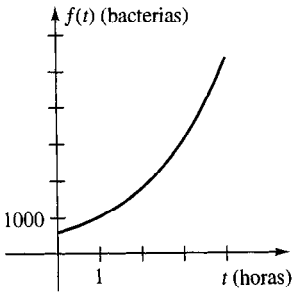
19



21 **(a)** 90 **(b)** 59 **(c)** 35

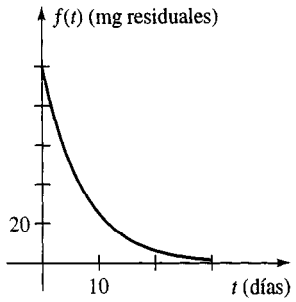
23 **(a)** 1039; 3118; 5400

(b)



25 **(a)** 50 mg; 25 mg; $\frac{25}{2}\sqrt{2} \approx 17.7$ mg

(b)



27 $-\frac{1}{1600}$

29 **(a)** \$1010.00 **(b)** \$1020.10 **(c)** \$1061.52 **(d)** \$1126.83

31 **(a)** \$7800 **(b)** \$4790 **(c)** \$2942

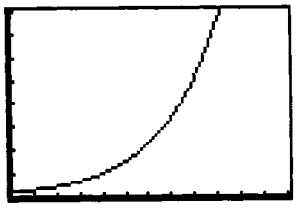
33 **(a)** \$1061.36 **(b)** \$1126.49 **(c)** \$1346.86 **(d)** \$1814.02

35 **(a)** Examine la figura que forma el valor y en el año n.

(b) Despeje a de $s = (1 - a)^T y_0$.

37 **(a)** \$925.75 **(b)** \$243,270 **39** \$6346.40 **41** 6.58 años

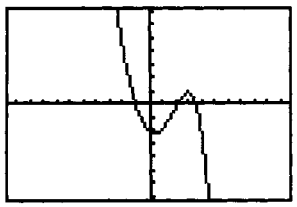
43



(a) 26.13 **(b)** 8.50

[0, 60] por [0, 40]

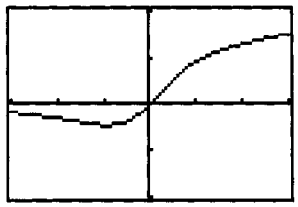
45



−1.02, 2.14, 3.62

[− 10.5, 10.5] por [− 7, 7]

47

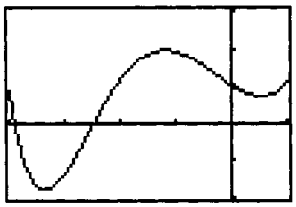


(a) No es biunívoca.

(b) 0

[−3, 3] por [− 2, 2]

49

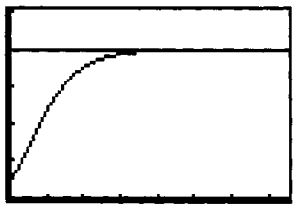


[− 4, 1] por [− 2, 3]

(a) Creciente: $[-3.37, -1.19] \cup [0.52, 1]$; decreciente: $[-4, -3.37] \cup [-1.19, 0.52]$

(b) $[-1.79, 1.94]$

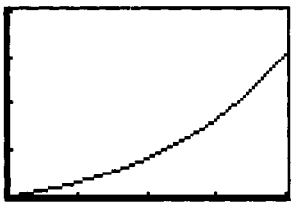
51



El número máximo de ventas tiende a k.

[0, 7.5] por [0, 5]

53

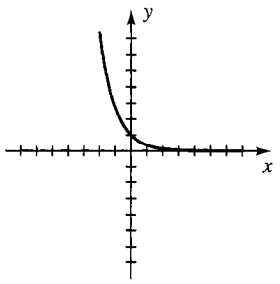


Después de aproximadamente 32.8 años

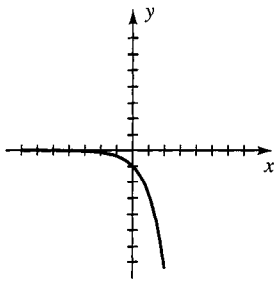
[0, 40] por [0, 200000]

EJERCICIOS 5.2

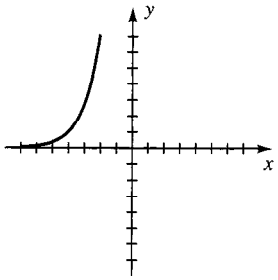
1 **(a)**



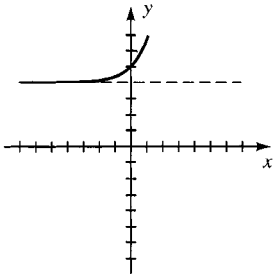
(b)



3 **(a)**



(b)



5 \$1510.59 **7** \$13,806.92 **9** 13% **11** 3, 4

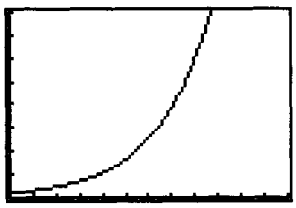
13 -1 **15** $-\frac{3}{4}, 0$ **17** $\frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$ **19** 27.43 g

21 261.1 millones **23** 13.5% **25** 5412 **27** 7.44 pulg

29 75.77 cm; 15.98 cm/año **31** \$6.82 por hora

33 **(a)** 7.19% **(b)** 7.25%

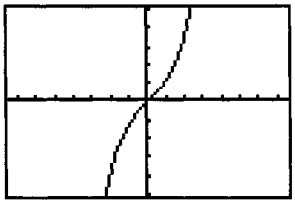
35



[0, 60] por [0, 40]

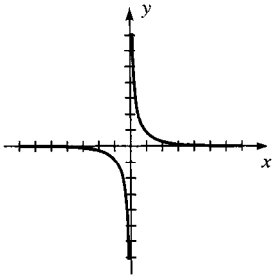
(a) 29.96 **(b)** 8.15

37 **(a)**

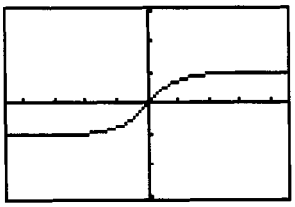


[– 7.5, 7.5] por [– 5, 5]

(b)

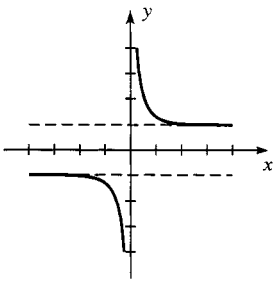


39 **(a)**

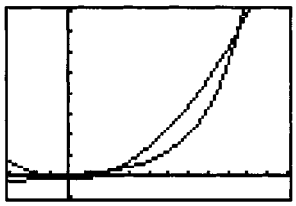


[– 4.5, 4.5] por [– 3, 3]

(b)



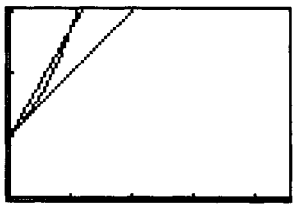
41



[– 3, 11] por [– 10, 80]

-1.04, 2.11

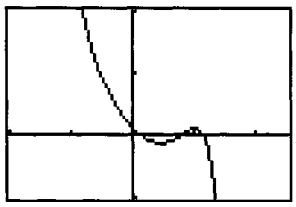
43



[0, 4.5] por [0, 3]

$f(x)$ es más cercana a e^x si $x \approx 0$; $g(x)$ es más cercana a e^x si $x \approx 1$.

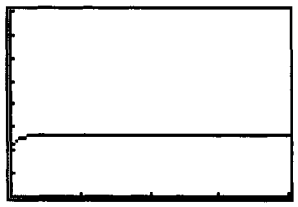
45



[– 2, 2.5] por [– 1, 2]

0.11, 0.79, 1.13

47

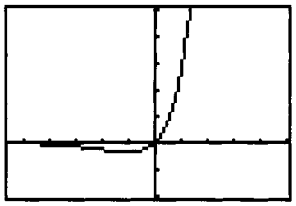


[0, 200] por [0, 8]

$y \approx 2.71 \approx e$

49 0.567

51



[– 5.5, 5] por [– 2, 5]

Creciente en $[-1, \infty)$; decreciente en $(-\infty, -1]$

53 **(a)** Al aumentar h, C disminuye.
(b) Cuando aumenta y, C disminuye.

55 **(a)** Valores grandes de c indican un chip menos confiable.
(b) Aproximadamente 3.45 años

EJERCICIOS 5.3

1 **(a)** $\log_4 64 = 3$ **(b)** $\log_4 \frac{1}{64} = -3$ **(c)** $\log_t s = r$
(d) $\log_3 (4 - t) = x$ **(e)** $\log_5 \frac{a+b}{a} = 7t$
(f) $\log_{0.7} (5.3) = t$

3 **(a)** $2^5 = 32$ **(b)** $3^{-5} = \frac{1}{243}$ **(c)** $t^p = r$
(d) $3^5 = (x + 2)$ **(e)** $2^{3x+4} = m$ **(f)** $b^{3/2} = 512$

5 $t = 3 \log_a \frac{5}{2}$ **7** $t = \frac{1}{C} \log_a \left(\frac{A - D}{B}\right)$

9 **(a)** $\log 100{,}000 = 5$ **(b)** $\log 0.001 = -3$
(c) $\log (y + 1) = x$ **(d)** $\ln p = 7$
(e) $\ln (3 - x) = 2t$

11 **(a)** $10^{50} = x$ **(b)** $10^{20t} = x$ **(c)** $e^{0.1} = x$
(d) $e^{4+3x} = w$ **(e)** $e^{1/6} = z - 2$

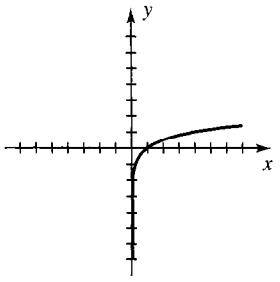
13 **(a)** 0 **(b)** 1 **(c)** No es posible **(d)** 2 **(e)** 8
(f) 3 **(g)** -2

15 **(a)** 3 **(b)** 5 **(c)** 2 **(d)** -4 **(e)** 2
(f) -3 **(g)** $3e^2$

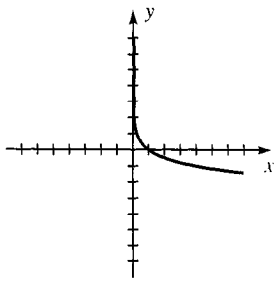
17 4 **19** No tiene solución **21** $-1, -2$ **23** 13

25 27 **27** $\pm\frac{1}{e}$ **29** 3

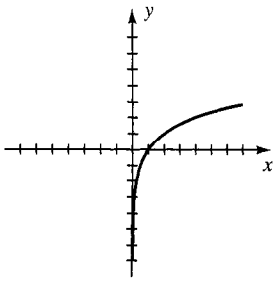
31 **(a)**



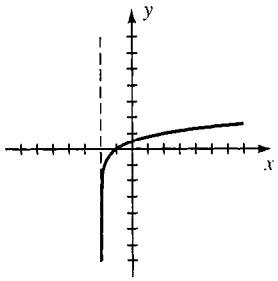
(b)



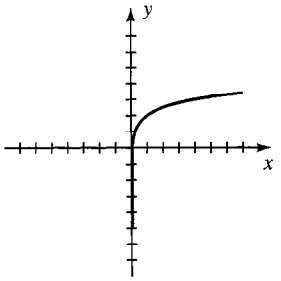
(c)



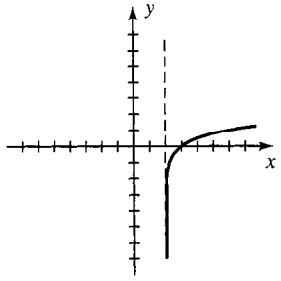
(d)



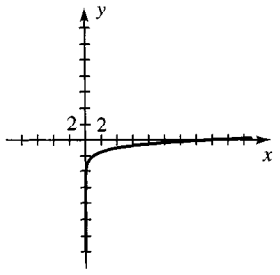
(e)



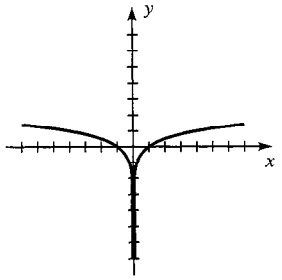
(f)



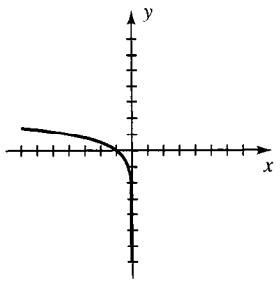
(g)



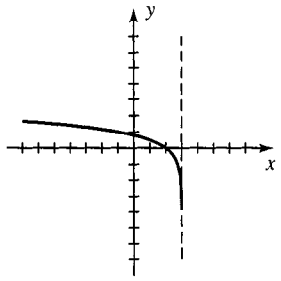
(h)



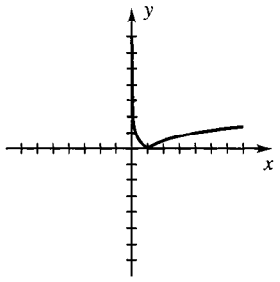
(i)



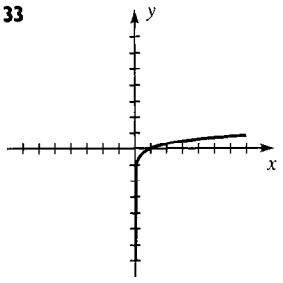
(j)



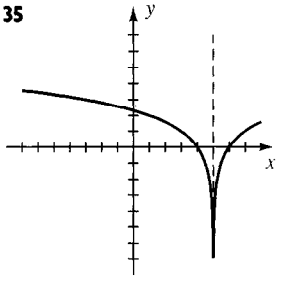
(k)



33



35

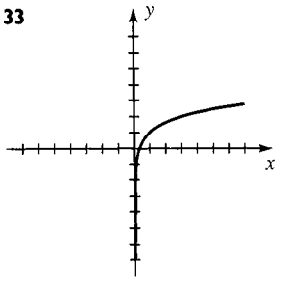


37 $f(x) = \log_2 x$ **39** $f(x) = \log_2 x - 1$
41 $f(x) = \log_2 (-x)$ **43** $f(x) = 2 \log_2 x$
45 **(a)** 4240 **(b)** 8.85 **(c)** 0.0237 **(d)** 9.97 **(e)** 1.05 **(f)** 0.202
47 $t = -1600 \log_2 \left(\frac{q}{q_0}\right)$ **49** $t = -\frac{L}{R} \ln \left(\frac{I}{20}\right)$
51 **(a)** 2 **(b)** 4 **(c)** 5
53 **(a)** 10 **(b)** 30 **(c)** 40 **55** En el año 2079
57 **(a)** $W = 2.4e^{1.84h}$ **(b)** 37.92 kg
59 **(a)** 10 007 pies (ft) **(b)** 18,004 pies
61 **(a)** 305.9 kg **(b)** (1) 20 años (2) 19.8 años
63 10.1 mi **65** $2^{1/8} \approx 1.09$
67 **(a)** Los peatones tienen mayor velocidad media en las grandes ciudades.
(b) 570,000
69 **(a)** $f(1) = -0.1 < 0$, $f(2) \approx 0.29 > 0$ **(b)** 1.17

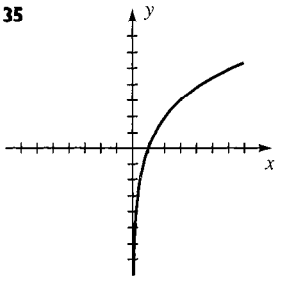
EJERCICIOS 5.4

1 **(a)** $\log_4 x + \log_4 z$ **(b)** $\log_4 y - \log_4 x$
(c) $\frac{1}{3} \log_4 z$
3 $3 \log_a x + \log_a w - 2 \log_a y - 4 \log_a z$
5 $\frac{1}{3} \log z - \log x - \frac{1}{2} \log y$ **7** $\frac{7}{4} \ln x - \frac{5}{4} \ln y - \frac{1}{4} \ln z$
9 **(a)** $\log_3 (5xy)$ **(b)** $\log_3 \frac{2z}{x}$ **(c)** $\log_3 y^5$
11 $\log_a \frac{x^2 \sqrt[3]{x-2}}{(2x+3)^5}$ **13** $\log \frac{y^{13/3}}{x^2}$ **15** $\ln x$ **17** $\frac{7}{2}$
19 $5\sqrt{5}$ **21** No tiene solución **23** -7 **25** 1
27 -2 **29** $\frac{-1+\sqrt{65}}{2}$ **31** $-1 + \sqrt{1+e}$

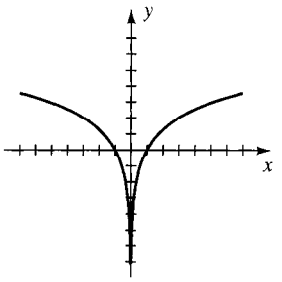
33



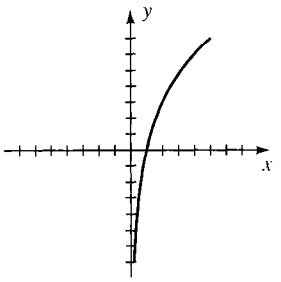
35



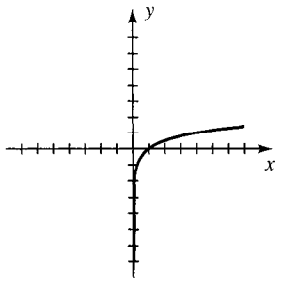
37



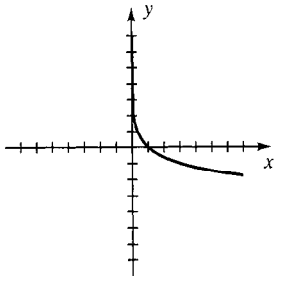
39



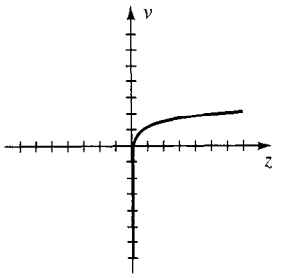
41



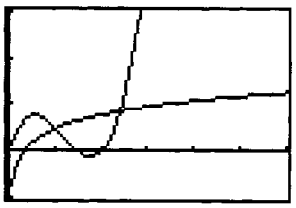
43



45 $f(x) = \log_2 x^2$ **47** $f(x) = \log_2 (8x)$ **49** $y = \frac{b}{x^k}$
51



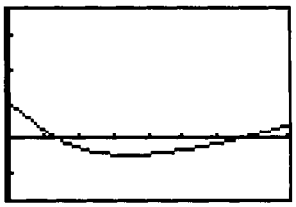
53 **(a)** 0 **(b)** $R(2x) = R(x) + a \log 2$ **55** 0.29 cm
57



$(0, 1.01] \cup [2.4, \infty)$

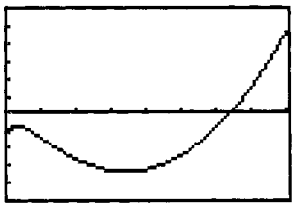
[0, 6] por [– 1, 3]

59



1.41, 6.59

[0, 8] por [– 1.67, 3.67]

61 

[0.2, 16] por [–4.77, 5.77]

(a) Creciente en [0.2, 0.63] y [6.87, 16]; decreciente en [0.63, 6.87]
(b) 4.61; −3.31

EJERCICIOS 5.5

1 $\frac{\log 8}{\log 5} \approx 1.29$ **3** $4 - \frac{\log 5}{\log 3} \approx 2.54$ **5** 1.1133

7 −0.7325 **9** 2 **11** $\frac{\log (2/81)}{\log 24} \approx -1.16$

13 $\frac{\log (8/25)}{\log (4/5)} \approx 5.11$ **15** −3 **17** 5

19 $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{101}{11}} \approx 2.02$ **21** 1, 2 **23** $\frac{\log (4 + \sqrt{19})}{\log 4} \approx 1.53$

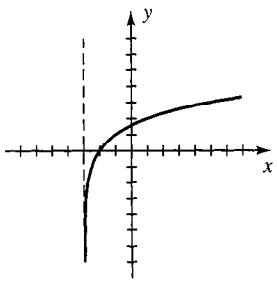
25 1 or 100 **27** 10^{100} **29** 10,000

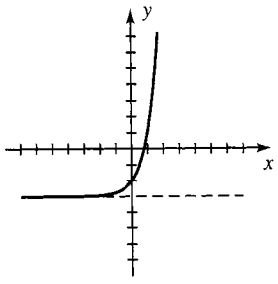
31 $x = \log (y \pm \sqrt{y^2 - 1})$ **33** $x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$

35 $x = \ln (y + \sqrt{y^2 + 1})$ **37** $x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right)$

39 Ordenada en el origen = $\log_2 3$ ≈ 1.5850

41 Abscisa en el origen = $\log_4 3$ ≈ 0.7925





43 **(a)** 2.2 **(b)** 5 **(c)** 8.3

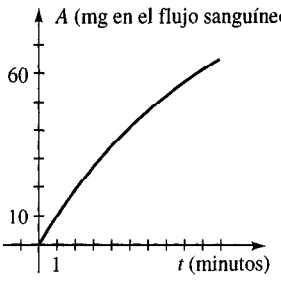
45 Básica si pH > 7; ácida si pH < 7

47 11.58 años ≈ 11 años 7 meses **49** 86.4 m

51 **(a)** *Sugerencia*: Primero tome el logaritmo natural de ambos miembros.

(b) Nótese que $f(e) = \frac{1}{e}$. Toda línea horizontal $y = k$, donde $0 < k < \frac{1}{e}$, cortará a la gráfica en los puntos

$\left(x_1, \frac{\ln x_1}{x_1}\right)$ y $\left(x_2, \frac{\ln x_2}{x_2}\right)$, para $1 < x_1 < e$ y $x_2 > e$.

53 **(a)** 

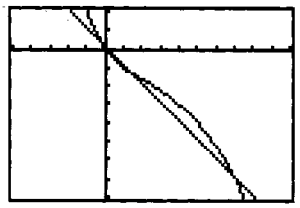
(b) 6.58 min

55 **(a)** $t = \frac{\log (F/F_0)}{\log (1 - m)}$ **(b)** Después de 13 863 generaciones

57 **(a)** 4.28 pies **(b)** 24.8 años **59** $\frac{\ln (25/6)}{\ln (200/35)} \approx 0.82$

61 La sospecha es correcta.

63 La sospecha es incorrecta. **65** 1.763

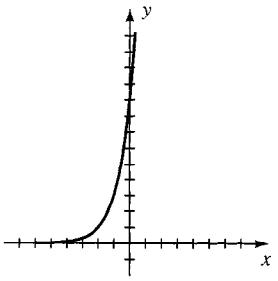
67 

[– 5, 10] por [– 8, 2]

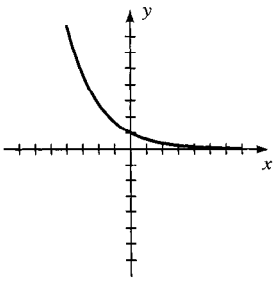
$(-\infty, -0.32) \cup (1.52, 6.84)$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 5

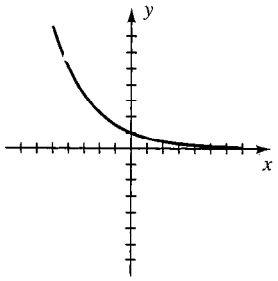
1



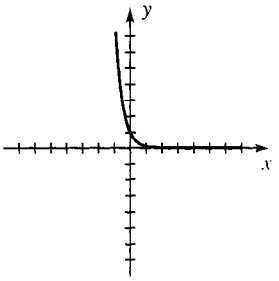
2



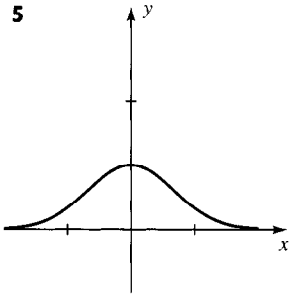
3



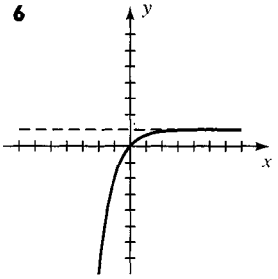
4



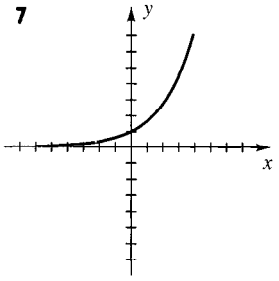
5



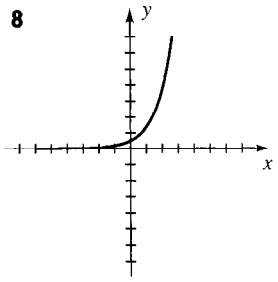
6



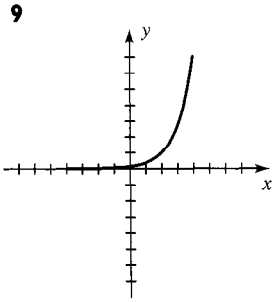
7



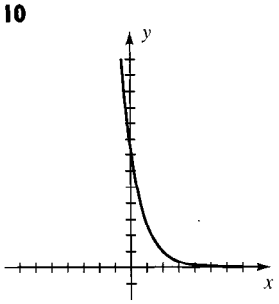
8



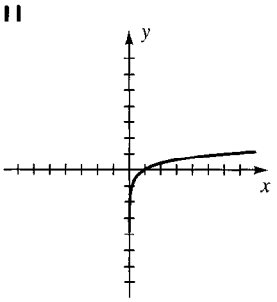
9



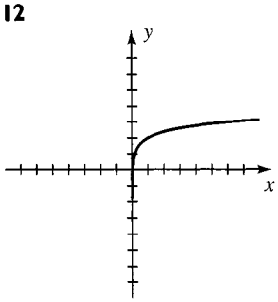
10



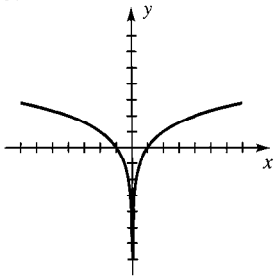
11



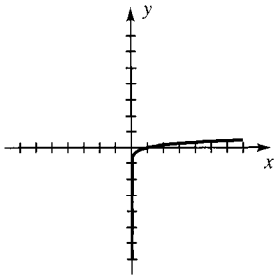
12



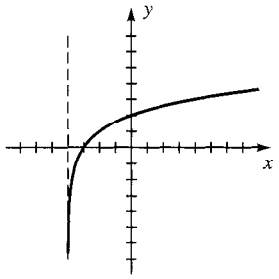
13



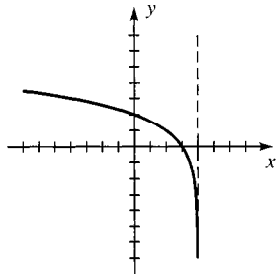
14



15



16



17 **(a)** -4 **(b)** 0 **(c)** 1 **(d)** 4 **(e)** 6 **(f)** 8 **(g)** $\frac{1}{2}$

18 **(a)** $\frac{1}{3}$ **(b)** 0 **(c)** 1 **(d)** 5 **(e)** 1 **(f)** 25 **(g)** $\frac{1}{3}$

19 0 **20** 9 **21** 9 **22** $\frac{33}{47}$ **23** 1 **24** 99

25 $5 - \dfrac{\log 6}{\log 2}$ **26** $\pm\sqrt{\dfrac{\log 7}{\log 3}}$ **27** $\dfrac{\log (3/8)}{\log (32/9)}$ **28** 1

29 $\frac{1}{4}$, 1, 4 **30** No tiene solución **31** $\sqrt{5}$ **32** 2

33 $0, \pm 1$ **34** $\ln 2$ **35** **(a)** $-3, 2$ **(b)** 2

36 **(a)** 8 **(b)** ± 4 **37** $4 \log x + \frac{2}{3} \log y - \frac{1}{3} \log z$

38 $-\log (xy^2)$ **39** $x = \log\left(\dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4y^2}}{2y}\right)$

40 Si $y < 0$, entonces $x = \log\left(\dfrac{1 - \sqrt{1 + 4y^2}}{2y}\right)$. Si $y > 0$, entonces $x = \log\left(\dfrac{1 + \sqrt{1 + 4y^2}}{2y}\right)$.

41 **(a)** 1.89 **(b)** 78.3 **(c)** 0.472

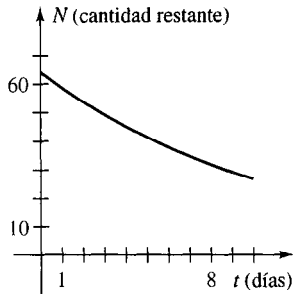
42 **(a)** 0.924 **(b)** 0.00375 **(c)** 6.05

43 **(a)** 2000

(b) $2000(3^{1/6}) \approx 2401$; $2000(3^{1/2}) \approx 3464$; 6000

44 \$1125.51

45 **(a)**



(b) 8 días

46 $N = 1000\left(\dfrac{3}{5}\right)^{t/3}$ **47** **(a)** a los 11.39 años **(b)** 6.30 años

48 $t = (\ln 100)\dfrac{L}{R} \approx 4.6\dfrac{L}{R}$

49 **(a)** $I = I_0 10^{\alpha/10}$

(b) Examine $I(\alpha + 1)$, donde $I(\alpha)$ es la intensidad que corresponde a α decibels.

50 $t = -\dfrac{1}{k}\ln\left(\dfrac{a-L}{ab}\right)$ **51** $A = 10^{(R+5.1)/2.3} - 3000$

52 $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{10^{(R+5.1)/2.3} - 3000}{10^{(R+7.5)/2.3} - 34{,}000}$ **53** 26,615.9 mi^2

54 $h = \dfrac{\ln(29/p)}{0.000034}$ **55** $v = a\ln\left(\dfrac{m_1 + m_2}{m_1}\right)$

56 **(a)** $n = 10^{7.7-0.9R}$ **(b)** 12,589; 1585; 200

57 **(a)** $E = 10^{11.4+1.5R}$ **(b)** 10^{24} ergs **58** 110 días

59 86.8 cm; 9.715 cm/año **60** $t = -\dfrac{L}{R}\ln\left(\dfrac{V - RI}{V}\right)$

61 **(a)** 26,749 años **(b)** 30% **62** 16.91 años

CAPÍTULO 6

EJERCICIOS 6.1

Ejercicios 1– 4: Las respuestas no son únicas.

1 **(a)** 480°, 840°, −240°, −600°

(b) 495°, 855°, −225°, −585°

(c) 330°, 690°, −390°, −750°

3 **(a)** 260°, 980°, −100°, −460°

(b) $\dfrac{17\pi}{6}, \dfrac{29\pi}{6}, -\dfrac{7\pi}{6}, -\dfrac{19\pi}{6}$ **(c)** $\dfrac{7\pi}{4}, \dfrac{15\pi}{4}, -\dfrac{9\pi}{4}, -\dfrac{17\pi}{4}$

5 **(a)** 84°42′26″ **(b)** 57.5°

7 **(a)** 131°8′23″ **(b)** 43.58°

9 **(a)** $\dfrac{5\pi}{6}$ **(b)** $-\dfrac{\pi}{3}$ **(c)** $\dfrac{5\pi}{4}$

11 **(a)** $\dfrac{5\pi}{2}$ **(b)** $\dfrac{2\pi}{5}$ **(c)** $\dfrac{5\pi}{9}$

13 **(a)** 120° **(b)** 330° **(c)** 135°

15 **(a)** −630° **(b)** 1260° **(c)** 20°

17 114°35′30″ **19** 286°28′44″ **21** 37.6833°

23 115.4408° **25** 63°10′8″ **27** 310°37′17″

29 2.5 cm **31** **(a)** $2\pi \approx 6.28$ cm **(b)** $8\pi \approx 25.13$ cm^2

33 **(a)** $1.75; \dfrac{315}{\pi} \approx 100.27°$ **(b)** 14 cm^2

35 **(a)** $\dfrac{20\pi}{9} \approx 6.98$ m **(b)** $\dfrac{80\pi}{9} \approx 27.93$ m^2

37 En millas: **(a)** 4189 **(b)** 3142 **(c)** 2094

(d) 698 **(e)** 70

39 $\dfrac{1}{8}$ rad $\approx 7°\,10'$ **41** 7.29×10^{-5}

43 **(a)** 80π **(b)** $\dfrac{100\pi}{3} \approx 104.72$

45 **(a)** $\dfrac{200\pi}{3}, 90\pi$ **(b)** $\dfrac{100\pi}{3}, \dfrac{105\pi}{4}$

47 **(a)** $\dfrac{21\pi}{8} \approx 8.25$ pies **(b)** $\dfrac{2}{3}d$ **49** Grande **51** 192.08

EJERCICIOS 6.2

Nota: Las respuestas aparecen en orden *sen, cos, tan, cot, sec, csc* para los ejercicios en los que se piden los valores de las 6 funciones trigonométricas.

1 $\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{3}, \dfrac{5}{4}$ **3** $\dfrac{2}{5}, \dfrac{\sqrt{21}}{5}, \dfrac{2}{\sqrt{21}}, \dfrac{\sqrt{21}}{2}, \dfrac{5}{\sqrt{21}}, \dfrac{5}{2}$

5 $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \dfrac{a}{b}, \dfrac{b}{a}, \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}, \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$

7 $\dfrac{b}{c}, \dfrac{\sqrt{c^2-b^2}}{c}, \dfrac{b}{\sqrt{c^2-b^2}}, \dfrac{\sqrt{c^2-b^2}}{b}, \dfrac{c}{\sqrt{c^2-b^2}}, \dfrac{c}{b}$

9 $x = 8; y = 4\sqrt{3}$ **11** $x = 7\sqrt{2}; y = 7$

13 $x = 4\sqrt{3}; y = 4$ **15** $\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{5}{4}, \dfrac{5}{3}$

17 $\dfrac{5}{13}, \dfrac{12}{13}, \dfrac{5}{12}, \dfrac{12}{5}, \dfrac{13}{12}, \dfrac{13}{5}$

19 $\dfrac{\sqrt{11}}{6}, \dfrac{5}{6}, \dfrac{\sqrt{11}}{5}, \dfrac{5}{\sqrt{11}}, \dfrac{6}{5}, \dfrac{6}{\sqrt{11}}$

21 **(a)** 0.958 **(b)** 0.778 **23** **(a)** 0.387 **(b)** 0.472

25 **(a)** 2.650 **(b)** 3.179 **27** **(a)** 30.46° **(b)** 30°27′

29 **(a)** 74.88° **(b)** 74°53′

31 **(a)** 24.94° **(b)** 24°57′

33 **(a)** 76.38° **(b)** 76°23′ **35** $\cot\theta = \dfrac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}}{\operatorname{sen}\theta}$

37 $\sec\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}}$ **39** $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\sqrt{\sec^2\theta - 1}}{\sec\theta}$

Ejercicios 41– 62: Se presentan comprobaciones características.

