

BAB I PENDAHULUAN

1.1. Pendahuluan

Perhitungan deformasi pada sistem struktur ditujukan untuk dua hal yaitu:

1. Untuk kebutuhan kelayakan struktur (*serviceability*)
2. Pada benda statis dan *deformable*, sistem struktur paling banyak berbentuk statis tertentu, dimana untuk menganalisisnya menggunakan persamaan keseimbangan dan diagram benda bebas (*free body diagram*). Disamping itu terdapat pula struktur statis tak tentu yang memiliki metodologi solusi yang berbeda.

Metode yang digunakan untuk menghitung deformasi ada 2, yaitu :

1. Metode Klasik

Metode Klasik biasanya menggunakan dasar geometri atau energi (metode energi),

Metode perhitungan yang berdasarkan geometri adalah

- metode luas momen (*momen area method*)
- metode Balok Padanan (*conjugate-beam method*)

Metode perhitungan yang berdasarkan metode energi adalah:

- metode kerja maya
- teorema castigliano.

Metode lainnya adalah metode integrasi

2. Metode Matriks

1.2. Diagram Defleksi dan Kurva Elastik

Analisa struktur adalah proses perhitungan untuk menentukan respon dari suatu struktur yang berupa reaksi tumpuan, gaya dalam dan **perpindahan (*displacement*)** akibat pengaruh luar (**aksi**).

Perpindahan pada struktur tersebut dapat berupa :

- Defleksi / Translasi : Jarak pergerakan titik pada struktur
- Rotasi : Sudut putar garis singgung pada kurva elastis (atau garis normalnya) di satu titik.

Perpindahan struktur dapat terjadi dikarenakan oleh beberapa sebab berupa pengaruh luar (aksi) diantaranya adalah :

- Beban luar
- Pengaruh perubahan suhu
- Kesalahan pabrikasi
- Akibat penurunan (*settlement*)

Dalam suatu perencanaan, nilai perpindahan (defleksi) harus dibatasi untuk menghindari retak pada jenis material yang bersifat getas seperti beton atau plester. Lebih jauh, struktur tidak boleh mengalami getaran atau mengalami defleksi secara berlebihan. Yang jauh lebih penting, nilai defleksi pada suatu titik pada struktur harus ditentukan dalam upaya menganalisis struktur **STATIS TAK TENTU**.

Pada struktur-struktur berikut yang akan dianalisis dengan asumsi bahwa material tersebut memiliki **RESPON LINIER ELASTIK** terhadap beban yang diterimanya.

Artinya, pada kondisi tersebut, suatu struktur yang menerima beban dan berdefleksi akan kembali pada kondisi awalnya (tidak berdefleksi) jika tidak dibebani lagi.

Pada dasarnya defleksi yang terjadi pada struktur disebabkan oleh **GAYA DALAM** berupa gaya normal, gaya geser ataupun momen lentur.

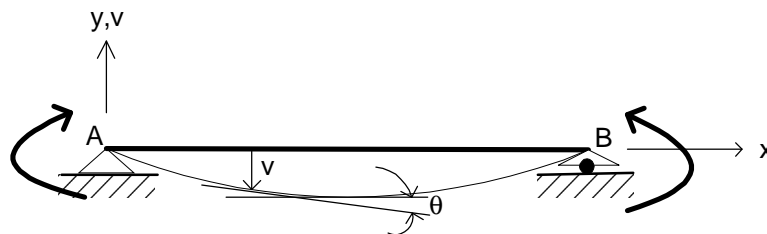
Pada balok dan rangka kaku defleksi terbesar seringkali disebabkan oleh momen lentur dalam (**internal bending**) sedangkan gaya aksial dalam menyebabkan defleksi pada rangka batang (**truss**).

