

## **B. JARINGAN KERJA ( KONTEN II )**

### **Deskripsi Singkat**

Jaringan kerja muncul pada sejumlah perencanaan dan dalam berbagai bidang. Jaringan transportasi, listrik dan komunikasi merupakan hal yang sering kita jumpai dalam kehidupan sehari-hari yang merupakan penggambaran suatu jaringan kerja. Penggambaran jaringan kerja juga digunakan secara general untuk masalah-masalah seperti produksi, distribusi, perencanaan proyek, manajemen sumber daya, penempatan fasilitas, perencanaan keuangan dan sebagainya. Setiap masalah dalam jaringan kerja ada tiga tipe masalah yaitu pertama masalah lintasan terpendek (*shortest path problems*), masalah jangkauan minimum (*minimum spanning tree problems*), dan masalah arus maksimum (*maximum flow problems*) yang memiliki struktur yang sangat khusus yang seringkali muncul dalam penerapan. (Frederick S.Hillier)

Manajemen proyek secara lambat laun telah menjadi suatu bidang baru dengan berkembangnya dua teknik analisis yang digunakan untuk perencanaan, penjadwalan, pengawasan dan pengambilan keputusan terhadap proyek yang sedang berjalan atau yang akan berjalan. Teknik pertama disebut *Critical Path Method* (CPM) dan teknik kedua disebut *Project Evaluation and Review Technique* (PERT).

Pada dasarnya kedua teknik analisis ini adalah sama. Perbedaannya terletak pada perkiraan waktu, dimana CPM menaksir waktu dengan cara pasti (deterministic) sementara PERT dengan cara kemungkinan (probabilistic). Kedua teknik analisis inilah yang dikenal dengan *network analysis* atau teori jaringan kerja.

### **Kompetensi yang Dapat Dicapai Oleh Mahasiswa**

1. Mampu membuat Perencanaan Jaringan Arus Terpendek dan Jalur Kritis
2. Mampu menganalisis Masalah arus dengan biaya minimum dan Ongkos penetapan dalam jadwal proyek.
3. Mampu menganalisis problem PERT- CPM
4. Mampu mengaplikasi Problem PERT-CPM dengan ongkos minimum dalam salah satu bidang.
5. Mampu membuat tugas Tim, mempresentasikannya dengan informatif dan jelas.

## 1. Model Lintasan Terdekat (Terpendek)

Untuk setiap dua node S dan T (atau O dan T pada Gambar 1) dapat terjadi beberapa lintasan, dimana lintasan dengan bobot yang minimum disebut sebagai lintasan atau rute terpendek. Bobot disini dapat berupa jarak, waktu tempuh, atau ongkos transportasi dari satu node ke node lainnya yang berbentuk rute tertentu.

Algoritma untuk mencari rute terpendek ini dikembangkan pada tahun 1959 oleh Dijkstra, dengan batasan/ketentuan yang menyatakan bahwa algoritma ini hanya dapat digunakan apabila semua busur pada jaringannya mempunyai bobot non negatif.

Langkah-langkah algoritma adalah sebagai berikut :

- a. Langkah 0: *Node* sumber diberi bobot  $d(s)=0$ , sedangkan *nodes* lainnya diberi bobot  $d(s,j)$ , dimana  $d(s,j)$  ini merupakan batas atas dari jarak terpendek dari *node* sumber ke suatu *node*  $j$ . Jika busur langsung  $(s,j)$  tidak ada, maka  $d(s,j)=\infty$ . Pilihlah  $d(s,j)$  minimum dan beri tanda pada *node*  $j$  yang bersangkutan. Misalkan *node*  $j$  yang ditandai pada langkah 0 adalah *node*  $j_1$ , maka  $j_1$  menjadi  $S_1$ .
- b. Langkah 1: Untuk setiap *node*  $j$  yang belum bertanda, carilah  $d(s_1,j) = \min \{d(s,j_1) + d(j_1,j), d(s,j)\}$ . Apabila  $d(s_1,j)=\infty$  untuk semua *node*  $j$  yang belum bertanda, maka algoritma selesai karena tidak terdapat suatu rute/lintasan dari *node*  $S_1$  ke *node*  $j$  tersebut. Jika tidak, tandai *node*  $j$  yang memiliki harga  $d(s_1,j)$  terkecil. Misalnya *node*  $j$  yang ditandai pada langkah 1 ini adalah *node*  $j_2$ , maka  $j_2$  menjadi  $S_2$ .
- c. Langkah 2: Ulangi langkah 1 sampai *node* tujuan mendapat tanda.

## 2. Model Pohon Perentangan Minimum (Spanning Tree)

Persoalan ini merupakan variasi dari persoalan rute terpendek yang perbedaannya terletak pada lintasan yang dicari. Pada rute terpendek, kita mencari lintasan/rute dari sumber ke tujuan yang memberikan total jarak minimum, sedangkan pada persoalan rentang pohon ini yang dipersoalkan ialah menentukan busur-busur yang menghubungkan *nodes* yang ada pada jaringan sehingga diperoleh panjang busur total yang minimum.

Banyak contoh praktis dari persoalan ini, di antaranya ialah:

- a. Perencanaan jaringan transportasi.

Dalam hal ini *nodes*-nya bisa berupa terminal, sedangkan busur-busurnya dapat berupa jalan raya. Persoalannya ialah menentukan pola transportasi yang dapat melayani seluruh terminal dengan jarak yang minimum.

- b. Perencanaan jaringan komunikasi berskala besar.
- c. Perencanaan jaringan distribusi.

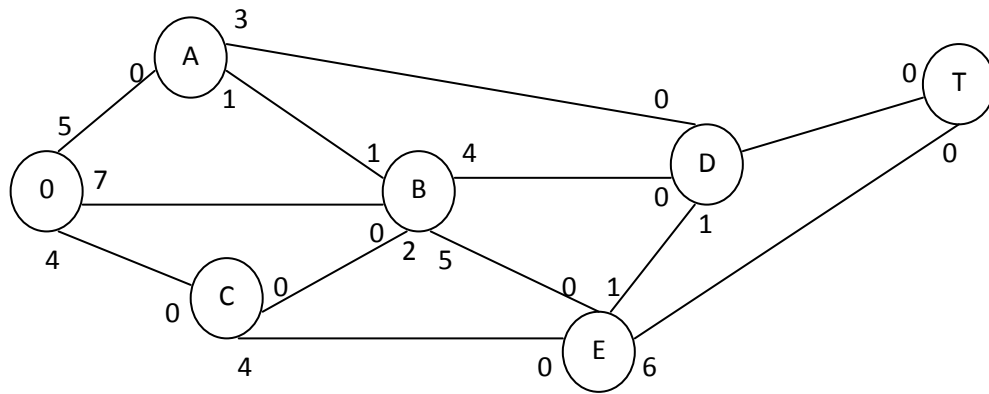
Persoalan *spanning tree* ini dapat diselesaikan dengan cara sebagai berikut:

- a. Pilihlah secara sembarang salah satu *node*, kemudian hubungkan *node* tersebut dengan *node* lain yang terdekat.
- b. Tentukan *node* lain yang belum dihubungkan, yang jaraknya paling dekat dengan *node* yang sudah dihubungkan pada langkah sebelumnya. Kemudian hubungkan *node* ini. Ulangi langkah ini hingga seluruh *node* terhubung. Penyelesaian persoalan ini akan lebih mudah jika menggunakan gambar.

### **3. Model Arus Maksimum**

Persoalan ketiga yang dihadapi oleh taman “Alam Hijau” ialah menentukan rute perjalanan-perjalanan tram dari stasiun O ke T, sedemikian sehingga jumlah total perjalanan tram yang dapat dilakukan setiap harinya maksimum, tanpa melanggar batas maksimum perjalanan yang dapat dilakukan pada masing-masing jalan.

Sudah barang tentu data/informasi yang diperlukan untuk dapat menyelesaikan persoalan ini ialah mengenai jumlah perjalanan yang dapat dilakukan pada masing-masing jalan yang menghubungkan satu stasiun dengan stasiun lainnya. Dengan kata lain, diperlukan data mengenai kapasitas aliran pada masing-masing busur. Misalkan data tersebut adalah:



Gambar 1. Batas perjalanan tram yang dapat dilakukan pada masing-masing jalan setiap hari

Gambar di atas dibaca sebagai berikut:

- Dari O ke A dapat dilakukan maksimum 5 kali perjalanan setiap hari, sednagkan dari A ke O tidak ada perjalanan yang dapat dilakukan;
- Dari A ke B maksimum 1 kali perjalanan, begitu juga dari B dapat dilakukan 1 kali perjalanan ke A;  
dan seterusnya.

Dalam hal ini diasumsikan bahwa aliran yang masuk ke suatu *node* sama dengan aliran yang keluar dari *node* itu. Jika kapasitas pada busur (i,j) adalah  $c_{ij}$ , maka tingkat aliran pada busur (i,j) yaitu jumlah aliran dari *node* i ke *node* j, adalah bilangan nonnegatif yang tidak lebih besar dari  $c_{ij}$ . Dengan demikian, jika tingkat aliran pada busur (i,j) dinyatakan oleh  $f_{ij}$ , maka:

$$0 \leq f_{ij} \leq c_{ij}$$

Sebenarnya, persoalan **aliran maksimum** ini dapat diformulasikan sebagai persoalan program linier sehingga dapat diselesaikan dengan metode simpleks. Akan tetapi, di sini akan dikemukakan satu prosedur penyelesaian yang lebih efisien sebagai berikut:

- Carilah lintasan dari sumber ke tujuan dengan kapasitas aliran positif (jika tidak ada, berarti aliran yang ada telah merupakan pola aliran optimum).
- Periksalah lintasan tersebut untuk mendapatkan busur dengan kapasitas aliran terkecil (nyatakan kapasitas ini sebagai  $c^*$ ), dan tingkatkan aliran pada lintasan tersebut  $c^*$ .
- Kurangkan kapasitas aliran semula dengan  $c^*$  pada setiap busur dari lintasan yang dimaksud. Tingkatkan kapasitas aliran semula dengan  $c^*$  pada setiap busur yang berlawanan arah adari lintasan tersebut, kembali ke langkah a..