41 $\cos\theta\sec\theta = \cos\theta\,(1/\cos\theta) = 1$

43 $\operatorname{sen}\theta\sec\theta = \operatorname{sen}\theta\,(1/\cos\theta) = \operatorname{sen}\theta/\cos\theta = \tan\theta$

45 $\dfrac{\csc\theta}{\sec\theta} = \dfrac{1/\operatorname{sen}\theta}{1/\cos\theta} = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \cot\theta$

47 $(1 + \cos\theta)(1 - \cos\theta) = 1 - \cos^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta$

49 $\cos^2\theta(\sec^2\theta - 1) = \cos^2\theta(\tan^2\theta) = \cos^2\theta \cdot \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}$
$= \operatorname{sen}^2\theta$

51 $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\csc\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sec\theta} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1/\operatorname{sen}\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1/\cos\theta} = \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

53 $(1 + \operatorname{sen}\theta)(1 - \operatorname{sen}\theta) = 1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta = \dfrac{1}{\sec^2\theta}$

55 $\sec\theta - \cos\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} - \cos\theta = \dfrac{1 - \cos^2\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta}$
$= \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \cdot \operatorname{sen}\theta = \tan\theta\operatorname{sen}\theta$

57 $(\cot\theta + \csc\theta)(\tan\theta - \operatorname{sen}\theta)$
$= \cot\theta\tan\theta - \cot\theta\operatorname{sen}\theta + \csc\theta\tan\theta - \csc\theta\operatorname{sen}\theta$
$= \dfrac{1}{\tan\theta}\tan\theta - \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\operatorname{sen}\theta + \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} - \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}\operatorname{sen}\theta$
$= 1 - \cos\theta + \dfrac{1}{\cos\theta} - 1 = -\cos\theta + \sec\theta$
$= \sec\theta - \cos\theta$

59 $\sec^2\theta\csc^2\theta = (1 + \tan^2\theta)(1 + \cot^2\theta)$
$= 1 + \tan^2\theta + \cot^2\theta + 1$
$= \sec^2\theta + \csc^2\theta$

61 $\log \csc\theta = \log\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\right) = \log 1 - \log \operatorname{sen}\theta$
$= 0 - \log \operatorname{sen}\theta = -\log \operatorname{sen}\theta$

63 0.28 cm

65 **(a)** El máximo se presenta cuando el Sol se eleva por el oriente.

(b) $\frac{\sqrt{2}}{4} \approx 35\%$

EJERCICIOS 6.3

1 $\beta = 60°, a = \frac{20}{3}\sqrt{3}, c = \frac{40}{3}\sqrt{3}$

3 $\alpha = 45°, a = b = 15\sqrt{2}$

5 $\alpha = \beta = 45°, c = 5\sqrt{2}$

7 $\alpha = 60°, \beta = 30°, a = 15$

9 $\beta = 53°, a \approx 18, c \approx 30$

11 $\alpha = 18°9', a \approx 78.7, c \approx 252.6$

13 $\alpha \approx 29°, \beta \approx 61°, c \approx 51$

15 $\alpha \approx 69°, \beta \approx 21°, a \approx 5.4$ **17** $b = c \cos\alpha$

19 $a = b \cot\beta$ **21** $c = a \csc\alpha$

23 $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ **25** $200\sqrt{3} \approx 346.4$ pies

27 $250\sqrt{3} + 4 \approx 437$ pies **29** 28,800 pies **31** 160 m

33 9659 pies **35** **(a)** 58 pies **(b)** 27 pies **37** 51°20′

39 16.3° **41** 1,459,379 pies^2 **43** 21.8° **45** 20.2 m

47 29.7 km **49** 3944 mi **51** 126 mi/h

53 **(a)** 45%

(b) Cada satélite tiene alcance de señal de más de 120°.

55 $h = d \operatorname{sen}\alpha + c$ **57** $h = \frac{d}{\cot\alpha - \cot\beta}$

59 $h = d(\tan\beta - \tan\alpha)$

61 N70°E; N40°W; S15°W; S25°E

63 **(a)** 55 mi **(b)** S63°E **65** 324 mi

EJERCICIOS 6.4

1 $-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{3}{4}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{5}{3}$

3 $-\frac{5}{\sqrt{29}}, -\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{2}, \frac{2}{5}, -\frac{\sqrt{29}}{2}, -\frac{\sqrt{29}}{5}$

5 $\frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{1}{\sqrt{17}}, -4, -\frac{1}{4}, -\sqrt{17}, \frac{\sqrt{17}}{4}$

7 $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}$

9 $-\frac{7}{\sqrt{53}}, -\frac{2}{\sqrt{53}}, \frac{7}{2}, \frac{2}{7}, -\frac{\sqrt{53}}{2}, -\frac{\sqrt{53}}{7}$

Nota: "U" quiere decir "*no definida*".

11 **(a)** 1, 0, U, 0, U, 1 **(b)** 0, 1, 0, U, 1, U
(c) −1, 0, U, 0, U, −1 **(d)** 0, −1, 0, U, −1, U

13 **(a)** IV **(b)** III **(c)** II **(d)** III

15 **(a)** 60° **(b)** 20° **(c)** 22° **(d)** 60°

17 **(a)** $\frac{\pi}{4}$ **(b)** $\frac{\pi}{3}$ **(c)** $\frac{\pi}{6}$ **(d)** $\frac{\pi}{4}$

19 **(a)** $\pi - 3 \approx 8.1°$ **(b)** $\pi - 2 \approx 65.4°$
(c) $2\pi - 5.5 \approx 44.9°$ **(d)** $32\pi - 100 \approx 30.4°$

21 **(a)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(b)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **23** **(a)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(b)** $\frac{1}{2}$

25 **(a)** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **(b)** $-\sqrt{3}$ **27** **(a)** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **(b)** $\sqrt{3}$

29 **(a)** -2 **(b)** $\frac{2}{\sqrt{3}}$ **31** **(a)** $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ **(b)** 2

33 **(a)** 0.9899 **(b)** −0.1097 **(c)** −0.1425
(d) 0.7907 **(e)** −11.2493 **(f)** 1.3677

35 **(a)** 214.3°, 325.7° **(b)** 41.5°, 318.5°
(c) 70.3°, 250.3° **(d)** 133.8°, 313.8°
(e) 153.6°, 206.4° **(f)** 42.3°, 137.7°

37 **(a)** 0.43, 2.71 **(b)** 1.69, 4.59 **(c)** 1.87, 5.01
(d) 0.36, 3.50 **(e)** 0.96, 5.32 **(f)** 3.35, 6.07

39 $-\tan\theta$ **41** $\sec\theta$ **43** $-\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$ **45** $(9, 9\sqrt{3})$

EJERCICIOS 6.5

1 **(a)** $-\frac{1}{2}$ **(b)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(c)** -1

3 **(a)** 1 **(b)** $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ **(c)** 2

Ejercicios 5 – 10: Se dan comprobaciones características.

5 $\operatorname{sen}(-t)\sec(-t) = (-\operatorname{sen}t)\sec t = (-\operatorname{sen}t)(1/\cos t)$
$= -\tan t$

7 $\frac{\cot(-t)}{\csc(-t)} = \frac{-\cot t}{-\csc t} = \frac{\cos t/\operatorname{sen}t}{1/\operatorname{sen}t} = \cos t$

9 $\frac{1}{\cos(-t)} - \tan(-t)\operatorname{sen}(-t) = \frac{1}{\cos t} - (-\tan t)(-\operatorname{sen}t)$
$= \frac{1}{\cos t} - \frac{\operatorname{sen}t}{\cos t}\operatorname{sen}t$
$= \frac{1 - \operatorname{sen}^2 t}{\cos t} = \frac{\cos^2 t}{\cos t} = \cos t$

11 **(a)** 0 **(b)** −1 **13** **(a)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(b)** −1

15 **(a)** 1 **(b)** $-\infty$ **17** **(a)** −1 **(b)** ∞

19 **(a)** ∞ **(b)** $\sqrt{2}$ **21** **(a)** $-\infty$ **(b)** 1

23 $\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$ **25** $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}$ **27** $0, 2\pi, 4\pi$

29 $\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}$ **31** $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ **33** $0, \pi$

35 **(a)** $-\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

(b) $-\frac{11\pi}{6} < t < -\frac{7\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{6} < t < \frac{5\pi}{6}$

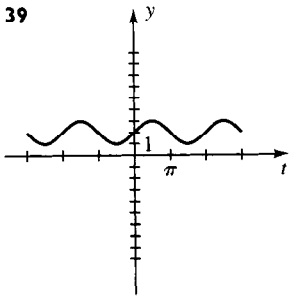
(c) $-2\pi \le t < -\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6} < t < \frac{\pi}{6}$, y $\frac{5\pi}{6} < t \le 2\pi$

37 (a) $-\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

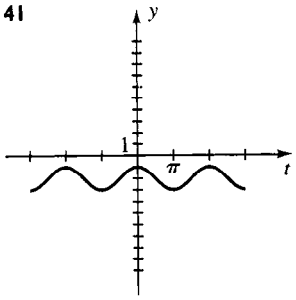
(b) $-2\pi \le t < -\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3} < t < \frac{2\pi}{3}$, y $\frac{4\pi}{3} < t \le 2\pi$

(c) $-\frac{4\pi}{3} < t < -\frac{2\pi}{3}$ y $\frac{2\pi}{3} < t < \frac{4\pi}{3}$

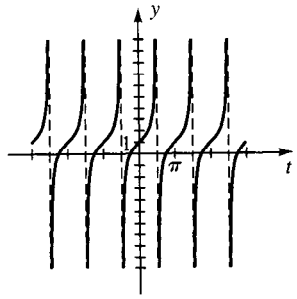
39



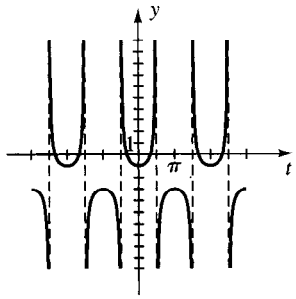
41



43



45



47 (a) $\left[-2\pi, -\frac{3\pi}{2}\right), \left(-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right], \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

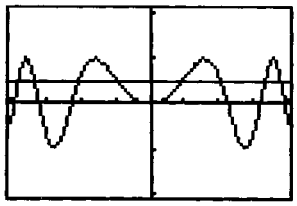
(b) $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right], \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

49 (a) La función tangente aumenta en *todos* los intervalos en la que está definida. Entre -2π y 2π, estos intervalos son $\left[-2\pi, -\frac{3\pi}{2}\right), \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, y $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

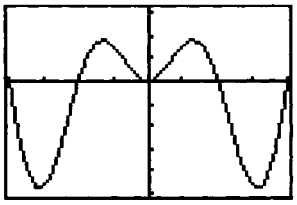
(b) La función tangente *nunca* es decreciente en el intervalo en el que está definida.

53 $\pm 0.72, \pm 1.62, \pm 2.61, \pm 2.98$

55 $(\pm 2.03, 1.82); (\pm 4.91, -4.81)$



[−3.14, 3.14] por [−2.09, 2.09]

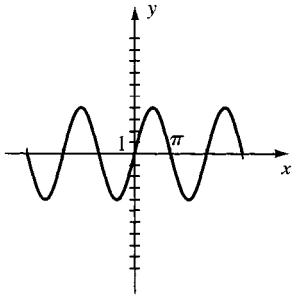


[−6.28, 6.28] por [−5.19, 3.19]

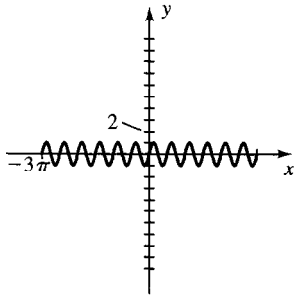
57 0 **59** 1 **61** 1

EJERCICIOS 6.6

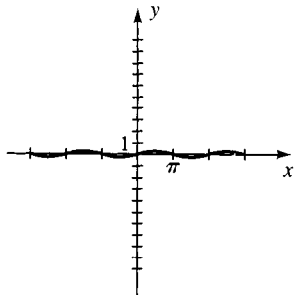
1 (a) 4, 2π



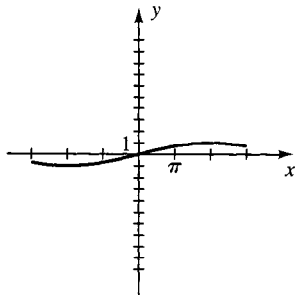
(b) 1, $\frac{\pi}{2}$



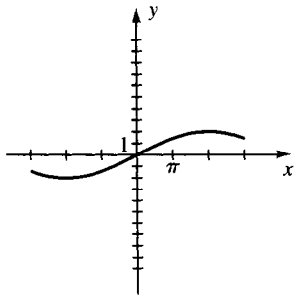
(c) $\frac{1}{4}$, 2π



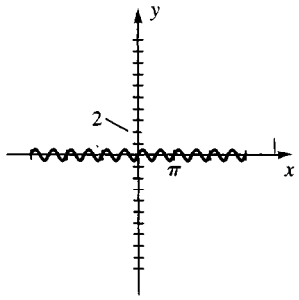
(d) 1, 8π



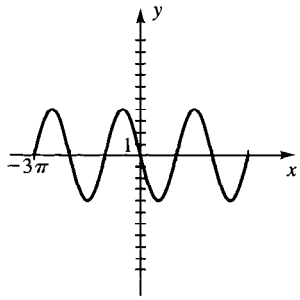
(e) 2, 8π



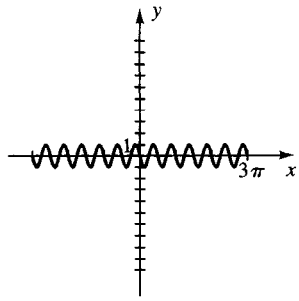
(f) $\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}$



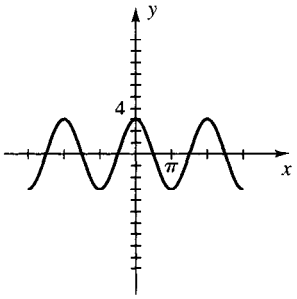
(g) 4, 2π



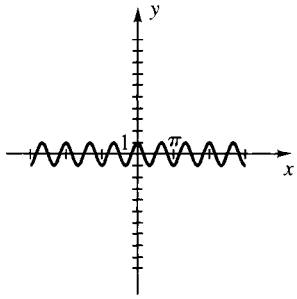
(h) 1, $\frac{\pi}{2}$



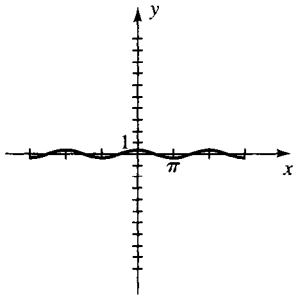
3 **(a)** 3, 2π



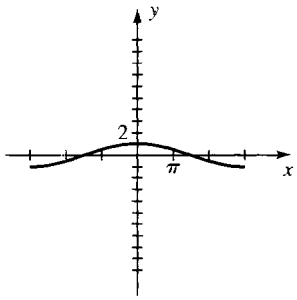
(b) 1, $\frac{2\pi}{3}$



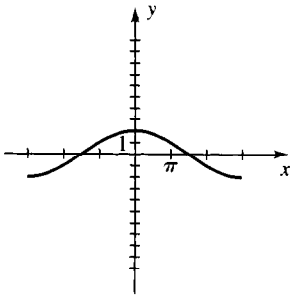
(c) $\frac{1}{3}$, 2π



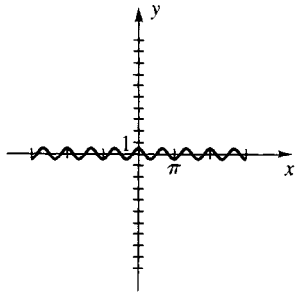
(d) 1, 6π



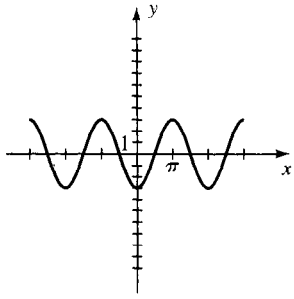
(e) 2, 6π



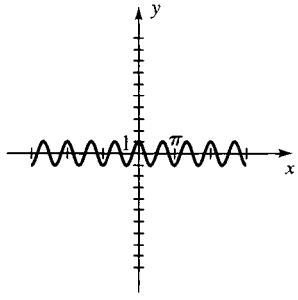
(f) $\frac{1}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$



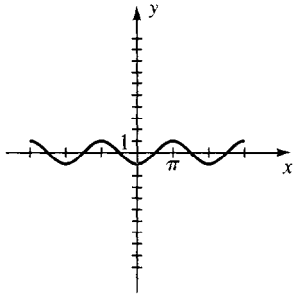
(g) 3, 2π



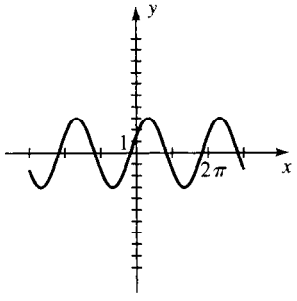
(h) 1, $\frac{2\pi}{3}$



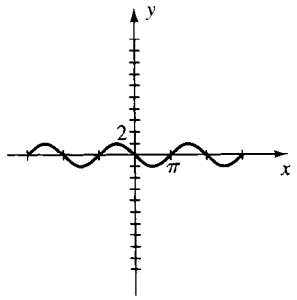
5 1, 2π, $\frac{\pi}{2}$



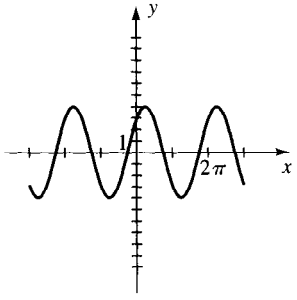
7 3, 2π, $-\frac{\pi}{6}$



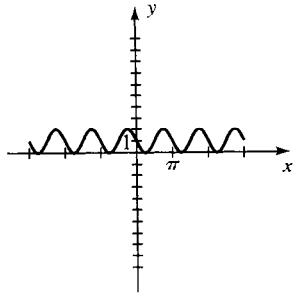
9 1, 2π, $-\frac{\pi}{2}$



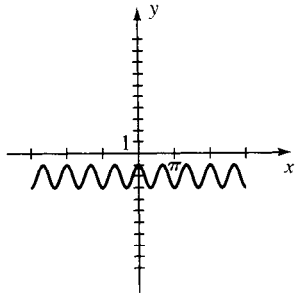
11 4, 2π, $\frac{\pi}{4}$



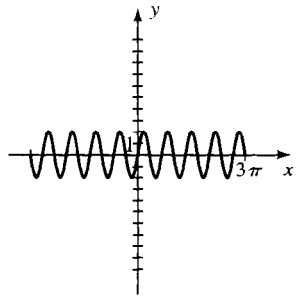
13 1, π, $\frac{\pi}{2}$



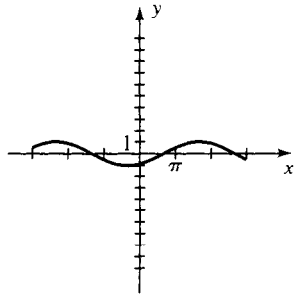
15 1, $\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$



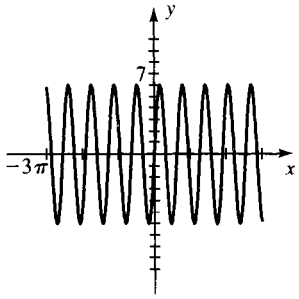
17 2, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$



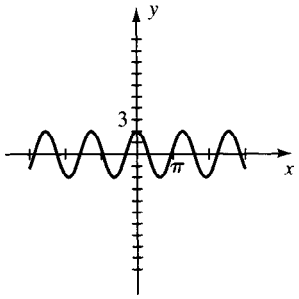
19 1, 4π, $\frac{2\pi}{3}$



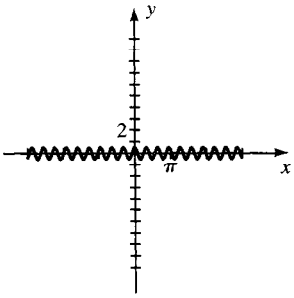
21 6, 2, 0



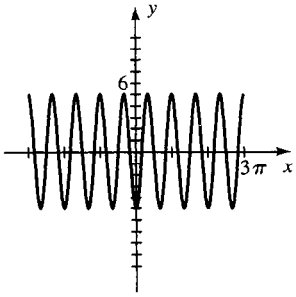
23 2, 4, 0



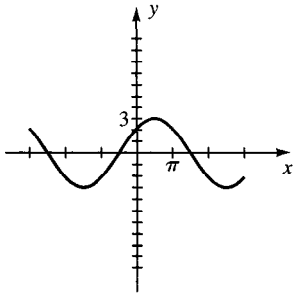
25 $\frac{1}{2}$, 1, 0



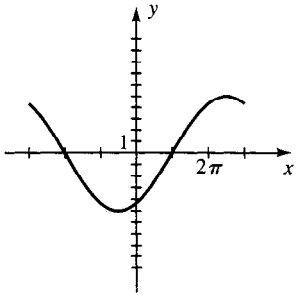
27 5, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$



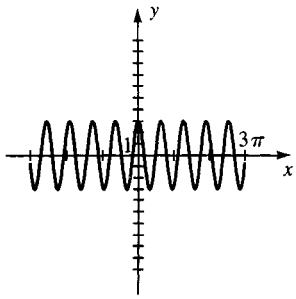
29 3, 4π, $\frac{\pi}{2}$



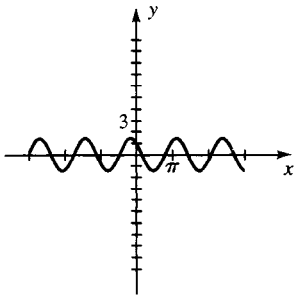
31 5, 6π, $-\frac{\pi}{2}$



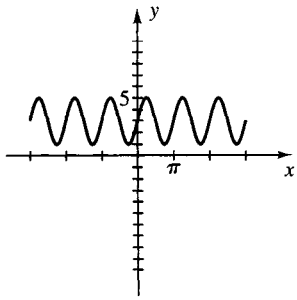
33 3, 2, -4



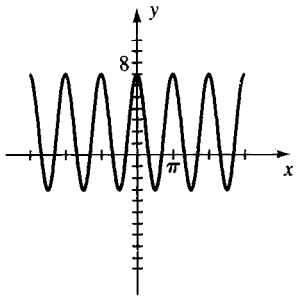
35 $\sqrt{2}$, 4, $\frac{1}{2}$



37 2, π, $\frac{\pi}{2}$



39 5, π, $-\pi$

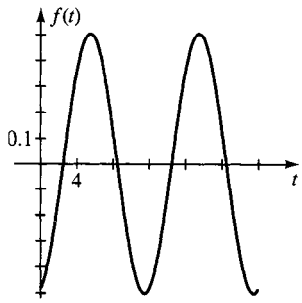


41 **(a)** 4, 2π, $-\pi$ **(b)** $y = 4 \operatorname{sen}(x + \pi)$

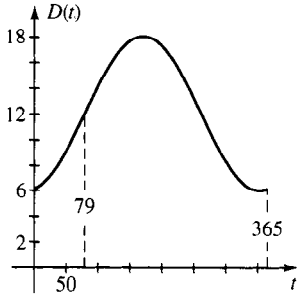
43 **(a)** 2, 4, -3 **(b)** $y = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{3\pi}{2}\right)$

45 4π **47** $a = 8, b = 4\pi$

49

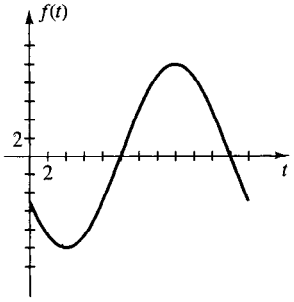


51



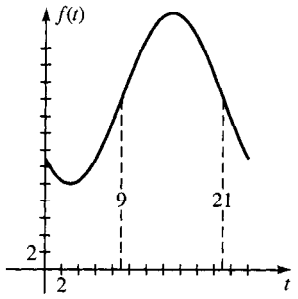
53 **(a)** $f(t) = 10 \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{12}(t - 10)\right] + 0$ con $a = 10$, $b = \frac{\pi}{12}$, $c = -\frac{5\pi}{6}$, $d = 0$

(b)

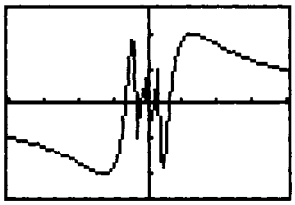


55 **(a)** $f(t) = 10 \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{12}(t - 9)\right] + 20$ con $a = 10$, $b = \frac{\pi}{12}$, $c = -\frac{3\pi}{4}$, $d = 20$

(b)

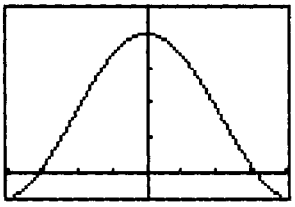


57 Al tender x a 0^-, o al tender a 0^+, y oscila entre -1 y 1, y no tiende a un valor único.



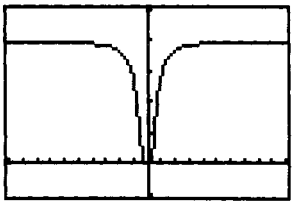
[– 2, 2] por [– 1.33, 1.33]

59 Cuando $x \to 0^-$ o cuando $x \to 0^+$, y parece tender a 2.



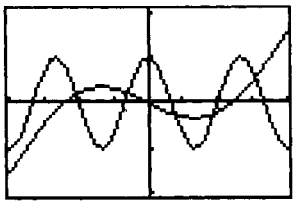
[– 2, 2] por [– 0.33, 2.33]

61 $y = 4$



[– 20, 20] por [– 1, 5]

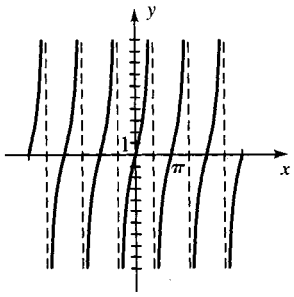
63 $[-\pi, -1.63] \cup [-0.45, 0.61] \cup [1.49, 2.42]$



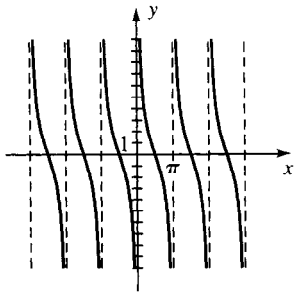
[– 3.14, 3.14] por [– 2.09, 2.09]

EJERCICIOS 6.7

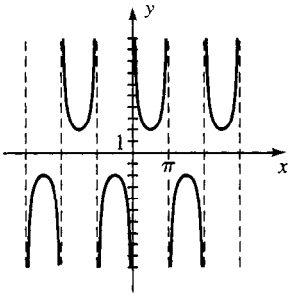
1 π



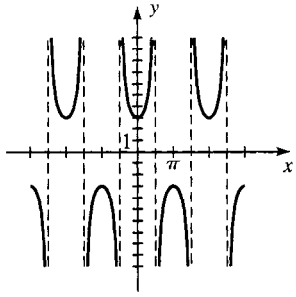
3 π



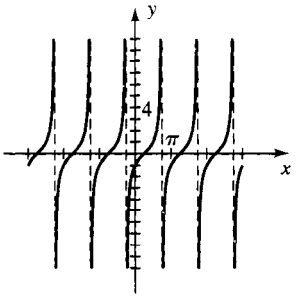
5 2π



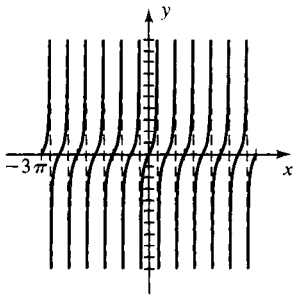
7 2π



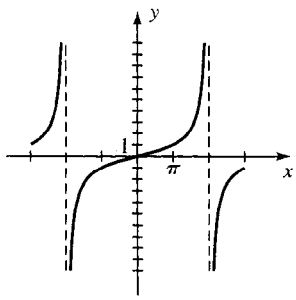
9 π



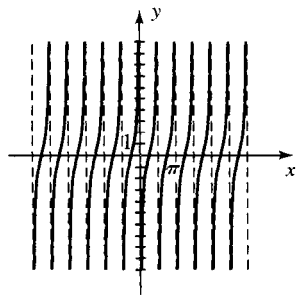
11 $\frac{\pi}{2}$



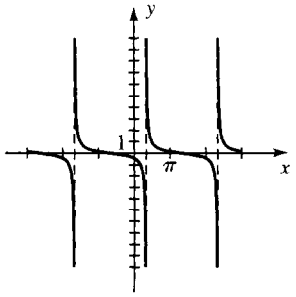
13 4π



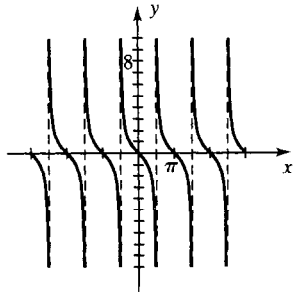
15 $\frac{\pi}{2}$



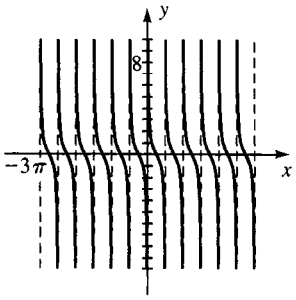
17 2π



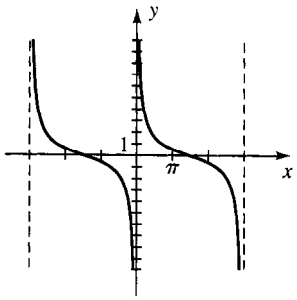
19 π



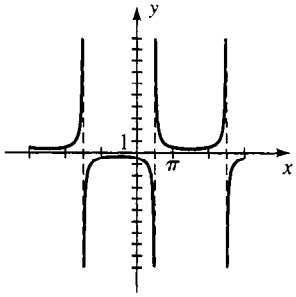
21 $\frac{\pi}{2}$



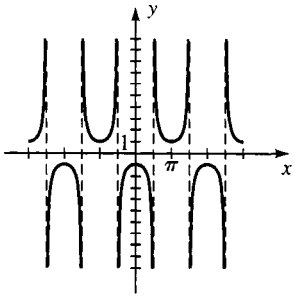
23 3π



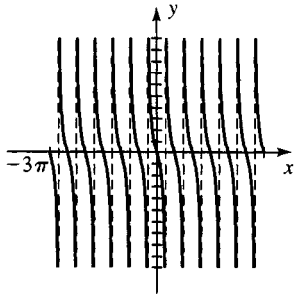
37 4π



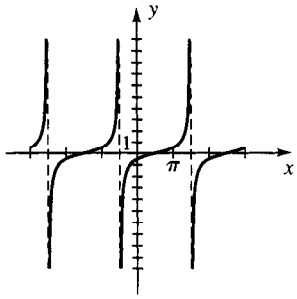
39 2π



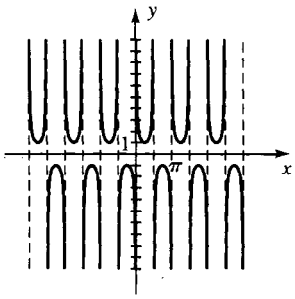
25 $\frac{\pi}{2}$



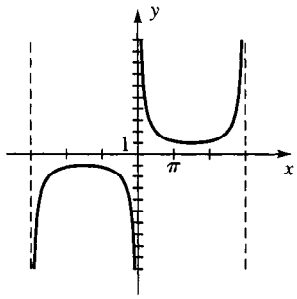
27 2π



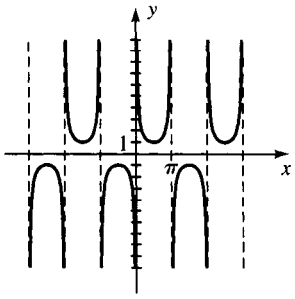
41 π



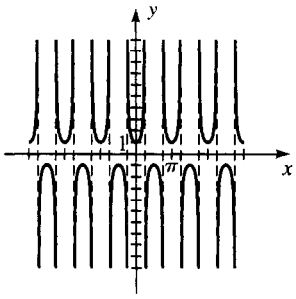
43 6π



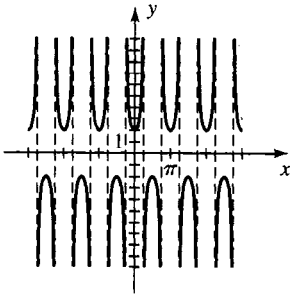
29 2π



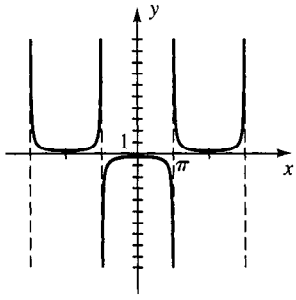
31 π



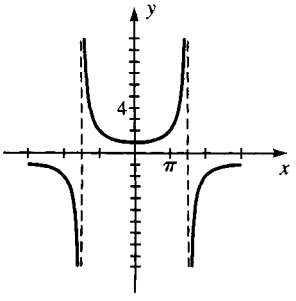
45 π



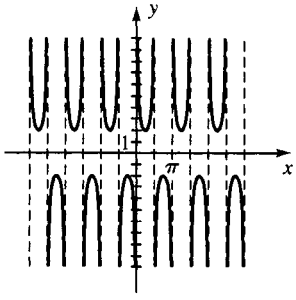
47 4π



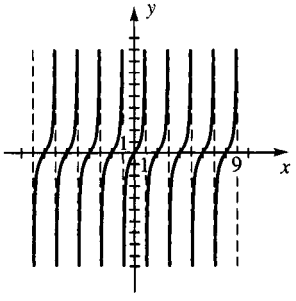
33 6π



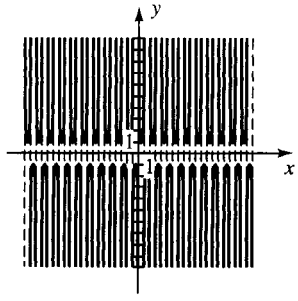
35 π



49 2

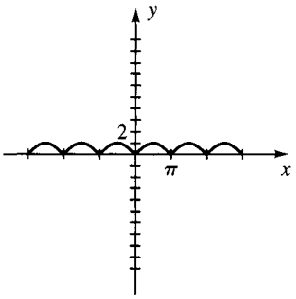


51 1

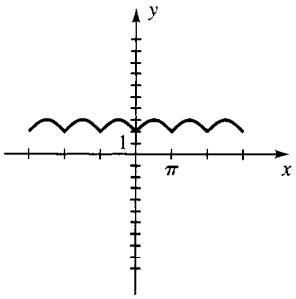


53 $y = -\cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

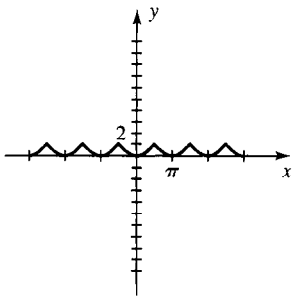
55



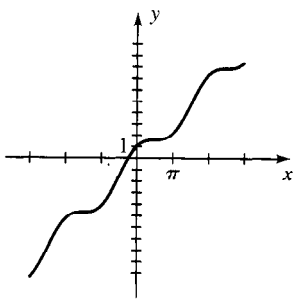
57



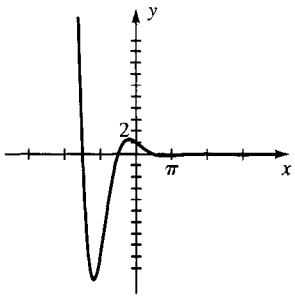
59



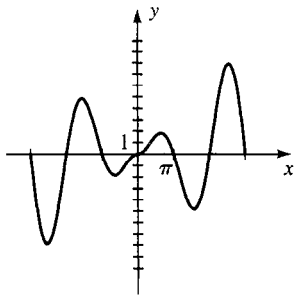
61



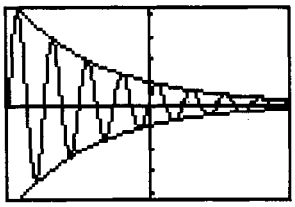
63



65

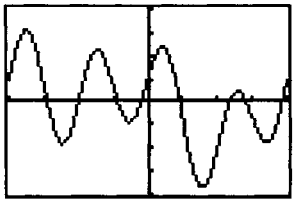


67 $e^{-x/4}$



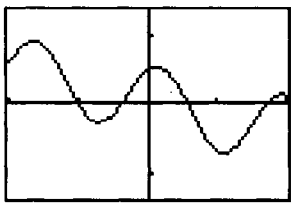
[– 6.28, 6.28] por [– 4.19, 4.19]

69 (–2.76, 3.09); (1.23, –3.68)



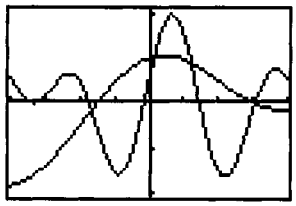
[–3.14, 3.14] por [–4, 4]

71 [–0.70, 0.12]



[– 2, 2] por [– 1.33, 1.33]

73 $[-\pi, -1.31] \cup [0.11, 0.95] \cup [2.39, \pi]$



[– 3.14, 3.14] por [– 2.09, 2.09]

75 **(a)** $A_0 e^{-\alpha z}$ **(b)** $\frac{\alpha}{k} z_0$ **(c)** $\frac{\ln 2}{\alpha}$

EJERCICIOS 6.8

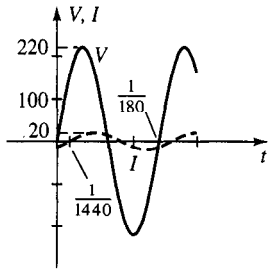
1 **(a)** $\omega = 200\,\pi$ rad/min

(b) En cm: $x = 20 \cos 200\pi t$, $y = 20$ sen $200\pi t$

3 Amplitud 10 cm; periodo, $\frac{1}{3}$ s; frecuencia, 3 osc/s. El punto está en el origen cuando $t = 0$. Se mueve hacia arriba con velocidad decreciente, alcanzando el punto de coordenada 10 cuando $t = \frac{1}{12}$. A continuación invierte su dirección y se mueve hacia abajo, adquiriendo velocidad hasta llegar al origen cuando $t = \frac{1}{6}$. Continúa hacia abajo con velocidad decreciente, llegando al punto de coordenada –10 cuando $t = \frac{1}{4}$. Después invierte su dirección y se mueve hacia arriba con velocidad creciente, regresando al origen cuando $t = \frac{1}{3}$.