1.3. Persamaan Differensial Defleksi Balok

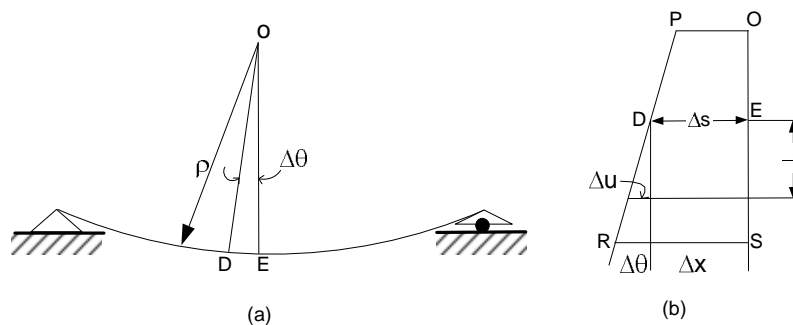
Perhatikan gambar (1.1) yang menunjukkan balok dengan tumpuan sederhana yang mengalami defleksi akibat beban momen. Defleksi (perpindahan vertikal) v pada arah y bervariasi sepanjang bentang AB. Bentuk defleksi ini disebut KURVA ELASTIK.

Pada kenyataannya, pada perpindahan tersebut terdapat rotasi pada balok.

Rotasi (θ) pada setiap titik adalah SUDUT ANTARA ABSIS X DENGAN GARIS SINGGUNG TERHADAP KURVA ELASTIK



GAMBAR 1.1. Deformasi pada Balok dengan Tumpuan Sederhana



GAMBAR 1.2. Deformasi pada Balok (a) Kurva Elastik ;
(b) Deformasi pada satu blok Balok

Dari geometri pada gambar 1.2. dapat dibentuk persamaan sebagai berikut :

Dari gambar (a) :

$$\Delta s = \rho \Delta \theta \quad (1.1)$$

Kurvturnya didefinisikan :

$$\kappa = 1/\rho = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} \quad (1.2)$$

Dari gambar (b) :

$$\Delta u = -y\Delta\theta \quad (1.3)$$

Tanda negatif dikarenakan oleh perpanjangan terjadi pada y negatif. Bila kedua sisi dibagi dengan Δs , maka:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta s} = -y \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \quad \text{-----} \rightarrow \quad \frac{du}{ds} = -y \frac{d\theta}{ds} \quad (1.4)$$

Karena du/ds adalah regangan aksial pada searah pada jarak y dari garis netral, maka:

$$\frac{du}{ds} = e \quad (1.5)$$

Dari persamaan (1.2) dan (1.5), diperoleh :

$$\frac{1}{r} = k = -\frac{e}{y} \quad (1.6)$$

Karena : $e = \frac{S}{E}$ dan $S = -\frac{My}{I}$, dan disubstitusi ke atas , menjadi :

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI} \quad (1.7)$$

atau dari pers. (1.2) diperoleh: $\frac{1}{r} = \frac{d\theta}{ds}$, sehingga:

$$d\theta = \frac{M}{EI} dx \quad (1.8)$$

Analisa geometrik menghasilkan definisi lain mengenai kurvatur, yaitu:

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2v/dx^2}{\sqrt{(1+dv/dx)^3}} \quad (1.9)$$

Gunakan persamaan (1.7) sehingga:

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2v/dx^2}{\sqrt{(1+dv/dx)^3}} \quad (1.10)$$

Untuk asumsi defleksi yang kecil, $dv/dx \ll 1$. Sehingga penyebut pada sisi kanan sama dengan 1, sehingga :

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (1.11)$$

Dari persamaan $\frac{1}{r} = \frac{M}{EI}$ dan persamaan $\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI}$, dapat disimpulkan bahwa:

Kurvatur ($\frac{1}{r}$) adalah turunan kedua perpindahan terhadap arah lateralnya.