#### 4. Jalur Kritis

Suatu lintasan adalah rangkaian dari sejumlah kegiatan yang mulai dari kejadian awal dan berhenti pada kejadian akhir. Berdasarkan ketentuan ini, maka definisi jalur kritis dapat ditetapkan sebagai berikut:

- a. **(Jalur kritis).** Jika suatu lintasan dimana tiap kejadian pada lintasan tersebut mempunyai waktu kejadian paling cepat= waktu kejadian paling lambat, maka lintasan tersebut disebut lintasan kritis atau jalur kritis.
- b. Jumlah waktu yang diperlukan untuk menyelesaikan satu lintasan kritis sama dengan jumlah waktu yang diperlukan untuk menyelesaikan seluruh proyek.
- c. **(Kegiatan kritis).** Semua kegiatan yang terletak pada jalur kritis disebut kegiatan kritis. Dalam suatu diagram jaringan kerja jalur kritis biasanya di tandai secara khusus. Ketentuan lain yang perlu diketahui yaitu jalur kritis juga diperkenankan melalui dummy atau kegiatan semu, jalur kritis dimungkinkan lebih dari satu jalur dan keterlambatan kegiatan kritis dapat mengganggu waktu penyelesaian (memperpanjang) penyelesaian suatu proyek.

#### 5. Waktu Mengambang.

Selisih waktu antara waktu yang diperlukan oleh jalur kritis dengan waktu yang diperlukan oleh jalur yang lain( tidak kritis ) disebut waktu *slack* dan *float* atau waktu mengambang. Artinya terdapat waktu longgar atau *idle time* untuk menyelesaikan kegiatan tidak kritis sehingga keterlambatan waktu dalam jalur tak kritis tidak mempengaruhi selesainya seluruh proyek. Tetapi harus diperhitungkan berapa lama waktu mengambang yang diperkenankan untuk tiap kegiatan hingga untuk jalur kritis pun tidak memiliki gangguan.

#### 6. Perhitungan Jalur Kritis

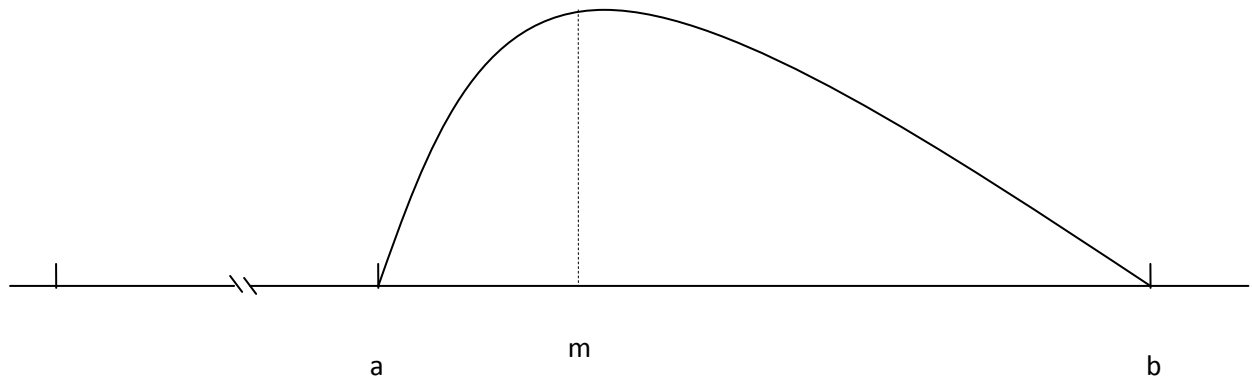
Penerapan PERT-CPM pada akhirnya harus menghasilkan sebuah jadwal yang menyatakan tanggal awal dan tanggal penyelesaian setiap kegiatan. Diagram panah mewakili langkah pertama kearah tercapainya arah tersebut. Karena interaksi diantara kegiatan-kegiatan yang berbeda penentuan saat awal dan penyelesaian memerlukan perhitungan khusus. Perhitungan ini secara langsung pada diagram panah menggunakan aritmetika sederhana. Hasil akhirnya adalah klasifikasi kegiatan-kegiatan dalam proyek sebagai kegiatan **kritis** atau **nonkritis**. Sebuah kegiatan dikatakan kritis jika penundaan saat awalnya akan menyebabkan penundaan

tanggal penyelesaian seluruh proyek. Sebuah kegiatan nonkritis adalah kegiatan-kegiatan dengan jumlah waktu diantara waktu awal yang paling cepat dengan waktu penyelesaian yang paling lambat (sebagaimana diijinkan oleh proyek yang bersangkutan) adalah lebih panjang daripada durasi aktualnya. Dalam kasus ini, kegiatan yang nonkritis tersebut dikatakan memiliki waktu senggang (**slack**) atau waktu mengembang (**float**).

Sebuah jalur kritis adalah rantai kegiatan-kegiatan kritis yang menghubungkan kejadian awal dan kejadian akhir dari diagram panah. Dengan kata lain, jalur kritis mengidentifikasi semua kegiatan-kegiatan kritis dari proyek tersebut. Metode penentuan jalur ini diilustrasikan dengan contoh numerik.(Hamdy A.Taha)

## **7. PERT (*Project Evolution and Review Technique*) dan CPM (*Critical Path Method*)**

Telah diasumsikan secara implisit bahwa pendugaan yang akurat dapat dibuat untuk waktu yang dibutuhkan bagi setiap kegiatan dalam proyek. Akan tetapi terdapat ketidakpastian tentang waktu tersebut, ini akan merupakan suatu peubah acak dengan sebaran peluang tertentu. PERT menggunakan tiga jenis estimasi yang berbeda dari waktu kegiatan untuk mendapatkan informasi tentang sebaran peluangnya. Informasi seluruh waktu kegiatan ini kemudian digunakan untuk menduga atau mengestimasi peluang selesainya proyek pada waktu yang dijadwalkan. Tiga estimasi waktu yang digunakan oleh PERT untuk setiap kegiatan adalah waktu paling mungkin, estimasi optimis, dan estimasi pesimis. **Estimasi paling mungkin** (dinotasikan dengan  $m$ ) dimaksudkan sebagai waktu estimasi yang paling realistis yang dibutuhkan untuk melakukan suatu kegiatan. Secara statistic, ini merupakan suatu estimasi modus (nilai tertinggi) dari waktu kegiatan. Estimasi **optimis** (dinotasikan sebagai  $a$ ) dimaksudkan sebagai waktu kegiatan jika semua hal berlangsung dengan baik. Secara statistic ini merupakan estimasi batas bawah dari sebaran peluangnya. **Estimasi pesimis** (dinotasikan dengan  $b$ ) dimaksudkan sebagai waktu yang terjadi jika semua hal berlangsung dengan buruk. Secara statistic ini merupakan batas atas dari sebaran peluangnya. Lokasi bagi ketiga estimasi ini untuk ditunjukkan pada Gambar 4



Dua asumsi dibuat untuk mengubah  $m, a,$  dan  $b$  menjadi estimasi nilai harapan ( $t_t$ ) dan variansi  $\tau^2$  dari waktu suatu kegiatan.

**Asumsi I :** Rentang antara  $a$  (estimasi optimis) dan  $b$  (estimasi pesimis) adalah enam kali standar deviasi, yaitu  $6\tau=b-a$ . Sehingga variansi waktu adalah :

$$\tau^2 = \left[ \frac{1}{6} (b - a) \right]^2$$

Dasar dari asumsi ini adalah bahwa distribusi peluang (seperti halnya distribusi normal) diperkirakan terdapat pada daerah sekitar tiga kali simpangan baku dari nilai tengahnya, sehingga akan terdapat rentangan sekitar enam kali simpangan baku di antaranya. Untuk mendapatkan estimasi nilai harapan ( $t_t$ ), kita juga membutuhkan suatu asumsi tentang distribusi peluangnya.

**Asumsi II :** distribusi peluang setiap waktu kegiatan merupakan (paling tidak mendekati) **distribusi beta**.

Distribusi beta memiliki bentuk seperti pada gambar 3 dengan satu modus  $m$  dan dua titik akhir ( $a$  dan  $b$ ), di mana diasumsikan  $0 \leq a \leq b$ . Dengan asumsi ini, nilai harapan bagi waktu kegiatan diperkirakan adalah :

$$t_e = \frac{1}{3} \left[ 2m + \frac{1}{2} (a + b) \right]$$

Nilai tengah rentang  $(a+b)/2$  terletak antara  $a$  dan  $b$ , sehingga  $t_e$  merupakan rata-rata dari modus dan nilai tengah rentang. Modusnya diberi bobot dua per tiga.

.Dua teknik perencanaan yaitu CPM (*Critical Path Method*) dan PERT(*Project Evolution and Review Technique*) yang sangat berguna untuk menyusun perencanaan, penjadwalan dan pengawasan/pengontrolan proyek, telah dipergunakan secara meluas terutama untuk proyek-proyek besar.

