

HƯỚNG DẪN NỘI DUNG BỒI DƯỠNG HỌC SINH THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN QUỐC GIA LỚP 12 THPT

(Kèm theo các Công văn số 11636/THPT ngày 25/12/2000 và 1403/THPT ngày 25/02/2002 của Bộ Giáo dục và Đào tạo)

I. Yêu cầu tối thiểu về kiến thức

Ngoài các kiến thức toán theo Chương trình phổ thông (từ lớp 1 đến lớp 12) hiện hành, các học sinh dự thi cần được trang bị thêm tối thiểu một số kiến thức sau:

1. Phần Số học:

- Các khái niệm và kết quả lý thuyết được trình bày trong Chương I; §1, §2, §4 Chương II; §1, §2, §3 Chương III; Chương IV và Chương V cuốn "Bài giảng số học" của nhóm Tác giả: Đặng Hùng Thắng (Chủ biên), Nguyễn Văn Ngọc, Vũ Kim Thủy (NXB Giáo dục, 1994).

- Định lý nhỏ Phécma, Định lý Uynson.

- Định lý Ôle và định lý Trung Quốc về các số dư.

2. Phần Đại số - Giải tích:

a. Bất đẳng thức (Bđt):

- Các bất đẳng thức đại số: Bđt Côsi cho n ($n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$) số thực không âm; Bđt Bunhiacôpxki cho hai bộ n số thực ($n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$); Bđt Trêbusep cho hai dãy n số thực ($n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$); Bđt Nesbit cho ba số thực dương; Bđt Becnuli mở rộng.

- Bất đẳng thức hàm lồi (Bất đẳng thức Jensen).

- Các bất đẳng thức tích phân được trình bày trong mục 3 của §2 Chương III SGK Giải tích 12 (Sách chỉnh lý hợp nhất năm 2000, NXB Giáo dục).

- Kết quả của Ví dụ 1.4 trong §1 Chương V cuốn "Bất đẳng thức" của Tác giả Phan Đức Chính (NXB Giáo dục, 1993).

b. Đa thức:

- Khái niệm nghiệm bội của đa thức và một số kết quả đơn giản liên quan đến nghiệm của một đa thức:

Định lý 1. Đa thức bậc n ($n \in \mathbb{N}^*$) có tối đa n nghiệm thực, mỗi nghiệm được kể số lần bằng số bội của nó.

Định lý 2. Nếu x_0 là nghiệm của đa thức $P(x)$ thì $x_0 + a$ là nghiệm của đa thức $P(x - a)$, với $a \in \mathbb{R}$ cho trước.

Định lý 3. Nếu $x_0 \neq 0$ là nghiệm của đa thức:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \quad a_0 \neq 0 \text{ và } n \in \mathbb{N}^*,$$
 thì $1/x_0$ là nghiệm của đa thức:

$$Q(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0.$$

Định lý 4. Nếu x_0 là nghiệm bội k ($k \in \mathbb{Z}, k \geq 2$) của đa thức $P(x)$ thì x_0 là nghiệm bội $k - 1$ của đa thức đạo hàm $P'(x)$.

Định lý 5. Nếu x_0 là nghiệm hữu tỉ của đa thức với hệ số nguyên:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \quad a_0 \neq 0 \text{ và } n \in \mathbb{N}^*,$$

thì x_0 phải có dạng p/q ; trong đó p, q tương ứng là ước của a_n, a_0 .

Định lí Viet thuận và đảo cho đa thức bậc n ($n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$).

- Công thức nội suy Lagrange.
- Khái niệm đa thức khả quy, bất khả quy.
- Định lí Bôdu về số dư trong phép chia một đa thức cho nhị thức bậc nhất $x - a$.
- Đa thức Trêbursep và các tính chất được trình bày trong phần 1 Phụ lục 3 cuốn "Bất đẳng thức" của Tác giả Phan Đức Chính (NXB Giáo dục, 1993).

c. Dãy số - Hàm số:

- Phương trình đặc trưng và công thức tính số hạng tổng quát của dãy số được cho bởi hệ thức truy hồi tuyến tính.

- Các khái niệm: dãy con, dãy số tuần hoàn và chu kỳ của dãy số tuần hoàn.

- Mỗi liên hệ giữa tính hội tụ của một dãy số và tính hội tụ của các dãy con của dãy số đó.

- Một số kết quả đơn giản về tính đơn điệu của hàm số:

Kết quả 1: Nếu f và g là các hàm số đồng biến (nghịch biến) trên tập X thì $f+g$ cũng là hàm số đồng biến (nghịch biến) trên tập X .