BAB.II METODE BALOK PADANAN (*CONJUGATE BEAM*)

Metoda ini adalah metoda yang sangat serbaguna. Diketahui bahwa hubungan antara momen lentur, gaya geser dan beban adalah:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{dV}{dx} = -q(x) \quad (2.1)$$

Sedangkan dari pers (1.11) pada Bab I diketahui :

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = \frac{M}{EI} \quad (2.2)$$

dimana:

M : Momen

V : Geser/lintang

q(x) : beban

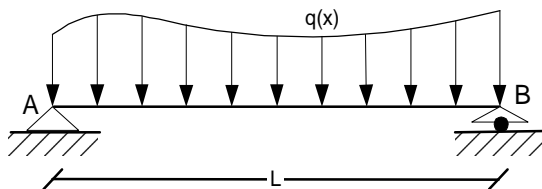
v : perpindahan/lendutan/displacement

• : slope/rotasi

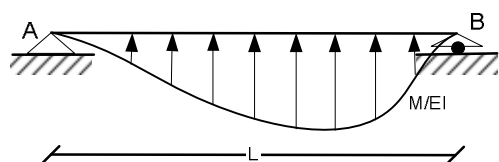
EI : kekakuan lentur

Perbandingan dari dua persamaan tersebut menunjukkan bahwa:

Jika $\frac{M}{EI}$ adalah beban pada suatu balok maya (fiktif) atau disebut sebagai balok padanan (*conjugate beam*), maka gaya geser & momen yang dihasilkannya adalah identik dengan slope/rotasi dan defleksi dari balok yang sebenarnya. (Gambar 2.1)



Gambar 2.1 (a) Balok sebenarnya



(b) Balok Conjugate

Dari metoda *Conjugate Beam*, kita dapat menyimpulkan:

Teorema 1:

Perpindahan/lendutan/displacement ($v = \bullet$) pada suatu titik di balok yang sebenarnya adalah identik dengan nilai momen (M') pada titik yang sama pada *Conjugate beam*.

$$v = M' \quad (2.3)$$

Teorema 2:

Slope/rotasi Q pada suatu titik di balok yang sebenarnya adalah identik dengan geser V' pada titik yang sama pada *Conjugate beam*.

$$\bullet = V' \quad (2.4)$$

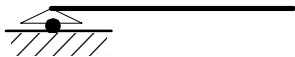

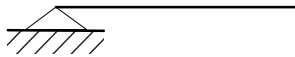
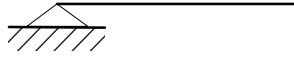
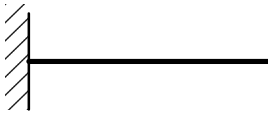



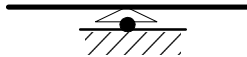
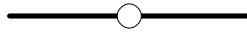

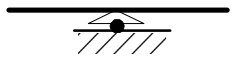
Prosedur untuk menganalisis balok dengan Metode *Conjugate Beam*.

1. Pada balok yang sebenarnya, akibat beban yang bekerja gambarkan diagram Momen (M).
2. Gambarkan balok fiktif/maya atau disebut sebagai *conjugate beam*, dengan panjang yang sama dengan balok yang sebenarnya. Kondisi internal & eksternal kontinuitas serta tumpuan dibuat sama seperti balok sebenarnya sesuai dengan tabel 2.1. Sedangkan beban pada *conjugate beam* adalah diagram $\frac{M}{EI}$, dengan nilai M adalah momen pada langkah 1. Arah beban ini adalah ke arah serat tertekan. (seperti gambar 2.1.b).
3. Analisis *conjugate beam*, yaitu mencari Reaksi Perletakan, nilai Momen dan Geser, bila perlu gambarkan bidang momen & bidang gesernya.
4. Gunakan teorema 1 & 2, persamaan (2.3) untuk mendapatkan nilai defleksi dan persamaan (2.4) untuk mendapatkan nilai slope/rotasi.

Perjanjian tanda pada geser dan momen adalah:

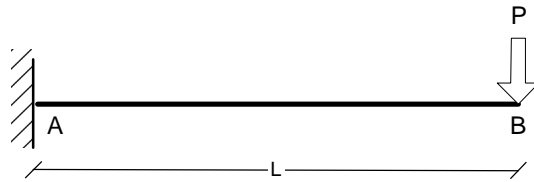
Momen positif pada *conjugate beam* diartikan sebagai perpindahan/defleksi ke bawah (\downarrow) pada balok yang sebenarnya. sedangkan Gaya geser positif pada *conjugate beam* diartikan sebagai slope/rotasi yang bernilai positif (searah jarum jam) pada balok sebenarnya,