Metode jaringan kerja diperkenalkan pada akhir dekade tahun 1950-an. Sistem ini dimaksudkan untuk merencanakan dan mengendalikan sejumlah besar kegiatan yang memiliki hubungan ketergantungan satu sama lain. Sistem tersebut lalu dikenal sebagai metode jalur kritis ( *Critical Path Method* ). CPM (*Critical Path Method*) digambarkan sebagai kegiatan pada anak panah (*activity on arrow – AOA* ).

PERT dan CPM pada dasarnya merupakan metode yang berorientasikan waktu, dalam arti bahwa keduanya akan berakhir dengan penentuan penjadwalan waktu (*a time schedule*). Walaupun PERT dan CPM dikembangkan secara terpisah dan bebas satu sama lain (*independent*), namun pada dasarnya sama. Mungkin perbedaan yang paling menonjol adalah perkiraan waktu yang diperlukan untuk melaksanakan kegiatan yang sifatnya *deterministic* dalam CPM dan probabilitas dalam PERT. Kedua tehnik tersebut dinamakan teknik penjadwalan proyek (*project scheduling technique*) yang terdiri dari tiga tahapan yaitu perencanaan, penjadwalan, dan pengontrolan/pengawasan.

Dalam buku ajar ini yang akan dibahas secara khusus adalah teknik perencanaan CPM (*Critical Path Method*) yang sangat berguna untuk menyusun perencanaan, penjadwalan dan pengawasan/pengontrolan proyek, telah dipergunakan secara meluas terutama untuk proyek-proyek besar. Metode Jalur Kritis (*Critical Path Method*) merupakan alat untuk perencanaan dan pengkoordinasian lainnya. Alat ini dikembangkan dalam industri konstruksi dimana pengalaman sebelumnya digunakan untuk memperoleh estimasi waktu dan biaya berbagai fase proyek. Pengembangan CPM ini disponsori oleh E.I du Pont de Nemours & Company dengan the Sperry – Rand Corporation. Pertama kali diaplikasikan pada pembangunan pabrik



kimia. CPM (*Critical Path Method*) adalah teknik manajemen proyek yang menggunakan hanya satu factor waktu per kegiatan, merupakan jalur tercepat dalam mengerjakan suatu proyek dimana setiap proyek yang termasuk pada jalur ini tidak diberikan waktu jeda/istirahat untuk pengerjaannya. Dengan asumsi bahwa estimasi waktu tahapan kegiatan proyek dan ketergantungannya secara logis sudah benar. Jalur kritis berkonsentrasi pada timbal balik waktu dan biaya (Prof. Baikunth Nath, 2006).

**Istilah-istilah berikut digunakan dalam menggambarkan Jalur Kritis.**

- a. Kejadian : adalah titik dimana operasi di mulai atau selesai dan digambarkan dengan satu lingkaran kecil.
- b. Aktivitas : menggambarkan kerja aktual yang diselesaikan dan digambarkan dengan sebuah garis yang menunjukkan waktu/tenaga kerja atau jam-mesin yang dibutuhkan untuk operasi. Panah pada garis menunjukkan urutan.
- c. Waktu total-T : Lamanya siklus di mana pekerjaan diselesaikan.
- d. Waktu aktivitas-t : lamanya setiap aktivitas atau operasi.
- e. Mulai paling awal (*earliest start*) : waktu minimum dari awal siklus, sebelum operasi tertentu bisa dimulai (karena saling ketergantungan dari operasi).
- f. Selesai paling akhir (*latest finish*) : adalah waktu dari awal sampai operasi tertentu mesti diselesaikan agar pekerjaan selesai sesuai target.
- g. Mulai paling akhir (*latest start*) dari operasi tertentu
- h. Selesai paling cepat (*earliest finish*) dari operasi tertentu
- i. Kelonggaran waktu bebas (*free float*) dari kejadian tertentu
- j. Jalur kritis : adalah garis aktivitas di keseluruhan kejadian, dimana Penyimpangan pada jalur kritis mempengaruhi penyelesaian pekerjaan. Jalur kritis pada jejaring ditunjukkan oleh garis tebal.

## ❖ Terminologi & Perhitungan

$$TE = E$$

Waktu paling awal peristiwa ( *node I event = E* ) dapat terjadi (*Earliest Time of occurrence = TE* ), yaitu waktu paling awal suatu kegiatan yang berasal dari node tersebut dapat dimulai karena menurut aturan dasar jaringan kerja, suatu kegiatan baru dapat dimulai bila kegiatan terdahulu telah selesai.

$$TL = L$$

Waktu paling akhir peristiwa boleh terjadi (*Latest allowable event*), yaitu waktu paling lambat yang masih diperbolehkan bagi suatu peristiwa terjadi.

$$ES$$

Waktu mulai paling awal suatu kegiatan (*Earliest Start Time*).

$$EF$$

Waktu selesai paling awal suatu kegiatan (*Earliest Finish Time*). Bila hanya ada satu kegiatan terdahulu, maka EF suatu kegiatan terdahulu adalah ES kegiatan berikutnya.

$$LS$$

Waktu paling akhir kegiatan boleh mulai (*Latest Allowable Start Time*) adalah waktu paling akhir kegiatan boleh dimulai tanpa memperlambat proyek secara keseluruhan.

## LF

Waktu paling akhir kegiatan boleh selesai (*Latest Allowable Finish Time*).

## D

Lamanya waktu yang diperlukan suatu kegiatan

### ❖ Waktu Longgar Kegiatan (*Even Slack Time*).

Waktu longgar kegiatan atau *Even Slack Time* untuk tiap kejadian adalah lamanya waktu suatu kejadian dapat ditunda tanpa harus mempengaruhi waktu penyelesaian yang sudah dijadwalkan. Waktu longgar untuk kejadian 'J' diberikan oleh

$$SE(J) = TL(J) - TE(J)$$

Kejadian yang memiliki waktu longgar yang 'sedikit' atau 'kecil' dikatakan kejadian kritis dan harus diperhatikan dalam artian dimonitor secara hati-hati. Untuk menolong waktu longgar suatu kejadian yang 'kecil', sumberdaya dapat dipindahkan dari aktivitas yang mendahuluinya yang memiliki waktu longgar lebih besar ke aktivitas yang mempengaruhi TE untuk kejadian yang memiliki waktu longgar 'kecil'. Tiap kejadian pada jalur kritis akan memiliki waktu longgar yang sama besarnya dengan waktu longgar pada kejadian akhir. Dengan demikian, apabila kejadian terakhir diharapkan dapat diselesaikan tepat waktu, maka

$$TE(M) = SD(M) = TL(M), \text{ maka}$$

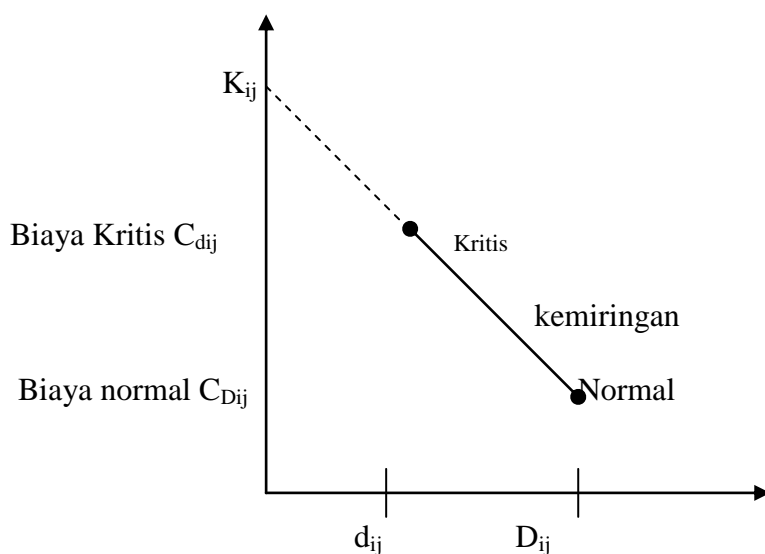
$$SE(M) = TL(M) - TE(M) = 0$$

❖ **CPM bisa dibuat melalui enam langkah yaitu :**

- a) Rumuskan proyek dan kegiatan terkait.
- b) Perhatikan hubungan antar kegiatan, kegiatan mana yang harus dikerjakan lebih dahulu dan mana yang kemudian.
- c) Tariklah garis penghubung yang menghubungkan semua kegiatan.
- d) Tulislah waktu dan biaya yang dibutuhkan untuk tiap kegiatan.
- e) Hitung waktu terlama dari *critical path*.
- f) Manfaatkan *critical path* dalam perencanaan, penjadwalan, monitor, dan kontrol proyek.

❖ **Metode Pertukaran Waktu-Biaya dari CPM**

CPM mengasumsikan bahwa waktu kegiatan adalah *deterministik* (yaitu waktu kegiatan ini merupakan hal yang dapat diduga secara terpercaya tanpa ketidakpastian). Selain itu CPM tidak semata-mata menekankan pada faktor waktu ( secara eksplisit) melainkan menempatkan kedudukan yang setara antara waktu dan biaya. Penekanan ganda ini diperoleh melalui pembentukan **kurva waktu biaya** untuk setiap kegiatan seperti yang diberikan pada Gambar 1. (Waktu Genting dan , Waktu Normal)



Kurva ini melukiskan hubungan antara biaya langsung untuk kegiatan yang bersangkutan dan lama waktu yang dibutuhkan. Gambaran ini biasanya didasarkan pada dua titik, yaitu titik normal dan titik genting. **Titik normal** memberikan waktu dan biaya yang diperlukan suatu kegiatan yang dilaksanakan pada suasana yang wajar tanpa mengeluarkan biaya tambahan (upah lembur, bahan atau peralatan hemat waktu dan sebagainya) untuk mempercepat proses kegiatan. Sedangkan **titik genting** menunjukkan waktu dan biaya yang diperlukan jika suatu pekerjaan harus dilaksanakan secara tergesa-gesa, lancar tanpa mengeluarkan biaya untuk mempersingkat waktu sebanyak mungkin. Diasumsikan bahwa mungkin terjadi pertukaran waktu-biaya, dan pertukaran terjadi pada ruas antara dua titik tersebut (perhatikan pada Gambar 1). jadi satu-satunya pendukung yang harus diperoleh dari pelaku proyek untuk kegiatan ini hanyalah waktu dan biaya untuk kegiatan tersebut.