5 Amplitud, 4 cm; periodo, $\frac{4}{3}$ s; frecuencia, $\frac{3}{4}$ osc/s. El movimiento se asemeja al del Ejercicio 3; sin embargo, el punto parte desde 4 unidades sobre el origen y se mueve hacia abajo, llega al origen en $t = \frac{1}{3}$, y el punto de coordenada – 4 cuando $t = \frac{2}{3}$. A continuación invierte su dirección y se mueve hacia arriba, alcanzando el origen cuando $t = 1$, y a su punto inicial cuando $t = \frac{4}{3}$.

9 La corriente está atrasada $\frac{1}{1440}$ s respecto a la tensión.



11 **(a)** $\frac{\pi}{15}$ rad/s.

(b) $h(t) = 60 - 50\cos\frac{\pi}{15}t = 60 + 50\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right)$

13 **(a)** 8 pies; 12 min **(b)** 105 km/h

15 $y = (4.5)\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{6}(t - 11)\right] + 7.5$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 6

1 $\frac{11\pi}{6}, \frac{9\pi}{4}, -\frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{5}$ **2** 810°, −120°, 315°, 900°, 36°

3 **(a)** 0.1 **(b)** $0.2\,\text{m}^2$ **4** **(a)** $\frac{35\pi}{12}$ cm **(b)** $\frac{175\pi}{16}$ cm^2

5 $x = 6\sqrt{3}; y = 3\sqrt{3}$ **6** $x = \frac{7}{2}\sqrt{2}; y = \frac{7}{2}\sqrt{2}$

7 $\tan\theta = \sqrt{\sec^2\theta - 1}$ **8** $\cot\theta = \sqrt{\csc^2\theta - 1}$

9 $\frac{\sqrt{33}}{7}, \frac{4}{7}, \frac{\sqrt{33}}{4}, \frac{4}{\sqrt{33}}, \frac{7}{4}, \frac{7}{\sqrt{33}}$

10 **(a)** $-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, -\frac{4}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{5}{3}, -\frac{5}{4}$

(b) $\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{13}}{3}, \frac{\sqrt{13}}{2}$

11 **(a)** II **(b)** III **(c)** IV

12 **(a)** $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{8}$ **(b)** 65°, 43°, 8°

13 **(a)** 1, 0, U, 0, U, 1

(b) $\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}$

(c) 0, 1, 0, U, 1, U

(d) $-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{3}, \frac{2}{\sqrt{3}}, -2$

14 **(a)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(b)** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **(c)** $-\frac{1}{2}$ **(d)** -2

(e) -1 **(f)** $-\frac{2}{\sqrt{3}}$

15 **(a)** $-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, -\frac{4}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{5}{3}, -\frac{5}{4}$

(b) $\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{13}}{3}, \frac{\sqrt{13}}{2}$

(c) −1, 0, U, 0, U, −1

16 310.5° **17** $\alpha = 30°, a \approx 23, c \approx 46$

18 $\beta = 35°20', a \approx 310, c \approx 380$

19 $\alpha \approx 68°, \beta \approx 22°, c \approx 67$

20 $\alpha \approx 13°, \beta \approx 77°, b = 40$

Ejercicios 21–30: Se dan comprobaciones características.

21 $\operatorname{sen}\theta(\csc\theta - \operatorname{sen}\theta) = \operatorname{sen}\theta\csc\theta - \operatorname{sen}^2\theta$
$= 1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$

22 $\cos\theta(\tan\theta + \cot\theta) = \cos\theta\cdot\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \cos\theta\cdot\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$
$= \operatorname{sen}\theta + \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}$
$= \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \csc\theta$

23 $(\cos^2\theta - 1)(\tan^2\theta + 1) = (\cos^2\theta - 1)(\sec^2\theta)$
$= \cos^2\theta\sec^2\theta - \sec^2\theta$
$= 1 - \sec^2\theta$

24 $\frac{\sec\theta - \cos\theta}{\tan\theta} = \frac{\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta}{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}} = \frac{\frac{1 - \cos^2\theta}{\cos\theta}}{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}} = \frac{\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta}}{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}$
$= \frac{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}{\frac{1}{\cos\theta}} = \frac{\tan\theta}{\sec\theta}$

25 $\frac{1 + \tan^2\theta}{\tan^2\theta} = \frac{1}{\tan^2\theta} + \frac{\tan^2\theta}{\tan^2\theta} = \cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$

26 $\frac{\sec\theta + \csc\theta}{\sec\theta - \csc\theta} = \frac{\frac{1}{\cos\theta} + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}}{\frac{1}{\cos\theta} - \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}} = \frac{\frac{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}}{\frac{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}}$
$= \frac{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta}$

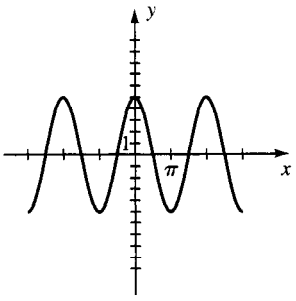
27 $\frac{\cot\theta - 1}{1 - \tan\theta} = \frac{\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} - 1}{1 - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}} = \frac{\frac{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta}}{\frac{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}$
$= \frac{(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)\cos\theta}{(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \cot\theta$

28 $\frac{1 + \sec\theta}{\tan\theta + \operatorname{sen}\theta} = \frac{1 + \frac{1}{\cos\theta}}{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\cos\theta}} = \frac{\frac{\cos\theta + 1}{\cos\theta}}{\frac{\operatorname{sen}\theta(1 + \cos\theta)}{\cos\theta}}$
$= \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \csc\theta$

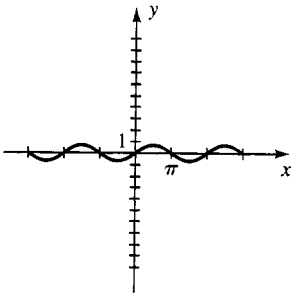
29 $\frac{\tan(-\theta) + \cot(-\theta)}{\tan\theta} = \frac{-\tan\theta - \cot\theta}{\tan\theta} = -\frac{\tan\theta}{\tan\theta} - \frac{\cot\theta}{\tan\theta}$
$= -1 - \cot^2\theta = -(1 + \cot^2\theta)$
$= -\csc^2\theta$

30 $-\frac{1}{\csc(-\theta)} - \frac{\cot(-\theta)}{\sec(-\theta)} = -\frac{1}{-\csc\theta} - \frac{-\cot\theta}{\sec\theta}$
$= \operatorname{sen}\theta + \frac{\cos\theta/\operatorname{sen}\theta}{1/\cos\theta}$
$= \operatorname{sen}\theta + \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}$
$= \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \csc\theta$

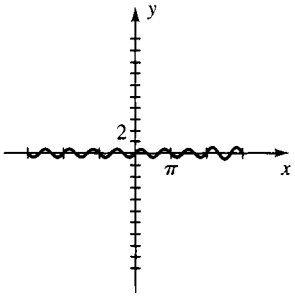
31 5, 2π



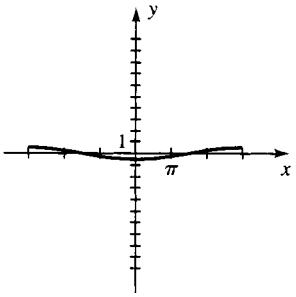
32 $\frac{2}{3}$, 2π



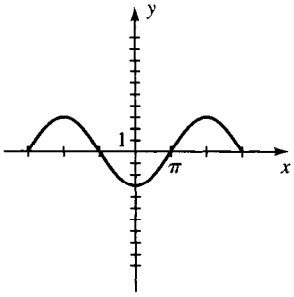
33 $\frac{1}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$



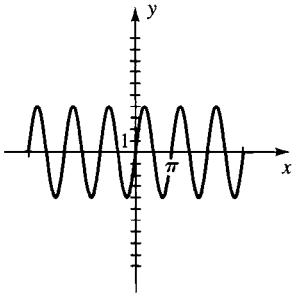
34 $\frac{1}{2}$, 6π



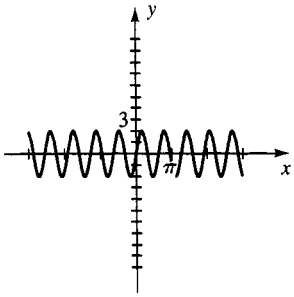
35 3, 4π



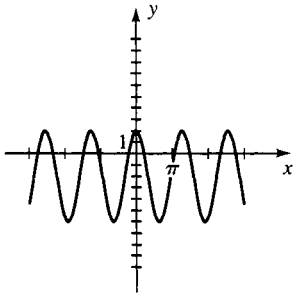
36 4, π



37 2, 2



38 4, 4



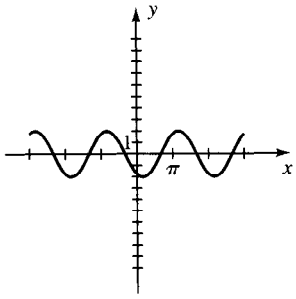
39 **(a)** 1.43, 2 **(b)** $y = 1.43 \operatorname{sen} \pi x$

40 **(a)** 3.27, 3π **(b)** $y = -3.27 \operatorname{sen} \frac{2}{3}x$

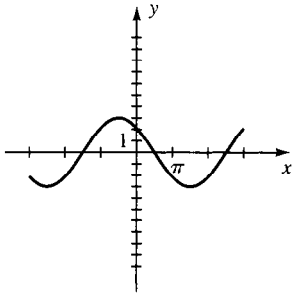
41 **(a)** 3, $\frac{4\pi}{3}$ **(b)** $y = -3 \cos \frac{3}{2}x$

42 **(a)** 2, $\frac{\pi}{2}$ **(b)** $y = 2 \cos \frac{\pi}{2}x$

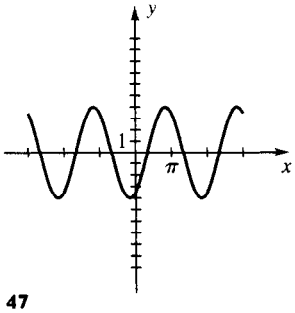
43



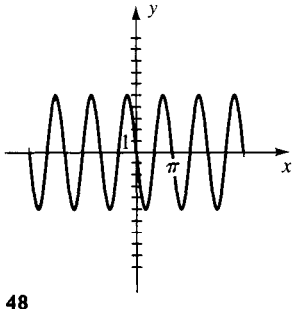
44



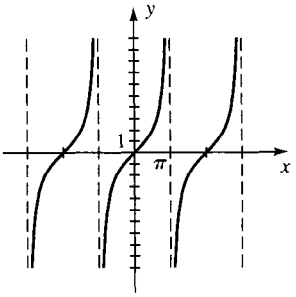
45



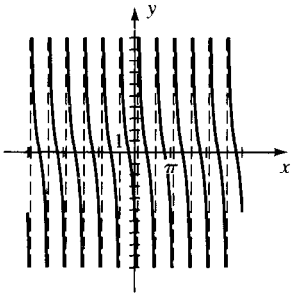
46



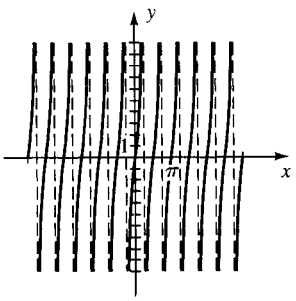
47



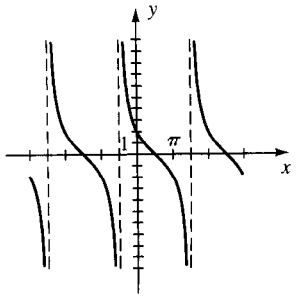
48



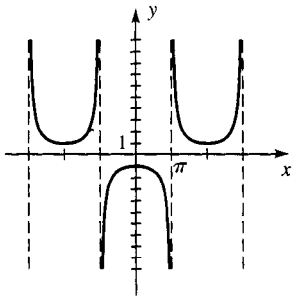
49



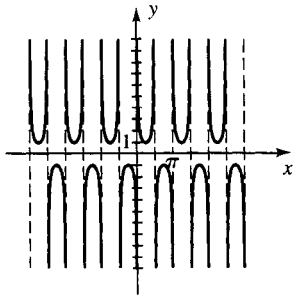
50



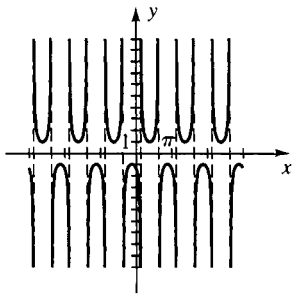
51



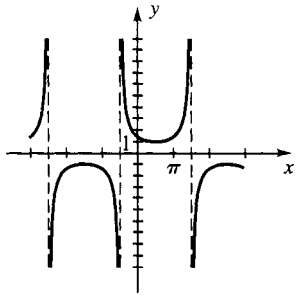
52



53



54



55 (a) $\frac{109\pi}{6}$ (b) 440.2 **56** 1048 pies **57** 52°

58 Aproximadamente 67 900 000 mi **59** $\frac{6\pi}{5}$ rad = 216°

60 250 pies **61** (a) 231.0 pies (b) 434.5 **62** (b) 2 mi

63 (a) $T = h + d(\cos\alpha \tan\theta - \operatorname{sen}\alpha)$ (b) 22.54 pies

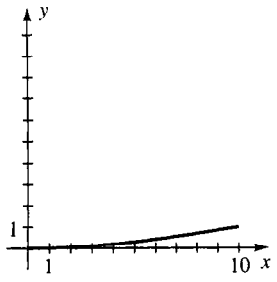
64 (a) $\frac{25}{3}\sqrt{3} \approx 14.43$ pie-bujías (b) 37.47°

65 (b) 4.69 **66** (a) 74.05 pulg (b) 24.75 pulg

67 (a) $S = 4a^2 \operatorname{sen}\theta$ (b) $V = \frac{4}{3}a^3 \operatorname{sen}^2\theta \cos\theta$

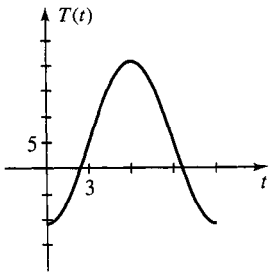
68 (a) $h = R \sec\frac{s}{R} - R$ (b) $h \approx 1650$ pies

69



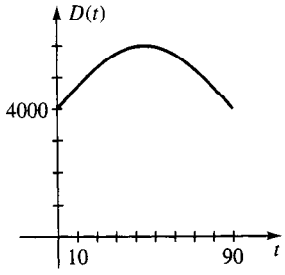
70 $y = 98.6 + (0.3)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{11\pi}{12}\right)$

71 (a)



(b) 20.8 °C el 1 de julio

72 (a)



(b) 45 días del verano

73 (a) El corcho se encuentra en movimiento armónico simple.

(b) $1 \le t \le 2$

74 (a) $P = (\cos\omega t, \operatorname{sen}\omega t)$ (b) $x = 2 + \cos\omega t$

(c) Q se encuentra en movimiento armónico simple en el intervalo $[1, 3]$.

CAPÍTULO 7

EJERCICIOS 7.1

Ejercicios 1–50: Se dan comprobaciones características para los ejercicios 1, 5, 9, ... , 49.

1 $\csc\theta - \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} - \operatorname{sen}\theta = \frac{1 - \operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

$= \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\cos\theta = \cot\theta\cos\theta$

5 $\frac{\csc^2\theta}{1 + \tan^2\theta} = \frac{\csc^2\theta}{\sec^2\theta} = \frac{1/\operatorname{sen}^2\theta}{1/\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = \left(\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)^2 = \cot^2\theta$

9 $\frac{1}{1 - \cos\gamma} + \frac{1}{1 + \cos\gamma} = \frac{1 + \cos\gamma + 1 - \cos\gamma}{1 - \cos^2\gamma} = \frac{2}{\operatorname{sen}^2\gamma}$

$= 2\csc^2\gamma$

13 $\csc^4 t - \cot^4 t = (\csc^2 t + \cot^2 t)(\csc^2 t - \cot^2 t)$

$= (\csc^2 t + \cot^2 t)(1) = \csc^2 t + \cot^2 t$

17 $\frac{\tan^2 x}{\sec x + 1} = \frac{\sec^2 x - 1}{\sec x + 1} = \frac{(\sec x + 1)(\sec x - 1)}{\sec x + 1}$

$= \sec x - 1 = \frac{1}{\cos x} - 1 = \frac{1 - \cos x}{\cos x}$

21 $\operatorname{sen}^4 r - \cos^4 r = (\operatorname{sen}^2 r - \cos^2 r)(\operatorname{sen}^2 r + \cos^2 r)$

$= (\operatorname{sen}^2 r - \cos^2 r)(1) = \operatorname{sen}^2 r - \cos^2 r$

25 $(\sec t + \tan t)^2 = \left(\frac{1}{\cos t} + \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\right)^2 = \left(\frac{1 + \operatorname{sen} t}{\cos t}\right)^2$

$= \frac{(1 + \operatorname{sen} t)^2}{\cos^2 t} = \frac{(1 + \operatorname{sen} t)^2}{1 - \operatorname{sen}^2 t}$

$= \frac{(1 + \operatorname{sen} t)^2}{(1 + \operatorname{sen} t)(1 - \operatorname{sen} t)} = \frac{1 + \operatorname{sen} t}{1 - \operatorname{sen} t}$

29 $\frac{1 + \csc \beta}{\cot \beta + \cos \beta} = \frac{1 + \frac{1}{\operatorname{sen} \beta}}{\frac{\cos \beta}{\operatorname{sen} \beta} + \cos \beta} = \frac{\frac{\operatorname{sen} \beta + 1}{\operatorname{sen} \beta}}{\frac{\cos \beta + \cos \beta \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \beta}}$

$= \frac{\operatorname{sen} \beta + 1}{\cos \beta (1 + \operatorname{sen} \beta)} = \frac{1}{\cos \beta} = \sec \beta$

33 $\mathrm{SM} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta}}$

$= \frac{\frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}$

$= \mathrm{PM}$

37 $\frac{1}{\tan \beta + \cot \beta} = \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta} + \frac{\cos \beta}{\operatorname{sen} \beta}} = \frac{1}{\frac{\operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta}{\cos \beta \operatorname{sen} \beta}}$

$= \operatorname{sen} \beta \cos \beta$

41 $\mathrm{RS} = \sec^4 \phi - 4 \tan^2 \phi = (\sec^2 \phi)^2 - 4 \tan^2 \phi$

$= (1 + \tan^2 \phi)^2 - 4 \tan^2 \phi$

$= 1 + 2 \tan^2 \phi + \tan^4 \phi - 4 \tan^2 \phi$

$= 1 - 2 \tan^2 \phi + \tan^4 \phi$

$= (1 - \tan^2 \phi)^2 = \mathrm{LS}$

45 $\log 10^{\tan t} = \log_{10} 10^{\tan t} = \tan t$, porque $\log_a a^x = x$.

49 $\ln |\sec \theta + \tan \theta| = \ln \left| \frac{(\sec \theta + \tan \theta)(\sec \theta - \tan \theta)}{\sec \theta - \tan \theta} \right|$

$= \ln \left| \frac{\sec^2 \theta - \tan^2 \theta}{\sec \theta - \tan \theta} \right| = \ln \left| \frac{1}{\sec \theta - \tan \theta} \right|$

$= \ln |1| - \ln |\sec \theta - \tan \theta|$

$= -\ln |\sec \theta - \tan \theta|$

Ejercicios 51– 62: Se da un valor característico de t o θ y la desigualdad resultante.

51 $\pi, -1 \neq 1$ **53** $\frac{3\pi}{2}, 1 \neq -1$ **55** $\frac{\pi}{4}, 2 \neq 1$

57 $\pi, -1 \neq 1$ **59** $\frac{\pi}{4}, \cos \sqrt{2} \neq 1$ **61** $\pi, -5 \neq 0$

63 $a^3 \cos^3 \theta$ **65** $a \tan \theta \operatorname{sen} \theta$ **67** $a \sec \theta$

69 $\frac{1}{a^2} \cos^2 \theta$ **71** $a \tan \theta$ **73** $a^4 \sec^3 \theta \tan \theta$

75 La gráfica de f parece ser la de $y = g(x) = -1$.

$\frac{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^4 x}{(1 - \sec^2 x) \cos^4 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x (1 - \operatorname{sen}^2 x)}{-\tan^2 x \cos^4 x}$

$= \frac{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}{-(\operatorname{sen}^2 x / \cos^2 x) \cos^4 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}{-\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}$

$= -1$

77 La gráfica de f parece ser la de $y = g(x) = \cos x$.

$\sec x (\operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x) - \operatorname{sen} x$

$= \sec x \cos x (\operatorname{sen} x + \cos x) - \operatorname{sen} x$

$= (\operatorname{sen} x + \cos x) - \operatorname{sen} x = \cos x$

EJERCICIOS 7.2

Ejercicios 1– 34: n representa cualquier entero.

1 $\frac{5\pi}{4} + 2\pi n, \frac{7\pi}{4} + 2\pi n$ **3** $\frac{\pi}{3} + \pi n$

5 $\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$ **7** No hay solución, porque $\frac{\pi}{2} > 1$.

9 Para toda θ, excepto $\theta = \frac{\pi}{2} + \pi n$

11 $\frac{\pi}{12} + \pi n, \frac{11\pi}{12} + \pi n$

13 $\frac{\pi}{2} + 3\pi n$ **15** $-\frac{\pi}{12} + 2\pi n, \frac{7\pi}{12} + 2\pi n$

17 $\frac{\pi}{4} + \pi n, \frac{7\pi}{12} + \pi n$ **19** $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$

21 $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n$ **23** $2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$ **25** $\frac{\pi}{3} + \pi n, \frac{2\pi}{3} + \pi n$

27 $\frac{4\pi}{3} + 2\pi n, \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$ **29** $\frac{\pi}{6} + \pi n, \frac{5\pi}{6} + \pi n$

31 $\frac{7\pi}{6} + 2\pi n, \frac{11\pi}{6} + 2\pi n$ **33** $\frac{\pi}{12} + \pi n, \frac{5\pi}{12} + \pi n$

35 $\frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}$ **37** $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ **39** $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$

41 $0, \pi, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ **43** $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

45 No hay solución **47** $\frac{11\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$ **49** $0, \frac{\pi}{2}$ **51** $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

53 Para toda α en $[0, 2\pi)$, excepto $0, \frac{\pi}{2}, \pi$, y $\frac{3\pi}{2}$

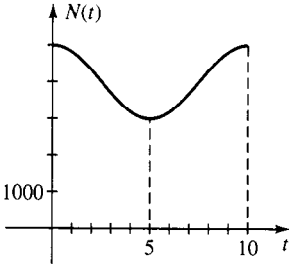
55 $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ **57** $\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ **59** 15°30′, 164°30′

61 135°, 315°, 116°30′, 296°30′

63 41°50′, 138°10′, 194°30′, 345°30′ **65** 10

67 $t \approx 3.50$ y $t \approx 8.50$ **69** **(a)** 3.29 **(b)** 4

71 **(a)** **(b)** $0 \leq t < \frac{5}{3}$ y $\frac{25}{3} < t \leq 10$



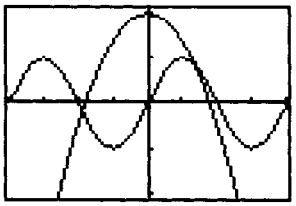
73 $A\left(-\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right), B\left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right),$

$C\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right), D\left(\frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

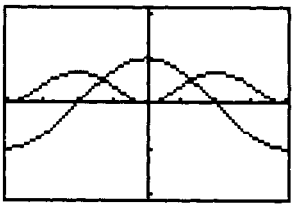
75 $\frac{7}{360}$ **77** $[0, 1.27] \cup [5.02, 2\pi]$

79 $(0.39, 1.96) \cup (2.36, 3.53) \cup (5.11, 5.50)$

81 $-1.48, 1.08$ **83** ± 1.00

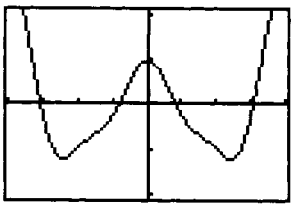


[–3.14, 3.14] por [–2.09, 2.09]



[–3.14, 3.14] por [–2.09, 2.09]

85 $\pm 0.64, \pm 2.42$ **87** **(a)** 37.6° **(b)** 52.5°



[–3.14, 3.14] por [–2.09, 2.09]

EJERCICIOS 7.3

1 **(a)** $\cos 43°23'$ **(b)** $\operatorname{sen} 16°48'$ **(c)** $\cot \frac{\pi}{3}$ **(d)** $\csc 72.72°$

3 **(a)** $\operatorname{sen} \frac{3\pi}{20}$ **(b)** $\cos\left(\frac{2\pi - 1}{4}\right)$ **(c)** $\cot\left(\frac{\pi - 2}{2}\right)$ **(d)** $\sec\left(\frac{\pi}{2} - 0.53\right)$

5 **(a)** $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$ **(b)** $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

7 **(a)** $\sqrt{3} + 1$ **(b)** $-2 - \sqrt{3}$

9 **(a)** $\frac{\sqrt{2} - 1}{2}$ **(b)** $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

11 $\cos 25°$ **13** $\operatorname{sen}(-5°)$ **15** $\operatorname{sen}(-5)$

17 **(a)** $\frac{77}{85}$ **(b)** $\frac{36}{85}$ **(c)** I

19 **(a)** $-\frac{24}{25}$ **(b)** $-\frac{24}{7}$ **(c)** IV

21 **(a)** $\frac{3\sqrt{21} - 8}{25} \approx 0.23$ **(b)** $\frac{4\sqrt{21} + 6}{25} \approx 0.97$ **(c)** I

23 $\operatorname{sen}(\theta + \pi) = \operatorname{sen}\theta \cos\pi + \cos\theta \operatorname{sen}\pi$
$= \operatorname{sen}\theta(-1) + \cos\theta(0) = -\operatorname{sen}\theta$

25 $\operatorname{sen}\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x \cos\frac{5\pi}{2} - \cos x \operatorname{sen}\frac{5\pi}{2} = -\cos x$

27 $\cos(\theta - \pi) = \cos\theta \cos\pi + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\pi = -\cos\theta$

29 $\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \cos x \cos\frac{3\pi}{2} - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = \operatorname{sen} x$

31 $\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\operatorname{sen} x \cos\frac{\pi}{2} - \cos x \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}{\cos x \cos\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}$
$= \frac{-\cos x}{\operatorname{sen} x} = -\cot x$

33 $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cot\left[\frac{\pi}{2} - \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right] = \cot(-\theta) = -\cot\theta$

35 $\operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\theta \cos\frac{\pi}{4} + \cos\theta \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$
$= \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta$
$= \frac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)$

37 $\tan\left(u + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan u + \tan\frac{\pi}{4}}{1 - \tan u \tan\frac{\pi}{4}} = \frac{1 + \tan u}{1 - \tan u}$

39 $\cos(u + v) + \cos(u - v)$
$= (\cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v) + (\cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v)$
$= 2 \cos u \cos v$

41 $\operatorname{sen}(u + v) \cdot \operatorname{sen}(u - v)$
$= (\operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v) \cdot (\operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v)$
$= \operatorname{sen}^2 u \cos^2 v - \cos^2 u \operatorname{sen}^2 v$
$= \operatorname{sen}^2 u(1 - \operatorname{sen}^2 v) - (1 - \operatorname{sen}^2 u)\operatorname{sen}^2 v$
$= \operatorname{sen}^2 u - \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen}^2 v - \operatorname{sen}^2 v + \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen}^2 v$
$= \operatorname{sen}^2 u - \operatorname{sen}^2 v$

43 $\frac{1}{\cot\alpha - \cot\beta} = \frac{1}{\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} - \frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}} = \frac{1}{\frac{\cos\alpha \operatorname{sen}\beta - \cos\beta \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}}$
$= \frac{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\beta - \alpha)}$

45 $\operatorname{sen}(u + v + w) = \operatorname{sen}[(u + v) + w]$
$= \operatorname{sen}(u + v)\cos w + \cos(u + v)\operatorname{sen} w$
$= (\operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v)\cos w + (\cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v)\operatorname{sen} w$
$= \operatorname{sen} u \cos v \cos w + \cos u \operatorname{sen} v \cos w + \cos u \cos v \operatorname{sen} w - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \operatorname{sen} w$

47 $\cot(u + v) = \frac{\cos(u + v)}{\operatorname{sen}(u + v)}$
$= \frac{(\cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v)(1/\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v)}{(\operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v)(1/\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v)}$
$= \frac{\cot u \cot v - 1}{\cot v + \cot u}$

49 $\operatorname{sen}(u - v) = \operatorname{sen}[u + (-v)]$
$= \operatorname{sen} u \cos(-v) + \cos u \operatorname{sen}(-v)$
$= \operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v$

51 $\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{\cos(x + h) - \cos x}{h}$
$= \frac{\cos x \cos h - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h - \cos x}{h}$

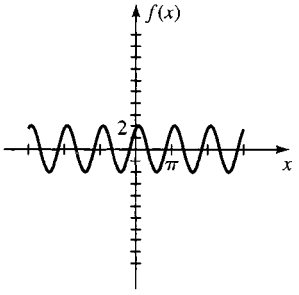
$$= \frac{\cos x \cos h - \cos x}{h} - \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} h}{h}$$

$$= \cos x \left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) - \operatorname{sen} x \left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)$$

53 $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ **55** $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$ **57** $\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}$ es extraño

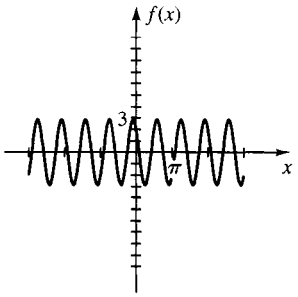
59 **(a)** $f(x) = 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ **(c)**

(b) $2, \pi, \frac{\pi}{12}$



61 **(a)** $f(x) = 2\sqrt{2} \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$ **(c)**

(b) $2\sqrt{2}, \frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{12}$



63 $y = 10\sqrt{41} \cos\left(60\pi t - \tan^{-1}\frac{5}{4}\right)$
$\approx 10\sqrt{41} \cos(60\pi t - 0.8961)$

65 **(a)** $y = \sqrt{13} \cos(t - C)$ para $\tan C = \frac{3}{2}$; $\sqrt{13}, 2\pi$

(b) $t = C + \frac{\pi}{2} + \pi n \approx 2.55 + \pi n$ para todo entero n no negativo

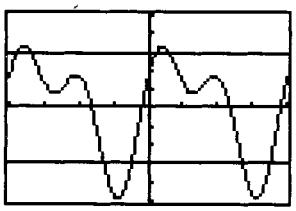
67 **(a)** $p(t) = A \operatorname{sen} \omega t + B \operatorname{sen}(\omega t + \tau)$
$= A \operatorname{sen} \omega t + B(\operatorname{sen} \omega t \cos \tau + \cos \omega t \operatorname{sen} \tau)$
$= (B \operatorname{sen} \tau) \cos \omega t + (A + B \cos \tau) \operatorname{sen} \omega t$
$= a \cos \omega t + b \operatorname{sen} \omega t$
para $a = B \operatorname{sen} \tau$ y $b = A + B \cos \tau$

(b) $C^2 = (B \operatorname{sen} \tau)^2 + (A + B \cos \tau)^2$
$= B^2 \operatorname{sen}^2 \tau + A^2 + 2AB \cos \tau + B^2 \cos^2 \tau$
$= A^2 + B^2(\operatorname{sen}^2 \tau + \cos^2 \tau) + 2AB \cos \tau$
$= A^2 + B^2 + 2AB \cos \tau$

69 **(a)** $C^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \tau \le A^2 + B^2 + 2AB$, porque $\cos \tau \le 1$ y $A > 0, B > 0$. Así,, $C^2 \le (A + B)^2$, y, por consiguiente, $C \le A + B$.