Tabel 2.1 Hubungan antara balok sebenarnya dengan *Conjugate Beam*

Tumpuan atau Penghubung pada Balok Sebenarnya	Tumpuan atau Penghubung pada Conjugate Beam
Tumpuan Rol ($\theta = ?$, $\Delta = 0$) 	Tumpuan Rol ($V = ?$, $M = 0$) 
Tumpuan Sendi ($\theta = ?$, $\Delta = 0$) 	Tumpuan Sendi ($V = ?$, $M = 0$) 
Tumpuan Jepit ($\theta = 0$, $\Delta = 0$) 	Ujung Bebas ($V = 0$, $M = 0$) 
Ujung Bebas ($\theta = ?$, $\Delta = ?$) 	Tumpuan Jepit ($V = ?$, $M = ?$) 
Tumpuan Rol/Sendi Dalam ($\theta = ?$, $\Delta = 0$) 	Penghubung Sendi ($V = ?$, $M = 0$) 
Penghubung sendi ($\theta_L = ?$, $\theta_R = ?$, $\Delta = ?$) 	Tumpuan Rol/Sendi Dalam ($\theta_L = ?$, $\theta_R = ?$, $\Delta = ?$) 

Contoh 1. Defleksi pada balok kantilever

Hitung defleksi vertikal dan rotasi pada titik B dari balok

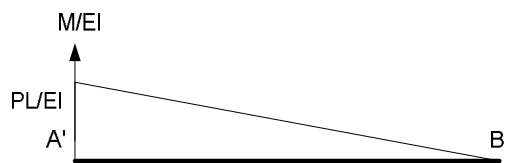


Solusi:

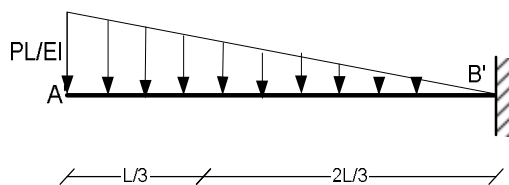
1. Gambarkan bidang momen akibat beban, selanjutnya gambarkan diagram $\frac{M}{EI}$ -nya.



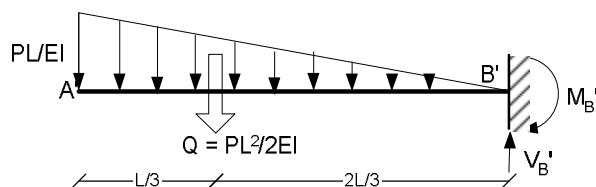
Bidang Momen



2. Gambarkan Conjugate Beam dengan $\frac{M}{EI}$ sebagai beban. Kondisi jepit pada ujung A ubah menjadi bebas. kondisi bebas pada ujung B ubah menjadi jepit. Karena akibat beban pada serat bawah balok AB mengalami tekan sepanjang AB, maka beban $\frac{M}{EI}$ pada conjugate beam bekerja kearah bawah.



3. Selesaikan conjugate beam. Hitung gaya geser pada titik B untuk mendapatkan nilai Q_B . Hitung momen pada titik B untuk mendapatkan nilai Δ_B .



Q = Resultan beban merata segitiga

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{PL}{EI} \right) (L) = \frac{PL^2}{2EI}$$

Gunakan persamaan keseimbangan

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{PL^2}{2EI} \left(\frac{2L}{3} \right) + M_B' = 0 \quad \Rightarrow \quad M_B' = \frac{PL^2}{3EI}$$

sehingga $\Delta_B = \frac{PL^2}{3EI} \quad (\downarrow)$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{PL^2}{2EI} + V_B' = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B' = \frac{PL^2}{2EI}$$

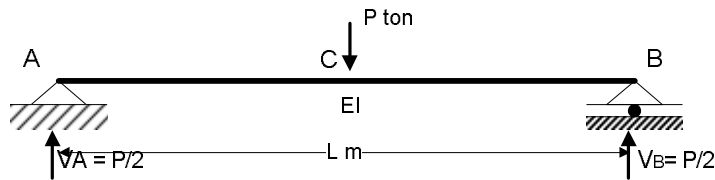
sehingga $Q_B = \frac{PL^2}{2EI} \quad (\text{searah jarum jam})$

Catatan:

Momen positif diasumsikan sebagai defleksi pada balok sebenarnya dengan arah ke bawah. Gaya geser positif diartikan sebagai rotasi pada balok sebenarnya yang searah jarum jam.

