

**INET**  
**Lógica**  
**Solución Práctico 3 Logica Proposicional, Sintaxis**

**Ejercicio 1**

1. Por 1  $p_5 \in PROP$
2. Por 2  $\perp \in PROP$
3. Por 1  $p_0, p_1, p_2 \in PROP$ ,  
por 3  $(p_0 \vee p_1) \in PROP$ ,  
por 3  $((p_0 \vee p_1) \wedge p_2) \in PROP$
4. Por 1  $p_1, p_2, p_3 \in PROP$ ,  
por 4  $(\neg p_2) \in PROP$ ,  
por 3  $(p_1 \leftrightarrow p_2) \in PROP$   
por 3  $(p_3 \vee (p_1 \leftrightarrow p_2)) \in PROP$   
por 3  $((\neg p_2) \rightarrow (p_3 \vee (p_1 \leftrightarrow p_2))) \in PROP$
5. Por 1  $p_0, p_1, p_2 \in PROP$ ,  
por 2  $\perp \in PROP$   
por 3  $(p_1 \vee \perp) \in PROP$ ,  
por 4  $(\neg p_2) \in PROP$ ,  
por 3  $((p_1 \vee \perp) \wedge (\neg p_2)) \in PROP$ ,  
por 3  $((p_1 \vee \perp) \wedge (\neg p_2)) \rightarrow p_0 \in PROP$

**Ejercicio 2**

Demuestre que:

1.  $(p_5) \notin PROP$ .  
Las fórmulas con parentesis tienen al menos un conector.
2.  $\perp (\rightarrow \notin PROP$  Hay un parentesis que abre y ninguno que cierra.
3.  $(p_0 \vee p_1 \wedge p_2) \notin PROP$  Hay un parentesis que abre y ninguno que cierra.
4.  $\neg p_2 \rightarrow p_3 \notin PROP$  La palabra tiene conectivos y no tiene parentesis.

**Ejercicio 3**

De dos secuencias de formación para cada una de las siguientes proposiciones:

1.  $p_5$ 
  - 1)  $p_5$
  - 2)  $p_0, p_5$
2.  $\perp$ 
  - 1)  $\perp$
  - 2)  $p_0, \perp$
3.  $((p_0 \vee p_1) \wedge p_2)$ 
  - 1)  $p_0, p_1, p_2, (p_0 \vee p_1), ((p_0 \vee p_1) \wedge p_2)$
  - 1)  $p_1, p_0, p_2, (p_0 \vee p_1), ((p_0 \vee p_1) \wedge p_2)$
4.  $((\neg p_2) \rightarrow (p_3 \vee (p_1 \leftrightarrow p_2)))$ 
  - 1)  $p_1, p_2, p_3, (\neg p_2), (p_1 \leftrightarrow p_2), (p_3 \vee (p_1 \leftrightarrow p_2)), ((\neg p_2) \rightarrow (p_3 \vee (p_1 \leftrightarrow p_2)))$
  - 2)  $p_3, p_2, p_1, (\neg p_2), (p_1 \leftrightarrow p_2), (p_3 \vee (p_1 \leftrightarrow p_2)), ((\neg p_2) \rightarrow (p_3 \vee (p_1 \leftrightarrow p_2)))$
5.  $((p_1 \vee \perp) \wedge (\neg p_2)) \rightarrow p_0$ 
  - 1)  $p_0, p_1, p_2, (\neg p_2), \perp, (p_1 \vee \perp), ((p_1 \vee \perp) \wedge (\neg p_2)), (((p_1 \vee \perp) \wedge (\neg p_2)) \rightarrow p_0)$
  - 2)  $p_2, p_1, p_0, (\neg p_2), \perp, (p_1 \vee \perp), ((p_1 \vee \perp) \wedge (\neg p_2)), (((p_1 \vee \perp) \wedge (\neg p_2)) \rightarrow p_0)$

#### Ejercicio 4

Proposiciones resultantes de las sustituciones:

1.  $p_5[p_0/p_4] = p_5$
2.  $p_2[(p_0 \vee p_1)/p_2] = (p_0 \vee p_1)$
3.  $\perp [(p_1 \wedge p_2)/p_0] = \perp$
4.  $(p_0 \vee p_1)[((p_0 \vee p_1) \wedge p_2)/p_0] = ((p_0 \vee p_1) \wedge p_2) \vee p_1$
5.  $((\neg p_2) \rightarrow p_3)[(p_1 \leftrightarrow p_4)/p_2] = ((\neg(p_1 \leftrightarrow p_4)) \rightarrow p_3)$