Tujuan dasar CPM adalah menentukan kapan pertukaran waktu biaya harus dilakukan untuk memenuhi jadwal penyelesaian proyek dengan biaya serendah mungkin, salah satu caranya adalah dengan menggunakan pemrograman linear.

Pada Gambar 1. Peubah keputusan pada masalah ini adalah  $x_{ij}$  yang merupakan waktu pelaksanaan kegiatan (i,j) sehingga akan terdapat satu peubah keputusan  $x_{ij}$  untuk setiap kegiatan. Untuk menyatakan biaya tak langsung kegiatan (i,j) sebagai fungsi linear dari  $x_{ij}$ , kemiringan garis yang melalui titik normal dan titik genting untuk kegiatan (i,j) dinyatakan sebagai

$$S_{ij} = \frac{C_{Dij} - C_{dij}}{D_{ij} - d_{ij}}$$

Juga didefinisikan  $K_{ij}$  sebagai titik potong garis terhadap sumbu biaya sebagaimana yang terlihat pada Gambar 1.

Dengan demikian,

$$\text{Biaya langsung untuk kegiatan } (i, j) = K_{ij} + S_{ij} X_{ij}$$

Akibatnya :

$$\text{Biaya langsung total proyek } \sum_{(i,j)} (K_{ij} + S_{ij} X_{ij})$$

Dimana penjumlahan dilakukan untuk seluruh kegiatan (i,j).

### **Masalah :**

Untuk waktu penyelesaian proyek T yang diberikan (maksimum), pilih  $x_{ij}$  *meminimumkan biaya langsung total* bagi proyek. Untuk memperhitungkan waktu penyelesaian P, kita membutuhkan satu peubah lagi untuk setiap kejadian pada perumusan masalah format pemrograman linear. Peubah tambahan ini adalah  $y_1$  = waktu paling awal (yang tidak diketahui) untuk kejadian k. Setiap  $y_k$  merupakan peubah tambahan, yaitu peubah yang diperkenalkan dalam model untuk memudahkan perumusan bukannya penyajian keputusan. Namun, metode simpleks memberlakukan peubah tambahan ini sebagaimana peubah keputusan lainnya ( $x_{ij}$ ). Dalam proses penambahan kendala-kendala ini untuk seluruh kejadian, setiap peubah  $x_{ij}$  akan muncul pada tepat 1 kendaladengan jenis ini

$$Y_i + x_{ij} \leq y_{ij}$$

Yang kemudian dinyatakan dalam bentuk yang lebih umum yaitu

$$Y_i + x_{ij} - y_j \leq 0$$

Untuk melanjutkan persiapan dalam penulisan model pemrograman linear secara lengkap berikan label:

Kejadian 1= awal proyek

Kejadian n= akhir proyek,

Sehingga  $y_1 = 0$

$Y_n =$  waktu penyelesain proyek (yang tidak diketahui)

Juga perlu diperhatikan bahwa  $\sum K_{ij}$  merupakan suatu konstanta tetap yang dapat dihilangkan dari fungsi tujuan, sehingga meminimumkan biaya total langsung untuk suatu proyek setara dengan memaksimumkan  $\sum (-S_{ij}) x_{ij}$ . jadi masalah pemrograman linear adalah untuk menentukan  $x_{ij}$  ( dan  $y_k$  yang berkaitan ) agar

Memaksimumkan  $Z = \sum (-S_{ij}) x_{ij}$

Dengan kendala

$$\left. \begin{array}{l} x_{ij} \leq d_{ij} \\ x_{ij} \geq D_{ij} \\ y_i + x_{ij} - y_{ij} \leq 0 \end{array} \right\} \text{ untuk semua kegiatan } (i,j)$$
$$y_n \leq T$$

Dari sudut pandang komputasi , perumusan ini dapat diperbaiki dengan menggantikan setiap  $x_{ij}$  dengan  $x'_{ij}$  dengan:

$$x_{ij} = d_{ij} + x'_{ij}$$

Pada keseluruhan model, sehingga gugus kendala fungsional pertama ( $x'_{ij} \geq d_{ij}$  ) akan digantikan dengan kendala ketaknegatifan

$$x'_{ij} \geq 0$$

Untuk memudahkan kita juga bias memperkenalkan kendala ketaknegatifan untuk peubah yang lain

$$y_k \geq 0$$

walaupun peubah ini telah dipaksa bernilai tak negative dengan memberikan nilai  $y_1 = 0$

dikaitkan dengan kendala  $x'_{ij} \geq 0$  dan  $y_i + d_{ij} + x'_{ij}$

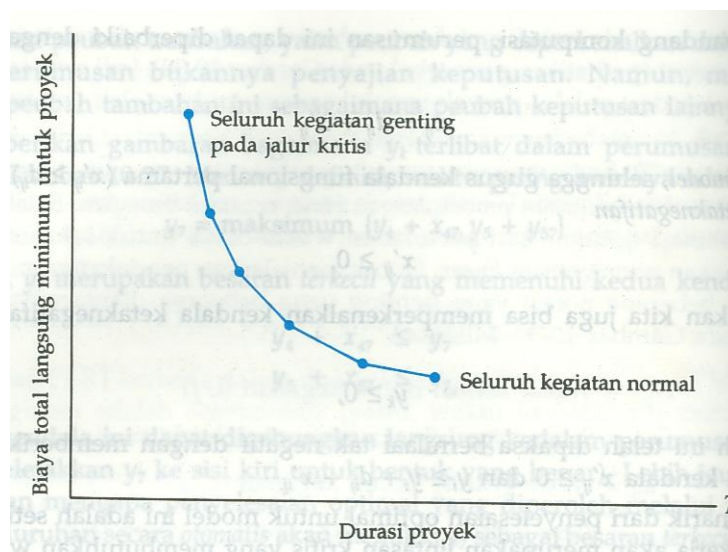
Satu sifat menarik dari penyelesaian optimal untuk model ini adalah setiap lintasan yang melalui jaringan kerja akan merupakan lintasan kritis yang membutuhkan waktu sejumlah  $T$ . alasannya adalah penyelesaiannya seperti itu akan memenuhi kendala  $y_n \leq T$  dan menghindarkan biaya tambahan dalam memperpendek waktu pada sembarang lintasan. Kunci menuju perumusan ini adalah cara  $y_k$  dimasukkan kedalam model melalui kendala  $y_i + x_{ij} - y_j \leq 0$  dalam upaya penyelesaian waktu paling awal untuk kejadian yang berkaitan (dengan diberikannya nilai  $x_{ij}$  pada penyelesaian layak dasar yang dimiliki). Karena waktu paling awal harus diperoleh secara berurutan, keseluruhan  $y_k$  diperlukan untuk tujuan utama untuk memperoleh nilai yang tepat untuk  $y_n$  (untuk nilai  $x_{ij}$  sekarang), sehingga memungkinkan kendala  $y_n \leq T$  tetap terpenuhi. Namun perolehan nilai yang tepat tidak mengharuskan setiap nilai  $y_i$  (termasuk  $y_n$ ) merupakan nilai terkecil yang memenuhi seluruh kendala  $y_i + x_{ij} \leq y_j$  kini kita akan perjelas secara ringkas, mengapa (pada kondisi yang wajar) sifat ini dipenuhi untuk penyelesaian yang optimalnya.

Perhatikan sembarang penyelesaian untuk peubah  $x_{ij}$  sedemikian sehingga setiap lintasan yang melalui jaringan kerja merupakan lintasan kritis yang membutuhkan waktu sejumlah  $T$  jika nilai-nilai peubah  $y_k$  memenuhi sifat diatas, maka  $y_k$  benar-benar merupakan waktu paling awal dengan  $y_n = T$  dan penyelesaian keseluruhan untuk  $x_{ij}$  dan  $y_k$  akan memenuhi semua kendala. Namun, jika  $y_i$  perlu dibuat bernilai lebih besar untuk tetap memenuhi kendala  $y_i + x_{ij} \leq y_j$  dan sebagainya sehingga  $y_n$  harus dibuat bernilai lebih besar yang akan melanggar kendala  $y_n \leq T$ . satu-satunya cara untuk menghindari pelanggaran kendala ini



dengan  $y_i$  yang lebih besar adalah dengan membuang waktu pelaksanaan untuk beberapa kegiatan (berurutan dengan kejadian  $i$ ) lebih kecil, yang tentunya akan meningkatkan biaya. Dengan demikian, penyelesaian optimal akan menghindari nilai  $y_k$  yang lebih besar dari yang dibutuhkan untuk memenuhi kendala  $y_i + x_{ij} \leq y_j$ .

Pada masalah yang dibahas disini, diasumsikan bahwa batas waktu  $T$  tertentu telah ditetapkan (mungkin oleh suatu kontrak) untuk penyelesaian proyek. Pada kenyataannya, beberapa proyek tidak memiliki batasan waktu seperti itu. Dalam kasus seperti ini tidak lagi jelas berapa nilai yang harus diberikan kepada  $T$  dalam perumusan pemrograman linear. Dalam situasi seperti ini, keputusan terhadap  $T$  sebenarnya adalah suatu pernyataan, kapankah terjadi pertukaran terbaik antara biaya total dan waktu total untuk proyek tersebut.