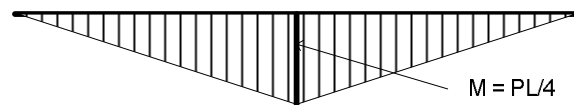
Contoh 2. Defleksi dan Rotasi pada balok sederhana tumpuan sendi rol

Hitung defleksi vertikal pada titik c dan rotasi pada titik A dan B dari balok sederhana 2 tumpuan berikut:

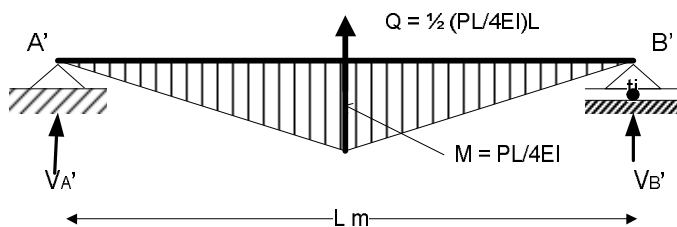


Solusi:

1. Gambarkan bidang momen akibat beban, selanjutnya gambarkan diagram $\frac{M}{EI}$ -nya.



2. Gambarkan Conjugate Beam dengan $\frac{M}{EI}$ sebagai beban. Tumpuan Sendi Rol tidak berubah. Karena akibat beban pada balok sebenarnya menyebabkan terjadi momen positif dimana serat tekan sepanjang AB berada diatas, maka beban $\frac{M}{EI}$ pada conjugate beam bekerja kearah atas.



3. Selesaikan conjugate beam. Hitung beban total akibat beban merata segitiga (Q) dan hitung reaksi perletakan akibat beban Q yaitu :

Q = Resultan beban merata segitiga

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{PL}{4EI} \right) (L) = \frac{PL^2}{8EI}$$

Gunakan persamaan keseimbangan untuk mencari reaksi perletakan:

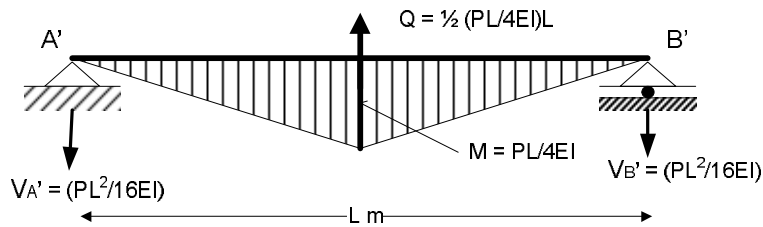
$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad + \frac{PL^2}{8EI} \left(\frac{L}{2} \right) + V_A' \cdot L = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A' = -\frac{PL^2}{16EI} \quad (\downarrow)$$

$$\text{sehingga } \Rightarrow \quad q_A = \frac{PL^2}{16EI}$$

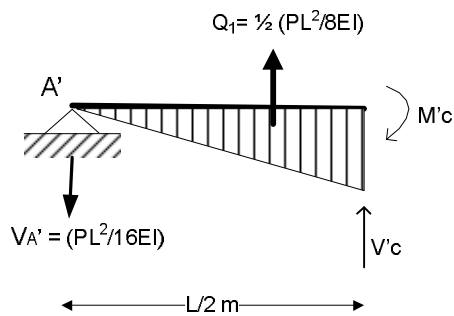
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad + \frac{PL^2}{8EI} - \frac{PL^2}{16EI} + V_B' = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B' = -\frac{PL^2}{16EI} \quad (\downarrow)$$