Kết quả 2: Giả sử f và g là các hàm số đồng biến (nghịch biến) trên tập X . Khi đó:

i) Nếu f và g chỉ nhận giá trị không âm (không dương) trên X thì $f.g$ sẽ là hàm số đồng biến trên tập X .

ii) Nếu f và g chỉ nhận giá trị không dương (không âm) trên X thì $f.g$ sẽ là hàm số nghịch biến trên tập X .

Kết quả 3: Giả sử f là hàm số đồng biến và g là hàm số nghịch biến trên tập X . Khi đó, nếu f chỉ nhận giá trị không âm (không dương) trên X và đồng thời g chỉ nhận giá trị không dương (không âm) trên tập đó thì $f.g$ sẽ là hàm số nghịch biến (đồng biến) trên X .

Kết quả 4: Giả sử g là hàm số đồng biến (nghịch biến) trên tập X . Kí hiệu $g(X)$ là tập giá trị của hàm g với tập xác định X . Khi đó:

i) Nếu f là hàm số đồng biến trên $g(X)$ thì $f(g(x))$ sẽ là hàm số đồng biến (nghịch biến) trên X .

ii) Nếu f là hàm số nghịch biến trên $g(X)$ thì $f(g(x))$ sẽ là hàm số nghịch biến (đồng biến) trên X .

Kết quả 5: Nếu f là hàm số đồng biến trên \mathbf{R} thì hai phương trình sau sẽ tương đương với nhau:

$$f(f(\dots (f(x))\dots)) = x \quad \text{và} \quad f(x) = x.$$

- Khái niệm chu kỳ cơ sở của hàm số tuần hoàn và một số kết quả liên quan đến hàm tuần hoàn:

Định lí 6. Nếu hàm số $f(x)$ tuần hoàn trên tập X với chu kỳ cơ sở T và nếu:

$$f(x) = f(x + A) \quad \forall x \in X$$

thì phải có $A = kT$, với $k \in \mathbb{Z}$.

Định lí 7. Nếu hàm số tuần hoàn $f(x)$ có chu kỳ cơ sở T thì hàm số $f(ax)$ ($a \neq 0$) là hàm số tuần hoàn và có chu kỳ cơ sở T/a .

Định lí 8. Nếu các hàm số $f_1(x)$, $f_2(x)$ tuần hoàn trên X và tương ứng có các chu kỳ T_1 , T_2 thông ước với nhau thì các hàm số $f_1(x) + f_2(x)$, $f_1(x) - f_2(x)$, $f_1(x)f_2(x)$ cũng tuần hoàn trên X .

- Định nghĩa hàm số ngược.
- Định lý về giá trị trung gian của hàm số liên tục trên một đoạn.
- Kết quả các Bài toán 1-7 trong §1 Chương II cuốn "Phương trình hàm" của Tác giả Nguyễn Văn Mậu (NXB Giáo dục, 1997).

3. Phần Lượng giác:

- Hệ thức Salơ cho các cung lượng giác.
- Bất phương trình lượng giác và tập nghiệm của các bất phương trình lượng giác cơ bản.
- Các công thức đơn giản tính độ dài đường phân giác, bán kính đường tròn nội tiếp, bán kính đường tròn bàng tiếp của một tam giác theo độ dài các cạnh và giá trị lượng giác của các góc của tam giác ấy.
- Một số bất đẳng thức thông dụng trong tam giác:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \sin A + \sin B + \sin C &\leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \forall \Delta ABC. \\ \bullet \quad \cos A + \cos B + \cos C &\leq \frac{3}{2} \quad \forall \Delta ABC. \\ \bullet \quad \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C &\geq 3\sqrt{3} \quad \forall \Delta \text{ nhọn } ABC. \end{aligned}$$

Dấu "=" trong các bất đẳng thức trên xảy ra khi và chỉ khi ΔABC là tam giác đều.

4. Phần Hình học:

a. Hình học phẳng:

- Khái niệm trọng tâm, tâm tỉ cự của một hệ điểm và tọa độ của chúng xét trong hệ tọa độ Đêcac.
- Tâm đẳng phương của ba đường tròn.
- Hàng điểm điều hoà và Chùm điều hoà: Định nghĩa và một số tính chất đơn giản:

Hệ thức Niuton, Hệ thức Đêcac.

Định lí 9. Hai cạnh của một tam giác cùng các đường phân giác trong, ngoài xuất phát từ đỉnh chung của hai cạnh ấy lập thành một chùm điều hoà.