(b) $0, 2\pi$ **(c)** $\cos \tau > -B/(2A)$

71 $(-2.97, -2.69)$, $(-1.00, -0.37)$, $(0.17, 0.46)$, $(2.14, 2.77)$



[– 3.14, 3.14] por [– 5, 5]

EJERCICIOS 7.4

1 $\frac{24}{25}, -\frac{7}{25}, -\frac{24}{7}$ **3** $-\frac{4}{9}\sqrt{2}, -\frac{7}{9}, \frac{4}{7}\sqrt{2}$

5 $\frac{1}{10}\sqrt{10}, \frac{3}{10}\sqrt{10}, \frac{1}{3}$

7 $-\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}, \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}, -\sqrt{2} - 1$

9 **(a)** $\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ **(b)** $\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ **(c)** $\sqrt{2} + 1$

11 $\operatorname{sen} 10\theta = \operatorname{sen}(2 \cdot 5\theta) = 2 \operatorname{sen} 5\theta \cos 5\theta$

13 $4 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \cdot 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \operatorname{sen}\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right)$
$= 2 \operatorname{sen} x$

15 $(\operatorname{sen} t + \cos t)^2 = \operatorname{sen}^2 t + 2 \operatorname{sen} t \cos t + \cos^2 t$
$= 1 + \operatorname{sen} 2t$

17 $\operatorname{sen} 3u = \operatorname{sen}(2u + u) = \operatorname{sen} 2u \cos u + \cos 2u \operatorname{sen} u$
$= (2 \operatorname{sen} u \cos u) \cos u + (1 - 2 \operatorname{sen}^2 u) \operatorname{sen} u$
$= 2 \operatorname{sen} u \cos^2 u + \operatorname{sen} u - 2 \operatorname{sen}^3 u$
$= 2 \operatorname{sen} u(1 - \operatorname{sen}^2 u) + \operatorname{sen} u - 2 \operatorname{sen}^3 u$
$= 2 \operatorname{sen} u - 2 \operatorname{sen}^3 u + \operatorname{sen} u - 2 \operatorname{sen}^3 u$
$= 3 \operatorname{sen} u - 4 \operatorname{sen}^3 u = \operatorname{sen} u(3 - 4 \operatorname{sen}^2 u)$

19 $\cos 4\theta = \cos(2 \cdot 2\theta) = 2 \cos^2 2\theta - 1$
$= 2(2 \cos^2 \theta - 1)^2 - 1$
$= 2(4 \cos^4 \theta - 4 \cos^2 \theta + 1) - 1$
$= 8 \cos^4 \theta - 8 \cos^2 \theta + 1$

21 $\operatorname{sen}^4 t = (\operatorname{sen}^2 t)^2 = \left(\frac{1 - \cos 2t}{2}\right)^2$
$= \frac{1}{4}(1 - 2 \cos 2t + \cos^2 2t)$
$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{4}\left(\frac{1 + \cos 4t}{2}\right)$
$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cos 4t$
$= \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{8} \cos 4t$

23 $\sec 2\theta = \frac{1}{\cos 2\theta} = \frac{1}{2 \cos^2 \theta - 1} = \frac{1}{2\left(\frac{1}{\sec^2 \theta}\right) - 1}$
$= \frac{1}{\frac{2 - \sec^2 \theta}{\sec^2 \theta}} = \frac{\sec^2 \theta}{2 - \sec^2 \theta}$

25 $2 \operatorname{sen}^2 2t + \cos 4t = 2 \operatorname{sen}^2 2t + \cos(2 \cdot 2t)$
$= 2 \operatorname{sen}^2 2t + (1 - 2 \operatorname{sen}^2 2t) = 1$

27 $\tan 3u = \tan(2u + u) = \dfrac{\tan 2u + \tan u}{1 - \tan 2u \tan u}$

$= \dfrac{\dfrac{2\tan u}{1 - \tan^2 u} + \tan u}{1 - \dfrac{2\tan u}{1 - \tan^2 u} \cdot \tan u} = \dfrac{\dfrac{2\tan u + \tan u - \tan^3 u}{1 - \tan^2 u}}{\dfrac{1 - \tan^2 u - 2\tan^2 u}{1 - \tan^2 u}}$

$= \dfrac{3\tan u - \tan^3 u}{1 - 3\tan^2 u} = \dfrac{\tan u(3 - \tan^2 u)}{1 - 3\tan^2 u}$

29 $\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{1}{8}\cos 2\theta$

31 $\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{8}\cos 8x$ **33** $0, \pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

35 $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \pi$ **37** $0, \pi$ **39** $0, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

43 **(a)** 1.20, 5.09

(b) $P\left(\frac{2\pi}{3}, -1.5\right)$, $Q(\pi, -1)$, $R\left(\frac{4\pi}{3}, -1.5\right)$

45 **(a)** $-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

(b) $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{4}, \pm\frac{5\pi}{4}, \pm\frac{7\pi}{4}$

47 **(b)** Sí, el punto B está a 25 mi de A.

49 **(a)** $V = \frac{5}{2}\operatorname{sen}\theta$ **(b)** 53.13° **51** **(b)** 12.43 mm

53 La gráfica de f resulta ser la de $y = g(x) = \tan x$.

$$\frac{\operatorname{sen}2x + \operatorname{sen}x}{\cos 2x + \cos x + 1} = \frac{2\operatorname{sen}x\cos x + \operatorname{sen}x}{(2\cos^2 x - 1) + \cos x + 1}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}x(2\cos x + 1)}{\cos x(2\cos x + 1)} = \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x} = \tan x$$

EJERCICIOS 7.5

1 $\frac{1}{2}\cos 4t - \frac{1}{2}\cos 10t$ **3** $\frac{1}{2}\cos 2u + \frac{1}{2}\cos 10u$

5 $\operatorname{sen}12\theta + \operatorname{sen}6\theta$ **7** $\frac{3}{2}\operatorname{sen}3x + \frac{3}{2}\operatorname{sen}x$

9 $2\operatorname{sen}4\theta\cos 2\theta$ **11** $-2\operatorname{sen}4x\operatorname{sen}x$

13 $-2\cos 5t\operatorname{sen}2t$ **15** $2\cos\frac{3}{2}x\cos\frac{1}{2}x$

17 $\dfrac{\operatorname{sen}4t + \operatorname{sen}6t}{\cos 4t - \cos 6t} = \dfrac{2\operatorname{sen}5t\cos t}{2\operatorname{sen}5t\operatorname{sen}t} = \cot t$

19 $\dfrac{\operatorname{sen}u + \operatorname{sen}v}{\cos u + \cos v} = \dfrac{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(u+v)\cos\frac{1}{2}(u-v)}{2\cos\frac{1}{2}(u+v)\cos\frac{1}{2}(u-v)} = \tan\frac{1}{2}(u+v)$

21 $\dfrac{\operatorname{sen}u - \operatorname{sen}v}{\operatorname{sen}u + \operatorname{sen}v} = \dfrac{2\cos\frac{1}{2}(u+v)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(u-v)}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(u+v)\cos\frac{1}{2}(u-v)}$

$= \cot\frac{1}{2}(u+v)\tan\frac{1}{2}(u-v)$

$= \dfrac{\tan\frac{1}{2}(u-v)}{\tan\frac{1}{2}(u+v)}$

23 $4\cos x\cos 2x\operatorname{sen}3x = 2\cos 2x(2\operatorname{sen}3x\cos x)$

$= 2\cos 2x(\operatorname{sen}4x + \operatorname{sen}2x)$

$= (2\cos 2x\operatorname{sen}4x) + (2\cos 2x\operatorname{sen}2x)$

$= [\operatorname{sen}6x - \operatorname{sen}(-2x)] + (\operatorname{sen}4x - \operatorname{sen}0)$

$= \operatorname{sen}2x + \operatorname{sen}4x + \operatorname{sen}6x$

25 $\frac{1}{2}\operatorname{sen}[(a+b)x] + \frac{1}{2}\operatorname{sen}[(a-b)x]$ **27** $\frac{\pi}{4}n$

29 $\frac{\pi}{2}n$ **31** $\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n, \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n$

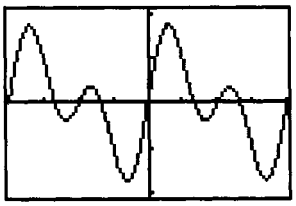
33 $\frac{\pi}{7} + \frac{2\pi}{7}n, \frac{2\pi}{3}n$ **35** $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

37 $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{4}, \pm\frac{5\pi}{4}, \pm\frac{7\pi}{4}$

39 $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}(x + kt) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}(x - kt)$

41 **(a)** $0, \pm 1.05, \pm 1.57, \pm 2.09, \pm 3.14$

(b) $0, \pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{2\pi}{3}, \pm\pi$



[–3.14, 3.14] por [–2.09, 2.09]

43 La gráfica de f resulta ser la de $y = g(x) = \tan 2x$.

$$\frac{\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}2x + \operatorname{sen}3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x} = \frac{\operatorname{sen}2x + (\operatorname{sen}3x + \operatorname{sen}x)}{\cos 2x + (\cos 3x + \cos x)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}2x + 2\operatorname{sen}2x\cos x}{\cos 2x + 2\cos 2x\cos x}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}2x(1 + 2\cos x)}{\cos 2x(1 + 2\cos x)} = \frac{\operatorname{sen}2x}{\cos 2x}$$

$$= \tan 2x$$

EJERCICIOS 7.6

1 **(a)** $-\frac{\pi}{4}$ **(b)** $\frac{2\pi}{3}$ **(c)** $-\frac{\pi}{3}$

3 **(a)** $\frac{\pi}{3}$ **(b)** $\frac{\pi}{4}$ **(c)** $\frac{\pi}{6}$

5 **(a)** No definida **(b)** No definida **(c)** $\frac{\pi}{4}$

7 **(a)** $-\frac{3}{10}$ **(b)** $\frac{1}{2}$ **(c)** 14

9 **(a)** $\frac{\pi}{3}$ **(b)** $\frac{5\pi}{6}$ **(c)** $-\frac{\pi}{6}$

11 **(a)** $-\frac{\pi}{4}$ **(b)** $\frac{3\pi}{4}$ **(c)** $-\frac{\pi}{4}$

13 **(a)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(b)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(c)** No definida

15 **(a)** $\frac{\sqrt{5}}{2}$ **(b)** $\frac{\sqrt{34}}{5}$ **(c)** $\frac{4}{\sqrt{15}}$

17 **(a)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(b)** 0 **(c)** $-\frac{77}{36}$

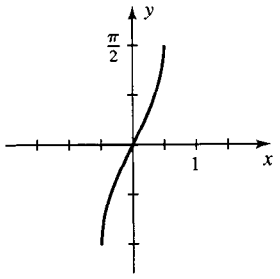
19 (a) $-\frac{24}{25}$ (b) $-\frac{161}{289}$ (c) $\frac{24}{7}$

21 (a) $-\frac{1}{10}\sqrt{2}$ (b) $\frac{4}{17}\sqrt{17}$ (c) $\frac{1}{2}$

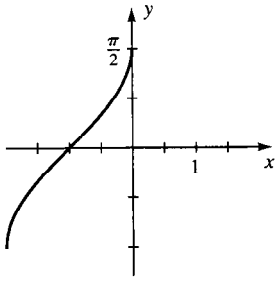
23 $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ **25** $\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}$ **27** $2x\sqrt{1-x^2}$

29 $\sqrt{\frac{1+x}{2}}$ **31** (a) $-\frac{\pi}{2}$ (b) 0 (d) $\frac{\pi}{2}$

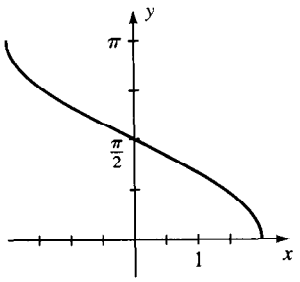
33



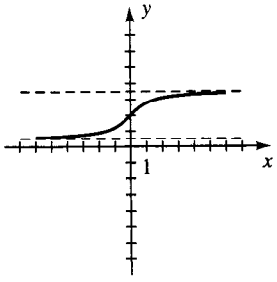
35



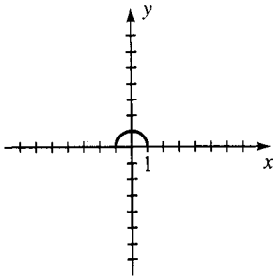
37



39



41



43 (a) $2 \le x \le 4$

(b) $-\frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{4}$

(c) $x = \operatorname{sen} 2y + 3$

45 (a) $-\frac{3}{2} \le x \le \frac{3}{2}$ (b) $0 \le y \le 4\pi$

(c) $x = \frac{3}{2}\cos\frac{1}{4}y$

47 $x = \operatorname{sen}^{-1}(-y - 3)$ **49** $x = \cos^{-1}\left[\frac{1}{2}(15 - y)\right]$

51 $x = x_R$ o bien $x = \pi - x_R$, donde $x_R = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{3}{4}\operatorname{sen} y\right)$

53 $\cos^{-1}(-1 + \sqrt{2}) \approx 1.1437$,
$2\pi - \cos^{-1}(-1 + \sqrt{2}) \approx 5.1395$

55 $\tan^{-1}\frac{1}{4}(-9 + \sqrt{57}) \approx -0.3478$,

$\tan^{-1}\frac{1}{4}(-9 - \sqrt{57}) \approx -1.3337$

57 $\cos^{-1}\frac{1}{5}\sqrt{15} \approx 0.6847$, $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{5}\sqrt{15}\right) \approx 2.4569$,

$\cos^{-1}\frac{1}{3}\sqrt{3} \approx 0.9553$, $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) \approx 2.1863$

59 $\operatorname{sen}^{-1}\left(\pm\frac{1}{6}\sqrt{30}\right) \approx \pm 1.1503$

61 (a) 1.65 m (b) 0.92 m (c) 0.43 m

63 (a) $\alpha = \theta - \operatorname{sen}^{-1}\frac{d}{k}$ (b) 40°

65 Sean $\alpha = \operatorname{sen}^{-1} x$ y $\beta = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, con $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ y $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$. Así, $\operatorname{sen}\alpha = x$ y $\operatorname{sen}\beta = x$. Como la función seno es biunívoca en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, se tiene que: $\alpha = \beta$.

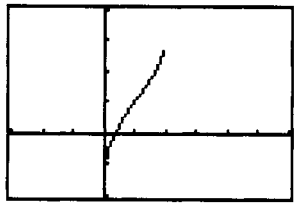
67 Sean $\alpha = \operatorname{arcsen}(-x)$ y $\beta = \operatorname{arcsen} x$ para $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ y $-\frac{\pi}{2} \le \beta \le \frac{\pi}{2}$. Así, $\operatorname{sen}\alpha = -x$ y $\operatorname{sen}\beta = x$. Por lo tanto, $\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}(-\beta)$. Como la función seno es biunívoca en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, entonces $\alpha = -\beta$.

69 Sea $\alpha = \arctan x$ y $\beta = \arctan(1/x)$. Como $x > 0$, entonces $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ y $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, por consiguiente, $0 < \alpha + \beta < \pi$. Así,

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{x + (1/x)}{1 - x\cdot(1/x)} = \frac{x + (1/x)}{0}.$$

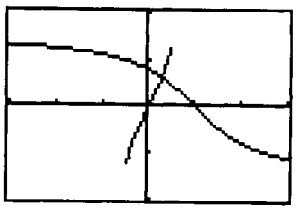
Como el denominador es 0, $\tan(\alpha + \beta)$ no está definida; por consiguiente, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

71 Dominio: $[0, 2]$; contradominio: $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$



[–3, 6] por [–2, 4]

73 0.29



[–3, 3] por [–2, 2]

75 $\theta \approx 1.25 \approx 72°$

[0, 1.57] por [0, 1.05]

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 7

1 $(\cot^2 x + 1)(1 - \cos^2 x) = (\csc^2 x)(\operatorname{sen}^2 x) = 1$

2 $\cos\theta + \operatorname{sen}\theta \tan\theta = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta \cdot \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$

$$= \frac{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$$

3 $\dfrac{(\sec^2\theta - 1)\cot\theta}{\tan\theta \operatorname{sen}\theta + \cos\theta} = \dfrac{(\tan^2\theta)\cot\theta}{\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \cdot \operatorname{sen}\theta + \cos\theta}$

$$= \frac{\tan\theta}{\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta}} = \frac{\operatorname{sen}\theta/\cos\theta}{1/\cos\theta} = \operatorname{sen}\theta$$

4 $(\tan x + \cot x)^2 = \left(\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}x}\right)^2 = \left(\dfrac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x \operatorname{sen}x}\right)^2$

$$= \frac{1}{\cos^2 x \operatorname{sen}^2 x} = \sec^2 x \csc^2 x$$

5 $\dfrac{1}{1 + \operatorname{sen}t} \cdot \dfrac{1 - \operatorname{sen}t}{1 - \operatorname{sen}t} = \dfrac{1 - \operatorname{sen}t}{1 - \operatorname{sen}^2 t} = \dfrac{1 - \operatorname{sen}t}{\cos^2 t}$

$$= \frac{1 - \operatorname{sen}t}{\cos t} \cdot \frac{1}{\cos t}$$

$$= \left(\frac{1}{\cos t} - \frac{\operatorname{sen}t}{\cos t}\right) \cdot \sec t$$

$$= (\sec t - \tan t)\sec t$$

6 $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \dfrac{(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta)/\cos\alpha\cos\beta}{(\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)/\cos\alpha\cos\beta}$

$$= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

7 $\tan 2u = \dfrac{2\tan u}{1 - \tan^2 u} = \dfrac{2 \cdot \dfrac{1}{\cot u}}{1 - \dfrac{1}{\cot^2 u}} = \dfrac{\dfrac{2}{\cot u}}{\dfrac{\cot^2 u - 1}{\cot^2 u}}$

$$= \frac{2\cot u}{\cot^2 u - 1} = \frac{2\cot u}{(\csc^2 u - 1) - 1} = \frac{2\cot u}{\csc^2 u - 2}$$

8 $\cos^2\dfrac{v}{2} = \dfrac{1 + \cos v}{2} = \dfrac{1 + \dfrac{1}{\sec v}}{2} = \dfrac{\dfrac{\sec v + 1}{\sec v}}{2}$

$$= \frac{1 + \sec v}{2\sec v}$$

9 $\dfrac{\tan^3\phi - \cot^3\phi}{\tan^2\phi + \csc^2\phi} = \dfrac{(\tan\phi - \cot\phi)[(\tan^2\phi + \tan\phi\cot\phi + \cot^2\phi)]}{[\tan^2\phi + (1 + \cot^2\phi)]}$

$$= \tan\phi - \cot\phi$$

10 $\text{PM} = \dfrac{\operatorname{sen}u + \operatorname{sen}v}{\csc u + \csc v} = \dfrac{\operatorname{sen}u + \operatorname{sen}v}{\dfrac{1}{\operatorname{sen}u} + \dfrac{1}{\operatorname{sen}v}} = \dfrac{\operatorname{sen}u + \operatorname{sen}v}{\dfrac{\operatorname{sen}v + \operatorname{sen}u}{\operatorname{sen}u\operatorname{sen}v}}$

$$= \operatorname{sen}u \operatorname{sen}v$$

$$\text{SM} = \frac{1 - \operatorname{sen}u\operatorname{sen}v}{-1 + \csc u \csc v} = \frac{1 - \operatorname{sen}u\operatorname{sen}v}{-1 + \dfrac{1}{\operatorname{sen}u\operatorname{sen}v}}$$

$$= \frac{1 - \operatorname{sen}u\operatorname{sen}v}{\dfrac{1 - \operatorname{sen}u\operatorname{sen}v}{\operatorname{sen}u\operatorname{sen}v}} = \operatorname{sen}u\operatorname{sen}v$$

Como el primero y el segundo miembros son iguales a la misma expresión, y los pasos son reversibles, se comprueba la identidad.

11 $\left(\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\tan^4 x}\right)^3 \left(\dfrac{\csc^3 x}{\cot^6 x}\right)^2 = \left(\dfrac{\operatorname{sen}^6 x}{\tan^{12} x}\right)\left(\dfrac{\csc^6 x}{\cot^{12} x}\right) = \dfrac{(\operatorname{sen}x \csc x)^6}{(\tan x \cot x)^{12}} = \dfrac{(1)^6}{(1)^{12}} = 1$

12 $\dfrac{\cos\gamma}{1 - \tan\gamma} + \dfrac{\operatorname{sen}\gamma}{1 - \cot\gamma} = \dfrac{\cos\gamma}{\dfrac{\cos\gamma - \operatorname{sen}\gamma}{\cos\gamma}} + \dfrac{\operatorname{sen}\gamma}{\dfrac{\operatorname{sen}\gamma - \cos\gamma}{\operatorname{sen}\gamma}}$

$$= \frac{\cos^2\gamma}{\cos\gamma - \operatorname{sen}\gamma} + \frac{\operatorname{sen}^2\gamma}{\operatorname{sen}\gamma - \cos\gamma}$$

$$= \frac{\cos^2\gamma - \operatorname{sen}^2\gamma}{\cos\gamma - \operatorname{sen}\gamma}$$

$$= \frac{(\cos\gamma + \operatorname{sen}\gamma)(\cos\gamma - \operatorname{sen}\gamma)}{\cos\gamma - \operatorname{sen}\gamma}$$

$$= \cos\gamma + \operatorname{sen}\gamma$$

13 $\dfrac{\cos(-t)}{\sec(-t) + \tan(-t)} = \dfrac{\cos t}{\sec t - \tan t} = \dfrac{\cos t}{\dfrac{1}{\cos t} - \dfrac{\operatorname{sen}t}{\cos t}}$

$$= \frac{\cos t}{\dfrac{1 - \operatorname{sen}t}{\cos t}} = \frac{\cos^2 t}{1 - \operatorname{sen}t} = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 t}{1 - \operatorname{sen}t}$$

$$= \frac{(1 - \operatorname{sen}t)(1 + \operatorname{sen}t)}{1 - \operatorname{sen}t} = 1 + \operatorname{sen}t$$

14 $\dfrac{\cot(-t) + \csc(-t)}{\operatorname{sen}(-t)} = \dfrac{-\cot t - \csc t}{-\operatorname{sen}t} = \dfrac{\dfrac{\cos t}{\operatorname{sen}t} + \dfrac{1}{\operatorname{sen}t}}{\operatorname{sen}t}$

$$= \frac{\cos t + 1}{\operatorname{sen}^2 t} = \frac{\cos t + 1}{1 - \cos^2 t}$$

$$= \frac{\cos t + 1}{(1 - \cos t)(1 + \cos t)} = \frac{1}{1 - \cos t}$$

15 $\sqrt{\dfrac{1 - \cos t}{1 + \cos t}} = \sqrt{\dfrac{(1 - \cos t)}{(1 + \cos t)} \cdot \dfrac{(1 - \cos t)}{(1 - \cos t)}} = \sqrt{\dfrac{(1 - \cos t)^2}{1 - \cos^2 t}}$

$$= \sqrt{\frac{(1 - \cos t)^2}{\operatorname{sen}^2 t}} = \frac{|1 - \cos t|}{|\operatorname{sen}t|} = \frac{1 - \cos t}{|\operatorname{sen}t|},$$

porque $(1 - \cos t) \geq 0$.

16 $\sqrt{\dfrac{1 - \operatorname{sen}\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta}} = \sqrt{\dfrac{(1 - \operatorname{sen}\theta)}{(1 + \operatorname{sen}\theta)} \cdot \dfrac{(1 + \operatorname{sen}\theta)}{(1 + \operatorname{sen}\theta)}} = \sqrt{\dfrac{1 - \operatorname{sen}^2\theta}{(1 + \operatorname{sen}\theta)^2}}$

$$= \sqrt{\frac{\cos^2\theta}{(1 + \operatorname{sen}\theta)^2}} = \frac{|\cos\theta|}{|1 + \operatorname{sen}\theta|} = \frac{|\cos\theta|}{1 + \operatorname{sen}\theta},$$

porque $(1 + \operatorname{sen}\theta) \geq 0$.

17 $\cos\left(x - \dfrac{5\pi}{2}\right) = \cos x \cos\dfrac{5\pi}{2} + \operatorname{sen}x \operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{2} = \operatorname{sen}x$

18 $\tan\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan x + \tan\frac{3\pi}{4}}{1 - \tan x \tan\frac{3\pi}{4}} = \dfrac{\tan x - 1}{1 + \tan x}$

19 $\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4\beta = \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2 \cdot 2\beta) = \frac{1}{4}(2 \operatorname{sen} 2\beta \cos 2\beta)$

$= \frac{1}{2}(2 \operatorname{sen}\beta \cos\beta)(\cos^2\beta - \operatorname{sen}^2\beta)$

$= \operatorname{sen}\beta \cos^3\beta - \cos\beta \operatorname{sen}^3\beta$

20 $\tan\frac{1}{2}\theta = \dfrac{1 - \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta} - \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \csc\theta - \cot\theta$

21 $\operatorname{sen} 8\theta = 2 \operatorname{sen} 4\theta \cos 4\theta$

$= 2(2 \operatorname{sen} 2\theta \cos 2\theta)(1 - 2\operatorname{sen}^2 2\theta)$

$= 8 \operatorname{sen}\theta \cos\theta (1 - 2\operatorname{sen}^2\theta)[1 - 2(\operatorname{sen}\theta \cos\theta)^2]$

$= 8 \operatorname{sen}\theta \cos\theta (1 - 2\operatorname{sen}^2\theta)(1 - 8\operatorname{sen}^2\theta \cos^2\theta)$

22 Sean $\alpha = \arctan x$ y $\beta = \arctan\dfrac{2x}{1 - x^2}$. Como $-1 < x < 1$, $-\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{4}$. Así, $\tan\alpha = x$ y $\tan\beta = \dfrac{2x}{1 - x^2} = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \tan 2\alpha$. Como la función tangente es biunívoca en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, entonces $\beta = 2\alpha$ o, equivalentemente, $\alpha = \frac{1}{2}\beta$.

23 $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ **24** $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ **25** $0, \pi$

26 $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ **27** $0, \pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

28 $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ **29** $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$ **30** $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \pi$

31 $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

32 Para toda x en $[0, 2\pi)$, excepto $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

33 $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ **34** $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

35 $\frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{11}{4}, \frac{15}{4}, \frac{19}{4}, \frac{23}{4}$ **36** $0, \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ **37** $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

38 $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

39 $0, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \pi, \frac{9\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}$

40 $\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \pi, \frac{7\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}$ **41** $\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ **42** $-2 - \sqrt{3}$

43 $\dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ **44** $\dfrac{2}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$ **45** $\frac{84}{85}$

46 $-\frac{13}{85}$ **47** $-\frac{84}{13}$ **48** $-\frac{36}{77}$ **49** $\frac{36}{85}$

50 $-\frac{36}{85}$ **51** $\frac{240}{289}$ **52** $-\frac{161}{289}$ **53** $\frac{24}{7}$

54 $\frac{1}{10}\sqrt{10}$ **55** $\frac{1}{3}$ **56** $\frac{5}{34}\sqrt{34}$

57 **(a)** $\frac{1}{2}\cos 3t - \frac{1}{2}\cos 11t$ **(b)** $\frac{1}{2}\cos\frac{1}{12}u + \frac{1}{2}\cos\frac{5}{12}u$

(c) $3 \operatorname{sen} 8x - 3 \operatorname{sen} 2x$ **(d)** $2 \operatorname{sen} 10\theta - 2 \operatorname{sen} 4\theta$

58 **(a)** $2 \operatorname{sen} 5u \cos 3u$ **(b)** $2 \operatorname{sen}\frac{11}{2}\theta \operatorname{sen}\frac{5}{2}\theta$

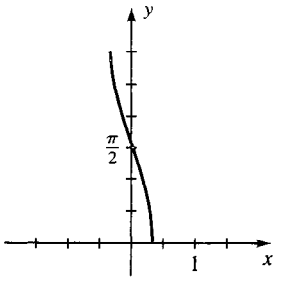
(c) $2\cos\frac{9}{40}t \operatorname{sen}\frac{1}{40}t$ **(d)** $6 \cos 4x \cos 2x$

59 $\frac{\pi}{6}$ **60** $\frac{\pi}{4}$ **61** $\frac{\pi}{3}$ **62** π **63** $-\frac{\pi}{4}$

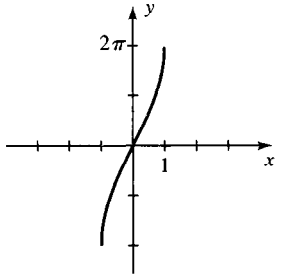
64 $\frac{3\pi}{4}$ **65** $\frac{1}{2}$ **66** 2 **67** No definido **68** $\frac{\pi}{2}$

69 $\frac{240}{289}$ **70** $-\frac{7}{25}$

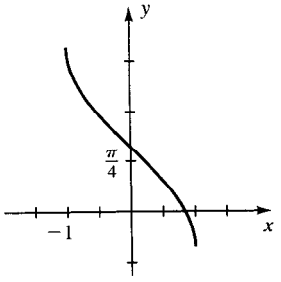
71



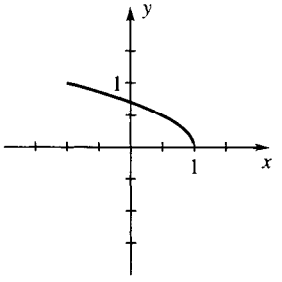
72



73



74



75 $\cos(\alpha + \beta + \gamma) = \cos[(\alpha + \beta) + \gamma]$

$= \cos(\alpha + \beta)\cos\gamma - \operatorname{sen}(\alpha + \beta)\operatorname{sen}\gamma$

$= (\cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta)\cos\gamma -$
$(\operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta)\operatorname{sen}\gamma$

$= \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \cos\gamma -$
$\operatorname{sen}\alpha \cos\beta \operatorname{sen}\gamma - \cos\alpha \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma$

76 **(b)** $t = 0, \pm\dfrac{\pi}{4b}$ **(c)** $\frac{2}{3}\sqrt{2}\,A$

77 $\pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{4}, \pm\frac{5\pi}{4}, \pm\frac{7\pi}{4}, \pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{5\pi}{3}$

78 **(a)** $x = 2d\tan\frac{1}{2}\theta$ **(b)** $d \leq 1000$ pies

79 **(a)** $d = r\left(\sec\frac{1}{2}\theta - 1\right)$ **(b)** 43°

80 **(a)** 78.7° **(b)** 61.4°

CAPÍTULO 8

EJERCICIOS 8.1

1 $\beta = 62°$, $b \approx 14.1$, $c \approx 15.6$

3 $\gamma = 100°10'$, $b \approx 55.1$, $c \approx 68.7$

5 $\beta = 76°30'$, $a \approx 13.6$, $c \approx 17.8$
7 No existe triángulo.
9 $\alpha \approx 77°30'$, $\beta \approx 49°10'$, $b \approx 108$; $\alpha \approx 102°30'$, $\beta \approx 24°10'$, $b \approx 59$
11 $\alpha \approx 82.54°$, $\beta \approx 49.72°$, $b \approx 100.85$; $\alpha \approx 97.46°$, $\beta \approx 34.80°$, $b \approx 75.45$
13 $\beta \approx 53°40'$, $\gamma \approx 61°10'$, $c \approx 20.6$
15 $\alpha \approx 25.993°$, $\gamma \approx 32.383°$, $a \approx 0.146$ **17** 219 yd
19 **(a)** 1.6 mi **(b)** 0.6 mi **21** 2.7 mi **23** 628 m
25 A 3.7 mi de A y a 5.4 mi de B **27** 350 pies
29 **(a)** 18.7 **(b)** 814 **31** (3949.9, 2994.2)

EJERCICIOS 8.2

1 $a \approx 26$, $\beta \approx 41°$, $\gamma \approx 79°$
3 $b \approx 180$, $\alpha \approx 25°$, $\gamma \approx 5°$
5 $c \approx 2.75$, $\alpha \approx 21°10'$, $\beta \approx 43°40'$
7 $\alpha \approx 29°$, $\beta \approx 47°$, $\gamma \approx 104°$
9 $\alpha \approx 12°30'$, $\beta \approx 136°30'$, $\gamma \approx 31°00'$ **11** 196 pie
13 24 mi **15** 39 mi **17** 2.3 mi **19** N55°31'E
21 A 63.7 pies de la primera y tercera bases; a 66.8 pies de la segunda base.
23 37 039 pies ≈ 7 mi
25 *Sugerencia*: use la fórmula sen $\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}}$.
27 **(a)** 72°, 108°, 36° **(b)** 0.62 **(c)** 0.59, 0.36

Ejercicios 29 – 36: La respuesta se da en unidades cuadradas.

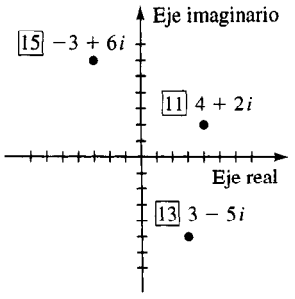
29 260 **31** 11.21 **33** 13.1 **35** 517.0
37 1.62 acres **39** 123.4 pies^2

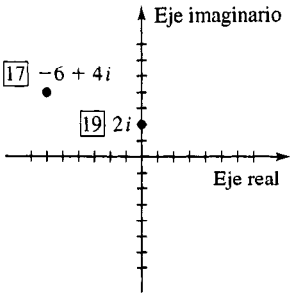
EJERCICIOS 8.3

1 5 **3** $\sqrt{85}$ **5** 8 **7** 1 **9** 0

Nota: El punto P es el correspondiente a la representación geométrica.

11 $P(4, 2)$ **13** $P(3, -5)$ **15** $P(-3, 6)$
17 $P(-6, 4)$ **19** $P(0, 2)$

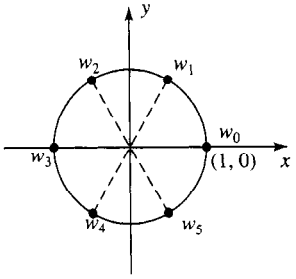




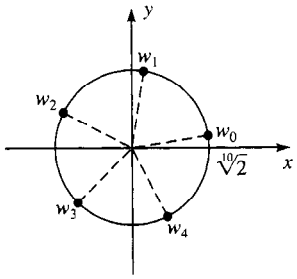
21 $\sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{7\pi}{4}$ **23** $8\,\text{cis}\,\frac{5\pi}{6}$ **25** $4\,\text{cis}\,\frac{\pi}{6}$
27 $4\sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{5\pi}{4}$ **29** $20\,\text{cis}\,\frac{3\pi}{2}$ **31** $12\,\text{cis}\,0$
33 $7\,\text{cis}\,\pi$ **35** $6\,\text{cis}\,\frac{\pi}{2}$ **37** $10\,\text{cis}\,\frac{4\pi}{3}$
39 $\sqrt{5}\,\text{cis}\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)$ **41** $\sqrt{10}\,\text{cis}\left[\tan^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi\right]$
43 $\sqrt{34}\,\text{cis}\left(\tan^{-1}\frac{3}{5} + \pi\right)$ **45** $5\,\text{cis}\left[\tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right) + 2\pi\right]$
47 $2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$ **49** $-3 + 3\sqrt{3}i$ **51** -5
53 $5 + 3i$ **55** $2 - i$ **57** $-2, i$
59 $10\sqrt{3} - 10i$, $-\frac{2}{5}\sqrt{3} + \frac{2}{5}i$ **61** $40, \frac{5}{2}$
63 $8 - 4i$, $\frac{8}{5} + \frac{4}{5}i$

EJERCICIOS 8.4

1 $-972 - 972i$ **3** $-32i$ **5** -8
7 $-\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i$ **9** $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$
11 $-64\sqrt{3} - 64i$ **13** $\pm\left(\frac{1}{2}\sqrt{6} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i\right)$
15 $\pm\left(\frac{\sqrt[4]{2}}{2} + \frac{\sqrt[4]{18}}{2}i\right)$, $\pm\left(\frac{\sqrt[4]{18}}{2} - \frac{\sqrt[4]{2}}{2}i\right)$
17 $3i$, $\pm\frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}i$
19 ± 1, $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}i$, $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}i$



21 $\sqrt[10]{2}\,\text{cis}\,\theta$ con $\theta \doteq 9°$, 81°, 153°, 225°, 297°

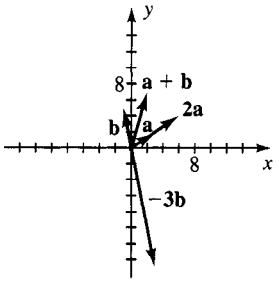


23 $\pm 2, \pm 2i$ **25** $\pm 2i$, $\sqrt{3} \pm i$, $-\sqrt{3} \pm i$
27 $2i$, $\pm\sqrt{3} - i$
29 $3\,\text{cis}\,\theta$ con $\theta = 0°, 72°, 144°, 216°, 288°$

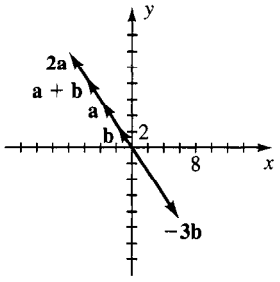
EJERCICIOS 8.5

1 $\langle 3, 1\rangle$, $\langle 1, -7\rangle$, $\langle 13, 8\rangle$, $\langle 3, -32\rangle$
3 $\langle -15, 6\rangle$, $\langle 1, -2\rangle$, $\langle -68, 28\rangle$, $\langle 12, -12\rangle$
5 $4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, $-2\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$, $19\mathbf{i} - 17\mathbf{j}$, $-11\mathbf{i} + 33\mathbf{j}$

7 Los puntos terminales son (3, 2), (−1, 5), (2, 7), (6, 4), (3, −15).



9 Los puntos terminales son (−4, 6), (−2, 3), (−6, 9), (−8, 12), (6, −9).



11 $-\mathbf{b}$ **13** $\mathbf{f}$ **15** $-\frac{1}{2}\mathbf{e}$

17
$$\begin{aligned}\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \langle a_1, a_2\rangle + (\langle b_1, b_2\rangle + \langle c_1, c_2\rangle)\\ &= \langle a_1, a_2\rangle + \langle b_1 + c_1, b_2 + c_2\rangle\\ &= \langle a_1 + b_1 + c_1, a_2 + b_2 + c_2\rangle\\ &= \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2\rangle + \langle c_1, c_2\rangle\\ &= (\langle a_1, a_2\rangle + \langle b_1, b_2\rangle) + \langle c_1, c_2\rangle\\ &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}\end{aligned}$$

19
$$\begin{aligned}\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) &= \langle a_1, a_2\rangle + (-\langle a_1, a_2\rangle)\\ &= \langle a_1, a_2\rangle + \langle -a_1, -a_2\rangle\\ &= \langle a_1 - a_1, a_2 - a_2\rangle\\ &= \langle 0, 0\rangle = \mathbf{0}\end{aligned}$$

21
$$\begin{aligned}(mn)\mathbf{a} &= (mn)\langle a_1, a_2\rangle\\ &= \langle (mn)a_1, (mn)a_2\rangle\\ &= \langle mna_1, mna_2\rangle\\ &= m\langle na_1, na_2\rangle \quad \text{o bien} \quad n\langle ma_1, ma_2\rangle\\ &= m(n\langle a_1, a_2\rangle) \quad \text{o bien} \quad n(m\langle a_1, a_2\rangle)\\ &= m(n\mathbf{a}) \quad \text{o bien} \quad n(m\mathbf{a})\end{aligned}$$

23 $0\mathbf{a} = 0\langle a_1, a_2\rangle = \langle 0a_1, 0a_2\rangle = \langle 0, 0\rangle = \mathbf{0}$.
También, $m\mathbf{0} = m\langle 0, 0\rangle = \langle m0, m0\rangle = \langle 0, 0\rangle = \mathbf{0}$.