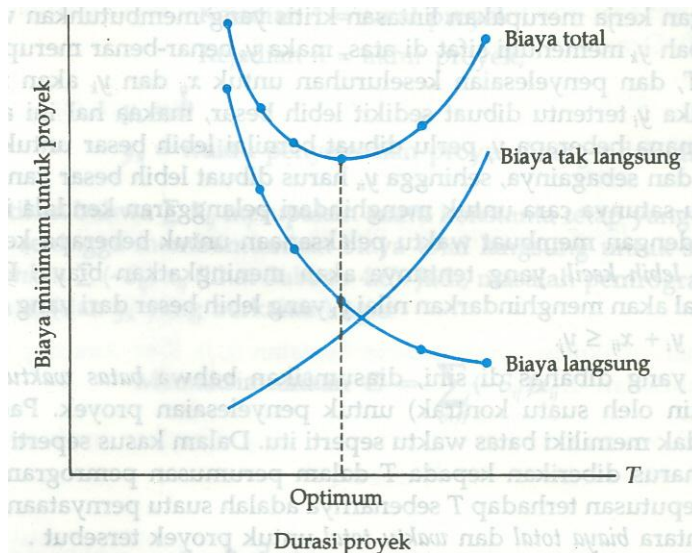


Gambar .2. Kurva/ biaya untuk keseluruhan proyek

Informasi dasar yang diperlukan untuk menjawab pertanyaan ini adalah bagaimana biaya langsung total yang minimum berubah dengan berubahnya nilai  $T$  dalam perumusan yang baru dibicarakan, sebagaimana diilustrasikan pada Gambar 2. informasi ini dapat diperoleh

dengan menggunakan pemrograman linear parametric untuk mencari penyelesaian optimal sebagian fungsi dari  $T$  pada seluruh daerahnya.

Gambar 2. menyediakan dasar yang sangat bermanfaat bagi pengambilan keputusan terhadap  $T$  (dan penyelesaian optimal  $X_{ij}$  yang berhubungan) pada saat pengaruh-pengaruh penting pada lamanya proyek merupakan suatu besaran yang tidak jelas. Namun, jika pengaruh-pengaruh ini terutama berupa pengaruh keuangan adalah tepat untuk mengkombinasikan kurva biaya langsung total minimum pada Gambar 2 dengan kurva biaya tak langsung total minimum terhadap  $t$ , seperti yang terlihat pada Gambar 3.



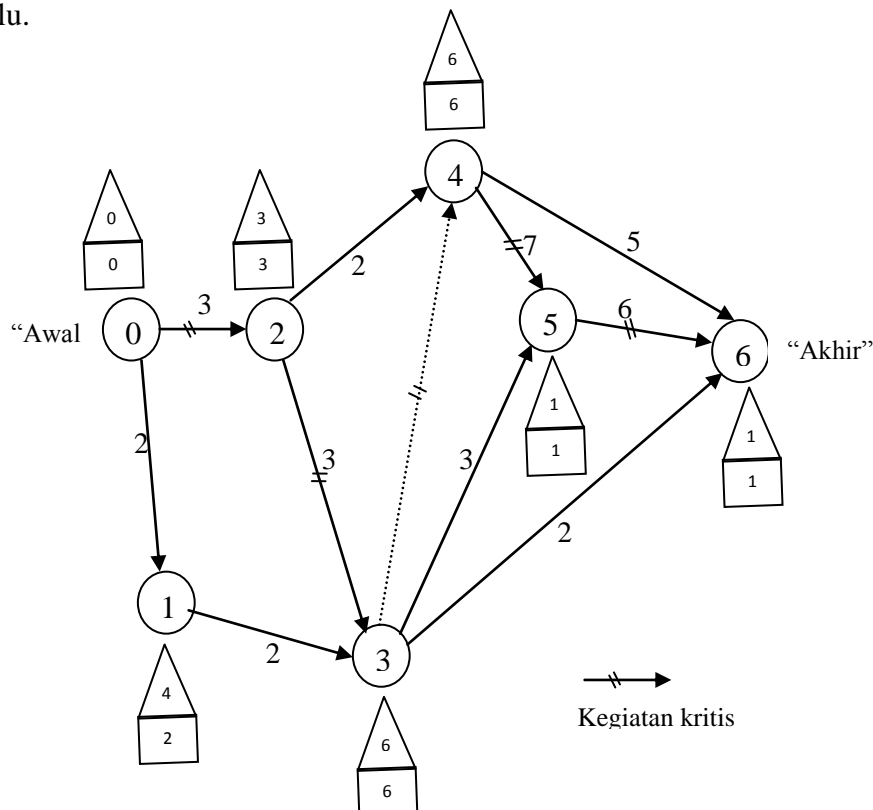
Gamba 3. Kurva biaya minimum untuk proyek keseluruhan

## 8. Contoh Soal Jaringan Kerja

- a. Perhatikan jaringan berikut yang berawal di node 0 dan berakhir di node 6. waktu yang diperlukan untuk melakukan setiap kegiatan ditunjukkan dengan panah-panah.

Perhitungan jalur kritis mencakup dua tahap. Tahap pertama disebut **perhitungan maju** (*forward pass*), di mana perhitungan dimulai dari node “awal” dan bergerak ke node “akhir”. Pada setiap node, sebuah angka dihitung yang mewakili waktu yang tercepat untuk kejadian yang bersangkutan. Angka-angka ini diperlihatkan dalam gambar berikut dengan kotak. Tahap kedua yang disebut **perhitungan mundur** (*backward pass*), memulai perhitungan dari node “akhir” dan bergerak ke node “awal”. Angka-angka yang dihitung di setiap node (yang diperlihatkan dengan segitiga) mewakili waktu terakhir dari kejadian yang bersangkutan. (Hamdy A.Taha). Anggaplah  $ES_i$  adalah waktu awal tercepat (earliest start time) untuk semua kegiatan yang berasal dari kejadian  $i$ . Jadi,  $ES_i$  mewakili waktu tercepat untuk kejadian  $i$ . Jika  $i = 0$  adalah kejadian “awal”, maka sebagai kesepakatan, untuk perhitungan jalur kritis,  $ES_0 = 0$ . Anggap  $D_{ij}$  adalah durasi kegiatan  $(i,j)$ . Perhitungan maju karena itu diperoleh dari rumus  $ES_j = \{ES_i + D_{ij}\}$ , untuk semua kegiatan  $(i, j)$  yang didefinisikan, dimana  $ES_0 = 0$ . Jadi, untuk menghitung  $ES_j$  untuk kejadian  $j$ ,  $ES_i$  untuk kejadian ekor.

dari serangkaian kegiatan-kegiatan  $(i, j)$  yang masuk masuk harus dihitung terlebih dahulu.



Perhitungan maju yang diterapkan pada gambar di atas memulai dengan  $ES_0 = 0$ , seperti diperlihatkan dalam kotak kejadian 0. Karena hanya ada satu kegiatan yang masuk (0,1) untuk kejadian 1 dengan  $D_{01} = 2$ ,

$$ES_1 = ES_0 + D_{01} = 0 + 2 = 2$$

Yang dimasukkan ke dalam kotak untuk kejadian 1. Selanjutnya, kita mempertimbangkan kejadian 2. [Perhatikan bahwa kejadian 3 tidak dapat dipertimbangkan di titik ini, karena  $ES_2$  (kejadian 2) belum diketahui.] Jadi,

$$ES_2 = ES_0 + D_{02} = 0 + 3 = 3$$

yang dimasukkan ke dalam kotak untuk kejadian 2. Kejadian berikutnya untuk dipertimbangkan adalah kejadian 3. Karena ada dua kejadian yang masuk, (1,3) dan (2, 3), kita memiliki

$$ES_3 = \max_{i=1,2} \{ES_i + D_{i3}\} = \max\{2 + 2, 3 + 3\} = 6$$

yang sekali lagi , dimasukkan ke dalam kotak kejadian 3.

Prosedur ini berlanjut dengan cara yang sama sampai  $ES_j$  dihitung untuk semua  $j$ . Jadi,

$$ES_4 = \max_{i=2,3} \{ES_i + D_{i4}\} = \max\{3 + 2, 6 + 0\} = 6$$

$$ES_3 = \max_{i=3,4} \{ES_i + D_{i4}\} = \max\{6 + 3, 6 + 7\} = 13$$

$$ES_3 = \max_{i=3,4,5} \{ES_i + D_{i5}\} = \max\{6 + 2, 6 + 5, 13 + 6\} = 19$$

Perhitungan ini menyelesaikan perhitungan maju.

Perhitungan mundur dimulai di kejadian "akhir". Tujuan dari tahap ini adalah menghitung  $LC_i$  , **waktu penyelesaian akhir** (latest completion time) untuk semua kegiatan yang datang ke kejadian  $i$ . Jadi, jika  $i$  adalah kejadian "akhir",  $LC_n = ES_n$  mengawali perhitungan mundur. Secara umum, setiap node ke  $i$ ,

Nilai-nilai LC (yang dimasukkan dalam segitiga) ditentukan sebagai berikut.

$$LC_6 = ES_6 = 19$$

$$LC_5 = LC_6 - D_{56} = 19 - 6 = 13$$

$$LC_4 = \min_{j=5,6} \{LC_j - D_{4j}\} = \min\{13 - 7, 19 - 5\} = 6$$

$$LC_3 = \min_{j=4,5,6} \{LC_j - D_{3j}\} = \min\{6 - 0, 13 - 3, 19 - 2\} = 6$$

$$LC_2 = \min_{j=3,4} \{LC_j - D_{2j}\} = \min\{6 - 3, 6 - 2\} = 3$$

$$LC_1 = LC_3 - D_{13} = 6 - 2 = 4$$

$$LC_0 = \min_{j=1,2} \{LC_j - D_{0j}\} = \min\{4 - 2, 3 - 3\} = 0$$

Perhitungan mundur sekarang telah diselesaikan.