- Định lí Ptôlômê, Định lí Xêva, Định lí Mê-nê-lôt, Định lí Thales thuận và đảo.
- Định nghĩa đường tròn Apoloniut, đường tròn Ôle (đường tròn 9 điểm).
- Kết quả của các Ví dụ 1,2 trong phần 4 §4 Chương II SGK Hình học 10 (Sách chỉnh lí hợp nhất năm 2000, NXB Giáo dục).
- Hệ thức Ôle trong tam giác:

$$d^2 = R^2 - 2Rr$$

trong đó: d , R , r tương ứng là khoảng cách giữa tâm đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn nội tiếp, bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp của một tam giác.

- Định nghĩa tích các phép biến hình và một số kết quả liên quan, định nghĩa và các tính chất của phép đồng dạng: như đã được trình bày trong TLGKTĐ Hình học lớp 11 Ban KHTN-THCB (NXB Giáo dục, 1997).

- Các kết quả lý thuyết liên quan tới các phép biến hình trong mặt phẳng được trình bày trong cuốn "Các bài toán về hình học phẳng" (T.1 và T.2) của Tác giả Praxolov V.V. (NXB Hải Phòng, 1994).

- Định nghĩa và các tính chất của phép nghịch đảo được trình bày trong phần "Các kiến thức cơ bản" Chương 28 cuốn "Các bài toán về hình học phẳng. T.2" của Tác giả V.V. Praxolov (NXB Hải Phòng, 1994).

b. Hình học không gian:

- Định lý Thales thuận và đảo.

- Định nghĩa khối đa diện đều, khối tứ diện đều, khối tứ diện trục tâm và một số kết quả liên quan:

Định lý 10. Tứ diện $ABCD$ là tứ diện đều khi và chỉ khi xảy ra ít nhất một trong các điều sau:

i) Các mặt của tứ diện có diện tích bằng nhau.

ii) Bốn đường cao của tứ diện có độ dài bằng nhau.

iii) Có ít nhất hai trong ba điểm sau trùng nhau: tâm mặt cầu nội tiếp, tâm mặt cầu ngoại tiếp và trọng tâm của tứ diện.

Định lý 11. Tứ diện $ABCD$ là tứ diện trục tâm khi và chỉ khi xảy ra ít nhất một trong các điều sau:

i) Các cặp cạnh đối của tứ diện vuông góc với nhau.

ii) Chân đường vuông góc hạ từ một đỉnh xuống mặt đối diện là trục tâm của mặt ấy.

iii) Tổng bình phương độ dài của các cặp cạnh đối bằng nhau.

- Định lý về sự tồn tại của mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện.

- Kết quả của Ví dụ 1 trong §1 Chương II SGK Hình học 12 (Sách chỉnh lý hợp nhất năm 2000, NXB Giáo dục).

- Khái niệm trọng tâm, tâm tỉ cự của một hệ điểm và tọa độ của chúng xét trong hệ tọa độ Đêcac.

- Định nghĩa và tính chất của tích có hướng của hai vectơ, tích hỗn tạp của ba vectơ cùng một số kết quả liên quan: như đã được trình bày trong §3 và §8 Chương II SGK Hình học 12 (Sách chỉnh lý hợp nhất năm 2000, NXB Giáo dục).

5. Phần Tổ hợp:

- Nguyên lý Dirichlet, Nguyên lý cực hạn (hay Nguyên lý khởi đầu cực trị).

- Định nghĩa ánh xạ, đơn ánh, toàn ánh, song ánh, ánh xạ tích.

- Các khái niệm và kết quả được trình bày trong §1, §2 và §3 của tài liệu "Về một số vấn đề của giải tích tổ hợp trong chương trình THPT" (Biên soạn: Nguyễn Khắc Minh. Tài liệu báo cáo tại Hội nghị tập huấn giáo viên giảng dạy chuyên toán toàn quốc, Hà Nội-1997).

- Kết quả của các Bài toán 1, 4, 5 trong §4 của bài viết nói trên.

- Các khái niệm cơ bản của Lý thuyết Graf: Graf; Đỉnh, đỉnh cô lập, cạnh vô hướng, cạnh có hướng của graf; Graf có hướng; Graf đơn vô hướng hữu hạn; Graf đầy

đủ; Graf bù; Graf con; Bậc của đỉnh trong graf đơn vô hướng hữu hạn; Graf thuần nhất; Đường đi, độ dài đường đi, đường đi khép kín, xích (có tài liệu gọi là đường đi đơn giản), xích đơn, chu trình (có tài liệu gọi là chu trình đơn giản), chu trình đơn, đường đi Ôle, đường đi Haminton, chu trình Ôle, chu trình Haminton trong graf đơn vô hướng hữu hạn; Graf liên thông, cây, graf Ôle, graf Haminton; Thành phần liên thông của graf đơn vô hướng hữu hạn.