#### Ejercicio 5

Principio de Inducción Primitiva:

Sea P una propiedad sobre los elementos de PROP. Si se cumple:

1.  $P(p_i)$  para todo  $i \in N$
2.  $P(\perp)$

3. Si  $P(\alpha)$  y  $P(\beta)$  entonces  $P(\alpha\Delta\beta)$  para  $\Delta \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

4. Si  $P(\alpha)$  entonces  $P(\neg\alpha)$

entonces  $P$  se cumple para todo  $\alpha \in PROP$ .

Demostración:

Sea  $X = \{\phi \in PROP / P(\phi)\}$ .

Por hipótesis,  $p_i \in X$  para  $i \in N$ , y  $\perp \in X$ . Supongo  $\alpha$  y  $\beta \in X$ , entonces se cumple  $P(\alpha)$  y  $P(\beta)$ . luego por hipótesis se cumple  $P(\alpha\Delta\beta)$  y por lo tanto  $\alpha\Delta\beta \in X$ . De igual forma si  $\alpha \in X$  entonces  $\neg\alpha \in X$ .

Hemos demostrado que  $X$  satisface las clausulas de formación de PROP. Como PROP es el menor conjunto que las satisface  $PROP \subseteq X$  y por lo tanto se cumple  $P(\alpha)$  para todo  $\alpha \in PROP$ .

### Ejercicio 6

Demuestre utilizando el principio de Inducción Primitiva para PROP:

1. Toda proposición tiene un número par de paréntesis.

Definimos la función *cant\_parenthesis* por recursión primitiva.

$$cant\_parenthesis(p_i) = 0$$

$$cant\_parenthesis(\perp) = 0$$

$$cant\_parenthesis((\alpha\Delta\beta)) = 2 + cant\_parenthesis(\alpha) + cant\_parenthesis(\beta)$$

$$cant\_parenthesis((\neg\alpha)) = 2 + cant\_parenthesis(\alpha)$$

Consideramos la propiedad  $P(\alpha) = cant\_parenthesis(\alpha) \text{ es par}$  y la demostramos por inducción primitiva.

$P(p_i)$  se cumple pues  $cant\_parenthesis(p_i) = 0$  que es par.

$P(\perp)$  se cumple pues  $cant\_parenthesis(\perp) = 0$  que es par.

Supongo  $P(\alpha)$  y  $P(\beta)$  y tengo que probar  $P(\alpha\Delta\beta)$

Por definición  $cant\_parenthesis((\alpha\Delta\beta)) = 2 + cant\_parenthesis(\alpha) + cant\_parenthesis(\beta)$

como por hipótesis  $cant\_parenthesis(\alpha)$  y  $cant\_parenthesis(\beta)$  son pares entonces  $cant\_parenthesis(\alpha\Delta\beta)$  es par.

Supongo  $P(\alpha)$ . Por definición  $cant\_parenthesis((\neg\alpha)) = 2 + cant\_parenthesis(\alpha)$

como por hipótesis  $cant\_parenthesis(\alpha)$  es par entonces  $cant\_parenthesis((\neg\alpha))$  es par.

2. Toda proposición tiene el mismo número de paréntesis de apertura que de cierre.

Definimos la funciones  $pa$  (parentesis que abren) y  $pc$  (parentesis que cierran) por recursión primitiva:

$$\begin{aligned} pa(p_i) &= 0 \\ pa(\perp) &= 0 \\ pa((\alpha \triangle \beta)) &= 1 + pa(\alpha) + pa(\beta) \\ pa((\neg \alpha)) &= 1 + pa(\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} pc(p_i) &= 0 \\ pc(\perp) &= 0 \\ pc((\alpha \triangle \beta)) &= 1 + pc(\alpha) + pc(\beta) \\ pc((\neg \alpha)) &= 1 + pc(\alpha) \end{aligned}$$

Consideramos la propiedad  $P(\alpha) = (pa(\alpha) = pc(\alpha))$  y la demostramos por inducción primitiva.