Kegiatan-kegiatan jalur kritis sekarang diidentifikasi dengan menggunakan hasil perhitungan maju dan perhitungan mundur. Sebuah kegiatan(i,j) berada di jalur kritis bila kegiatan tersebut memenuhi ketiga kondisi berikut ini

$$\begin{aligned} ES_i &= LC_i \\ ES_j &= LC_j \\ ES_j - ES_i &= LC_j - LC_i = D_{ij} \end{aligned}$$

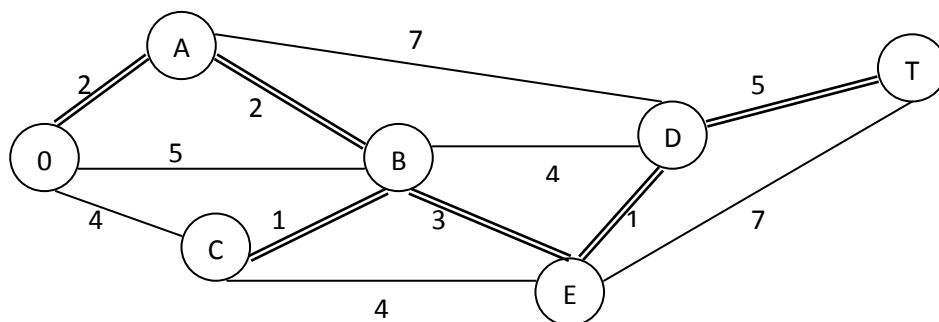
Kondisi ini sebenarnya menyatakan bahwa tidak ada waktu senggang atau waktu mengembang antara awal tercepat(penyelesaian) dan awal terakhir (penyelesaian) dari kegiatan kritis yang bersangkutan.

Kegiatan-kegiatan (0,2), (2,3),(3,4),(4,5) dan (5,6) mendefinisikan jalur kritis dari gambar di atas. Sebenarnya jalur kritis mewakili durasi terpendek yang diperlukan untuk

menyelesaikan proyek yang bersangkutan. Perhatikan bahwa kegiatan-kegiatan (2,4),(3,5),(3,6),(4,6) memenuhi kondisi (1) dan (2) untuk kegiatan-kegiatan kritis tetapi tidak memenuhi kondisi(3). Jadi, kegiatan-kegiatan ini tidak kritis. Perlu juga diperhatikan bahwa jalur kritis harus membentuk rantai kegiatan-kegiatan yang berhubungan, yang merentang dalam jaringan tersebut. Dari awal sampai akhir.

- b.** Jika di kawasan “Alam Hijau” akan dipasang telepon yang dapat menghubungkan stasiun-stasiun yang ada, maka kabel teleponnya harus dipasang pada jalan-jalan sebagai berikut:

- 1) Mulai dari stasiun O. Stasiun terdekat dengan O adalah stasiun A dengan jarak 2. Hubungkan O dengan A.
- 2) Stasiun terdekat dari O atau A adalah B. Karena B lebih dekat pada A, maka hubungkan B dengan A.
- 3) Stasiun terdekat dari O, A, atau B adalah C. Karena C lebih dekat pada B, hubungkan C dengan B.
- 4) Stasiun terdekat dari O, A, B, atau C adalah E. Karena E lebih dekat pada B, hubungkan E dengan B.
- 5) Stasiun terdekat O, A, B, C, atau E adalah D. Karena D lebih dekat pada E, hubungkan D dengan E.
- 6) Satu-satunya stasiun yang belum dihubungkan adalah T karena jaraknya lebih dekat ke D, maka hubungkan T dengan D.



Gambar 1. Jalur kabel telepon yang harus dipasang

Dengan demikian, kabel-kabel telepon itu harus dipasang pada jalan-jalan yang menghubungkan stasiun-stasiun O dengan A, A dengan B, B dengan C, B dengan E, E dengan D, dan D dengan T, dengan kabel sepanjang total 14 satuan panjang.

- c. Sebuah bank akan menghubungkan terminal komputer pada setiap kantor cabang ke Suatu komputer di kantor pusat dengan menggunakan saluran telpon khusus dengan peralatan telekomunikasi. Saluran telpon dari suatu kantor cabang tidak harus dihubungkan secara langsung ke kantor pusat. Sambungan ini bisa merupakan hubungan tak langsung dengan menghubungkannya dengan kantor cabang lain yang telah terhubung (secara langsung atau tidak) kepada kantor pusat. Satu-satunya persyaratan adalah setiap kantor cabang harus dihubungkan dengan rute yang sama menuju kantor pusat.
- Biaya untuk saluran telpon khusus ini berbanding lurus terhadap jarak yang harus ditempuh. Tabel berikut memberikan jarak(dalam mil) antara pasangan kantor cabang.

*Jarak antara kantor-kantor*

	KP	B1	B2	B3	B4	B5
kantor pusat	-	190	70	115	270	160
cabang 1	190	-	100	240	215	50
cabang 2	70	100	-	140	120	220
cabang 3	115	240	140	-	175	80
cabang 4	270	215	120	175	-	310
cabang 5	160	50	220	80	310	-

Masalahnya adalah menentukan pasangan kantor mana yang harus dihubungkan secara langsung oleh saluran telpon khusus dalam upaya menghubungkan setiap cabang ( secara langsung atau tidak ) kepada kantor pusat dengan biaya total minimum.

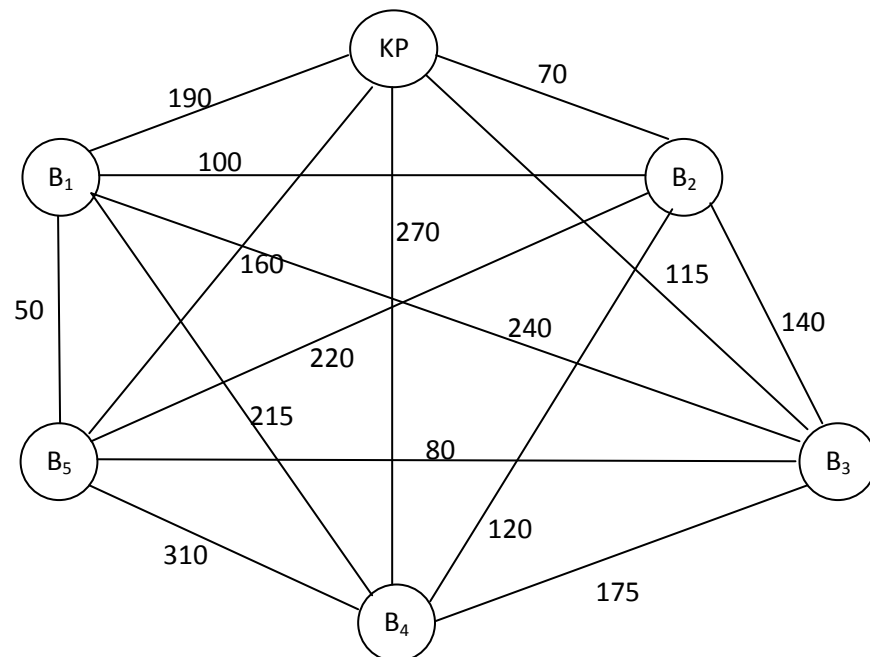
- Jelaskan bagaimana masalah ini sesuai dengan masalah pohon penjangkau minimum.
- Gunakan algoritma yang telah dijelaskan untuk menyelesaikan masalah ini.

**Jawaban :**

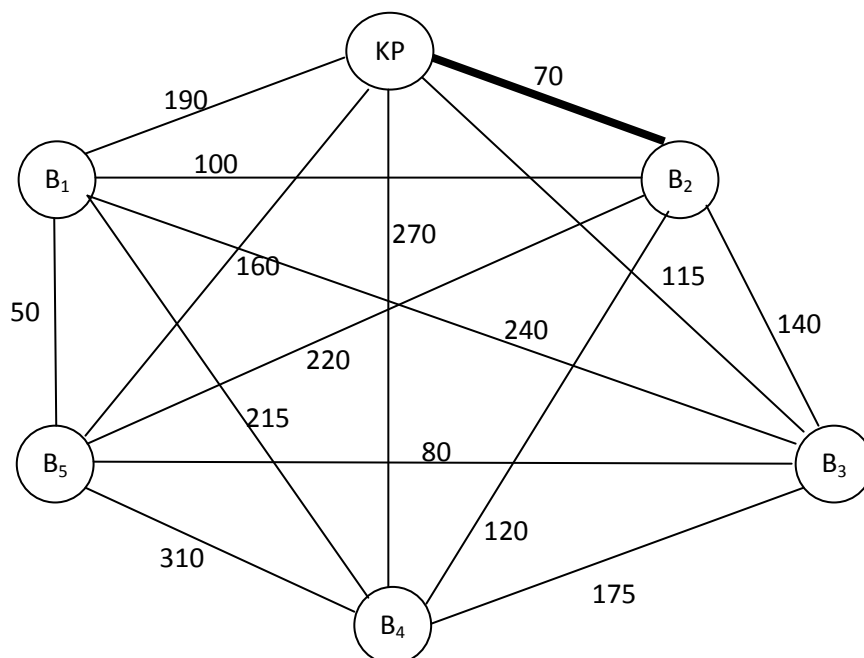
- Karena dalam kasus ini akan dibuat saluran telepon khusus dari suatu titik asal ke tujuan dimana tidak harus dihubungkan secara langsung ke titik asal, tetapi diperhitungkan yaitu semua titik tujuan mempunyai rute ketitik asal. Dalam kasus ini, biaya saluran telepon khusus berbanding lurus terhadap jarak yang harus ditempuh. Jadi kasus ini

sangat cocok untuk menerapkan masalah penjangkau minimum sehingga jarak menjadi minimum sedemikian sehingga biaya juga menjadi minimum.