- Một số kết quả đơn giản của Lí thuyết Graf:

Định lí 12. Số đỉnh bậc lẻ trong một graf đơn vô hướng hữu hạn là một số chẵn.

Định lí 13. Trong graf đơn vô hướng n đỉnh ($n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$) tồn tại ít nhất hai đỉnh có cùng bậc.

Định lí 14. Nếu graf G đơn vô hướng n đỉnh ($n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$) có đúng hai đỉnh cùng bậc thì G phải có đúng một đỉnh bậc 0 hoặc đúng một đỉnh bậc $n - 1$.

Định lí 15. Mỗi graf đơn vô hướng hữu hạn không liên thông đều bị phân chia một cách duy nhất thành các thành phần liên thông.

Định lí 16. Nếu mỗi đỉnh của graf G đơn vô hướng n đỉnh ($n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$) đều có bậc không nhỏ hơn $n/2$ thì G là graf liên thông.

Định lí 17. Graf G đơn vô hướng hữu hạn là graf Ôle khi và chỉ khi hai điều kiện sau được đồng thời thoả mãn:

i) G là graf liên thông.

ii) Mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn.

Định lí 18. Nếu tất cả các cạnh của một graf đơn vô hướng đầy đủ 6 đỉnh được tô bởi hai màu thì phải tồn tại ít nhất một chu trình đơn độ dài 3 có tất cả các cạnh cùng màu.

- Khái niệm "chiến lược thắng cuộc" trong các bài toán trò chơi.

II. Yêu cầu tối thiểu về kỹ năng

1. Biết vận dụng linh hoạt các kiến thức lí thuyết vào việc giải quyết các bài toán cụ thể.

2. Biết phân tích một cách hợp lí các giả thiết để từ đó tìm ra hướng giải quyết bài toán.

3. Đặc biệt, đối với các bài toán có thể giải được nhờ mô hình graf, cần:

- Biết cách chuyển bài toán ban đầu (hoặc một phần của bài toán ban đầu) về bài toán tương đương trên mô hình graf;

- Biết cách sử dụng biểu diễn hình học của graf như một công cụ tạo ra các gợi ý trực giác trong quá trình suy luận, tìm tòi lời giải cho bài toán;

- Biết sử dụng các khái niệm, thuật ngữ của lí thuyết graf để trình bày lời giải một cách ngắn gọn, sáng sủa, chặt chẽ và chính xác.

III. Một số điểm lưu ý

1. Công thức nội suy Lagrange, Định lí Ôle và định lí Trung Quốc về các số dư, phép biến hình nghịch đảo trong mặt phẳng, các khái niệm, kết quả của lí thuyết graf và các bài toán trò chơi là *nội dung kiến thức không bắt buộc đối với các học sinh dự thi ở Bảng B*.

2. Về định lí Ôle và định lí Trung Quốc: Chỉ yêu cầu học sinh hiểu đúng các định lí này và biết vận dụng chúng trong các tình huống không phức tạp.

3. Học sinh dự thi (ở cả hai bảng A và B) được phép sử dụng các khái niệm, kết quả đã nêu trong mục I như khái niệm, kết quả SGK.

4. Trong kì thi chọn học sinh giỏi quốc gia môn toán lớp 12 THPT các thí sinh được phép sử dụng các kiến thức về số phức trong phạm vi chương trình môn toán Ban KHTN-THCB (cũ).

5. Để học sinh đạt được các yêu cầu về kỹ năng, như đã nêu ở mục II, các giáo viên bồi dưỡng cần chú ý:

- Giúp học sinh hiểu rõ bản chất toán học của các khái niệm, các kết quả.
- Giúp học sinh nắm được các ý tưởng toán học ẩn chứa trong lời giải của các bài toán cụ thể.
- Luyện tập cho học sinh các bài toán mà lời giải của chúng thể hiện mối liên quan giữa các phần kiến thức.
- Phân tích cho học sinh thấy con đường đi đến lời giải của các bài toán. Điều này đặc biệt quan trọng trong việc luyện tập các bài toán tổ hợp.

5. Để nâng cao hiệu quả của việc bồi dưỡng, ngoài các tài liệu đã dẫn ở mục I, các giáo viên bồi dưỡng có thể tham khảo các tài liệu sau:

- [1]. Đề thi vô địch các nước (19 nước) T.1, T.2, T.3, NXB Hải Phòng.
- [2]. H.Chúng, Graf và giải toán phổ thông, NXB Giáo dục, 1992.
- [3]. N.V.Mậu, Phương pháp giải phương trình và bất phương trình, NXB Giáo dục.
- [4]. Tài liệu bồi dưỡng học sinh giỏi bậc THPT môn toán, Vụ THPT ấn hành, 1997.
- [5]. Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.