$P(p_i)$  se cumple pues  $pa(p_i) = pc(p_i) = 0$ .  
 $P(\perp)$  se cumple pues  $pa(\perp) = pc(\perp) = 0$ .  
 Supongo  $P(\alpha)$  y  $P(\beta)$  y tengo que probar  $P(\alpha \triangle \beta)$   
 Por definición  $pa((\alpha \triangle \beta)) = 1 + pa(\alpha) + pa(\beta)$  y  $pc((\alpha \triangle \beta)) = 1 + pc(\alpha) + pc(\beta)$   
 como por hipótesis  $pa(\alpha) = pc(\alpha)$  y  $pa(\beta) = pc(\beta)$  entonces  $pa(\alpha \triangle \beta) = pc(\alpha \triangle \beta)$ .  
 Supongo  $P(\alpha)$ . Por definición  $pa((\neg \alpha)) = 1 + pa(\alpha)$  y  $pc((\neg \alpha)) = 1 + pc(\alpha)$   
 como por hipótesis  $pa(\alpha) = pc(\alpha)$  entonces  $pa((\neg \alpha)) = pc((\neg \alpha))$ .

3. Toda proposición tiene un número mayor o igual a 1 de ocurrencias de símbolos proposicionales o  $\perp$

Definimos la función  $cant\_atomos$  por recursión primitiva:

$$\begin{aligned} cant\_atomos(p_i) &= 1 \\ cant\_atomos(\perp) &= 1 \\ cant\_atomos((\alpha \triangle \beta)) &= cant\_atomos(\alpha) + cant\_atomos(\beta) \\ cant\_atomos((\neg \alpha)) &= cant\_atomos(\alpha) \end{aligned}$$

Consideramos la propiedad  $P(\alpha) = cant\_atomos(\alpha) \geq 1$  y la demostramos por inducción primitiva.

$P(p_i)$  se cumple pues  $cant\_atomos(p_i) = 1$  que es mayor o igual que 1.  
 $P(\perp)$  se cumple pues  $cant\_atomos(\perp) = 1$  que es mayor o igual que 1.  
 Supongo  $P(\alpha)$  y  $P(\beta)$  y tengo que probar  $P(\alpha \triangle \beta)$   
 Por definición  $cant\_atomos((\alpha \triangle \beta)) = cant\_atomos(\alpha) + cant\_atomos(\beta)$

como por hipótesis  $\text{cant\_atomos}(\alpha) \geq 1$  y  $\text{cant\_atomos}(\beta) \geq 1$  entonces  $\text{cant\_atomos}(\alpha \triangle \beta) \geq 1$ .

Supongo  $P(\alpha)$ . Por definición  $\text{cant\_atomos}(\neg \alpha) = \text{cant\_atomos}(\alpha)$  como por hipótesis  $\text{cant\_atomos}(\alpha) \geq 1$  entonces  $\text{cant\_atomos}(\neg \alpha) \geq 1$ .

### Ejercicio 7

Coloque paréntesis en las siguientes proposiciones de forma que se respeten las precedencias de operadores : (Se escriben debajo las soluciones).

1.  $p_5$
2.  $\perp$
3.  $(p_0 \vee (p_1 \wedge p_2))$
4.  $((\neg p_2) \rightarrow ((p_3 \vee p_1) \leftrightarrow p_2))$
5.  $((p_1 \vee (\perp \wedge (\neg p_2))) \rightarrow p_0)$
6.  $(p_2 \rightarrow ((p_0 \wedge p_1) \leftrightarrow p_2))$

### Ejercicio 8

Hoy llueve

$p_0$

Hoy no llueve

$\neg p_0$

Ayer llovió en Montevideo y Juan tenía paraguas

$p_1 \wedge p_2$

La tierra es un planeta o Venus no es un planeta

$p_3 \vee p_4$

Si  $2 + 3 + 1 = 1 + x$  entonces  $x = 5$

$p_4 \rightarrow p_5$

Todo número primo es positivo

$p_6$

Todo cuadrado es negativo o  $2 + 2 = 7$

$\neg p_7 \vee p_8$

La tierra gira alrededor del sol o el sol gira alrededor de la tierra y Venus tiene anillos

$p_9 \vee p_{10} \wedge p_{11}$

Si todo cuadrado es positivo y todo primo es mayor o igual que 1 entonces  $1 > 0$

$p_7 \wedge p_{13} \rightarrow p_{14}$