sehingga δ

$$q_B = \frac{PL^2}{16EI}$$



4. Untuk menghitung M_c , tinjau conjugate beam pada arah kiri:



$$\begin{aligned} \sum M_C = 0 \quad \delta \quad & + Q_1 \left(\frac{L}{3} \right) - V'_A \cdot \frac{L}{2} + M'_C = 0 \\ & + \left(\frac{PL^2}{16EI} \right) \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{L}{2} \right) - \left(\frac{PL^2}{16EI} \right) \left(\frac{L}{2} \right) + M'_C = 0 \\ & - \left(\frac{PL^2}{16EI} \right) \left(\frac{2L}{6} \right) + M'_C = 0 \quad \delta \quad M'_C = \frac{PL^3}{48EI} \end{aligned}$$

sehingga δ

$$\Delta_C = \frac{PL^3}{48EI} \quad (\downarrow)$$

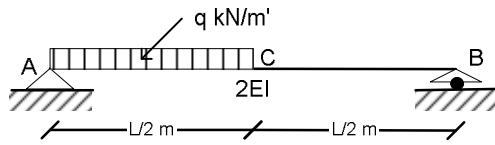
$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 \quad \delta \quad & + Q_1 - V'_A + V'_C = 0 \\ & + \left(\frac{PL^2}{16EI} \right) - \left(\frac{PL^2}{16EI} \right) + V'_C = 0 \quad \delta \quad V'_C = 0 \end{aligned}$$

sehingga δ

$$q_C = 0$$

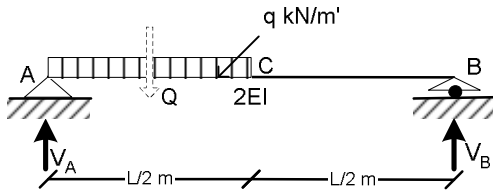
Contoh 3 Defleksi dan Rotasi pada balok sederhana tumpuan sendi rol dengan bentuk beban merata

Selesaikan balok menganjur berikut ini dengan menghitung besarnya θ_B dan Δ_C menggunakan metode Conjugate Beam(Balok Padanan)!



Solusi:

1. Menghitung bidang momen.



$$Q = q \cdot \frac{1}{2} L = \frac{1}{2} qL$$

$$\Sigma M_A = 0$$

$$-V_B \cdot L + Q \cdot \frac{1}{4} L = 0$$

$$V_B = \frac{1}{4} Q \quad (\uparrow)$$

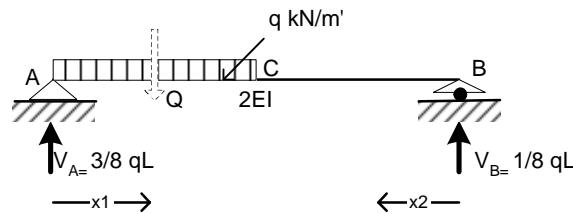
$$V_B = \frac{1}{8} qL \quad (\uparrow)$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$V_A + V_B - Q = 0$$

$$V_A + \frac{1}{8} qL - \frac{1}{2} qL = 0$$

$$V_A = \frac{3}{8} qL \quad (\uparrow)$$



$$M_{x_1} = \left(\frac{3}{8} qL x_1 - \frac{1}{2} q x_1^2 \right)$$

$$x_1 = 0 \quad \rightarrow \quad M_{x_1} = 0$$

$$x_1 = L/4 \quad \rightarrow \quad M_{x_1} = \frac{1}{16} qL^2$$

$$x_1 = L/2 \quad \rightarrow \quad M_{x_1} = \frac{1}{16} qL^2$$

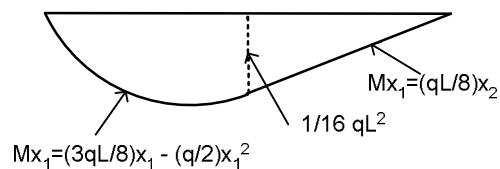
$$M_{x_2} = -\left(-\frac{1}{8} qL \cdot x_2 \right) = \frac{1}{8} qL x_2$$

$$x_2 = 0 \quad \rightarrow \quad M_{x_2} = 0$$

$$x_2 = L/4 \quad \rightarrow \quad M_{x_2} = \frac{1}{32} qL^2$$

$$x_2 = L/2 \quad \rightarrow \quad M_{x_2} = \frac{1}{16} qL^2$$

Dari persamaan yang diperoleh, dapat digambarkan:



2. Gambarkan conjugate beam, dimana beban pada conjugate beam adalah :

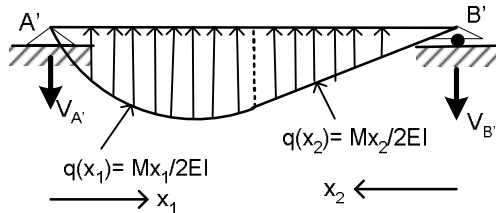
$$q(x) = \frac{M_x}{EI}$$

Karena pada struktur diperoleh 2 persamaan momen (M_x), maka; bebannya menjadi

$$q(x_1) = \frac{M_{x1}}{2EI} = \frac{3qLx_1}{16EI} - \frac{qx_1^2}{4EI}$$

$$q(x_2) = \frac{M_{x2}}{2EI} = \frac{qLx_2}{16EI}$$

Sehingga conjugate beamnya menjadi:



Berdasarkan tabel 2.1, maka tidak terdapat perubahan jenis tumpuan dari balok sebenarnya dengan conjugate beam, seperti terlihat pada gambar diatas.

Ø Mencari \bullet_A

Untuk mencari \bullet_A sama saja dengan mencari gaya V'_A , sehingga dapat digunakan persamaan keseimbangan momen, $\sum M_B = 0$

Tinjau balok A'B':

Perhatikan:

- Sistem koordinat x_1 , ke kanan dan jarak titik berat beban merata ($q(x_1)$) dihitung dari titik B' ke arah kiri sama dengan $(L-x_1)$. (Karena kita menggunakan titik B sbg acuan perhit momen, $\sum M_B = 0$)
- Sistem koordinat x_2 , ke kiri dan jarak titik berat beban merata ($q(x_2)$) dihitung dari titik B' ke arah kiri sama dengan (x_2)

$$\sum M_{B'} = 0$$

$$-V'_A \cdot L + \int_0^{L/2} q(x_1) \cdot (L-x_1) \cdot dx_1 + \int_0^{L/2} q(x_2) \cdot (x_2) \cdot dx_2 = 0$$

$$V'_A \cdot L = \int_0^{L/2} \left(\frac{3qLx_1}{16EI} - \frac{qx_1^2}{4EI} \right) \cdot (L-x_1) \cdot dx_1 + \int_0^{L/2} \left(\frac{qLx_2}{16EI} \right) \cdot (x_2) \cdot dx_2$$

$$V'_A \cdot L = \int_0^{L/2} \left(\frac{3qL^2x_1}{16EI} - \frac{3qLx_1^2}{16EI} - \frac{qLx_1^2}{4EI} + \frac{qx_1^3}{4EI} \right) dx_1 + \int_0^{L/2} \left(\frac{qLx_2^2}{16EI} \right) dx_2$$

$$V'_A \cdot L = \left. \frac{3qL^2x_1^2}{32EI} - \frac{3qLx_1^3}{48EI} - \frac{qLx_1^3}{12EI} + \frac{qx_1^4}{16EI} \right|_0^{L/2} + \left. \frac{qLx_2^3}{48EI} \right|_0^{L/2}$$

$$V'_A \cdot L = \frac{3qL^4}{128EI} - \frac{qL^4}{128EI} - \frac{qL^4}{96EI} + \frac{qL^4}{256EI} + \frac{qL^4}{384EI}$$

$$V'_A \cdot L = \frac{qL^4}{EI} \left(\frac{18-6-8+3+2}{768} \right)$$

$$V'_A = \frac{9qL^3}{768EI} = \frac{3qL^3}{256EI} = 0.0117 \frac{qL^3}{EI}$$

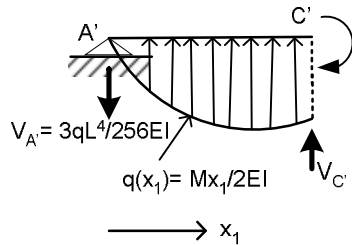
$$V'_A = \dots \rightarrow q_A = \frac{3qL^3}{256EI} = 0.0117 \frac{qL^3}{EI} \text{ (arah putaran sudut searah jarum jam)}$$

Ø **Mencari D_C**

Untuk mencari D_C sama saja dengan mencari momen M'_C .