25
$$\begin{aligned}-(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= -(\langle a_1, a_2\rangle + \langle b_1, b_2\rangle)\\ &= -(\langle a_1 + b_1, a_2 + b_2\rangle)\\ &= \langle -(a_1 + b_1), -(a_2 + b_2)\rangle\\ &= \langle -a_1 - b_1, -a_2 - b_2\rangle\\ &= \langle -a_1, -a_2\rangle + \langle -b_1, -b_2\rangle\\ &= -\mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = -\mathbf{a} - \mathbf{b}\end{aligned}$$

27
$$\begin{aligned}\|2\mathbf{v}\| &= \|2\langle a, b\rangle\| = \|\langle 2a, 2b\rangle\| = \sqrt{(2a)^2 + (2b)^2}\\ &= \sqrt{4a^2 + 4b^2} = 2\sqrt{a^2 + b^2} = 2\|\langle a, b\rangle\|\\ &= 2\|\mathbf{v}\|\end{aligned}$$

29 $3\sqrt{2}; \frac{7\pi}{4}$ **31** $5; \pi$ **33** $\sqrt{41}; \tan^{-1}\left(-\frac{5}{4}\right) + \pi$

35 $18; \frac{3\pi}{2}$ **37** 102 lb **39** 7.2 kg

41 89 kg; S66°W **43** 5.8 lb; 129° **45** 40.96; 28.68

47 −6.18; 19.02

49 **(a)** $\mathbf{F} = \langle 7, 2\rangle$ **(b)** $\mathbf{G} = -\mathbf{F} = \langle -7, -2\rangle$

51 **(a)** $\mathbf{F} \approx \langle -5.86, 1.13\rangle$
(b) $\mathbf{G} = -\mathbf{F} \approx \langle 5.86, -1.13\rangle$

53 $\text{sen}^{-1}(0.4) \approx 23.6°$ **55** 56°; 232 mi/hr

57 420 mi/hr; 244° **59** N22°W

61 $\mathbf{v}_1 \approx 4.1\mathbf{i} - 7.10\mathbf{j}$; $\mathbf{v}_2 \approx 0.98\mathbf{i} - 3.67\mathbf{j}$

63 **(a)** (24.51, 20.57) **(b)** (−24.57, 18.10)

EJERCICIOS 8.6

1 **(a)** 24 **(b)** $\cos^{-1}\left(\frac{24}{\sqrt{29}\sqrt{45}}\right) \approx 48°22'$

3 **(a)** −14 **(b)** $\cos^{-1}\left(\frac{-14}{\sqrt{17}\sqrt{13}}\right) \approx 160°21'$

5 **(a)** 45 **(b)** $\cos^{-1}\left(\frac{45}{\sqrt{81}\sqrt{41}}\right) \approx 38°40'$

7 **(a)** $-\frac{149}{5}$ **(b)** $\cos^{-1}\left(\frac{-149/5}{\sqrt{149}\sqrt{149/25}}\right) = 180°$

9 $\langle 4, -1\rangle \cdot \langle 2, 8\rangle = 0$ **11** $(-4\mathbf{j}) \cdot (-7\mathbf{i}) = 0$

13 Opuesto **15** Igual **17** $\frac{6}{5}$ **19** $\pm\frac{3}{8}$

21 **(a)** −23 **(b)** −23

23 -51 **25** $17/\sqrt{26} \approx 3.33$

27 2.2 **29** 7 **31** 28 **33** 12

35 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle \cdot \langle a_1, a_2\rangle = a_1^2 + a_2^2 = (\sqrt{a_1^2 + a_2^2})^2 = \|\mathbf{a}\|^2$

37
$$\begin{aligned}(c\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} &= (c\langle a_1, a_2\rangle) \cdot \langle b_1, b_2\rangle\\ &= \langle ca_1, ca_2\rangle \cdot \langle b_1, b_2\rangle\\ &= ca_1b_1 + ca_2b_2\\ &= c(a_1b_1 + a_2b_2) = c(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\end{aligned}$$

39 $\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = \langle 0, 0\rangle \cdot \langle a_1, a_2\rangle = 0(a_1) + 0(a_2) = 0 + 0 = 0$

41 $1000\sqrt{3} \approx 1732$ pies-lb

43 **(a)** $\mathbf{v} = (93 \times 10^6)\mathbf{i} + (0.432 \times 10^6)\mathbf{j}$;
$\mathbf{w} = (93 \times 10^6)\mathbf{i} - (0.432 \times 10^6)\mathbf{j}$
(b) 0.53°

45 $16\sqrt{3} \approx 27.7$ caballos (hp)

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 8

1 $a = \sqrt{43}, \beta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{43}\sqrt{43}\right), \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{5}{86}\sqrt{43}\right)$

2 $\alpha = 60°, \beta = 90°, b = 4$; $\alpha = 120°, \beta = 30°, b = 2$

3 $\gamma = 75°, a = 50\sqrt{6}, c = 50(1 + \sqrt{3})$

4 $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{7}{8}\right), \beta = \cos^{-1}\left(\frac{11}{16}\right), \gamma = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)$

5 $\alpha = 38°, a \approx 8.0, c \approx 13$

6 $\gamma \approx 19°10', \beta \approx 137°20', b \approx 258$

7 $\alpha \approx 24°, \gamma \approx 41°, b \approx 10.1$

8 $\alpha \approx 42°, \beta \approx 87°, \gamma \approx 51°$ **9** 290 **10** 10.9

11 $10\sqrt{2}\ \text{cis}\ \frac{3\pi}{4}$ **12** $4\ \text{cis}\ \frac{5\pi}{3}$ **13** $17\ \text{cis}\ \pi$

14 $12\ \text{cis}\ \frac{3\pi}{2}$ **15** $10\ \text{cis}\ \frac{7\pi}{6}$

16 $\sqrt{41}\ \text{cis}\left(\tan^{-1}\frac{5}{4}\right)$ **17** $10\sqrt{3} - 10i$ **18** $12 + 5i$

19 $-12 - 12\sqrt{3}\,i,\ -\frac{3}{2}$ **20** $-4\sqrt{2}\,i,\ -2\sqrt{2}$

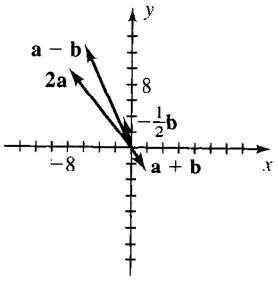
21 $-512i$ **22** i **23** $-972 + 972i$

24 $-2^{19} - 2^{19}\sqrt{3}\,i$ **25** $-3, \frac{3}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{3}\,i$

26 **(a)** 2^{24} **(b)** $\sqrt[3]{2}$ cis θ con $\theta = 100°, 220°, 340°$

27 2 cis θ con $\theta = 0°, 72°, 144°, 216°, 288°$

28 Los puntos terminales son $(-2, -3)$, $(-6, 13)$, $(-8, 10)$, $(-1, 4)$.



29 **(a)** $12\mathbf{i} + 19\mathbf{j}$ **(b)** $-8\mathbf{i} + 13\mathbf{j}$ **(c)** $\sqrt{40} \approx 6.32$ **(d)** $\sqrt{29} - \sqrt{17} \approx 1.26$

30 Circunferencia con centro (a_1, a_2) y radio c

31 Los vectores **a**, **b** y **a** – **b** forman un triángulo en el que el vector **a** – **b** es opuesto al ángulo θ. La conclusión es aplicación directa de la ley de los cosenos, con lados $\|\mathbf{a}\|$, $\|\mathbf{b}\|$ y $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$.

32 $\langle 14 \cos 40°, -14 \operatorname{sen} 40° \rangle$ **33** 109; S78°E

34 183°; 70 mi/h

35 **(a)** 10 **(b)** $\cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{13}\sqrt{17}}\right) \approx 47°44'$ **(c)** $\frac{10}{\sqrt{13}}$

36 **(a)** 80 **(b)** $\cos^{-1}\left(\frac{40}{\sqrt{40}\sqrt{50}}\right) \approx 26°34'$ **(c)** $\sqrt{40}$

37 56 **38** 47.6° **39** **(a)** 449 pies **(b)** 434 pies

40 **(a)** 33 mi, 41 mi **(b)** 30 mi **41** 204

42 1 hora y 16 min **43** **(c)** 158°

44 **(a)** 47° **(b)** 20

45 **(a)** 72° **(b)** 181.6 pies^2 **(c)** 37.6 pies

CAPÍTULO 9

EJERCICIOS 9.1

1 $(3, 5), (-1, -3)$ **3** $(1, 0), (-3, 2)$ **5** $(0, 0), \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{128}\right)$

7 $(3, -2)$ **9** No hay solución **11** $(-4, 3), (5, 0)$

13 $(-2, 2)$

15 $\left(-\frac{3}{5} + \frac{1}{10}\sqrt{86}, \frac{1}{5} + \frac{3}{10}\sqrt{86}\right), \left(-\frac{3}{5} - \frac{1}{10}\sqrt{86}, \frac{1}{5} - \frac{3}{10}\sqrt{86}\right)$

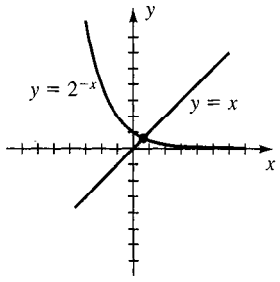
17 $(-4, 0), \left(\frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right)$ **19** $(0, 1), (4, -3)$

21 $(\pm 2, 5), (\pm\sqrt{5}, 4)$ **23** $(\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{3}), (-\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{3})$

25 $(2\sqrt{2}, \pm 2), (-2\sqrt{2}, \pm 2)$ **27** $(3, -1, 2)$

29 $(1, -1, 2), (-1, 3, -2)$ **31** 12 pulg. × 8 pulg.

33 Sí; se tiene una solución entre 0 y 1.



35 Sí; $r = 2$ pulg, $h = \frac{50}{\pi}$ pulg.

37 **(a)** $a = 120{,}000$, $b = 40{,}000$ **(b)** 77,143

39 $(0, 0)$, $(0, 100)$, $(50, 0)$; la cuarta solución, $(-100, 150)$ no tiene significado.

41 Sí; 1 pie × 1 pie × 2 pies, o bien

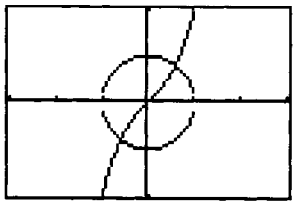
$$\frac{\sqrt{13} - 1}{2} \text{ pie} \times \frac{\sqrt{13} - 1}{2} \text{ pie} \times \frac{8}{(\sqrt{13} - 1)^2} \text{ pie}$$

$$\approx 1.30 \text{ pie} \times 1.30 \text{ pie} \times 1.18 \text{ pie}$$

43 Los puntos están en la parábola **(a)** $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ y **(b)** $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$.

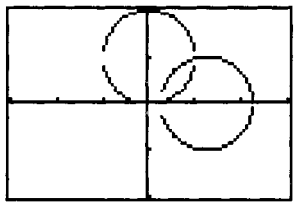
45 **(a)** $(31.25, -50)$ **(b)** $\left(-\frac{3}{2}\sqrt{11}, -\frac{1}{2}\right) \approx (-4.975, -0.5)$

47 $(0.6, 0.8)$, $(-0.6, -0.8)$



[–3, 3] por [–2, 2]

49 $(0.999, 0.968)$, $(0.251, 0.032)$



[–3, 3] por [–2, 2]

EJERCICIOS 9.2

1 $(4, -2)$ **3** $(8, 0)$ **5** $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$ **7** $\left(\frac{76}{53}, \frac{28}{53}\right)$

9 $\left(\frac{51}{13}, \frac{96}{13}\right)$ **11** $\left(\frac{8}{7}, -\frac{3}{7}\sqrt{6}\right)$ **13** No hay solución

15 Todos los pares ordenados (m, n) tales que $3m - 4n = 2$.

17 $(0, 0)$ **19** $\left(-\frac{22}{7}, -\frac{11}{5}\right)$

21 313 alumnos, 137 no estudiantes

23 $x = \left(\frac{30}{\pi}\right) - 4 \approx 5.55$ cm, $y = 12 - \left(\frac{30}{\pi}\right) \approx 2.45$ cm

25 $l = 10$ pie, $w = \frac{20}{\pi}$ pie **27** 2400 adultos, 3600 cachorros

29 40 g con 35% de aleación, 60 g con 60% de aleación

31 540 mi/hr, 60 mi/hr **33** $v_0 = 10$, $a = 3$

35 20 sofás, 30 reclinatorios

37 **(a)** $\left(c, \frac{4}{5}c\right)$ para $c > 0$ arbitraria **(b)** \$ 16 por hora

39 1928; 15.5 °C

41 **(a)** $Q = -100{,}000p + 2{,}000{,}000$
(b) $K = 150{,}000p - 250{,}000$ **(c)** \$9.00

EJERCICIOS 9.3

1 $(2, 3, -1)$ **3** $(-2, 4, 5)$ **5** No hay solución

7 $\left(\frac{2}{3}, \frac{31}{21}, \frac{1}{21}\right)$

Ejercicios 9 – 16: Hay otras formas posibles de respuesta; c es cualquier número real.

9 $(2c, -c, c)$ **11** $(0, -c, c)$

13 $\left(\frac{12}{7} - \frac{9}{7}c, \frac{4}{7}c - \frac{13}{14}, c\right)$ **15** $\left(\frac{7}{10}c + \frac{1}{2}, \frac{19}{10}c - \frac{3}{2}, c\right)$

17 $(1, 3, -1, 2)$ **19** $(2, -1, 3, 4, 1)$ **21** $\left(\frac{1}{11}, \frac{31}{11}, \frac{3}{11}\right)$

23 $(-2, -3)$ **25** No hay solución

27 17 de 10%, 11 de 30% y 22 de 50%

29 4 h para A, 2 h para B y 5 h para C

31 380 lb de G_1, 60 lb de G_2, 160 lb de G_3

33 **(a)** $I_1 = 0$, $I_2 = 2$, $I_3 = 2$ **(b)** $I_1 = \frac{3}{4}$, $I_2 = 3$, $I_3 = \frac{9}{4}$

35 $\frac{3}{8}$ lb de Colombia, $\frac{1}{8}$ lb de Brasil y $\frac{1}{2}$ lb de Kenia

37 **(a)** A: $x_1 + x_4 = 75$, B: $x_1 + x_2 = 150$,
C: $x_2 + x_3 = 225$, D: $x_3 + x_4 = 150$
(b) $x_1 = 25$, $x_2 = 125$, $x_4 = 50$
(c) $x_3 = 150 - x_4 \leq 150$;
$x_3 = 225 - x_2 = 225 - (150 - x_1) = 75 + x_1 \geq 75$

39 2134 **41** $y = -x^2 + 2x + 5$

43 $x = y^2 - 3y + 1$ **45** $x^2 + y^2 - x + 3y - 6 = 0$

47 $a = -\frac{4}{9}$, $b = \frac{11}{9}$, $c = \frac{17}{18}$, $d = \frac{23}{18}$

EJERCICIOS 9.4

1 $\frac{3}{x-2} + \frac{5}{x+3}$ **3** $\frac{5}{x-6} - \frac{4}{x+2}$

5 $\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2} - \frac{1}{x-3}$ **7** $\frac{3}{x} + \frac{2}{x-5} - \frac{1}{x+1}$

9 $\frac{2}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^2}$ **11** $-\frac{7}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{40}{3x-5}$

13 $\frac{24/25}{x+2} + \frac{2/5}{(x+2)^2} - \frac{23/25}{2x-1}$ **15** $\frac{5}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^3}$

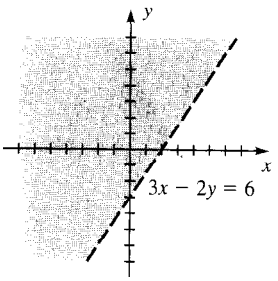
17 $-\frac{2}{x-1} + \frac{3x+4}{x^2+1}$ **19** $\frac{4}{x} + \frac{5x-3}{x^2+2}$

21 $\frac{4x-1}{x^2+1} + \frac{3}{(x^2+1)^2}$ **23** $2x + \frac{1}{x-1} + \frac{3x}{x^2+1}$

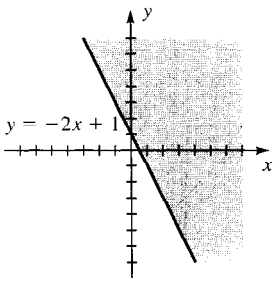
25 $3 + \frac{4}{x} + \frac{8}{x-4}$ **27** $2x + 3 + \frac{2}{x-1} - \frac{3}{2x+1}$

EJERCICIOS 9.5

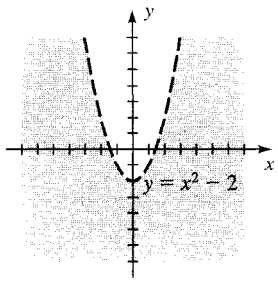
1



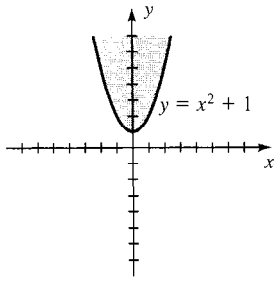
3



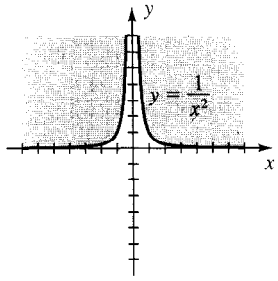
5



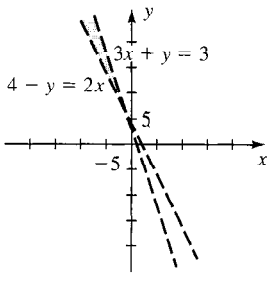
7



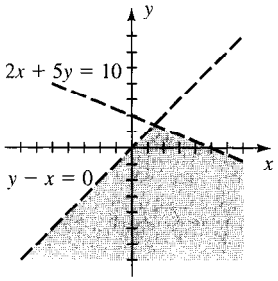
9



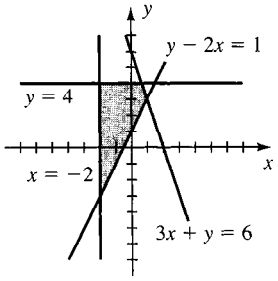
11



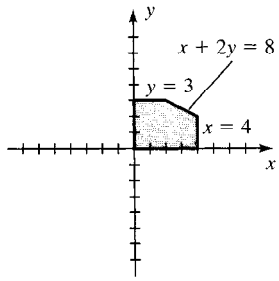
13



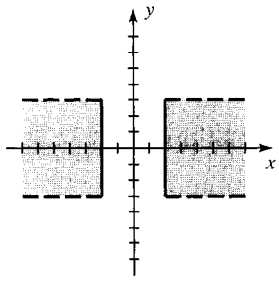
15



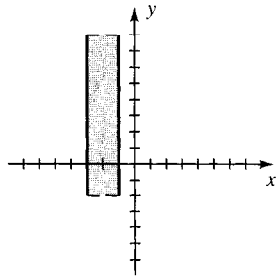
17



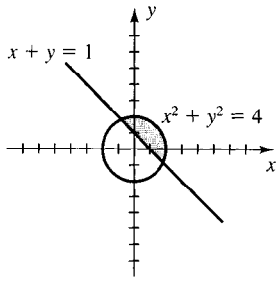
19



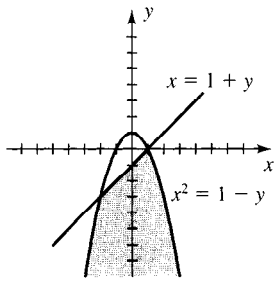
21



23



25



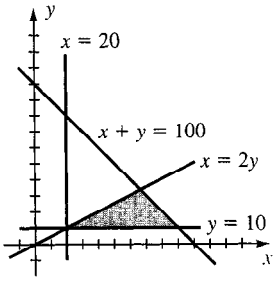
27 $0 \le x < 3, y < -x + 4, y \ge x - 4$

29 $x^2 + y^2 \le 9, y > -2x + 4$

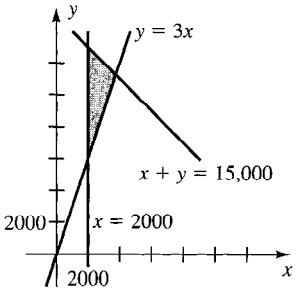
31 $y < x, y \le -x + 4, (x-2)^2 + (y-2)^2 \le 8$

33 $y > \frac{1}{8}x + \frac{1}{2}, y \le x + 4, y \le -\frac{3}{4}x + 4$

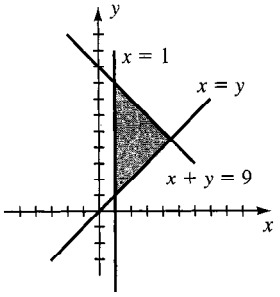
35 Si x y y representan el número de equipos de la marca A y de la marca B, respectivamente, entonces un sistema es $x \ge 20$, $y \ge 10$, $x \ge 2y$, $x + y \le 100$.



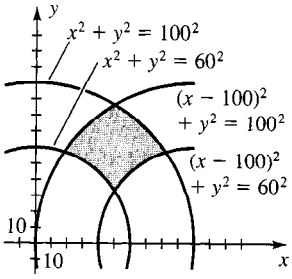
37 Si x y y representan la cantidad invertida en alto y en bajo riesgo, respectivamente, entonces un sistema es $x \ge 2000$, $y \ge 3x$, $x + y \le 15{,}000$.



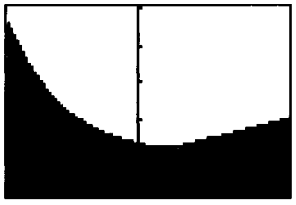
39 $x + y \le 9, y \ge x, x \ge 1$



41 Si la planta se ubica en (x, y), entonces un sistema es $(60)^2 \le x^2 + y^2 \le (100)^2$, $(60)^2 \le (x - 100)^2 + y^2 \le (100)^2$, $y \ge 0$.

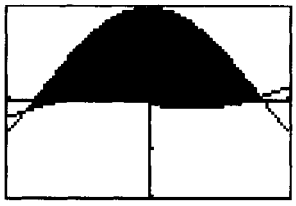


43



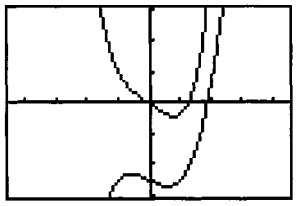
[–3.5, 4] por [–1, 4]

45



[–1.5, 1.5] por [–1, 1]

47 No hay solución

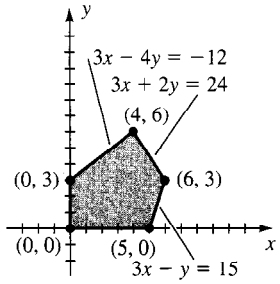


[– 4.5, 4.5] por [–3, 3]

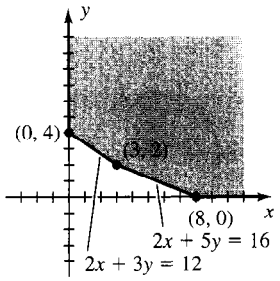
EJERCICIOS 9.6

1 Máximo de 27 en (6, 2); mínimo de 9 en (0, 2)

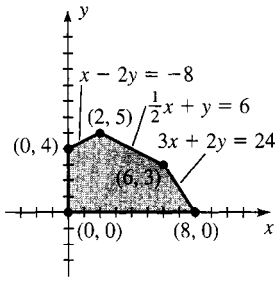
3 Máximo de 21 en (6, 3)



5 Mínimo de 21 en (3, 2)



7 C tiene el valor máximo 24 en cualquier punto en el segmento de recta de (2, 5) a (6, 3).



9 50 normales y 30 grandes

11 3.5 lb de S y 1 lb de T

13 Mandar 25 de W_1 a A y 0 de W_1 a B.
Mandar 10 de W_2 a A y 60 de W_2 a B.

15 Nada de alfalfa y 80 acres de maíz

17 Costo mínimo: 16 onzas de X, 4 onzas de Y, 0 onzas de Z; costo máximo: 0 onzas de X, 8 onzas de Y y 12 onzas de Z

19 2 minibuses y 4 autobuses

21 3 000 truchas y 2 000 robalos

23 60 pequeñas y 20 de lujo

EJERCICIOS 9.7

1 $\begin{bmatrix} 9 & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -12 & -3 \\ 9 & -6 \end{bmatrix}$

3 $\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -5 \\ -9 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 & -2 \\ 4 & 0 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -9 & -3 \\ 3 & -15 \\ -18 & 0 \end{bmatrix}$

5 $[11 \quad -3 \quad -3], [-3 \quad -3 \quad 7], [8 \quad -6 \quad 4], [-21 \quad 0 \quad 15]$

7 No es posible, no es posible, $\begin{bmatrix} 6 & -4 & 4 \\ 0 & 2 & -8 \\ -6 & 4 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ -6 & 3 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$

9 $\begin{bmatrix} 16 & 38 \\ 11 & -34 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 38 \\ 23 & -22 \end{bmatrix}$

11 $\begin{bmatrix} 3 & -14 & -3 \\ 16 & 2 & -2 \\ -7 & -29 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -20 & -11 \\ 2 & 10 & -4 \\ 15 & -13 & 1 \end{bmatrix}$

13 $\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -18 & 11 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ -5 & 2 & 2 \\ -51 & 26 & 10 \end{bmatrix}$

15 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

17 $[15], \begin{bmatrix} -3 & 7 & 2 \\ -12 & 28 & 8 \\ 15 & -35 & -10 \end{bmatrix}$

19 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$, no es posible

21 $\begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ -1 \end{bmatrix}$

23 $\begin{bmatrix} 18 & 0 & -2 \\ -40 & 10 & -10 \end{bmatrix}$

EJERCICIOS 9.8

1 $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ **3** No existe **5** $\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

7 $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -4 & -5 & 3 \\ -4 & -8 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ **9** $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$

11 $ab \neq 0; \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix}$ **15** **(a)** $\left(\frac{13}{10}, -\frac{1}{10}\right)$ **(b)** $\left(\frac{7}{5}, \frac{6}{5}\right)$

17 **(a)** $\left(-\frac{25}{3}, -\frac{34}{3}, \frac{7}{3}\right)$ **(b)** $\left(\frac{16}{3}, \frac{16}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

19 **(a)** $\begin{bmatrix} 3.1 & 6.7 & -8.7 \\ 4.1 & -5.1 & 0.2 \\ 0.6 & 1.1 & -7.4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2.1 \\ 3.9 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 0.1474 & 0.1572 & -0.1691 \\ 0.1197 & -0.0696 & -0.1426 \\ 0.0297 & 0.0024 & -0.1700 \end{bmatrix}$

(c) $x \approx -0.1081$, $y \approx -0.5227$, $z \approx -0.6135$

EJERCICIOS 9.9

1 $M_{11} = 0 = A_{11}$; $M_{12} = 5$; $A_{12} = -5$; $M_{21} = -1$; $A_{21} = 1$; $M_{22} = 7 = A_{22}$

3 $M_{11} = -14 = A_{11}$; $M_{12} = 10$; $A_{12} = -10$; $M_{13} = 15 = A_{13}$; $M_{21} = 7$; $A_{21} = -7$; $M_{22} = -5 = A_{22}$; $M_{23} = 34$; $A_{23} = -34$; $M_{31} = 11 = A_{31}$; $M_{32} = 4$; $A_{32} = -4$; $M_{33} = 6 = A_{33}$

5 5 **7** -83 **9** 2 **11** 0

13 -125 **15** 48 **17** -216 **19** $abcd$

31 **(a)** $x^2 - 3x - 4$ **(b)** $-1, 4$

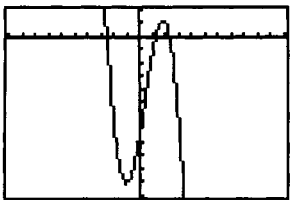
33 **(a)** $x^2 + x - 2$ **(b)** $-2, 1$

35 **(a)** $-x^3 - 2x^2 + x + 2$ **(b)** $-2, -1, 1$

37 **(a)** $-x^3 + 4x^2 + 4x - 16$ **(b)** $-2, 2, 4$

39 $-31i - 20j + 7k$ **41** $-6i - 8j + 18k$

43 **(a)** $-x^3 + x^2 + 6x - 7$ **(b)** $-2.51, 1.22, 2.29$



[– 10, 11] por [– 12, 2]

EJERCICIOS 9.10

1 $R_2 \leftrightarrow R_3$ **3** $-R_1 + R_3 \rightarrow R_3$

5 2 es factor común de R_1 y R_3 nd R_3

7 R_1 y R_3 son idénticos

9 – 1 es factor común de R_2

11 Todo número en C_2 es 0 **13** $2C_1 + C_3 \rightarrow C_3$

15 -10 **17** -142 **19** -183 **21** 44 **23** 359

33 $(4, -2)$ **35** $(8, 0)$

37 $|D| = 0$ de modo que no se puede usar la regla de Cramer.

39 $(2, 3, -1)$ **41** $(-2, 4, 5)$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 9

1 $\left(\frac{19}{23}, -\frac{18}{23}\right)$ **2** No hay solución **3** $(-3, 5), (1, -3)$

4 $(4, -3), (3, -4)$ **5** $(2\sqrt{3}, \pm\sqrt{2}), (-2\sqrt{3}, \pm\sqrt{2})$

6 $(-1, \pm 1, -1), \left(0, \pm\frac{1}{2}\sqrt{6}, -\frac{1}{2}\right)$ **7** $\left(\frac{14}{17}, \frac{14}{27}\right)$

8 $\left(\log_2 \frac{25}{7}, \log_3 \frac{15}{7}\right)$ **9** $\left(\frac{6}{11}, -\frac{7}{11}, 1\right)$

10 $\left(-\frac{6}{29}, \frac{2}{29}, -\frac{17}{29}\right)$

11 $(-2c, -3c, c)$ para todo número real c **12** $(0, 0, 0)$

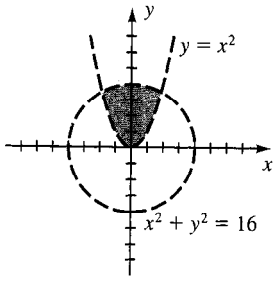
13 $\left(5c - 1, -\frac{19}{2}c + \frac{5}{2}, c\right)$ para todo número real c

14 $(5, -4)$ **15** $\left(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ **16** $(3, -1, -2, 4)$

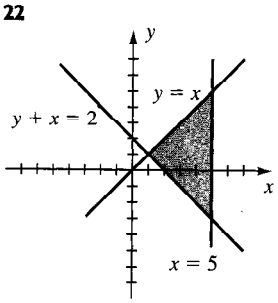
17 $\frac{8}{x-1} - \frac{3}{x+5} - \frac{1}{x+3}$ **18** $2 + \frac{3}{x+1} + \frac{4}{(x+1)^2}$

19 $-\frac{2}{x+5} + \frac{3x-1}{x^2+4}$ **20** $\frac{4}{x^2+2} + \frac{x-2}{x^2+5}$

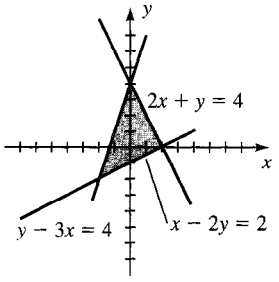
21



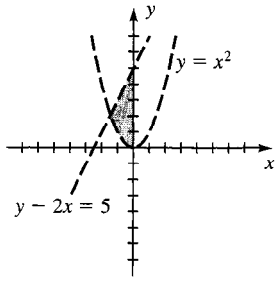
22



23



24



25 $\begin{bmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 4 & -11 & 5 \end{bmatrix}$ **26** $\begin{bmatrix} 26 \\ -6 \end{bmatrix}$

27 $\begin{bmatrix} 0 & 4 & -6 \\ 16 & 22 & 1 \\ 12 & 11 & 9 \end{bmatrix}$ **28** $\begin{bmatrix} 0 & -37 \\ 15 & -6 \end{bmatrix}$

29 $\begin{bmatrix} -12 & 4 & -11 \\ 6 & -11 & 5 \end{bmatrix}$ **30** $\begin{bmatrix} a & 3a \\ 2a & 4a \end{bmatrix}$

31 $\begin{bmatrix} a & 3a \\ 2b & 4b \end{bmatrix}$ **32** $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

33 $\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 13 & 19 \end{bmatrix}$ **34** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

35 $-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ **36** $\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 8 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -4 \\ -14 & 1 & 9 \end{bmatrix}$

37 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -7 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ **38** $\frac{1}{37}\begin{bmatrix} -4 & -20 & 15 \\ 3 & 15 & -2 \\ 9 & 8 & -6 \end{bmatrix}$

39 $(2, -5)$ **40** $(-1, 3, 2)$ **41** -6 **42** 9

43 48 **44** -86 **45** -84 **46** 0 **47** 120

48 -76 **49** 0 **50** -50 **51** $-1 \pm 2\sqrt{3}$

52 $4, \pm\sqrt{7}$

53 2 es factor común de R_1, 2 es factor común de C_2, y 3 es factor común de C_3.

54 Intercambiar R_1 y R_2, y después R_2 y R_3 para obtener el determinante de la derecha. El efecto es multiplicar por -1 dos veces.

55 $a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$ **57** $\left(\frac{76}{53}, \frac{28}{53}\right)$ **58** $\left(\frac{2}{3}, \frac{31}{21}, \frac{1}{21}\right)$

59 $40\sqrt{5}$ pies $\times$ $20\sqrt{5}$ pies **60** $y = \pm 2\sqrt{2}x + 3$

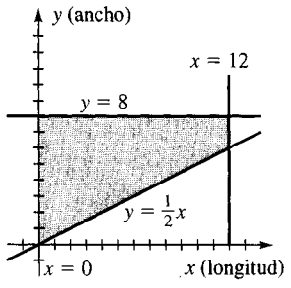
61 Impuestos = \$18 750; bono = \$3 125

62 Radio interior = 90 pies; radio exterior = 100 pies

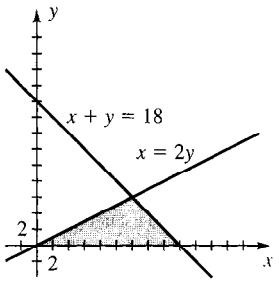
63 En pies^3/h: A, 30; B, 20; C, 50

64 Oeste 95, este 55

65 Si x y y representan la longitud y anchura, respectivamente, entonces un sistema es $x \le 12$, $y \le 8$, $y \ge \frac{1}{2}x$.