**(b) Penyelesaian**

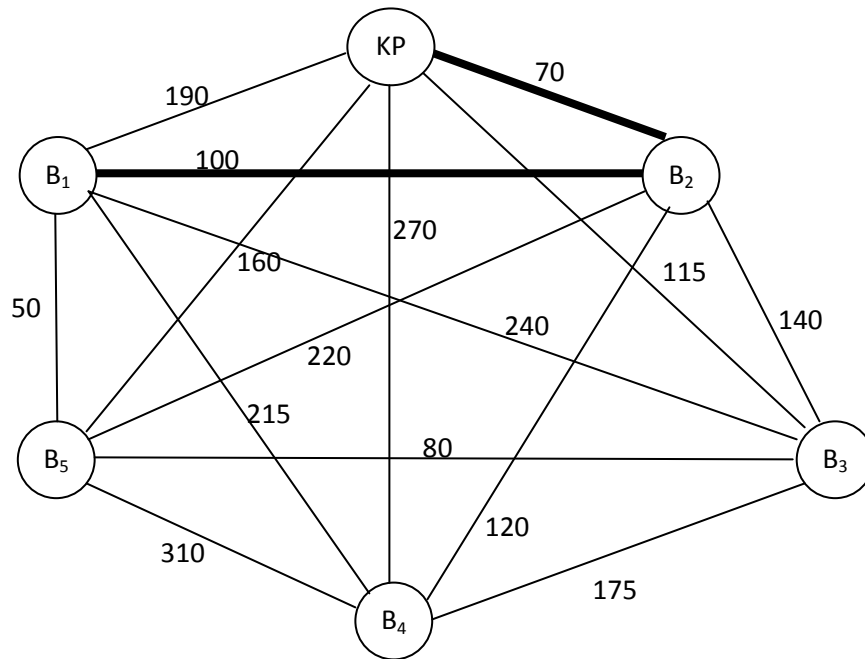


Untuk memulai langkah pencarian, pilih sembarang simpul, misalnya KP. Simpul terdekat yang dihubungkan dengan simpul KP adalah simpul B<sub>2</sub>.

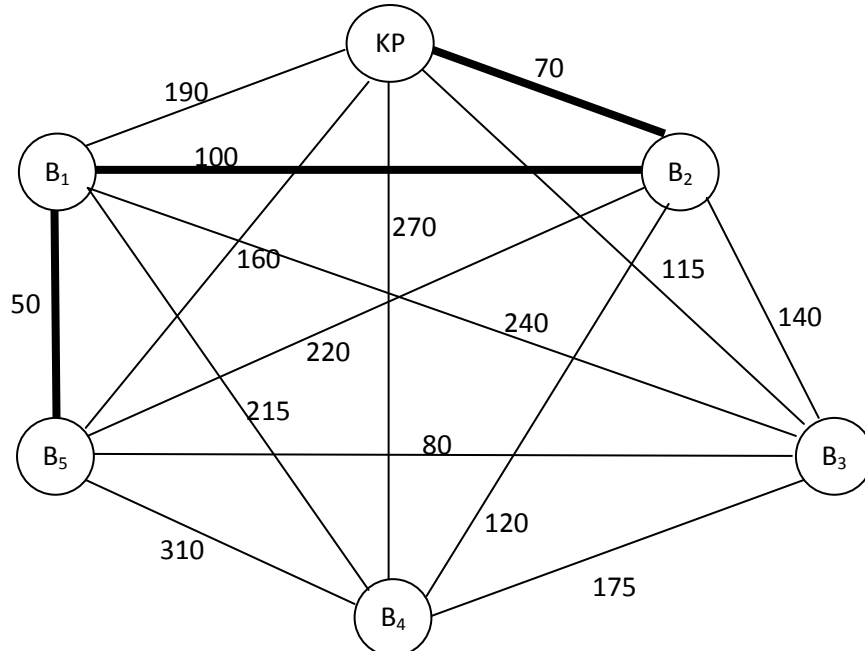


Kemudian hubungkan simpul B<sub>2</sub> menuju simpul terdekat yaitu simpul B<sub>1</sub>.

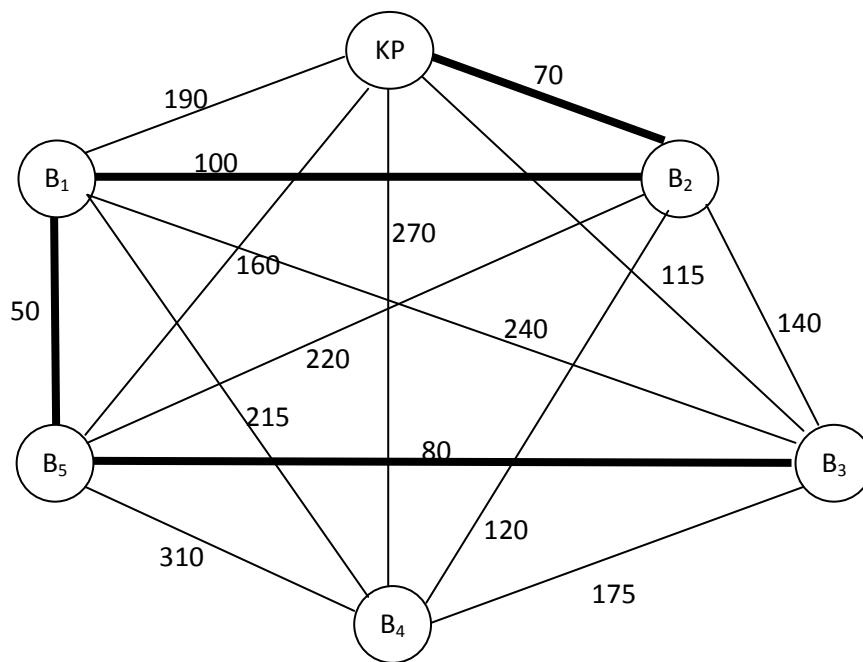




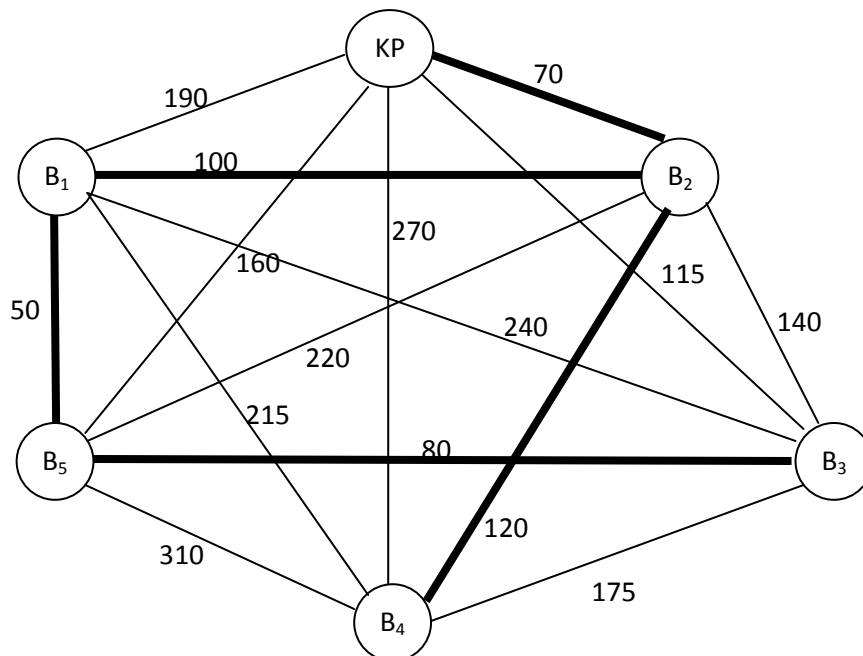
Hubungkan simpul  $B_1$  dengan simpul terdekat (simpul  $B_5$ ). Hubungkan simpul  $B_5$  ke simpul  $B_1$ .



Hubungkan simpul  $B_5$  dengan simpul terdekat ( $B_3$ ). Hubungkan simpul  $B_3$  ke simpul  $B_5$ .



Jadi tinggal satu simpul yang belum terhubung yaitu simpul  $B_4$ . Hubungkan simpul  $B_4$  dengan simpul terdekat yaitu simpul  $B_2$ .



Sekarang semua simpul telah terhubung, sehingga akan merupakan penyelesaian yang diinginkan. Total jarak yang ditempuh adalah  $70 + 100 + 50 + 80 + 115 = 315$  mil.

**d. Problem Page 40-41 (Frederick S Hillier, 1994)**

**9.8-13.** Consider three-estimate approach, the three estimates for one of the activities are as follows : optimistic estimate = 30 days, most likely estimate = 36 days. Pessimistic estimate = 48 days. What are resulting estimate of the expected value and variance of the time required by the activity?