Tinjau potongan kiri balok A'C' dan gunakan persamaan keseimbangan momen, $\sum M = 0$

Tinjau balok A'C':



Perhatikan :

- sistem koordinat x_1 , ke kiri dan jarak titik berat beban merata ($q(x_1)$) dihitung dari titik C' ke arah kiri, sehingga jarak titik berat ($q(x_1)$) terhadap titik C' adalah : $(L/2 - x_1)$

$$\sum M_{C'} = 0$$

$$-V'_A \cdot \frac{L}{2} + \int_0^{L/2} q(x_1) \cdot \left(\frac{L}{2} - x_1\right) dx_1 + M'_C = 0$$

$$-\frac{3qL^3}{256EI} \cdot \frac{L}{2} + \int_0^{L/2} \left(\frac{3qLx_1}{16EI} - \frac{qx_1^2}{4EI}\right) \cdot \left(\frac{L}{2} - x_1\right) dx_1 + M'_C = 0$$

$$-\frac{3qL^4}{512EI} + \int_0^{L/2} \left(\frac{3qL^2x_1}{32EI} - \frac{3qLx_1^2}{16EI} - \frac{qLx_1^2}{8EI} + \frac{qx_1^3}{4EI}\right) dx_1 + M'_C = 0$$

$$-\frac{3qL^4}{512EI} + \left(\frac{3qL^2x_1^2}{64EI} - \frac{3qLx_1^3}{48EI} - \frac{qLx_1^3}{24EI} + \frac{qx_1^4}{16EI}\right) \Big|_0^{L/2} + M'_C = 0$$

$$-\frac{3qL^4}{512EI} + \left(\frac{3qL^4}{256EI} - \frac{qL^4}{128EI} - \frac{qL^4}{192EI} + \frac{qL^4}{256EI}\right) + M'_C = 0$$

$$\left(\frac{qL^4}{EI}\right) \left(\frac{-9+18-12-8+6}{1536}\right) + M'_C = 0$$

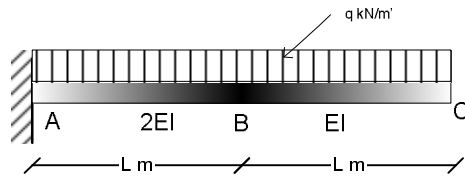
$$\left(-\frac{5qL^4}{1536EI}\right) + M'_C = 0$$

$$M'_C = \frac{5qL^4}{1536EI} \text{ -----} \Rightarrow \Delta_C = \frac{5qL^4}{1536EI} = 0.0033 \frac{qL^4}{EI} \quad (\bullet)$$

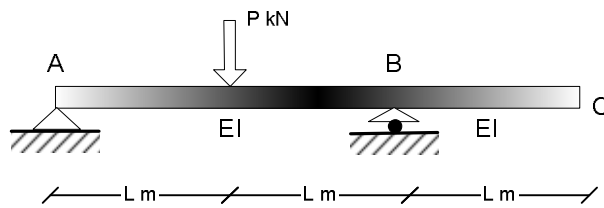
Tanda positif menunjukkan defleksi ke bawah..

Latihan 2.1

1. Hitung besarnya defleksi dan rotasi pada titik B dan C akibat beban merata yang bekerja pada balok berikut!



2. Hitung lendutan pada titik C dan rotasi pada titik B akibat beban yang bekerja pada balok menganjur berikut!



3. Hitung lendutan maksimum akibat beban yang bekerja pada balok sederhana berikut!