66 $x + y \le 18$, $x \ge 2y$, $x \ge 0$, $y \ge 0$



67 80 segadoras y 30 canteadoras

68 Alto riesgo \$50 000; bajo riesgo \$ 100 000; bonos \$0

CAPÍTULO 10

EJERCICIOS 10.1

1 9, 6, 3, 0; -12 **3** $\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{7}{10}, \frac{10}{17}, \frac{22}{65}$

5 9, 9, 9, 9; 9 **7** 1.9, 2.01, 1.999, 2.0001; 2.00000001

9 $4, -\frac{9}{4}, \frac{5}{3}, -\frac{11}{8}; -\frac{15}{16}$ **11** 2, 0, 2, 0; 0

13 $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{8}{11}, \frac{8}{9}; \frac{128}{33}$ **15** 1, 2, 3, 4; 8

17 2, 1, -2, -11, -38 **19** $-3, 3^2, 3^4, 3^8, 3^{16}$

21 5, 5, 10, 30, 120 **23** $2, 2, 4, 4^3, 4^{12}$

25 $\frac{7}{2}, \frac{15}{2}$, 12, 17

27 $-1, -1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$

29 -5 **31** 10 **33** 25 **35** $-\frac{17}{15}$ **37** 61

39 10,000 **41** $\frac{319}{3}$

43 $\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k)$

$$= (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \cdots + (a_n - b_n)$$
$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (-b_1 - b_2 - \cdots - b_n)$$
$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$$

45 Cuando aumenta k los términos tienden a 1.

47 $a_n = 2n + \frac{1}{24}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(a-10)$

(La respuesta no es única.)

49 Cuando aumenta k, los términos tienden a 0.7390851. . . .

51 **(a)** 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55

(b) 1, 2, 1.5, $1.\overline{6}$, 1.6, 1.625, 1.6153846, 1.6190476, 1.6176471, 1.6181818

53 La gráfica tiene una asíntota horizontal $y \approx 2.718 \approx e$. Por lo tanto, a_n tiende a e.

55 La gráfica tiene una asíntota horizontal $y \approx 1$. Por consiguiente, a_n tiende a 1.

EJERCICIOS 10.2

1 Demuestre que $a_{k+1} - a_k = 4$. **3** 18; 38; $4n - 2$

5 1.8; 0.3; $3.3 - 0.3n$ **7** 5.4; 20.9; $(3.1)n - (10.1)$

9 $\ln 3^5$; $\ln 3^{10}$; $\ln 3^n$ **11** -8 **13** -8.5

15 -9.8 **17** $\frac{551}{17}$ **19** -105 **21** 30 **23** 530

25 $\frac{423}{2}$ **27** $\sum_{n=1}^{4}(2n-1)$ **29** $\sum_{n=1}^{37}(2n-1)$

31 $\sum_{n=1}^{6}\frac{3n}{4n+3}$ **33** 24 **35** $\frac{10}{3}, \frac{14}{3}, 6, \frac{22}{3}, \frac{26}{3}$

37 **(a)** 60 **(b)** 12,780 **39** 255 **41** 154π pies

43 \$1200 **45** $16n^2$

47 Demuestre que el $(n+1)$-ésimo término es 1 mayor que el n-ésimo término.

49 **(a)** $\frac{8}{36}, \frac{7}{36}, \frac{6}{36}, \ldots, \frac{1}{36}$ **(b)** $d = -\frac{1}{36}$; 1 **(c)** \$722.22

EJERCICIOS 10.3

1 Demuestre que $\frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{1}{4}$. **3** $\frac{1}{2}, \frac{1}{16}; 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^{4-n}$

5 0.03; -0.00003; $300(-0.1)^{n-1}$ **7** 3125; 390,625; 5^n

9 20.25; -68.34375; $4(-1.5)^{n-1}$

11 x^8; $-x^{14}$; $(-1)^{n-1}x^{2n-2}$ **13** 2^{4x+1}; 2^{7x+1}; $2^{(n-1)x+1}$

15 $\pm\sqrt{3}$ **17** $\frac{243}{8}$ **19** $\sqrt[3]{3}$; 36 **21** 88,572

23 $-\frac{1023}{3072}$ **25** $\sum_{n=1}^{7}2^n$ **27** $\sum_{n=1}^{4}(-1)^{n+1}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

29 $\frac{2}{3}$ **31** $\frac{50}{33}$

33 Ya que $|r| = \sqrt{2} > 1$, no existe la suma.

35 1024 **37** $\frac{23}{99}$ **39** $\frac{2393}{990}$ **41** $\frac{5141}{999}$ **43** $\frac{16{,}123}{9999}$

45 24 **47** 4, 20, 100, 500 **49** $\frac{25}{256}\% \approx 0.1\%$

51 **(a)** $N(t) = 10{,}000(1.2)^t$ **(b)** 61,917 **53** 300 pies

55 \$3,000,000 **57** **(b)** 375 mg

59 **(a)** $a_{k+1} = \frac{1}{4}\sqrt{10}\,a_k$

(b) $a_n = \left(\frac{1}{4}\sqrt{10}\right)^{n-1}a_1$, $A_n = \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}A_1$,

$P_n = \left(\frac{1}{4}\sqrt{10}\right)^{n-1}P_1$

(c) $\frac{16a_1}{4-\sqrt{10}}$

61 \$38,929.00 **63** \$7396.67

65 **(a)** $\frac{2}{5}, \frac{6}{25}, \frac{18}{125}, \frac{54}{625}, \frac{162}{3125}$

(b) $r = \frac{3}{5}$; $\frac{2882}{3125} = 0.92224$ **(c)** \$16,000

EJERCICIOS 10.4

Ejercicios 1–32: Se presenta una demostración característica para los Ejercicios 1, 5, 9, . . . , 29.

1 (1) P_1 es cierto, porque $2(1) = 1(1+1) = 2$.

(2) Suponga que P_k es cierto:

$2 + 4 + 6 + \cdots + 2k = k(k+1)$. De donde,

$$\begin{aligned} 2 + 4 + 6 + \cdots + 2k + 2(k+1) &= k(k+1) + 2(k+1) \\ &= (k+1)(k+2) \\ &= (k+1)(k+1+1). \end{aligned}$$

Por lo tanto, P_{k+1} es cierto, lo que se quería demostrar.

5 (1) P_1 es cierto, porque $5(1) - 3 = \frac{1}{2}(1)[5(1) - 1] = 2$.

(2) Suponga que P_k es cierto:

$$2 + 7 + 12 + \cdots + (5k-3) = \tfrac{1}{2}k(5k-1).$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} 2 + 7 + 12 + \cdots + (5k-3) + 5(k+1) - 3 &= \tfrac{1}{2}k(5k-1) + 5(k+1) - 3 \\ &= \tfrac{5}{2}k^2 + \tfrac{9}{2}k + 2 \\ &= \tfrac{1}{2}(5k^2 + 9k + 4) \\ &= \tfrac{1}{2}(k+1)(5k+4) \\ &= \tfrac{1}{2}(k+1)[5(k+1) - 1]. \end{aligned}$$

Así, P_{k+1} es cierto, lo que se quería demostrar.

9 (1) P_1 es cierto, porque $(1)^1 = \frac{1(1+1)[2(1)+1]}{6} = 1$.

(2) Suponga que P_k es cierto:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= (k+1)\left[\frac{k(2k+1)}{6} + \frac{6(k+1)}{6}\right] \\ &= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}. \end{aligned}$$

Así, P_{k+1} es cierto, con lo cual se termina la demostración.

13 (1) P_1 es cierto, porque $3^1 = \frac{3}{2}(3^1 - 1) = 3$.

(2) Suponga que P_k es cierto:

$3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^k = \frac{3}{2}(3^k - 1)$. De donde,

$$\begin{aligned} 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^k + 3^{k+1} &= \frac{3}{2}(3^k - 1) + 3^{k+1} \\ &= \frac{3}{2} \cdot 3^k - \frac{3}{2} + 3 \cdot 3^k \\ &= \frac{9}{2} \cdot 3^k - \frac{3}{2} \\ &= \frac{3}{2}(3 \cdot 3^k - 1) \\ &= \frac{3}{2}(3^{k+1} - 1). \end{aligned}$$

Entonces, P_{k+1} es cierto lo cual se tenía que demostrar.

17 (1) P_1 es cierto, porque $1 < \frac{1}{8}[2(1) + 1]^2 = \frac{9}{8}$.

(2) Suponga que P_k es cierto:

$1 + 2 + 3 + \cdots + k < \frac{1}{8}(2k + 1)^2$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1) &< \frac{1}{8}(2k + 1)^2 + (k + 1) \\ &= \frac{1}{2}k^2 + \frac{3}{2}k + \frac{9}{8} \\ &= \frac{1}{8}(4k^2 + 12k + 9) \\ &= \frac{1}{8}(2k + 3)^2 \\ &= \frac{1}{8}[2(k + 1) + 1]^2. \end{aligned}$$

Así, P_{k+1} es cierto, con lo cual se termina la demostración.

21 (1) Para $n = 1$, $5^n - 1 = 4$, y 4 es factor de 4.

(2) Suponga que 4 es factor de $5^k - 1$. El $(k + 1)$–ésimo término es

$$\begin{aligned} 5^{k+1} - 1 &= 5 \cdot 5^k - 1 \\ &= 5 \cdot 5^k - 5 + 4 \\ &= 5(5^k - 1) + 4. \end{aligned}$$

De acuerdo con la hipótesis de inducción, 4 es factor de $5^k - 1$ y 4 es factor de 4, por lo tanto 4 es factor del $(k + 1)$–ésimo término. Entonces, P_{k+1} es cierto, lo que se quería demostrar.

25 (1) Para $n = 1$, $a - b$ es factor de: $a^1 - b^1$.

(2) Suponga que $a - b$ es factor de $a^k - b^k$. De acuerdo con la sugerencia para el $(k + 1)$–ésimo término,

$$\begin{aligned} a^{k+1} - b^{k+1} &= a^k \cdot a - b \cdot a^k + b \cdot a^k - b^k \cdot b \\ &= a^k(a - b) + (a^k - b^k)b. \end{aligned}$$

Como $(a - b)$ es factor de $a^k(a - b)$ y como, debido a la hipótesis de inducción, $a - b$ es factor de $(a^k - b^k)$, se concluye que $a - b$ es factor del $(k + 1)$–ésimo término. Así, P_{k+1} es cierto, que es lo que se quería demostrar.

29 (1) P_8 es cierto: porque $5 + \log_2 8 \leq 8$.

(2) Suponga que P_k es cierto: $5 + \log_2 k \leq k$. De donde

$$\begin{aligned} 5 + \log_2 (k + 1) &< 5 + \log_2 (k + k) \\ &= 5 + \log_2 2k \\ &= 5 + \log_2 2 + \log_2 k \\ &= (5 + \log_2 k) + 1 \\ &\leq k + 1. \end{aligned}$$

Así, P_{k+1} es cierto y con ello termina la demostración.

33 $\frac{n^3 + 6n^2 + 20n}{3}$ **35** $\frac{4n^3 - 12n^2 + 11n}{3}$

37 **(a)** $a + b + c = 1$, $8a + 4b + 2c = 5$,

$27a + 9b + 3c = 14$; $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{6}$

(b) El método que se usó en la parte (a) demuestra que la fórmula sólo es cierta para $n = 1, 2, 3$.

39 **(a)** $\frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$

(b) Use inducción matemática

41 (1) Para $n = 1$,

$$\begin{aligned} &\text{sen } (\theta + 1\pi) \\ &\quad = \text{sen } \theta \cos \pi + \cos \theta \text{ sen } \pi \\ &\quad = -\text{sen } \theta = (-1)^1 \text{ sen } \theta. \end{aligned}$$

(2) Suponga que P_k es cierto: $\text{sen } (\theta + k\pi) = (-1)^k \text{ sen } \theta$. Por tanto,

$$\begin{aligned} &\text{sen } [\theta + (k + 1)\pi] \\ &\quad = \text{sen } [(\theta + k\pi) + \pi] \\ &\quad = \text{sen } (\theta + k\pi) \cos \pi + \cos (\theta + k\pi) \text{ sen } \pi \\ &\quad = [(-1)^k \text{ sen } \theta] \cdot (-1) + \cos (\theta + k\pi) \cdot (0) \\ &\quad = (-1)^{k+1} \text{ sen } \theta. \end{aligned}$$

Entonces, P_{k+1} es cierta, que es lo que se quería demostrar.

43 (1) Para $n = 1$,

$[r(\cos \theta + i \text{ sen } \theta)]^1 = r^1[\cos (1\theta) + i \text{ sen } (1\theta)]$.

(2) Suponga que P_k es cierto:

$[r(\cos \theta + i \text{ sen } \theta)]^k = r^k(\cos k\theta + i \text{ sen } k\theta)$.

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} &[r(\cos \theta + i \text{ sen } \theta)]^{k+1} \\ &\quad = [r(\cos \theta + i \text{ sen } \theta)]^k[r(\cos \theta + i \text{ sen } \theta)] \\ &\quad = r^k[\cos k\theta + i \text{ sen } k\theta][r(\cos \theta + i \text{ sen } \theta)] \\ &\quad = r^{k+1}[(\cos k\theta \cos \theta - \text{sen } k\theta \text{ sen } \theta) \\ &\qquad + i(\text{sen } k\theta \cos \theta + \cos k\theta \text{ sen } \theta)] \\ &\quad = r^{k+1}[\cos (k + 1)\theta + i \text{ sen } (k + 1)\theta]. \end{aligned}$$

Entonces, P_{k+1} es cierto, y la demostración ha terminado.

EJERCICIOS 10.5

1 1440 **3** 5040 **5** 336 **7** 1 **9** 21

11 715 **13** $(2n + 2)(2n + 1)$

15 $64x^3 - 48x^2y + 12xy^2 - y^3$

17 $a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

19 $a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7$

21 $81x^4 - 540x^3y + 1350x^2y^2 - 1500xy^3 + 625y^4$

23 $\frac{1}{243}x^5 + \frac{5}{81}x^4y^2 + \frac{10}{27}x^3y^4 + \frac{10}{9}x^2y^6 + \frac{5}{3}xy^8 + y^{10}$

25 $x^{-12} + 18x^{-9} + 135x^{-6} + 540x^{-3} + 1215 + 1458x^3 + 729x^6$

27 $x^{5/2} - 5x^{3/2} + 10x^{1/2} - 10x^{-1/2} + 5x^{-3/2} - x^{-5/2}$

29 $3^{25}c^{10} + 25 \cdot 3^{24}c^{52/5} + 300 \cdot 3^{23}c^{54/5}$

31 $-1680 \cdot 3^{13}b^{11} + 60 \cdot 3^{14}b^{13} - 3^{15}b^{15}$ **33** $\frac{189}{1024}c^8$

35 $\frac{114{,}688}{9}u^2v^6$ **37** $70x^2y^2$ **39** $448y^3x^{10}$

41 $-216b^9a^2$ **43** $-\frac{135}{16}$ **45** 4.8, 6.19

47 $4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3$

49 $\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = n$ y

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{[n-(n-1)]!(n-1)!} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$$

EJERCICIOS 10.6

1 210 **3** 60,480 **5** 120 **7** 6

9 **(a)** 60 **(b)** 125 **11** 64 **13** $P(8, 3) = 336$

15 24 **17** **(a)** 2,340,000 **(b)** 2,160,000

19 **(a)** 151,200 **(b)** 5760 **21** 1024

23 $P(8, 8) = 40{,}320$ **25** $P(6, 3) = 120$

27 **(a)** 27,600 **(b)** 35,152 **29** 9,000,000

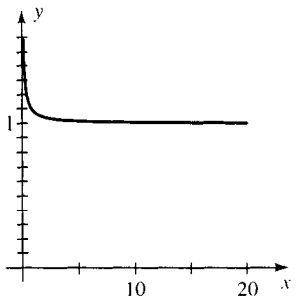
31 $P(4, 4) = 24$ **33** $3! \cdot 2^3 = 48$

35 $P(10, 10) = 3{,}628{,}800$

37 **(a)** 900

(b) Si n es par, $9 \cdot 10^{(n/2)-1}$; si n es impar, $9 \cdot 10^{(n-1)/2}$

39



(a) $y = 1$

(b) $n! \approx \frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n}$

EJERCICIOS 10.7

1 35 **3** 9 **5** n **7** 1 **9** $\frac{12!}{5!3!2!2!} = 166{,}320$

11 $\frac{10!}{3!2!2!1!1!1!} = 151{,}200$ **13** $C(10, 5) = 252$

15 $C(8, 2) = 28$ **17** $(5! \cdot 4! \cdot 8!) \cdot 3! = 696{,}729{,}600$

19 $3 \cdot C(10, 2) \cdot C(8, 2) \cdot C(4, 2) \cdot C(6, 2) \cdot 3 \cdot 4 = 4{,}082{,}400$

21 $C(12, 3) \cdot C(8, 2) = 6160$ **23** $C(8, 3) = 56$

25 **(a)** $C(49, 6) = 13{,}983{,}816$ **(b)** $C(24, 6) = 134{,}596$

27 $C(n, 2) = 45$ y por consiguiente, $n = 10$

29 $C(6, 3) = 20$ **31** Determinando $C(31, 3) = 4495$

33 **(a)** 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512

(b) $S_n = 2^{n-1}$

EJERCICIOS 10.8

1 **(a)** Un resultado representativo es (9 de tréboles, 3); 312

(b) 20; 292; $\frac{20}{312}$ **(c)** No; si; $\frac{72}{312}$; $\frac{156}{312}$; $\frac{36}{312}$; $\frac{192}{312}$

(d) Si; no; 0; $\frac{92}{312}$

3 **(a)** $\frac{4}{52}$ **(b)** $\frac{8}{52}$ **(c)** $\frac{12}{52}$ **5** **(a)** $\frac{1}{6}$ **(b)** $\frac{1}{6}$ **(c)** $\frac{2}{6}$

7 **(a)** $\frac{5}{15}$ **(b)** $\frac{6}{15}$ **(c)** $\frac{9}{15}$

9 **(a)** $\frac{2}{36}$ **(b)** $\frac{5}{36}$ **(c)** $\frac{7}{36}$ **11** $\frac{6}{216}$ **13** $\frac{3}{8}$

15 $\frac{48 \cdot 13}{C(52, 5)} \approx 0.00024$ **17** $\frac{C(13, 4) \cdot C(13, 1)}{C(52, 5)} \approx 0.00358$

19 $\frac{C(13, 5) \cdot 4}{C(52, 5)} \approx 0.00198$ **21** $\frac{4}{6}$ **23** $(0.674)^4 \approx 0.2064$

25 **(a)** 0.45 **(b)** 0.10 **(c)** 0.70 **(d)** 0.95

27 **(a)** $\frac{C(20, 5) \cdot C(40, 0)}{C(60, 5)} \approx 0.0028$

(b) $1 - \frac{C(30, 0) \cdot C(30, 5)}{C(60, 5)} \approx 0.9739$

(c) $\frac{C(10, 0) \cdot C(50, 5)}{C(60, 5)} + \frac{C(10, 1) \cdot C(50, 4)}{C(60, 5)} \approx 0.8096$

29 **(a)** $\frac{C(8, 8)}{2^8} \approx 0.00391$ **(b)** $\frac{C(8, 7)}{2^8} = 0.03125$

(c) $\frac{C(8, 6)}{2^8} = 0.109375$

(d) $\frac{C(8, 6) + C(8, 7) + C(8, 8)}{2^8} \approx 0.14453$

31 $1 - \frac{C(48, 5)}{C(52, 5)} \approx 0.34116$ **33** $1 - \frac{10}{36} = \frac{26}{36}$

35 **(a)** $\frac{1}{32}$ **(b)** $1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$

37 **(a)** $\frac{C(4, 4)}{4!} = \frac{1}{24}$ **(b)** $\frac{C(4, 2)}{4!} = \frac{1}{4}$

39 **(a)** 0 **(b)** $\frac{1}{9}$ **41** **(a)** $\frac{1}{16}$ **(b)** $\frac{C(4, 2)}{2^4} = \frac{6}{16}$

43 $\frac{2}{25{,}827{,}165}$ (aproximadamente 1 posibilidad en 13 millones)

45 **(a)** $\frac{8}{36}$ **(b)** $\frac{1}{36}$ **(c)** $\frac{244}{495} \approx 0.4929$

47 **(a)** 0.9639 **(b)** 0.95 **49** **(b)** 0.76

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 10

1 $5, -2, -1, -\frac{20}{29}; -\frac{7}{19}$

2 $0.9, -1.01, 0.999, -1.0001; 0.9999999$

3 $2, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{8}; \frac{65}{64}$ **4** $\frac{1}{12}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15}, \frac{8}{105}; \frac{8}{45}$

5 $10, \frac{11}{10}, \frac{21}{11}, \frac{32}{21}, \frac{53}{32}$ **6** $2, 2, 2, 2, 2$

7 $9, 3, \sqrt{3}, \sqrt[4]{3}, \sqrt[8]{3}$ **8** $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}$

9 75 **10** $-\frac{37}{10}$ **11** 940 **12** -10 **13** $\sum_{n=1}^{5} 3n$

14 $\sum_{n=1}^{6} 2^{3-n}$ **15** $\sum_{n=1}^{99} \frac{1}{n(n+1)}$ **16** $\sum_{n=1}^{98} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

17 $\sum_{n=1}^{4} \frac{n}{3n-1}$ **18** $\sum_{n=1}^{4} \frac{n}{5n-1}$

19 $\sum_{n=1}^{5} (-1)^{n+1}(105 - 5n)$ **20** $\sum_{n=1}^{7} (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$

21 $\sum_{n=0}^{25} a_n x^{4n}$ **22** $\sum_{n=0}^{20} a_n x^{3n}$ **23** $1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k}$

24 $1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$ **25** $-5 - 8\sqrt{3}; -5 - 35\sqrt{3}$ **26** 52

27 $-31; 50$ **28** $20, 14, 8, 2, -4, -10$

29 64 **30** -0.00003 **31** $4\sqrt{2}$ **32** $-\frac{12{,}800}{2187}$

33 $17; 3$ **34** $\frac{1}{81}; \frac{211}{1296}$ **35** 570 **36** 32.5

37 2041 **38** -506 **39** $\frac{5}{7}$ **40** $\frac{6268}{999}$

41 (1) P_1 es cierto, porque $3(1) - 1 = \frac{1[3(1)+1]}{2} = 2$.

(2) Suponga que P_k es cierto:

$$2 + 5 + 8 + \cdots + (3k-1) = \frac{k(3k+1)}{2}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} 2 + 5 + 8 + \cdots + (3k-1) + 3(k+1) - 1 &= \frac{k(3k+1)}{2} + 3(k+1) - 1 \\ &= \frac{3k^2 + k + 6k + 4}{2} \\ &= \frac{3k^2 + 7k + 4}{2} \\ &= \frac{(k+1)(3k+4)}{2} \\ &= \frac{(k+1)[3(k+1)+1]}{2}. \end{aligned}$$

Así, P_{k+1} es cierto, que era lo que se quería demostrar.

42 (1) P_1 es cierto, porque $[2(1)]^2 = \frac{[2(1)][2(1)+1][1+1]}{3} = 4$.

(2) Suponga que P_k es cierto:

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2k)^2 = \frac{(2k)(2k+1)(k+1)}{3}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} 2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2k)^2 + [2(k+1)]^2 &= \frac{(2k)(2k+1)(k+1)}{3} + [2(k+1)]^2 \\ &= (k+1)\left(\frac{4k^2 + 2k}{3} + \frac{12(k+1)}{3}\right) \\ &= \frac{(k+1)(4k^2 + 14k + 12)}{3} \\ &= \frac{2(k+1)(2k+3)(k+2)}{3}. \end{aligned}$$

Así, P_{k+1} es cierto, que era lo que se quería demostrar.

43 (1) P_1 es cierto, porque $\frac{1}{[2(1)-1][2(1)+1]} = \frac{1}{2(1)+1} = \frac{1}{3}$.

(2) Suponga que P_k es cierto:

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} &= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{2k^2 + 3k + 1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{k+1}{2(k+1)+1}. \end{aligned}$$

Entonces, P_{k+1} es cierto, con lo que termina la demostración.

44 (1) P_1 es cierto, porque $1(1+1) = \frac{(1)(1+1)(1+2)}{3} = 2$.

(2) Suponga que P_k es cierto:

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + k(k+1) + (k+1)(k+2) &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) \\ &= (k+1)(k+2)\left(\frac{k}{3} + 1\right) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}. \end{aligned}$$

Entonces, P_{k+1} es cierto, que era lo que se quería demostrar.

45 (1) Para $n = 1$, $n^3 + 2n = 3$, y 3 es factor de 3.

(2) Suponga que 3 es factor de $k^3 + 2k$. El $(k+1)$–ésimo término es

$$(k+1)^3 + 2(k+1) = k^3 + 3k^2 + 5k + 3$$
$$= (k^3 + 2k) + (3k^2 + 3k + 3)$$
$$= (k^3 + 2k) + 3(k^2 + k + 1).$$

Según la hipótesis de inducción, 3 es factor de $k^3 + 2k$, y 3 es factor de $3(k^2 + k + 1)$, de modo que 3 es factor del $(k+1)$–ésimo término. Así, P_{k+1} es cierto, que era lo que se quería demostrar.

46 (1) P_5 es cierto, porque $5^2 + 3 < 2^5$.

(2) Suponga que P_k es cierto: $k^2 + 3 < 2^k$. Por lo tanto,

$$(k+1)^2 + 3 = k^2 + 2k + 4$$
$$= (k^2 + 3) + (k + 1)$$
$$< 2^k + (k + 1)$$
$$< 2^k + 2^k$$
$$= 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$$

Entonces, P_{k+1} es cierto, que era lo que se quería demostrar.

47 (1) P_4 es cierto, porque $2^4 \le 4!$.

(2) Suponga que P_k es cierto: $2^k \le k!$. Por lo tanto,

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \le 2 \cdot k! < (k+1) \cdot k! = (k+1)!.$$

Entonces, P_{k+1} es cierto, lo cual se quería demostrar.

48 (1) P_{10} es cierto, porque $10^{10} \le 10^{10}$

(2) Suponga que P_k es cierto: $10^k \le k^k$. Por consiguiente,

$$10^{k+1} = 10 \cdot 10^k \le 10 \cdot k^k < (k+1) \cdot k^k$$
$$< (k+1) \cdot (k+1)^k = (k+1)^{k+1}.$$

Así, P_{k+1} es cierto, lo cual se quería demostrar.

49 $x^{12} - 18x^{10}y + 135x^8y^2 - 540x^6y^3 + 1215x^4y^4 - 1458x^2y^5 + 729y^6$

50 $16a^4 + 32a^3b^3 + 24a^2b^6 + 8ab^9 + b^{12}$

51 $a^8 + 40a^7 + 760a^6$ **52** $-\frac{63}{16}b^{12}c^{10}$

53 $21{,}504a^{10}b^2$ **54** 52,500,000

55 **(a)** $d = 1 - \frac{1}{2}a_1$ **(b)** En pies: $1\frac{1}{4}, 2, 2\frac{3}{4}, 3\frac{1}{2}$

56 24 pies **57** $\frac{2}{1-f}$ **58** $\frac{7}{4}\sqrt{10} + \sqrt{30} \approx 11.01$

59 **(a)** $P(52, 13) \approx 3.954 \times 10^{21}$

(b) $P(13, 5) \cdot P(13, 3) \cdot P(13, 3) \cdot P(13, 2) \approx 7.094 \times 10^{13}$

60 **(a)** $P(6, 4) = 360$ **(b)** $6^4 = 1296$

61 **(a)** $C(12, 8) = 495$ **(b)** $C(9, 5) = 126$

62 $\frac{17!}{6!5!4!2!} = 85{,}765{,}680$ **63** **(a)** $\frac{2}{4}$ **(b)** $\frac{2}{8}$

64 **(a)** $\frac{P(26, 4) \cdot 2}{P(52, 4)} \approx 0.1104$ **(b)** $\frac{26^2 \cdot 25^2}{P(52, 4)} \approx 0.0650$

65 **(a)** $\frac{1}{1000}$ **(b)** $\frac{10}{1000}$ **(c)** $\frac{50}{1000}$ **66** $\frac{C(4, 1)}{2^4} = \frac{4}{16}$

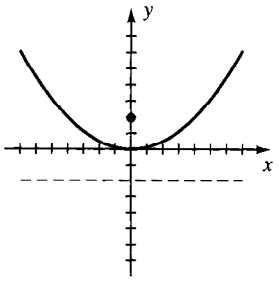
67 **(a)** $\frac{C(6, 4) + C(6, 5) + C(6, 6)}{2^6} = \frac{22}{64}$ **(b)** $1 - \frac{22}{64} = \frac{42}{64}$

68 **(a)** $\frac{1}{312}$ **(b)** $\frac{57}{312}$ **69** 0.44 **70** $\frac{8}{36}$

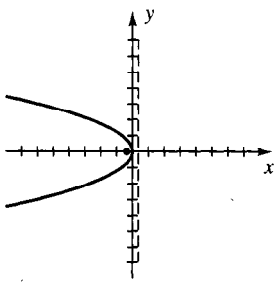
CAPÍTULO 11

EJERCICIOS 11.1

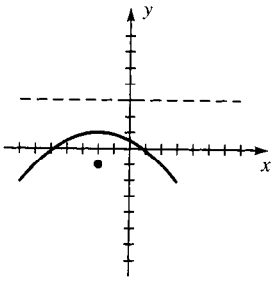
1 $V(0, 0)$; $F(0, 2)$; $y = -2$



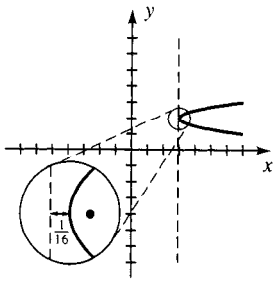
3 $V(0, 0)$; $F\left(-\frac{3}{8}, 0\right)$; $x = \frac{3}{8}$



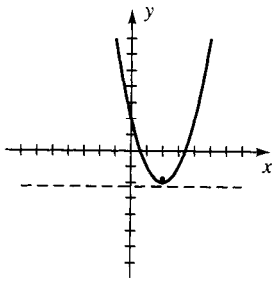
5 $V(-2, 1)$; $F(-2, -1)$; $y = 3$



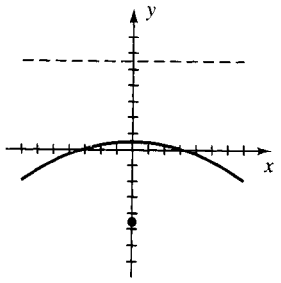
7 $V(3, 2)$; $F\left(\frac{49}{16}, 2\right)$; $x = \frac{47}{16}$



9 $V(2, -2)$; $F\left(2, -\frac{7}{4}\right)$; $y = -\frac{9}{4}$

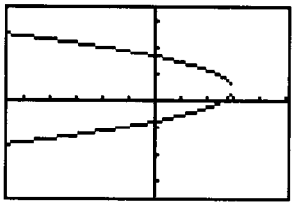


11 $V\left(0, \frac{1}{2}\right)$; $F\left(0, -\frac{9}{2}\right)$; $y = \frac{11}{2}$



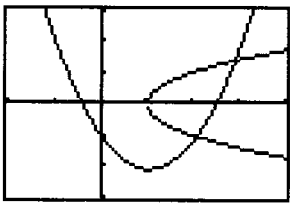
13 $y^2 = 20(x - 1)$ **15** $(x + 2)^2 = -16(y - 3)$
17 $y^2 = 8x$ **19** $(x - 6)^2 = 12(y - 1)$
21 $(y + 5)^2 = 4(x - 3)$ **23** $y^2 = -12(x + 1)$
25 $3x^2 = -4y$ **27** $(y - 5)^2 = 2(x + 3)$
29 $x^2 = 16(y - 1)$ **31** $(y - 3)^2 = -8(x + 4)$
33 $y = -\sqrt{x + 3} - 1$ **35** $x = \sqrt{y - 4} - 1$
37 $y = -x^2 + 2x + 5$ **39** $x = y^2 - 3y + 1$
41 4 pulg **43** A $\frac{9}{16}$ pies del centro del paraboloide
45 $2\sqrt{480} \approx 43.82$ pies
47 **(a)** $p = \frac{r^2}{4h}$ **(b)** $10\sqrt{2}$ pies **49** 64,968 pies^2

51



[–11, 10] por [– 7, 7]

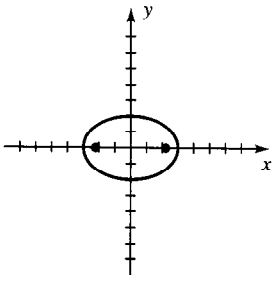
53 (2.08, –1.04), (2.92, 1.38)



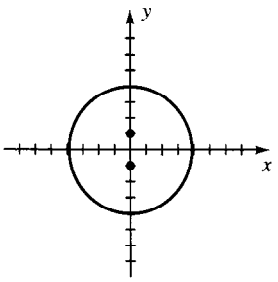
[–2, 4] por [– 3, 3]

EJERCICIOS 11.2

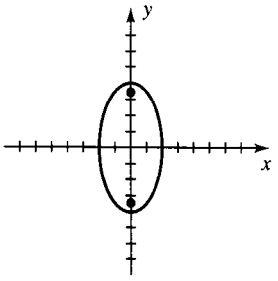
1 $V(\pm 3, 0)$; $F(\pm\sqrt{5}, 0)$



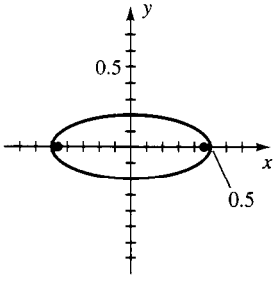
3 $V(0, \pm 4)$; $F(0, \pm 1)$



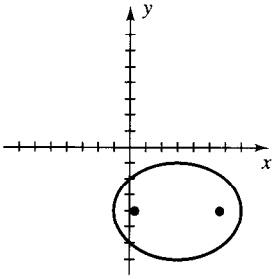
5 $V(0, \pm 4)$; $F(0, \pm 2\sqrt{3})$



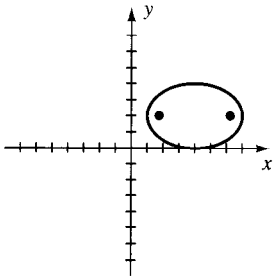
7 $V\left(\pm\frac{1}{2}, 0\right)$; $F\left(\pm\frac{1}{10}\sqrt{21}, 0\right)$



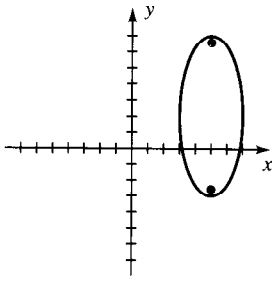
9 $V(3 \pm 4, -4)$; $F(3 \pm \sqrt{7}, -4)$