Jawab :

Diketahui : waktu optimis (a) = 30 hari

Waktu pesimis (b) = 48 hari

Waktu normal (m) = 36 hari

Ditanyakan : 1). Nilai harapan

2). Variansinya

Maka

1). Nilai harapannya

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{a + 4m + b}{6} \\ &= \frac{30 + 4(36) + 48}{6} \\ &= \frac{30 + 144 + 48}{6} \\ &= \frac{222}{6} \\ &= 37 \text{ hari}\end{aligned}$$

2). Variansinya

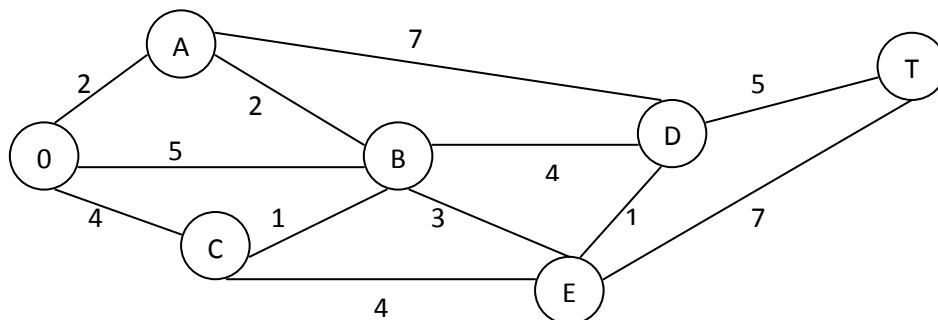
$$\begin{aligned}\tau^2 &= \left(\frac{b-a}{6}\right)^2 \\&= \left(\frac{48-30}{6}\right)^2 \\&= \left(\frac{18}{6}\right)^2 \\&= \frac{324}{36} \\&= 9\end{aligned}$$

$$\tau = 3 \text{ hari}$$

## 9. Soal Mandiri dan Tim

- a. Jika bilangan-bilangan yang ada pada setiap busur dari Gambar 1 menyatakan jarak dari satu stasiun (node) ke stasiun lainnya, maka rute terpendek dari stasiun 0 ke stasiun T dapat ditentukan seperti terlihat pada Tabel 1. berikut.

Gambar Jaringan



Tabel 1.

Iterasi \ Stasiun	Bobot $d(s,j)$						
	0	A	B	C	D	E	T
1	0	2	5	4			
		*					
2	0	2	4	4	9		
		*	*				
3	0	2	4	4	8	7	
		*	*			*	
4	0	2	4	4	8	7	14
		*	*		*	*	
5	0	2	4	4	8	7	13
		*	*		*	*	*

b. Misalkan bahwa pendekatan tiga estimasi digunakan pada pembuatan rumah,

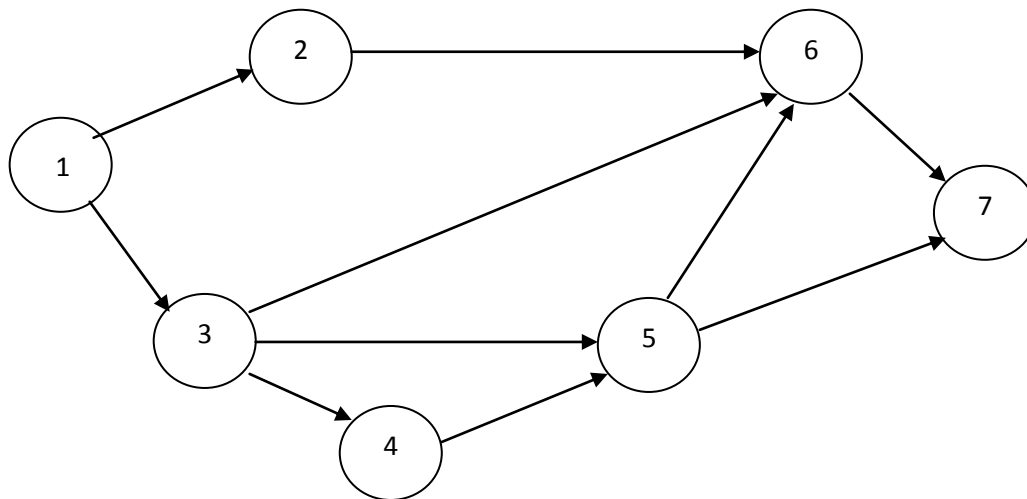
**Tabel 1. Nilai Harapan dan Variansi Setiap Kegiatan Contoh Pembangunan Rumah**

Kegiatan	Estimasi Optimis	Estimasi paling mungkin	Estimasi Pesimis	Nilai harapan $t_e$	Variansi $\tau^2$
(1,2)	1	2	3	2	$\frac{1}{9}$
(2,3)	2	$3\frac{1}{2}$	8	4	1
(3,4)	6	9	18	10	4
(4,5)	1	$4\frac{1}{2}$	5	4	1
(4,6)	4	$5\frac{1}{2}$	10	6	1
(4,7)	3	$7\frac{1}{2}$	9	7	1
(5,7)	4	4	10	5	1
(6,8)	5	$6\frac{1}{2}$	11	7	1
(7,9)	3	9	9	8	1
(8,10)	5	8	17	9	4
(9,11)	4	4	4	4	0
(9,12)	1	$5\frac{1}{2}$	7	5	1
(10,13)	1	2	3	2	$\frac{1}{9}$
(12,13)	5	$5\frac{1}{2}$	9	6	$\frac{4}{9}$

Sumber : Frederick. S. Hiller, 1994

Perhatikan Nilai harapan yang diberikan sama tidak dengan waktu yang digunakan ?

- c. Consider the following project network. By using the PERT three-estimate approach, suppose that the usual three estimates for the time required (in weeks) for each of these activities are as follows:

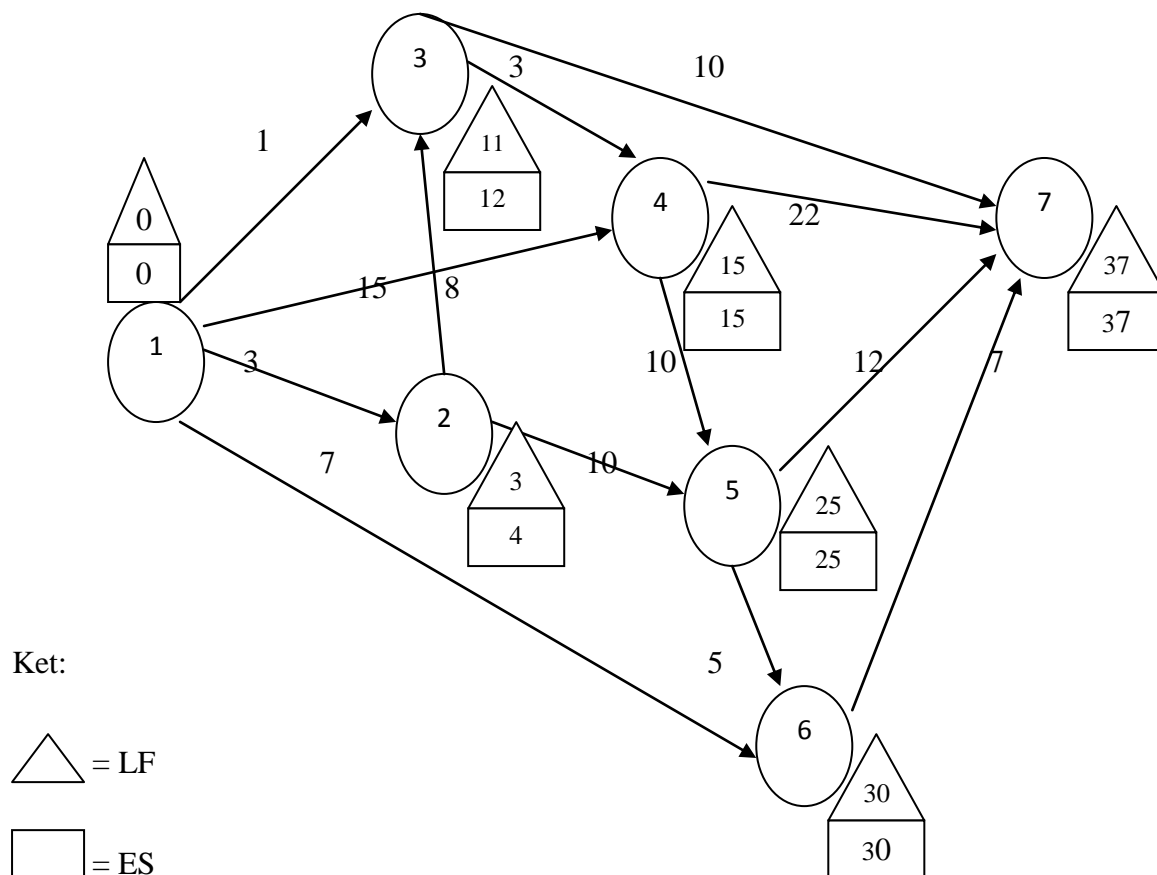


Activity	Optimistic Estimate (a)	Most Likely Estimate (m)	Pessimistic Estimate (b)
1→2	28	32	36
1→3	22	28	32
2→6	26	36	46
3→4	14	16	18
3→5	32	32	32
3→6	40	52	74
4→5	13	16	24
5→6	16	20	26
5→7	26	34	42
6→7	12	16	30

The project is ready to start now and the deadline for completing the project is 100 weeks hence.

- 1). On the basis of the estimates just listed, calculate the **expected value** and **standard deviation** of the time required for each activity;
- 2) Using expected times, determine the critical path for the project;
- 3) Find the approximate probability that the project will be completed by the deadline.

d. Determine the critical path for project (b)



- e. Carilah tiga soal dari Teks Book Operation Research tentang masalah Jaringan Kerja yang anda peroleh di perpustakaan untuk tiap Tim, dan kerjakanlah soal tersebut.