11 $V(4 \pm 3, 2)$; $F(4 \pm \sqrt{5}, 2)$

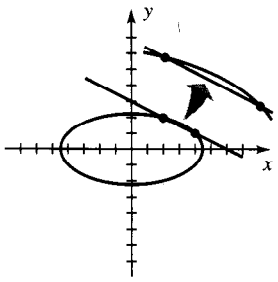


13 $V(5, 2 \pm 5)$; $F(5, 2 \pm \sqrt{21})$



15 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{36} = 1$ **17** $\frac{(x + 2)^2}{25} + \frac{(y - 1)^2}{4} = 1$
19 $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39} = 1$ **21** $\frac{4x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ **23** $\frac{8x^2}{81} + \frac{y^2}{36} = 1$
25 $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{16} = 1$ **27** $\frac{x^2}{4} + 9y^2 = 1$ **29** $\frac{x^2}{16} + \frac{4y^2}{25} = 1$

31 (2, 2), (4, 1)



33 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ **35** $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{289} = 1$
37 Mitad superior de $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{121} = 1$
39 Mitad izquierda de $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$
41 Mitad derecha de $\frac{(x - 1)^2}{4} + \frac{(y + 2)^2}{9} = 1$

43 Mitad inferior de $\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{49} = 1$

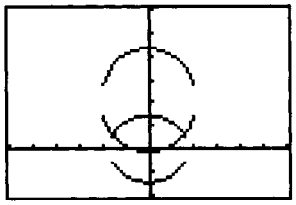
45 $\sqrt{84} \approx 9.2$ pies **47** 94,581,000; 91,419,000

49 **(a)** $d = h - \sqrt{h^2 - \frac{1}{4}k^2}$; $d' = h + \sqrt{h^2 - \frac{1}{4}k^2}$

(b) 16 cm; a 2 cm de V

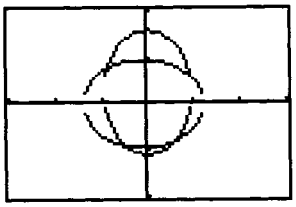
51 5 pies

53 $(\pm 1.540, 0.618)$



[– 6, 6] por [– 2, 6]

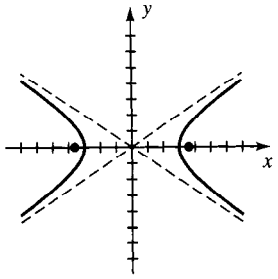
55 $(-0.88, 0.76)$, $(-0.48, -0.91)$, $(0.58, -0.81)$, $(0.92, 0.59)$



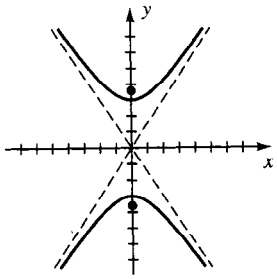
[– 3, 3] por [– 2, 2]

EJERCICIOS 11.3

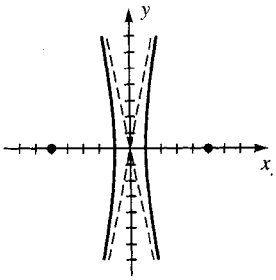
1 $V(\pm 3, 0)$; $F(\pm\sqrt{13}, 0)$; $y = \pm\frac{2}{3}x$



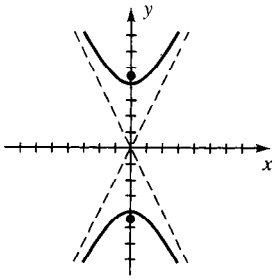
3 $V(0, \pm 3)$; $F(0, \pm\sqrt{13})$; $y = \pm\frac{3}{2}x$



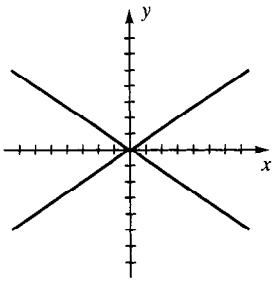
5 $V(\pm 1, 0)$; $F(\pm 5, 0)$; $y = \pm\sqrt{24}x$



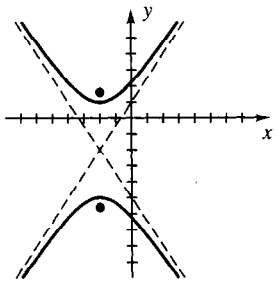
7 $V(0, \pm 4)$; $F(0, \pm 2\sqrt{5})$; $y = \pm 2x$



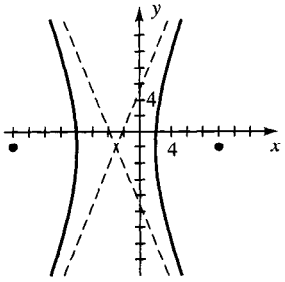
9 $V\left(\pm\frac{1}{4}, 0\right)$; $F\left(\pm\frac{1}{12}\sqrt{13}, 0\right)$; $y = \pm\frac{2}{3}x$



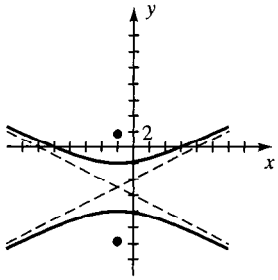
11 $V(-2, -2 \pm 3)$; $F(-2, -2 \pm \sqrt{13})$; $(y + 2) = \pm\frac{3}{2}(x + 2)$



13 $V(-3 \pm 5, -2)$; $F(-3 \pm 13, -2)$; $(y + 2) = \pm\frac{12}{5}(x + 3)$



15 $V(-2, -5 \pm 3)$; $F(-2, -5 \pm 3\sqrt{5})$; $(y + 5) = \pm\frac{1}{2}(x + 2)$

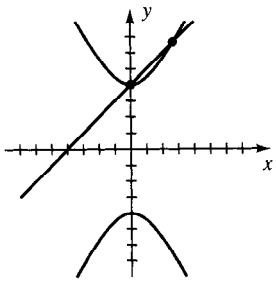


17 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ **19** $(y + 3)^2 - \frac{(x + 2)^2}{3} = 1$

21 $y^2 - \frac{x^2}{15} = 1$ **23** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ **25** $\frac{y^2}{21} - \frac{x^2}{4} = 1$

27 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$ **29** $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{100} = 1$ **31** $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{49} = 1$

33 $(0, 4)$, $\left(\frac{8}{3}, \frac{20}{3}\right)$



35 $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$ **37** $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$

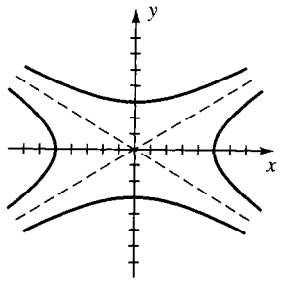
39 Rama derecha de $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$

41 Rama superior de $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{49} = 1$

43 Mitades inferiores de las ramas de $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{81} = 1$

45 Mitades izquierdas de las ramas de $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{16} = 1$

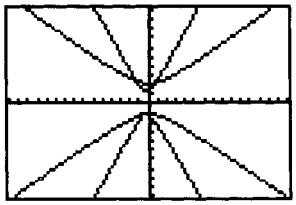
47 Las gráficas tienen las mismas asíntotas.



49 $x = \sqrt{9 + 4y^2}$

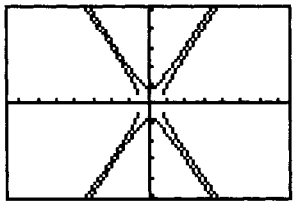
51 Si se introduce un sistema coordenado semejante al del Ejemplo. 6, entonces las coordenadas del barco son $\left(\frac{80}{3}\sqrt{34}, 100\right) \approx (155.5, 100)$.

53 (0.741, 2.206)



[– 15, 15] por [– 10, 10]

55 Ninguno

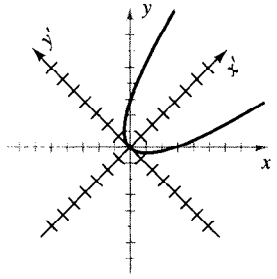


[– 15, 15] por [– 10, 10]

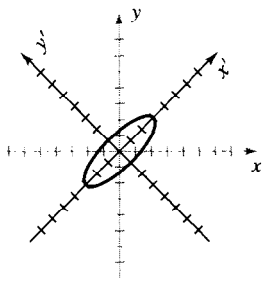
EJERCICIOS 11.4

Ejercicios. 1–13: La respuesta en la parte (a) expresa el valor de $B^2 - 4AC$ en el teorema de identificación.

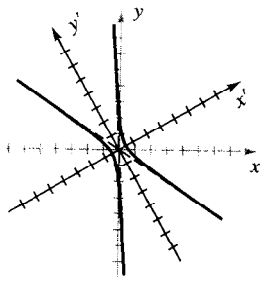
1 **(a)** 0, parábola
(b) $(y')^2 = 2(x')$



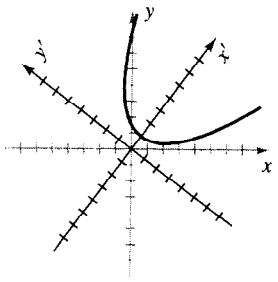
3 **(a)** -36, elipse
(b) $\frac{(x')^2}{9} + (y')^2 = 1$



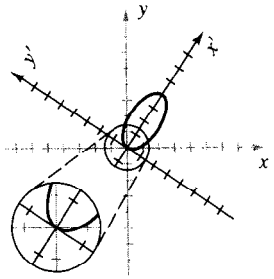
5 **(a)** 256, hipérbola
(b) $\frac{(x')^2}{\frac{1}{4}} - (y')^2 = 1$



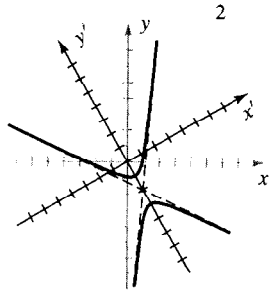
7 **(a)** 0, parábola
(b) $(y')^2 = 4(x' - 1)$



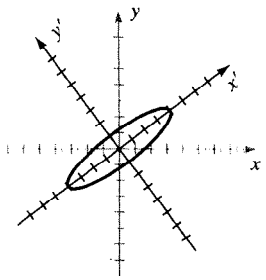
9 **(a)** -2704, elipse
(b) $\frac{(x' - 2)^2}{4} + (y')^2 = 1$



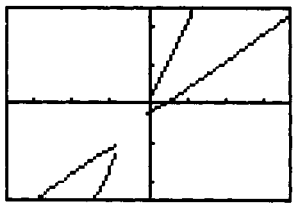
11 **(a)** 128, hipérbola
(b) $(y' + 2)^2 - \frac{(x')^2}{\frac{1}{2}} = 1$



13 **(a)** -1600, elipse
(b) $\frac{(x')^2}{16} + (y')^2 = 1$



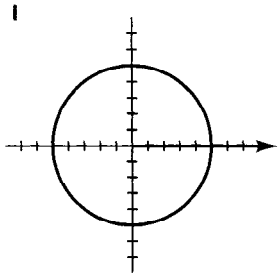
15



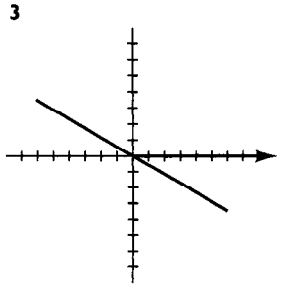
[– 18, 18] por [– 12, 12]

EJERCICIOS 11.5

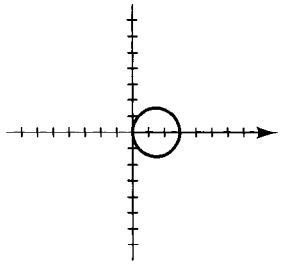
1



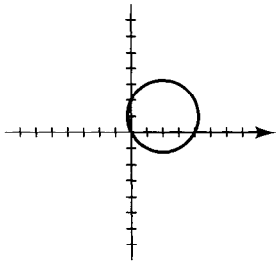
3



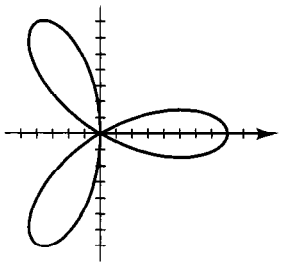
5



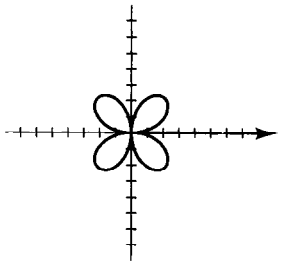
7



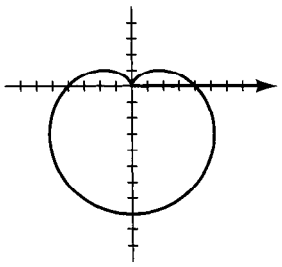
21



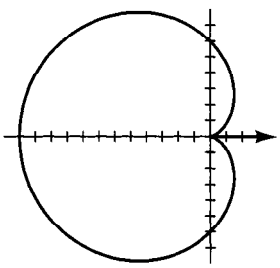
23



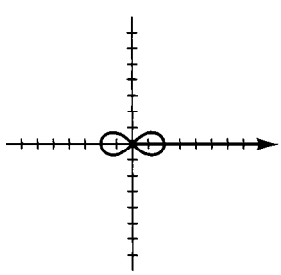
9



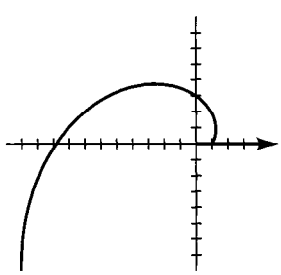
11



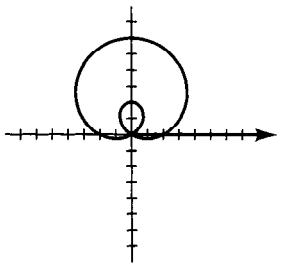
25



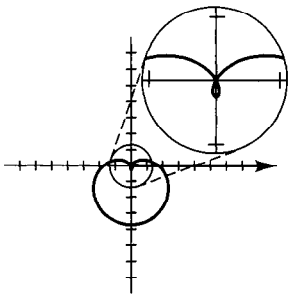
27



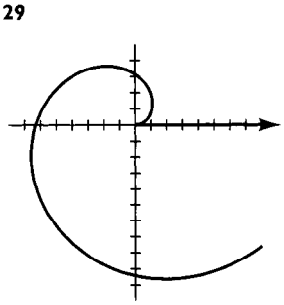
13



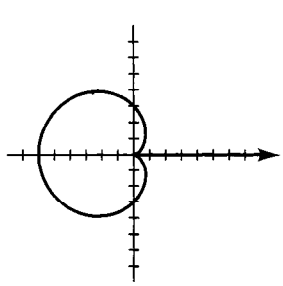
15



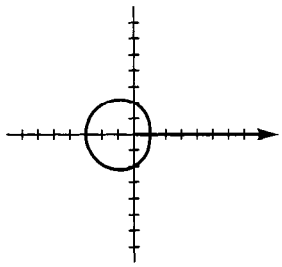
29



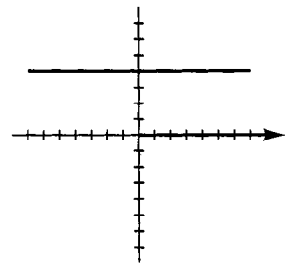
31



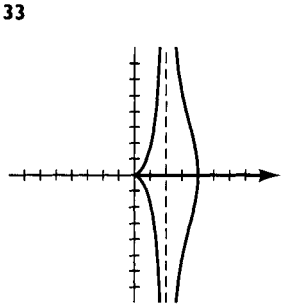
17



19



33



35 (a) $\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$ (b) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

37 (a) $(-4, -4\sqrt{3})$ (b) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$

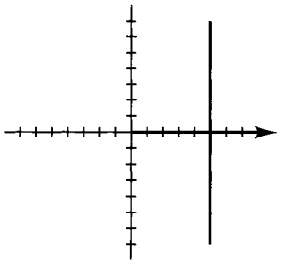
39 $\left(\frac{24}{5}, \frac{18}{5}\right)$ **41** (a) $\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ (b) $\left(4, \frac{7\pi}{6}\right)$

43 (a) $\left(14, \frac{5\pi}{3}\right)$ (b) $\left(5\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ **45** (a), (c), (e)

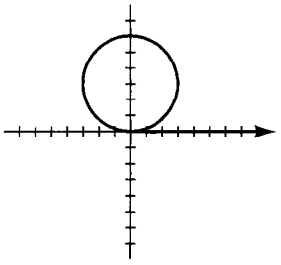
47 $r = -3 \sec \theta$ **49** $r = 4$ **51** $\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

53 $r^2 = -4 \sec 2\theta$ **55** $r = 2 \cos \theta$

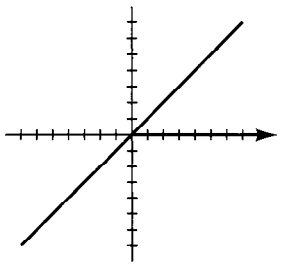
57 $x = 5$



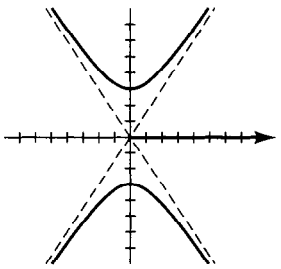
59 $x^2 + (y - 3)^2 = 9$



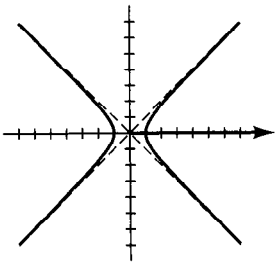
61 $y = x$



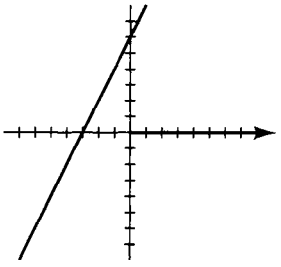
63 $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$



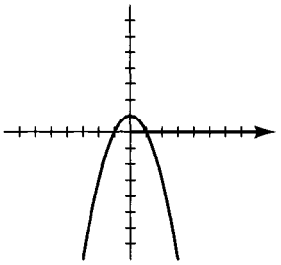
65 $x^2 - y^2 = 1$



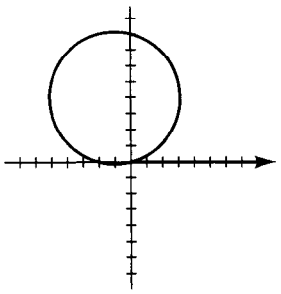
67 $y - 2x = 6$



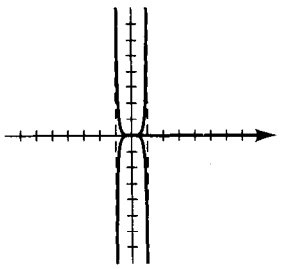
69 $y = -x^2 + 1$



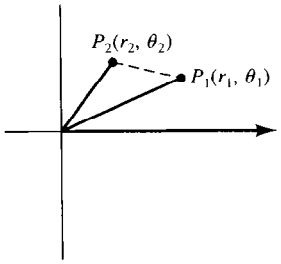
71 $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 17$



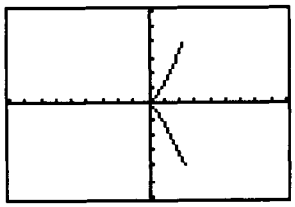
73 $y^2 = \frac{x^4}{1 - x^2}$



75 Sean $P_1(r_1, \theta_1)$ y $P_2(r_2, \theta_2)$ puntos en un plano $r\theta$
Sean $a = r_1$, $b = r_2$, $c = d(P_1, P_2)$, y $\gamma = \theta_2 - \theta_1$.
Sustituyendo en la ley de los cosenos,
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$, se llega a la fórmula.

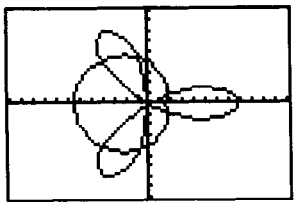


77 Simétrica con respecto al eje polar



[– 9, 9] por [– 6, 6]

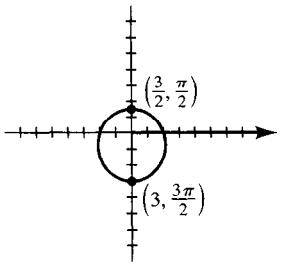
79 Las coordenadas polares aproximadas son $(1.75, \pm 0.45)$, $(4.49, \pm 1.77)$ y $(5.76, \pm 2.35)$.



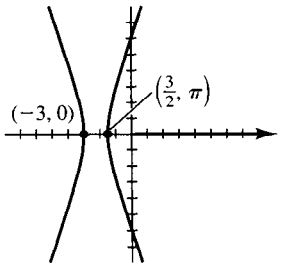
[– 12, 12] por [– 9, 9]

EJERCICIOS 11.6

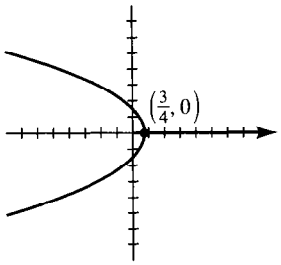
1 $\frac{1}{3}$, elipse



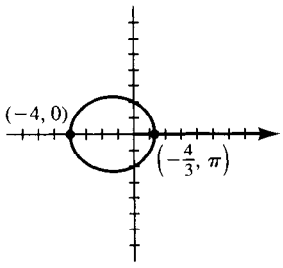
3 3, hipérbola



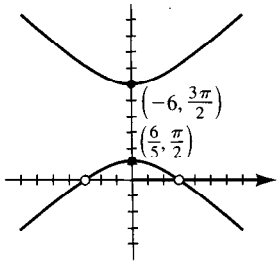
5 1, parábola



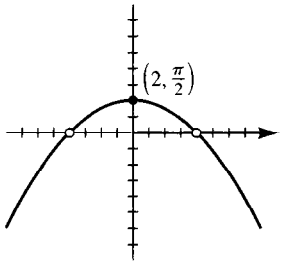
7 $\frac{1}{2}$, elipse



9 $\frac{3}{2}$, hipérbola



11 1, parábola



13 $9x^2 + 8y^2 + 12y - 36 = 0$

15 $8x^2 - y^2 + 36x + 36 = 0$

17 $4y^2 + 12x - 9 = 0$ **19** $3x^2 + 4y^2 + 8x - 16 = 0$

21 $4x^2 - 5y^2 + 36y - 36 = 0; x \neq \pm 3$

23 $x^2 + 8y - 16 = 0; x \neq \pm 4$ **25** $r = \dfrac{2}{3 + \cos\theta}$

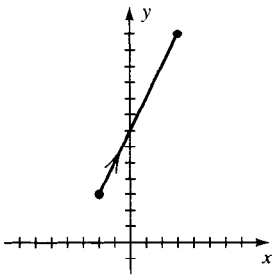
27 $r = \dfrac{12}{3 - 4\cos\theta}$ **29** $r = \dfrac{2}{1 - \operatorname{sen}\theta}$

31 $r = \dfrac{8}{5 + 2\operatorname{sen}\theta}$ **33** $r = \dfrac{8}{1 + \operatorname{sen}\theta}$

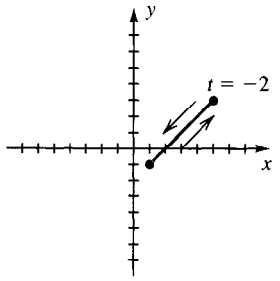
35 **(a)** $\frac{3}{4}$ **(b)** $r = \dfrac{7}{4 - 3\operatorname{sen}\theta}$

EJERCICIOS 11.7

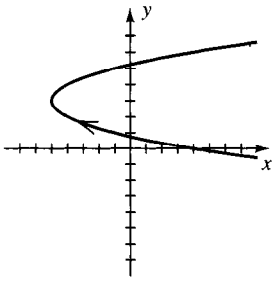
1 $y = 2x + 7$



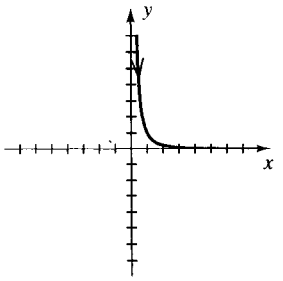
3 $y = x - 2$



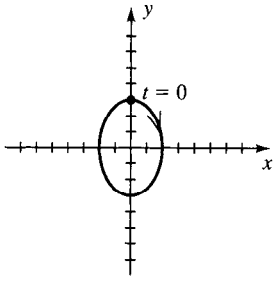
5 $(y - 3)^2 = x + 5$



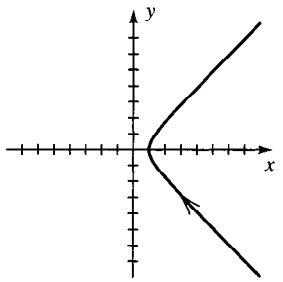
7 $y = 1/x^2$



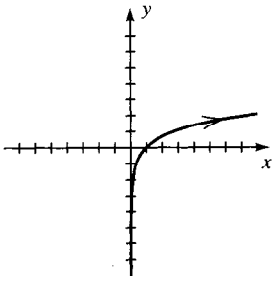
9 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$



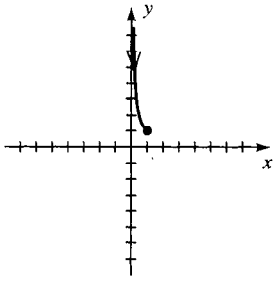
11 $x^2 - y^2 = 1$



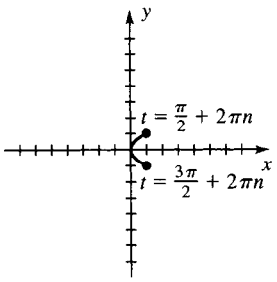
13 $y = \ln x$



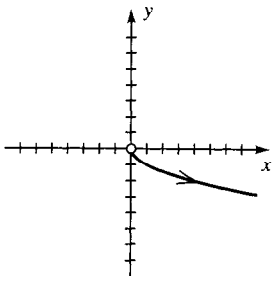
15 $y = 1/x$



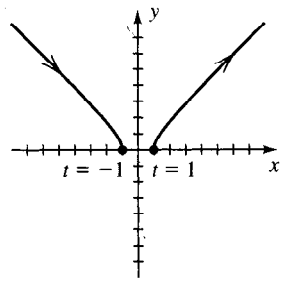
C_3



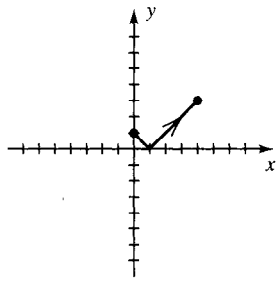
C_4



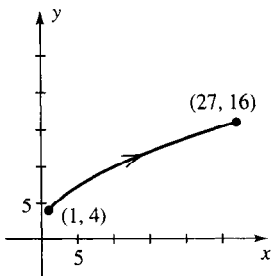
17 $y = \sqrt{x^2 - 1}$



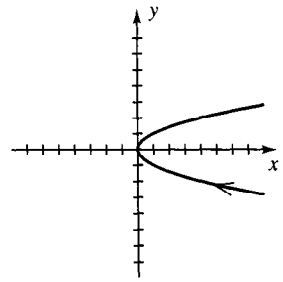
19 $y = |x - 1|$



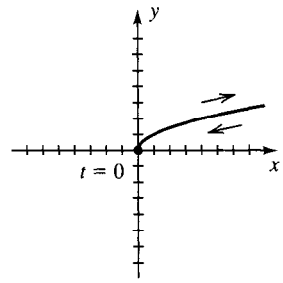
21 $y = (x^{1/3} + 1)^2$



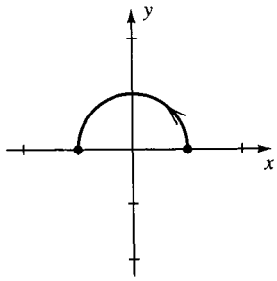
23 C_1



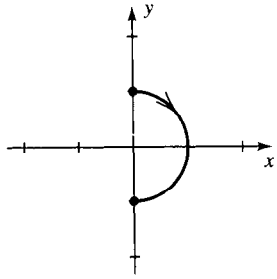
C_2



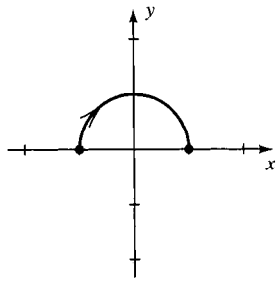
25 **(a)**



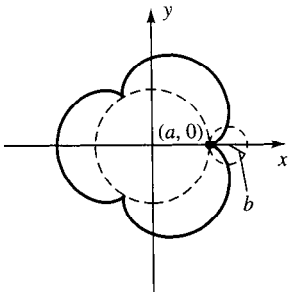
(b)



(c)

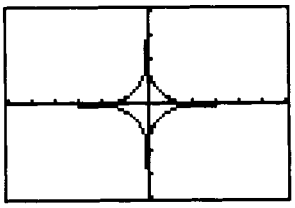


31 $x = 4b \cos t - b \cos 4t$,
$y = 4b \operatorname{sen} t - b \operatorname{sen} 4t$



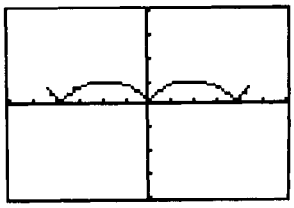
33 **(a)** La figura es una elipse con centro (0, 0) y ejes de longitudes $2a$ y $2b$

35



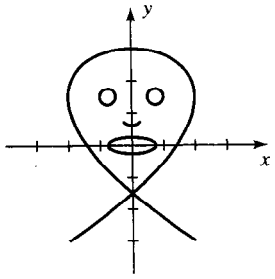
[– 6, 6] por [– 4, 4]

37

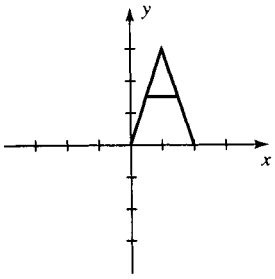


[– 30, 30] por [– 20, 20]

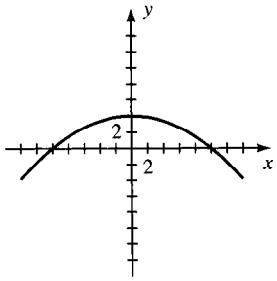
39 Una careta, con boca, nariz y ojos



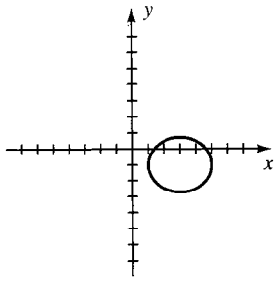
41 La letra A



7 $V(0, 4)$; $F\left(0, -\frac{9}{4}\right)$

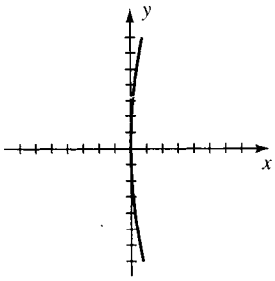


8 $V(3 \pm 2, -1)$; $F(3 \pm 1, -1)$

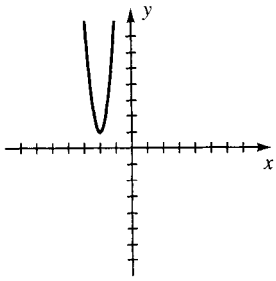


EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 11

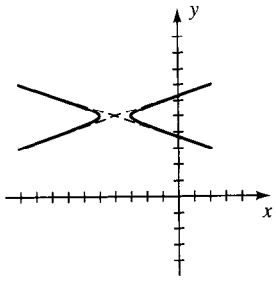
1 $V(0, 0)$; $F(16, 0)$



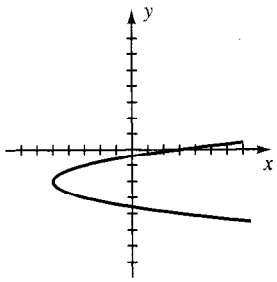
2 $V(-2, 1)$; $F\left(-2, \frac{33}{32}\right)$



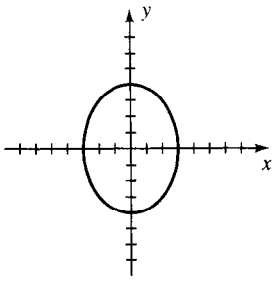
9 $V(-4 \pm 1, 5)$; $F\left(-4 \pm \frac{1}{3}\sqrt{10}, 5\right)$



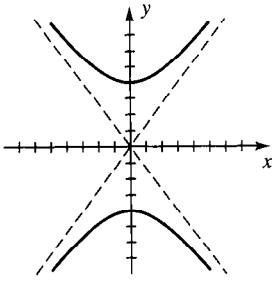
10 $V(-5, -2)$; $F\left(-\frac{39}{8}, -2\right)$



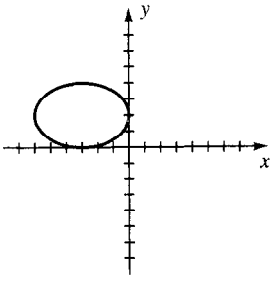
3 $V(0, \pm 4)$; $F(0, \pm\sqrt{7})$



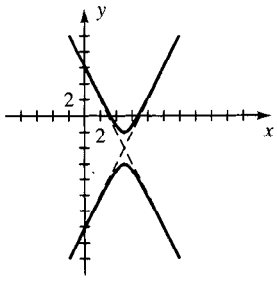
4 $V(0, \pm 4)$; $F(0, \pm 5)$



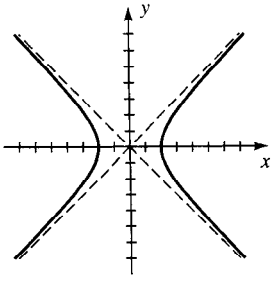
11 $V(-3 \pm 3, 2)$; $F(-3 \pm \sqrt{5}, 2)$



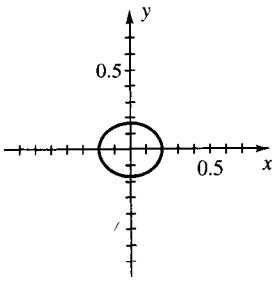
12 $V(5, -4 \pm 2)$; $F(5, -4 \pm \sqrt{5})$



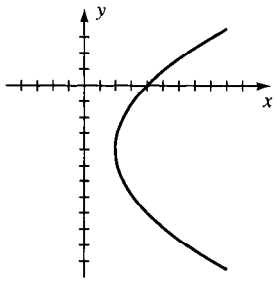
5 $V(\pm 2, 0)$; $F(\pm 2\sqrt{2}, 0)$



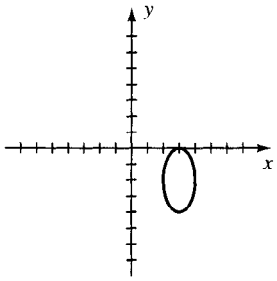
6 $V\left(\pm\frac{1}{5}, 0\right)$; $F\left(\pm\frac{1}{30}\sqrt{11}, 0\right)$



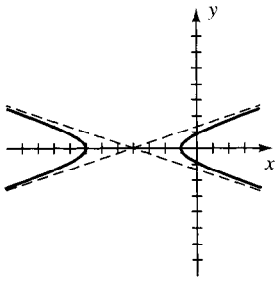
13 $V(2, -4)$; $F(4, -4)$



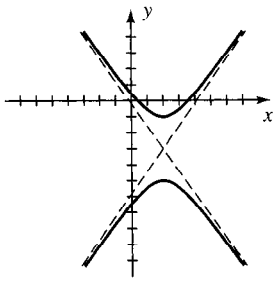
14 $V(3, -2 \pm 2)$; $F(3, -2 \pm \sqrt{3})$



15 $V(-4 \pm 3, 0)$; $F(-4 \pm \sqrt{10}, 0)$



16 $V(2, -3 \pm 2)$; $F(2, -3 \pm \sqrt{6})$



17 $y = 2(x + 7)^2 - 18$ **18** $y = -3(x + 4)^2 + 147$

19 $\frac{y^2}{49} - \frac{x^2}{9} = 1$ **20** $y^2 = -16x$ **21** $x^2 = -40y$

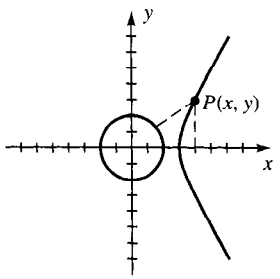
22 $x = 5y^2$ **23** $\frac{x^2}{75} + \frac{y^2}{100} = 1$ **24** $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{75} = 1$

25 $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{\frac{4}{9}} = 1$ **26** $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ **27** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{45} = 1$

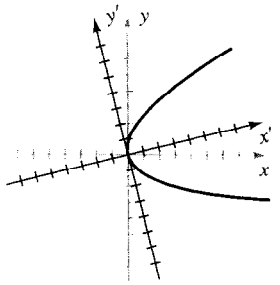
28 $\frac{x^2}{256} + \frac{y^2}{112} = 1$ **29** **(a)** $-\frac{7}{2}$ **(b)** Hipérbola

30 $A = \frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2}$ **31** $x^2 + (y - 2)^2 = 4$

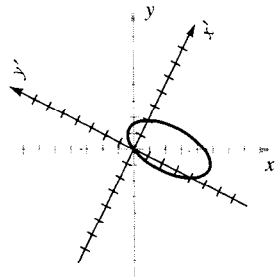
32 $\frac{(x - 2)^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1$, $x \geq 3$, o bien, $x = 2 + \sqrt{1 + \frac{y^2}{3}}$



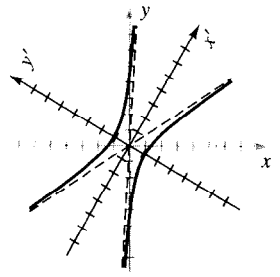
33 $(y')^2 = 3(x')$



34 $\frac{(x' - 1)^2}{2} + \frac{(y' + 2)^2}{8} = 1$



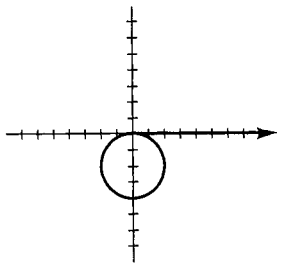
35 $\frac{(y')^2}{\frac{5}{4}} - \frac{(x')^2}{5} = 1$



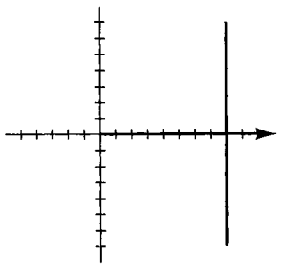
36 **(a)** -23, elipse **(b)** 16, hipérbola **(c)** 0, parábola

37 $\left(\frac{5}{2}\sqrt{2}, -\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)$ **38** $\left(4, \frac{11\pi}{6}\right)$

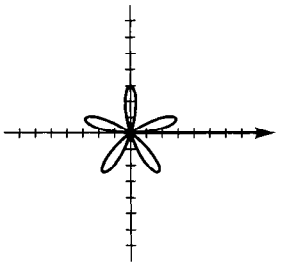
39



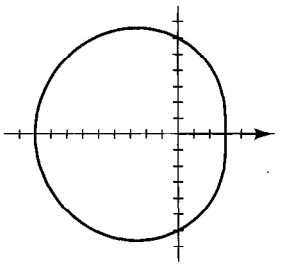
40



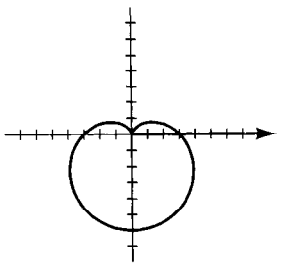
41



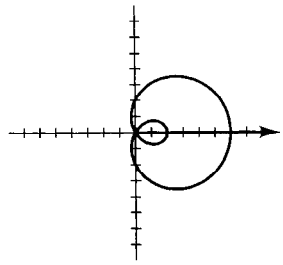
42



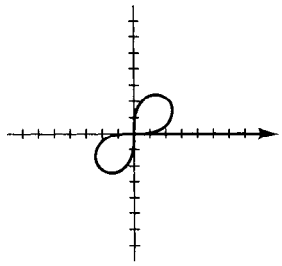
43



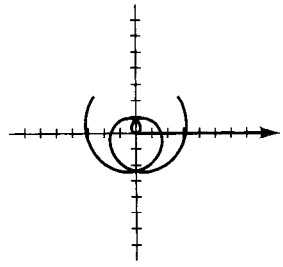
44



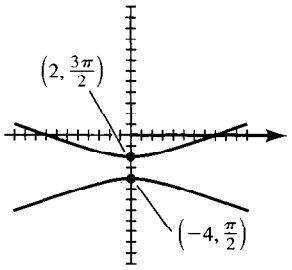
45



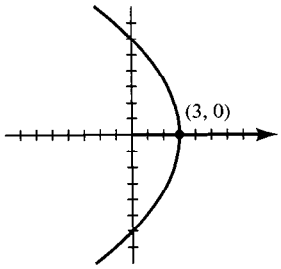
46



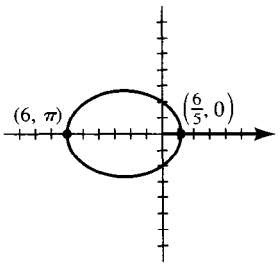
47



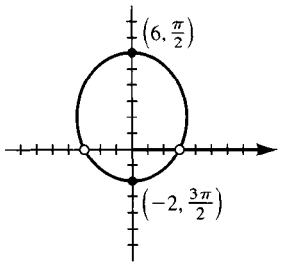
48



49 $\frac{2}{3}$, elipse



50 $\frac{1}{2}$, elipse



51 $r = 4 \cot\theta \csc\theta$ **52** $r = 3\cos\theta - 4\operatorname{sen}\theta$

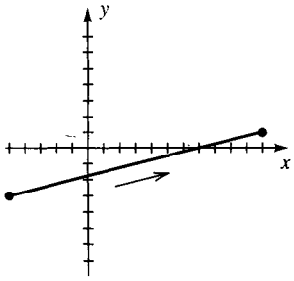
53 $r(2\cos\theta - 3\operatorname{sen}\theta) = 8$ **54** $\theta = \frac{\pi}{4}$

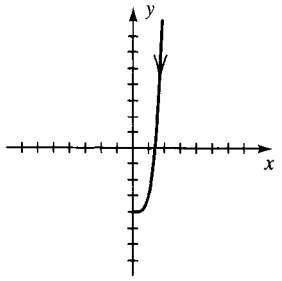
55 $x^3 + xy^2 = y$ **56** $x^2 + y^2 = 2x + 3y$

57 $(x^2 + y^2)^2 = 8xy$ **58** $y = (\tan\sqrt{3})\,x$

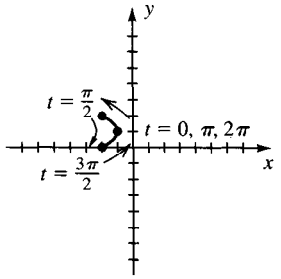
59 $8x^2 + 9y^2 + 10x - 25 = 0$ **60** $y^2 = 6 + x$

61 $x = 4y + 7$ **62** $y = x^4 - 4$



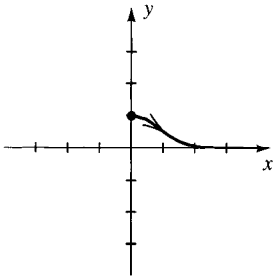


63 (a)



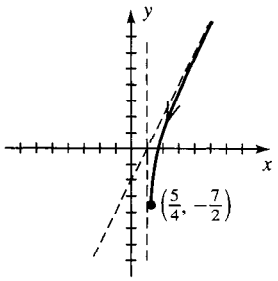
(b) $(y - 1)^2 = -(x + 1)$

64 (a)



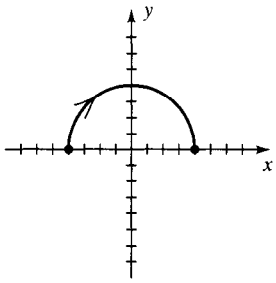
(b) $y = 2^{-x^2}$

65 (a)

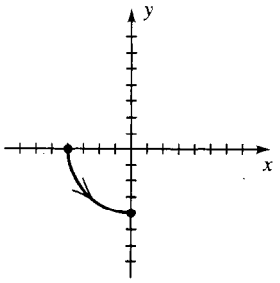


(b) $y = \dfrac{2x^2 - 4x + 1}{x - 1}$

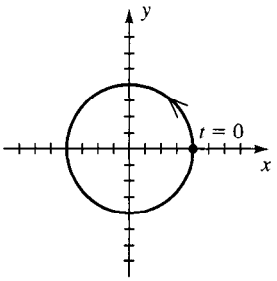
66 C_1



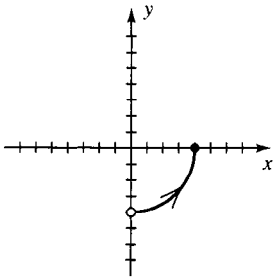
C_2



C_3



C_4



INDICE

— A —

Abscisa, 118
  en el origen, 126
Algoritmo de la división, 24
Ampliación(es)
  de gráficas, 168-170
  horizontales de gráficas, 169
  vertical de gráficas, 168
Amplitud
  de un número complejo, 488
  de una función trigonométrica, 374
  del movimiento armónico, 396-397
Ángulo(s)
  agudo, 322
  central, 322
  complementario(s), 322
  coterminal(es), 320-321
  cuadrantal, 320
  de depresión, 342
  de elevación, 342
  de referencia, 354
  definición de, 320
  entre vectores, 509-510
  funciones trigonométricas de, 329, 330, 350
  lado inicial de, 320
  lado terminal de, 320
  medida en grados de, 320
  medida en radianes de, 322
  negativo, 320
  obtuso, 322
  posición normal de, 320
  positivo, 320
  recto, 321
  subtendido, 322
  suplementario(s), 322
  vértice de, 320
Arco circular, 325
Área
  de un sector circular, 325
  de un triángulo, 481
Argumento de un número complejo, 487-488
Arquímedes, espiral de, 712
Asíntota(s)
  de una hipérbola, 694
  horizontal(es), 251
  oblícua(s), 257, 258
  vertical(es), 250

— B —

Base
  de una función exponencial, 266
  logarítmica, 285
  para notación exponencial, 16
Binomio, 28, 635
Biunívoca,
  correspondencia, 8
  función, 195, 267, 287

— C —

Caracol (o limazón), 711
Característica de un logaritmo, 737
Cardioide, 711
Caso ambiguo, 471
Catenaria, 280
Centro
  de una circunferencia, 129
  de una elipse, 681
  de una hipérbola, 693
Cero, el número, 8
Cerrado, definición de, 5
Ciclo, 363
Cicloide, 730
Cifras significativas, 13, 341
Circunferencia
  ecuación normal de la, 129
  unitaria, 129
Cociente
  de funciones, 186
  de números complejos, 489
  de números reales, 8
  en el proceso de la división, 224
Coeficiente, 16
  binomial, 638
  de un término en un desarrollo binomial, 636, 638
  principal, 28
Cofactor, 588
Cofunción, 428
Columna de una matriz, 541
Combinación, 651
  lineal, 502-503
Complemento de un conjunto, 659
Completar el cuadrado, 72
Componente
  de **a** a lo largo de **b**, 511-512
  horizontal, 502
  vertical, 502
Componentes de un vector, 498
Compresión de gráficas, 167-68
Cónica degenerada, 670
Conjugado
  de un número complejo, 83
  de una ecuación, 42, 43
Conjunto(s), 26-27
  complemento de, 659
  correspondencia entre, 151
  disjuntos (o ajenos), 658
  intersección de, 102
  unión de, 101
Constante, 27
  de proporcionalidad, 203
  de variación, 203
Contradominio de una función, 152
Coordenada(s), 8
  polares, 709
  rectangulares, relación con las polares, 714
  x, 126
  y, 118
Correspondencia
  biunívoca, 8
  entre conjuntos, 151
Cotas para raíces (o ceros), 238
Cramer regla de, 597
Crecimiento
  bacteriano, 270
  función de, 267
Cuadrantes, 118
Curva, 725
  cerrada simple, 725
  de descenso mínimo, 731
  de Gompertz, para el crecimiento 281
  de probabilidad normal, 269
  ecuaciones paramétricas para, 726
  extremos de una, 725
  gráfica de, 725
  orientación de, 727
  parametrizada, 726
  plana, 725

— D —

De Moivre,teorema de, 492
Decrecimiento exponencial, 267

Definición
de adición de vectores, 499
de ángulo de referencia, 354
de asíntota horizontal, 251
de componente de **a** a lo largo de **b**, 512
de conjugado de un número complejo, 84
de curva plana, 725
de determinante de una matriz, 589, 590
de ecuaciones paramétricas, 725
de elipse, 681
de evento, 655
de excentricidad, 687
de exponentes racionales, 23
de función, 152, 160
de función biunívoca, 195
de función compuesta, 188
de función coseno inverso, 453
de función cuadrática, 176
de función exponencial natural, 278
de función inversa, 196
de función lineal, 157
de función periódica, 361
de función seno inverso, 451
de función tangente inversa, 455
de funciones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo, 329
de gráfica de una función, 154
de **i** y **j**, 502
de igualdad y la adición de matrices, 575
de la asíntota vertical, 250
de la distancia entre puntos en un eje coordenado, 11
de la hipérbola, 693
de la n-ésima raíz de un número, 21
de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo, 350
de las funciones trigonométricas de números reales, 354
de logaritmo, 285
de logaritmo común, 290
de logaritmo natural, 290
de magnitud de un vector, 498
de matriz, 542
de medida en radianes, 322
de menores y cofactores, 588
de movimiento armónico simple, 396
de múltiplo escalar de un vector, 499
de parábola, 670
de pendiente de una recta, 136
de permutación, 646
de probabilidad de un evento, 656
de producto de dos matrices, 578
de producto de un número real por una matriz, 577
de producto escalar (o de punto), 508
de resta de vectores, 501
de sucesión aritmética, 614
de sucesión geométrica, 620-621
de sucesión infinita, 606
de trabajo (en física), 515
de una combinación, 651
de valor absoluto, 10
de vector nulo, 500
de vectores paralelos y ortogonales, 510
del factorial n, 637
del valor absoluto de un número complejo, 487
directamente proporcional, 203
recurrente (o recursiva), 607
Definida parte por parte, función, 170
Denominador, 7
mínimo común, 40
racionalización, 22
Desarrollo de un determinante, 590
Descartes, regla de, para los signos, 236
Descomposición en fracciones parciales, 555
Desigualdad(es), 9, 96
equivalentes, 96, 560
gráficas de, 96-97
lineales, 562
propiedades de las, 97, 110
sistema de, 562
soluciones de, 96-97, 560, 562
Desintegración radiactiva, 270
Desplazamiento(s), 497
de fase, 378
de gráficas, 166-167
horizontales de gráficas, 167
verticales de gráficas, 166
Determinante, 587
Diagrama de árbol, 643
Diferencia
común, 614
de cuadrados, 33
de cubos, 33
de fase, 399
de matrices, 577
de números complejos, 83
de números reales, 7, 8
Dina, 513
Dirección, 343
Directriz
de una cónica, 719
de una parábola, 670
Discriminante, 74, 707
Disposiciones (o arreglos), sin repeticiones, 644-645
Distancia,
en un eje coordenado, 11
fórmula de la, 119
División
de números reales, 7-8
de polinomios, 224
larga de polinomios, 223
sintética, 226
Divisor, 4
Dominio
de una expresión algebraica, 27
de una función compuesta, 188
de una función, 152
de una variable, 27
implicado, 153
implícito, 153

— E —

e, el número, 278
Ecuación(es), 52
algebraica, 53
condicional, 53
cuadrática, 70
de rectas, 141
de tipo cuadrático, 91
en x y y, 12
en x, 52
equivalente(s), 52
exponencial, 267-268
gráfica de una, 125
homogéneas, sistema de, 549
identidad, 53
lineal, 53, 141
logarítmica, 287
normal
de una circunferencia, 129
de una elipse, 683
de una hipérbola, 695-696
de una parábola, 178, 672
paramétricas, 726
polar, 709
raíz de una, 52
sistema de, 524
solución de, 52
trigonométrica, 414
Eje(s)
conjugado(s), 694
conjugado, de una hipérbola, 694-695
coordenado(s), 8, 118
de una elipse, 682
de una parábola, 126, 670-671, 694
imaginario, 486-487
mayor de una elipse, 682
menor de una elipse, 682
polar, 709-710
real, 486, 487
rotación de, 703
transverso de una hipérbola, 694
traslación de, 673
x, 118
y, 118
Elemento
de un conjunto, 26
diagonales de una matriz, 542
Eliminación de factores comunes, 39
Elipse, 681
centro de la, 681
con centro en el origen, 683
ecuaciones para semielipses, 684
ecuaciones polares, 719

eje mayor de la, 682
eje menorde la, 682
excentricidad, 687
focos, 681
propiedad de reflexión, 689
vértices de la, 682
Elipsoide, 689
Enteros
números, 4
positivos, 4
Erg, 514
Escalar, 596
Espacio muestral, 655
Evento(s), 655
independiente, 660
mutuamente excluyentes, 658
Excentricidad, 687, 719
Experimento, 655
Exponente(s), 16
cero, 16
irracional, 266
leyes de los, 17, 19
negativo, 16
racional, 23
Expresión
algebraica, 27
fraccionaria, 38
racional, 38
trigonométrica, 410
Extremo,valor, 217

— F —

Factor, 4
de amortiguamiento, 394
teorema del, 225
Factores no triviales, 32
Factorización, 32
fórmulas para, 33
método de, 70
por agrupamiento, 36
Foco(s)
de un paraboloide, 676
de una cónica, 719
de una elipse, 681
de una hipérbola, 693
de una parábola, 670
Forma
anidada, 228
de función compuesta, 191
de punto y pendiente, 139
escalonada, 544, 593
exponencial, 285
general de la ecuación de una recta, 141
logarítmica, 285
reducida de escalonada, 546
simplificada de la ecuación de una recta, 140, 148-149
trigonométrica de un número complejo, 88
Fórmula(s),
cuadrática, 73
de adición, 427, 429
de ángulo múltiple, 435
de ángulos dobles, 436
de cambio de base, 305
de cofunción, 428
de producto, 31
de reducción, 431
de sustracción, 426, 429
del interés compuesto, 271-272
del punto medio, 121
para la mitad de un ángulo, 438, 440
para pasar de producto a suma, 445
Fracción, 7
compleja, 42
decimal, 737
parcial, 555
Frecuencia, en el movimiento armónico, 397
Fuerza, 513
constante, 513
resultante, 497
Función(es)
algebraica, 187
arco coseno, 454
arco seno, 451
arco tangente, 455
biunívoca, 204-5
cociente de, 186
compuesta, 188
constante, 156
contradominio de, 152
cosecante, 329
gráfica de, 367
coseno, 329
gráfica de, 362
hiperbólico, 280
inverso, 453
cotangente, 329
gráfica de, 368
creciente, 156
cuadrática, 176
de crecimiento, 267
de Gompertz, para el crecimiento 281
decreciente, 156
definición alterna de, 160
definición de, 152
definida en un conjunto, 153
definida parte por parte, 170
diferencia de, 186
dominio de, 152
entero máximo, 171
existencia de, en un número, 152
exponencial natural, 278
exponencial, 267
extremo de, 217
gráfica de una, 154
igualdad de, 152
impar, 164-65
indefinida, 153
inversa, 196
lineal, 157
logarítmica, 285
logarítmica natural, 290
logística, 276
máximo entero, 171
objetiva, 568
par, 164-65
periódica, 377
periodo de una, 361
polinomial, 187
producto de, 186
racional, 249
raíz (o cero) de, 155
secante, 329
gráfica de la, 367
seno, 329
gráfica de la, 362
seno inverso, 451
suma de, 186
tangente, 329
gráfica de la, 366
inversa, 455
trascentente, 187
trigonométrica(s), 329
amplitud de, 374
como razones (o cocientes), 329-330
de ángulos, 350
de números reales, 354
dominio de, 351
en términos de un triángulo rectángulo, 330
fórmulas de adición, 427, 429
fórmulas de ángulos múltiples para, 436
fórmulas de cofunción, 428
fórmulas de la mitad de un ángulo para, 438, 440
fórmulas de sustracción para, 426, 429
fórmulas del duplo de un ángulo, 436
fórmulas para pasar de producto a suma para, 445
fórmulas para pasar de suma a producto, 446
gráficas de, 378-384
inversas, 450
periodo de, 361
signos de las, 353
valores especiales de las, 332
inversa, 450
valor absoluto, 165
valor de, 152
valor de prueba para, 218
valor máximo de una, 178, 181
valor mínimo de una, 178, 181

— G —

Galerías de susurro, 689
Gompertz, función de, 276

Grado
como unidad de medida de ángulos, 320
de un polinomio, 28
relación con el radián, 323
Gráfica(s)
ampliaciones (o expansiones) horizontales, 169
ampliaciones (o expansiones) verticales de, 168
de funciones trigonométricas, 362-368
de un conjunto de números reales, 96
de un conjunto de pares ordenados, 125
de un intervalo, 97
de un sistema de desigualdades, 562
de una desigualdad, 97
de una ecuación, 125
de una ecuación polar, 709
de una función, 154
desplazamientos (o corrimientos) horizontales, 167
desplazamientos (o corrimientos) verticales de, 166
hueco en una, 259
puntos máximos o mínimos de, 217
reducciónes (o compresiones) horizontales, 170
reducciones (o compresiones) verticales, 168
reflexión de, 169
Guías (o lineamientos)
para calcular un elemento en un producto de matrices, 577-578
para determinar funciones inversas, 198
para determinar la forma escalonada de una matriz, 545
para el método de sustitución en el caso de dos ecuaciones en dos variables, 525
para el trazo de la gráfica de una función racional, 254
para la división sintética, 226
para realizar descomposiciones en fracciones parciales, 555
para resolver problemas de aplicación, 60
para resolver problemas de variación, 204-205
para resolver un problema de programación lineal, 569
para resolver una ecuación que tiene expresiones racionales, 55
para trazar la gráfica de una desigualdad en x y y, 561

— H —

Herón,fórmula de, 482
Hipérbola, 693
asíntotasa, 694
centro, 693
ecuación normal de la, 695
ecuaciones polares de la, 719
eje transverso de la, 694
ejes conjugados, 694
focos, 693
propiedad de reflexión de la, 701
ramas, 695
vértices de la, 694
Hipotenusa, 330
Hipótesis, inducción, 630
Horner,método de, 228
Hueco, en una gráfica, 259

— I —

i, número complejo, 82
i, vector, 502
Identidad(es),
aditiva, 5
cotangente, 334
de la tangente, 334-335
ecuación como, 53
fundamentales, 334
multiplicativa, 6
para la mitad de un ángulo, 437
pitagóricas, 334
recíprocas, 330
trigonométricas, 334, 410
Igualdad
de conjuntos, 26
de funciones, 152
de matrices, 575
de números complejos, 82
de números reales, 4
de polinomios, 28
de sucesiones, 606-607
de vectores, 496-497
Impar, función, 164
Índice
de sumatoria, 608
de un radical, 20
Inducción
hipótesis de, 630
matemática, 629
Infinito símbolo, (∞), 97, 251
Interés
capitalizado continuamente, 277
compuesto, 271
compuesto continuamente, 277
fórmula para, 278-79
periodo de, 276
simple, 61
Interpolación lineal, 741
Intersección (de conjuntos), 102
Intervalo(s), 97
abierto, 96
cerrado, 96
infinito, 97
semiabierto, 96
Invariante, definición de, 707
Inversa (o)
aditiva, 5
de una matriz, 582
neutro multiplicativo, 6
Inversamente proporcional, definición de, 203

— J —

j, vector, 501
Joule (unidad), 514

— K —

Kepler, Johannes, 688

— L —

Lado
adyacente, 330
inicial de un ángulo, 320
opuesto, 330
terminal de un ángulo, 320
Ley(es)
de los cosenos, 478, 479
de los exponentes, 17, 19
de los logaritmos, 298
de los radicales, 20
de los senos, 468, 469
de los signos, 9
de tricotomía, 9
del crecimiento exponencial, 267
Limazón, 711
Lissajous, curvas de, 729
Litothripter, 689
Localización de puntos, 118
Logaritmo(s)
base de, 285
cambio de base de, 305
cambio especial de base de, 306
característica de un, 737
comunes (o decimales), 290
definición de, 285
empleo de tablas de, 737
forma normal de un, 737
leyes de los, 308
mantisa de un, 737
naturales, 4, 290
propiedades de los, 286
Longitud
de un arco circular, 325
de un segmento de recta, 11

— M —

Magnitud de un vector, 496, 498
Mantisa (de un logaritmo), 737
Matriz (matrices), 541
adición de, 575
aumentada, 541
columna de una, 579-580
columnas, 542

cuadrada, 542
de coeficientes, 540-541
de identidad, 582
de orden n, 542
de un sistema de ecuaciones, 541
determinante de una, 587
diferencia de, 577
elemento de una, 542
elementos de la diagonal principal, 542
equivalente(s), 543
forma de escalonada de una, 544
forma escalonada reducida de una, 546
idéntica, 582-583
igualdad de, 575
inversa aditiva de una, 576
inversa de una, 582-583
nula (o cero), 576
producto de, 577-578
renglón, 580
renglón equivalente, 543
renglones de una, 561
sustracción de, 577
tamaño de una, 542
transformaciones elementales en los renglones, 543
Mayor que o igual a, signo ($\geq$), 10
Mayor que, signo ($>$), 9
Media(s)
aritmética(s), 616
geométrica(s), 623
Mediatriz, 121
Menor (de un determinante), 588
Menor que o igual a ($\leq$), 10
Menor que, signo, ($<$), 9
Menos infinito(símbolo) ($-\infty$), 250
Método
de compleción del cuadrado, 72
de eliminación, 534
de factorización, 70
de prueba y error, 34
de saldo doble declinante, 628
de sustitución, 525
Mínimo común denominador, 40
Minuto, 322
Módulo de un número complejo, 488
Monomio, 28
Movimiento armónico simple, 396
Multiplicidad de una raíz, 234
Múltiplo escalar de un vector, 497, 499

— N —

n, factorial 637
n-ésima(s)
de la unidad, 495
potencia, 16
raíz (raíces), 19, 492
raíz principal, 19
suma parcial, 609
n-ésimo término
de una serie, 625
de una sucesión, 606
de una sucesión aritmética, 614
de una sucesión geométrica, 621
Neutro multiplicativo, 6
de un número complejo, 84-85
de un número real, 6
Newton, Issac 514
ley del enfriamiento, 292
Notación
científica de los números, 12
con doble subíndice, 542
de sumatoria, 608-609
exponencial, 16
factorial, 637
Numerador, 7
Número(s)
complejo (s), 82
adición de, 82
amplitud de, 488
argumento de, 488
conjugado de, 83
diferencia de, 83
forma trigonométrica para, 488
igualdad de, 82
inverso multiplicativo de, 84
módulo de, 488
multiplicación de, 82
multiplicación por un número real, 83
parte imaginaria de, 83
parte real de, 83
producto de, 82, 489-490
raíz n-ésima de, 493
representación geométrica de, 486-487
resta de, 83
sustracción de, 82
valor absoluto de, 487
y unidad imaginaria i, 82
irracional (es), 4
naturales, 4
primo (s), 4
racional (es), 4
real (es), 4
real(es) negativo(s), 8
real(es) positivo(s), 8

— O —

Onda cosenoidal, 363
Onda cosenoidal amortiguada, 394
Onda senoidal, 363
Onda senoidal amortiguada, 394
Ordenada, 118
Orden de una matriz cuadrada, 542
Ordenada en el origen, 126
Ordenada en el origen, de una gráfica, 127
Orientación, 727
Origen, 8, 118, 709

— P —

Par ordenado, 118
Parábola, 126, 176, 670
definición, 670
directriz, 670
ecuación normal de la, 178, 672
ecuaciones polares de la, 719
eje, 126, 670, 671
foco, 670
propiedad de reflexión de la, 676
vértice, 126, 179, 670-671
Paraboloide, 676
Parametrización, 726
Parámetro, 726
Parte imaginaria de un número complejo, 83
Parte real de un número complejo, 83
Pascal, triángulo de, 640
Pendiente de una recta, 136
Periódica, función, 361
Periodo, 361
del movimiento armónico, 396
Permutación(es), 646
distinguibles, 650
indistinguibles, 650
Perpendicular bisectriz (o mediatriz), 121
Plano
complejo, 486-487
coordenado, 118
$r\theta$, 709
xy, 118
Polinomio(s), 28
coeficiente principal de un, 28
constante, 28
cotas de las raíces (o ceros) de un, 238
divisible, 223
división de, 223
en x, 28
expresado como producto de factores lineales y cuadráticos, 243
factorización, 32
factorización completa de un, 232
forma anidada de un, 228
grado de un, 28
iguales, 28
irreducible(s), 32
nulo (o cero), 28
número de raíces (o ceros) de un, 233, 235
par conjugado de raíces de un, 242
primo, 32
raíces racionales de un, 244
raíz (o cero) de un, 232
raíz real de un, 218
término constante de un, 235
término de un, 218
Polo, 709
Posición normal de un ángulo, 320
Potencia, 16
Primer término de una sucesión, 606

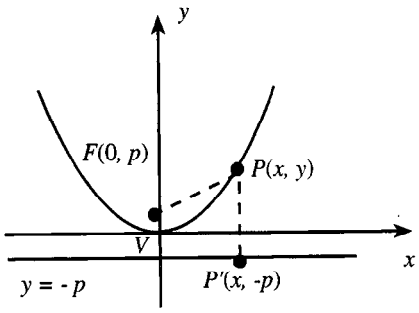
componentes de, 498
de posición, 498
equivalentes, 496
fuerza, 497
iguales, 496
magnitud de un, 496
múltiplo por escalar de, 497,499
negativo de un, 500
nulo (o cero), 500
ortogonales, 510
paralelos, 510
producto escalar de dos, 508-509
producto interior (o de punto) de dos, 509
punto inicial de un, 496
punto terminal de un, 496
suma, 497
sustracción de, 501
unitario, 502
unitario **i**, 502
unitario **j**, 502
velocidad, 497
Velocidad
angular, 326
lineal, 326
Ventana o rectángulo visual, 131
Vértice(s)
de la cicloide, 730
de un ángulo, 320
de una elipse, 681
de una hipérbola, 694
de una parábola, 126, 179, 670-672
"Vida media" 282

Impreso en los talleres gráficos de
Panamericana Formas e Impresos S.A.
Santafé de Bogotá, D.C. - Colombia
1997

GEOMETRÍA ANALÍTICA – SECCIONES CÓNICAS

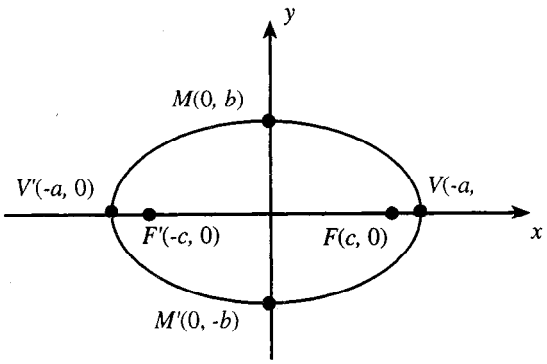
PARÁBOLA

$x^2 = 4py$



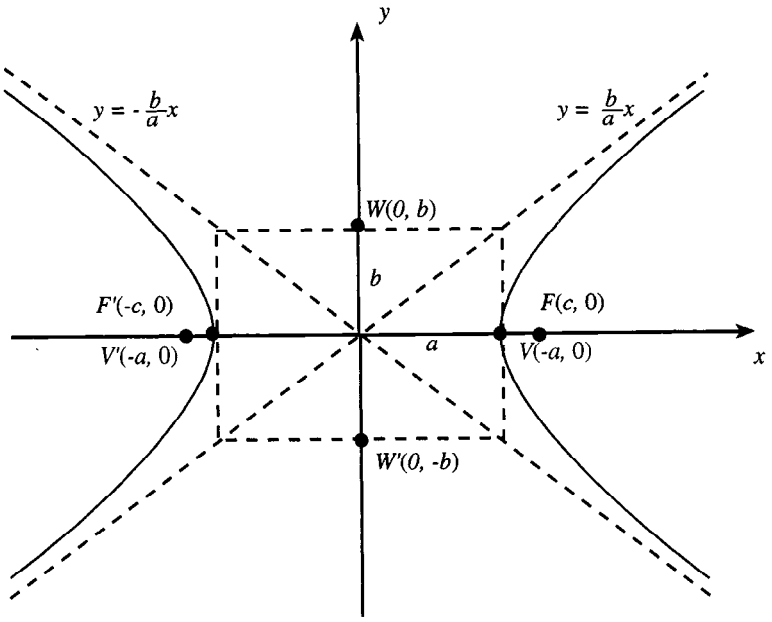
ELIPSE

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ donde $a^2 = b^2 + c^2$



HIPÉRBOLA

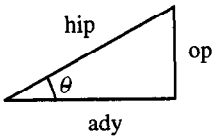
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ donde $c^2 = a^2 + b^2$



FORMULAS DE TRIGONOMETRÍA

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

DE ÁNGULOS AGUDOS

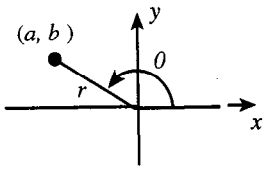


$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \csc\theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{ady}}{\text{op}}$$

DE ÁNGULOS CUALESQUIERA

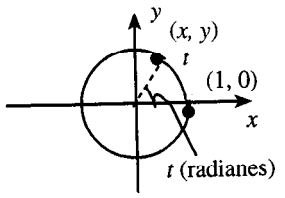


$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r} \qquad \csc\theta = \frac{r}{b}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{r} \qquad \sec\theta = \frac{r}{a}$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a} \qquad \cot\theta = \frac{a}{b}$$

DE NÚMEROS REALES

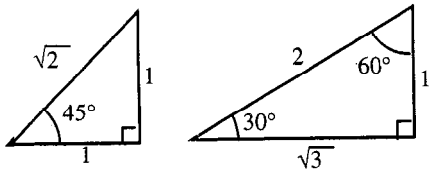


$$\operatorname{sen} t = y \qquad \csc t = \frac{1}{y}$$

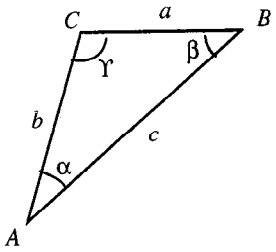
$$\cos t = x \qquad \sec t = \frac{1}{x}$$

$$\tan t = \frac{y}{x} \qquad \cot t = \frac{x}{y}$$

TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS ESPECIALES



TRIÁNGULO ESCALENO



ÁREA

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc\operatorname{sen}\alpha$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}ac\operatorname{sen}\beta$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}ab\operatorname{sen}\gamma$$

$$\mathcal{A} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

donde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ *(Fórmula de Herón)*

LEY DE LOS COSENOS

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

LEY DE LOS SENOS

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$$

VALORES ESPECIALES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

θ (°)	θ (rad)	sen θ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	csc θ
0°	0	0	1	0	—	1	—
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	—	0	—	1

ALFABETO GRIEGO

Letra	Nombre	Letra	Nombre
A α	alfa	N ν	nu
B β	beta	Ξ ξ	xi
Γ γ	gama	O o	ómicron
Δ δ	delta	Π π	pi
E ϵ	épsilon	P ρ	ro
Z ζ	dseta	Σ σ	sigma
H η	eta	T τ	tau
Θ θ	teta	Y υ	ípsilon
I ι	iota	Φ ϕ (φ)	fi
K κ	kapa	X χ	ji
Λ λ	lambda	Ψ ψ	psi
M μ	mu	Ω ω	omega